Simulación y control de la posición de un servomecanismo de corriente directa por asignación de polos

Simulation and control of the position of a direct current servomechanism by pole assignment

HERNÁNDEZ-BORJA, Carlos*†, PEREZ-GALINDO, Liliana Eloisa y HERNÁNDEZ-RAMÍREZ, Leticia

Universidad Tecnológica Fidel Velázquez, Av. Emiliano Zapata S/N, El Tráfico, C.P. 54400, Villa Nicolás Romero, México

ID 1[er] Autor: *Carlos, Hernández-Borja* / **ORC ID:** 0000-0002-8138-9016, **Researcher ID Thomson:** S-4792-2018

ID 2[do] Coautor: *Liliana Eloisa, Perez-Galindo* / **ORC ID:** 0000-0001-6016-2595

ID 3[er] Coautor: *Leticia, Hernández-Ramírez* / **ORC ID:** 0000-0002-0150-3457

Recibido: 01 de Abril, 2018; Aceptado 02 de Junio, 2018

Resumen

La asignación de polos para el control de posición de un servomecanismo, utilizando la fórmula de Akcermann, es un método que se utiliza para encontrar las ganancias de realimentación de estado K. En este trabajo se presenta un procedimiento sencillo para el diseño de control de sistemas de 2º orden y su simulación. Si este método se aplicara de forma manual, el procedimiento de obtención de las ganancias resultaría tedioso. Para facilitar esta operación, se utilizaron una serie de comandos de Matlab (entre ellos acker) que nos sirvieron para calcular la matriz de ganancia K, para un sistema de una entrada y con una señal de control por realimentación. Posteriormente, con los valores obtenidos de K, se llevaron a cabo una serie de simulaciones numéricas ejecutadas en el Control & Simulation Loop de LabVIEW que permitió verificar el control de la posición del sistema y así como observar los diferentes tipos de respuesta; amortiguada, sobreamortiguada y subamortiguada.

Fórmula de Ackermann, Asignación de polos y Control en lazo de Realimentación de Estado

Abstract

The assignment of Poles for the position control of a servo using the Akcermann's formula, is a method used to find the K state feedback gains. This paper presents a simple procedure for the design of control systems of 2nd order and its simulation. If we apply this method manually the profit-getting procedure would be tedious. To make this operation easier, were used series of Matlab commands (including acker) to calculate the K gain matrix, for a system of one input and with a feedback control signal. Subsequently, with the values obtained from K, a series of numerical simulations were carried out in the LabVIEW Control & Simulation Loop, which allowed to verify the control of the system position and the different types of response; Cushioned, overdamped and subdamped.

Ackermann's Formula, Assignment of poles and State-Feedback Controller

Citación: HERNÁNDEZ-BORJA, Carlos, PEREZ-GALINDO, Liliana Eloisa y HERNÁNDEZ-RAMÍREZ, Leticia. Simulación y control de la posición de un servomecanismo de corriente directa por asignación de polos. Revista de Simulación Computacional. 2018. 2-4: 27-35

* Correspondencia al autor (Correo Electrónico: carlos.hernandez@utfv.edu.mx)
† Investigador contribuyendo como primer autor.

Introducción

Se muestra la simulación de un servomecanismo de corriente directa, controlado en posición, utilizando una técnica de diseño llamada asignación de polos. La técnica consiste en la localización de los polos de un sistema controlable, aplicando una realimentación de estado, a partir de la frecuencia natural no amortiguada y el factor de amortiguamiento.

La solución de la técnica se realiza de forma sencilla con MATLAB, mediante el comando *acker,* que facilita el cálculo de las ganancias de la matriz de realimentación *K*. El comando *acker* está basado en la fórmula de Ackermann aplicado a sistemas de una sola entrada.

Las ganancias obtenidas son utilizadas para realizar la simulación de control en posición de un servomecanismo de corriente directa. La simulación en LabVIEW se ejecuta en un Sistema Control Proporcional Derivativo (PD), durante varias ocasiones, para diferentes valores de la frecuencia natural y factor de amortiguamiento.

Objetivos

Objetivo General

Simular el control de un servomecanismo de corriente directa empleando el método de la fórmula de Ackermann.

Objetivos Específicos

- Utilizar Matlab para calcular las ganancias de realimentación de estado.
- Ejecutar la simulación en LabVIEW para el control de la posición de un servomecanismo.

Descripción del Método

Sistemas de Control en Espacio de Estado

Para nuestro estudio se supondrá un modelo correspondiente a un sistema de lazo abierto.

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{B}U$$
$$Y = \boldsymbol{CX} + DU \qquad (1)$$

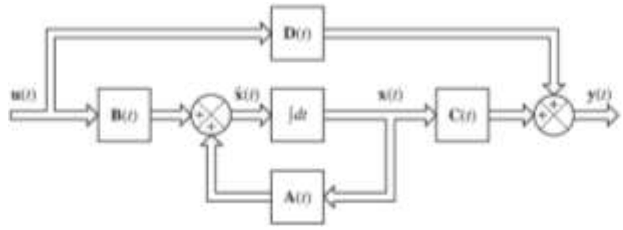

Figura 1 Sistema de Control Lineal en Tiempo Representado en el Espacio de Estados
Fuente: Ogata, K. (2010). Ingeniería de control moderna. Pearson Educación

La función de transferencia queda expresada en términos de $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ *y D.*

$$G(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - A)^{-1}\boldsymbol{B} + D \qquad (2)$$

Y se escribe como

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}, \quad \boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{nxn} \qquad (3)$$

Modelo de un Servomecanismo de Corriente Directa en Forma de Estado

El modelo de un servomecanismo definido por los parámetros a y b

$$G(s) = \frac{b}{s(s+a)} \qquad (4)$$

Está dado por la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + a\dot{y} = bu \qquad (5)$$

Por ser una ecuación diferencial de segundo orden se definen 2 variables de estado

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \dot{y} \qquad (6)$$

Entonces

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -a\dot{y} + bu = -ax_2 + bu \qquad (7)$$

O bien

$$\dot{X} = AX + BU$$
$$Y = CX \qquad (8)$$

Donde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0], \quad D = 0 \qquad (9)$$

Los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son los polos del polinomio de *G(s)*.

$$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & s+a \end{vmatrix} = s(s+a) \qquad (10)$$

Por lo que el sistema es marginalmente estable

$$\begin{aligned} s &= 0 \\ s &= -a \end{aligned} \qquad (11)$$

La Técnica de Diseño Para la Asignación de Polos

La técnica consiste en el diseño de un sistema de control, tal que se determinen los polos dominantes del sistema en lazo cerrado, como son el factor de amortiguamiento (ζ) y la frecuencia natural no amortiguada (ω_n). Los polos se eligen de forma arbitraria por lo que se requiere que el sistema de estado sea completamente controlable.

Para el sistema de control (1), donde

$X \epsilon \mathbb{R}^n, vector\ de\ estado$
$Y \epsilon \mathbb{R}, señal\ de\ salida$
$U \epsilon \mathbb{R}, señal\ de\ control$
$A \epsilon \mathbb{R}^{nxn}, matriz\ de\ coeficientes\ constantes$
$B \epsilon \mathbb{R}^{nx1}, matriz\ de\ coeficientes\ constantes$
$C \epsilon \mathbb{R}^{1xn}, matriz\ de\ coeficientes\ constantes$
$D \epsilon \mathbb{R}, constante$

Se elige la señal de control por realimentación de estado

$$U = -\boldsymbol{KX} \qquad (12)$$

Donde

$K \epsilon \mathbb{R}^{1xn}, matriz\ de\ ganancia\ de\ realimentación\ de\ estado$

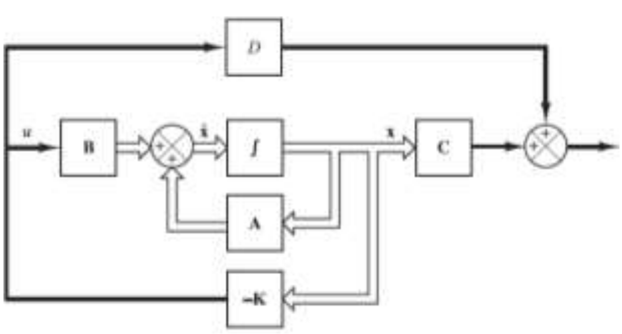

Figura 2 Sistema de control con lazo de realimentación
Fuente: Ogata, K. (2010). Ingeniería de control moderna Pearson Educación

Al sustituir la ecuación (12) en (1) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{X}} &= (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\boldsymbol{X} \\ Y &= (\boldsymbol{C}-DK)\boldsymbol{X} \end{aligned} \qquad (13)$$

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es

$$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}| = 0 \qquad (14)$$

Control de un Servomecanismo de Corriente Directa en Lazo de Realimentación de Estado

Con la ley de control

$$U = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{b}(-k_1x_1 - k_2x_2) \qquad (15)$$

Y en sus variables originales

$$U = \frac{1}{b}(-k_1y - k_2\dot{y}) \qquad (16)$$

Se determinan los polos del sistema en lazo cerrado, como

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ bk_1 & -a+bk_2 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Entonces

$$\begin{aligned} |s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}| &= \left|\begin{bmatrix} s & -1 \\ -bk_1 & s+a-bk_2 \end{bmatrix}\right| = \\ &= s^2 + (a-bk_2)s - bk_1 = \\ &= s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2 \end{aligned} \qquad (18)$$

Al sistema se le puede aplicar una realimentación de estado, para cambiar la posición de sus polos, siempre y cuando el sistema sea plenamente controlable

El cálculo de la matriz de realimentación se obtiene empleando la fórmula de Ackermann.

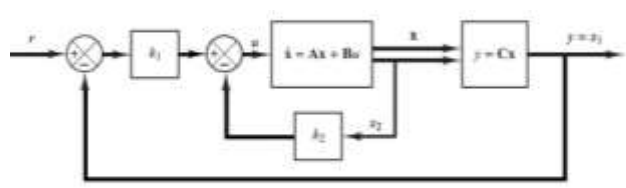

Figura 3 Servomecanismo de corriente directa en lazo de realimentación de estado
Fuente: Ogata, K. (2010). Ingeniería de control moderna. Pearson Educación

Primero se calcula la matriz de controlabilidad

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB}\,] \tag{20}$$

Si el sistema es controlable, se determinan los valores de los polos deseados en lazo cerrado $s = -\mu_1$ & $s = -\mu_2$

$$P(s) = (s + \mu_1)(s + \mu_2) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2 \tag{21}$$

Después se calcula

$$\phi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^2 + \alpha_1 \boldsymbol{A} + \alpha_2 \boldsymbol{I} \tag{22}$$

Para encontrar el valor de las ganancias de realimentación del estado K

$$\boldsymbol{K} = [\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{1}][\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB}\,]^{-\boldsymbol{1}}\, \phi(\boldsymbol{A}) =$$

$$[0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & -b \\ -b & ab \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \alpha_2 & -a + \alpha_1 \\ 0 & a^2 - \alpha_1 a + \alpha_2 \end{bmatrix} =$$

$$[0 \quad 1]\begin{bmatrix} -\dfrac{a}{b} & -\dfrac{1}{b} \\ -\dfrac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_2 & -a + \alpha_1 \\ 0 & a^2 - \alpha_1 a + \alpha_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha_2}{-b} & \frac{-a+\alpha_1}{-b} \end{bmatrix} = [-k_1 \quad -k_2] \tag{23}$$

Simulación y Control de un Servomecanismo de Corriente Directa Mediante la Asignación de Polos.

Para las simulaciones numéricas se toman los parámetros en variables de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.47 \end{bmatrix} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -50.97 \end{bmatrix}$$

Para ejecutar la simulación, los cálculos se realizan previamente con el apoyo de Matlab, y para ello se utiliza el siguiente procedimiento:

- Se asignan los valores para el factor de amortiguamiento (ζ) y la frecuencia natural no amortiguada (ω_n).

- Se encuentra el polinomio característico

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

- Se genera el vector con los coeficientes del polinomio
- $P = [1 \quad 2\zeta\omega_n \quad \omega_n^2]$

- Se obtienen las raíces (polos del sistema) del polinomio *P*, utilizando el comando $roots$
- $J = roots(P)$

- Se obtienen las ganancias de realimentación de estado k_1 y k_2 utilizando el comando $acker$
- $K = acker\ (A, B, J)$

- Y aplicamos las ganancias para después ejecutar la simulación en la plataforma de LabVIEW.

El resultado de la ejecución del ejercicio en la ventana de comandos de Matlab es la siguiente:

```
A = [0  1;  0  -0.47];
B = [0; -50.97];
lapsi = 1;
wn = 10;
P = [1   2*lapsi*wn   wn^2];
J = roots(P);
K = acker(A, B, J)

K =    -1.9619   -0.3832
```

El código anterior se ejecutó nueve veces para obtener los valores de *K*, para los diferentes valores dados de ζ y ω_n, como se muestran en la tabla 1.

Las simulaciones se realizan en la plataforma de LabVIEW utilizando la herramienta *Control Design & Simulation*.

El diagrama de bloques y el panel frontal a utilizar se muestran en las figuras 4 y 5.

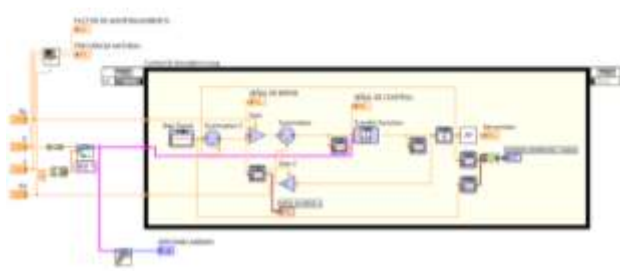

Figura 4 Diagrama de Bloques de un Controlador Proporcional Derivativo en LabVIEW

En el diagrama de bloques se construye un Sistema de Control PD.

Y en el panel frontal se establecen los valores de las ganancias proporcional (*Kp*) y Derivativa (*Kd*) obtenidas para la simulación.

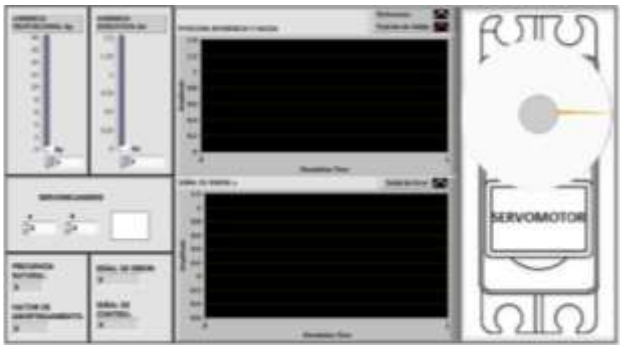

Figura 5 Panel Frontal del Instrumento Virtual del Controlador Proporcional Derivativo en LabVIEW.

Las condiciones para ejecutar la simulación se configuran en el Control & Simulation Loop como se muestra en la figura 6.

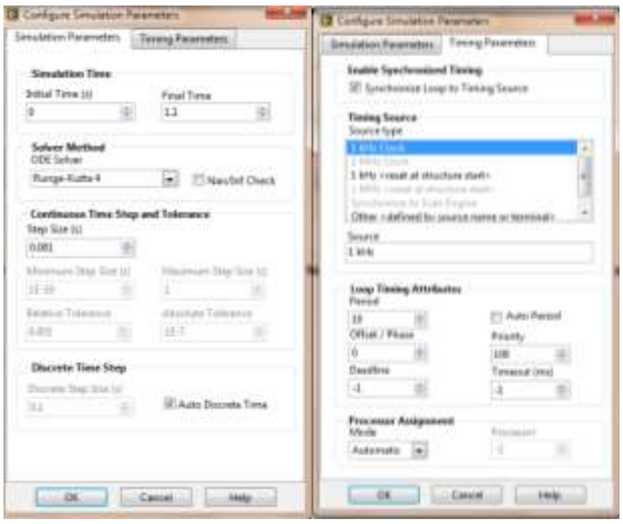

Figura 6 Condiciones de Simulación.

Resultados

Se realizaron nueve simulaciones numéricas para diferentes valores de ζ y ω_n. En la tabla 1 se muestran las ganancias obtenidas *Kp* = *-k1* y *Kd* = *-k2* utilizando la fórmula de Ackermann.

	ω_n	S_1	S_2	$-k_1$	$-k_2$
1	10	-10	-10	1.9619	0.3832
1	20	-20	-20	7.8478	0.7756
1	30	-30	-30	17.6574	1.1679
1.8	10	-32.9666	-3.0334	1.9619	0.6971
1.5	20	-52.3607	-7.6396	7.8478	1.1679
1.2	30	-55.8997	-16.1003	17.6574	1.4034
0.8	10	-8+6j	-8-6j	1.9619	0.3047
0.5	20	-10+17.3j	-10-17.3j	7.8478	0.3832
0.3	30	-9+28.61j	-9-28.61j	17.6574	0.3439

Tabla 1 Tabla de resultados usando Matlab

Para los valores de $\zeta=1$ y $\omega_n=10$, se ejecuta la simulación con los valor de *Kp = -k1=1.9619* y *Kd = -k2 = 0.3832* obtenidos. Ver figura 7.

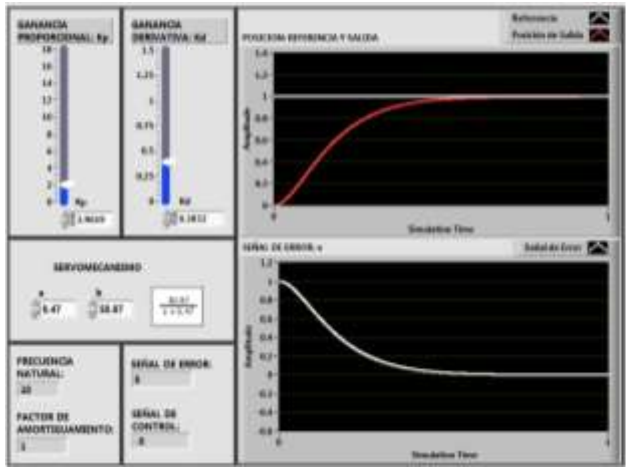

Figura 7 Respuesta amortiguada del sistema para los valores de K ingresados.

Con los valores de $\zeta=1.5$ y $\omega_n=20$, se ejecuta la simulación con los valor de *Kp = -k1=7.8478* y *Kd = -k2 = 1.1679* obtenidos. Ver figura 8.

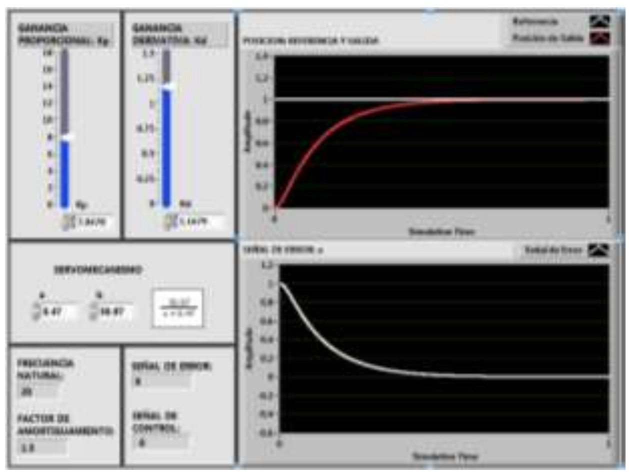

Figura 8 Respuesta sobreamortiguada del sistema para los valores de K ingresados.

Y para valores de $\zeta=0.3$ y $\omega_n=30$, se ejecuta la simulación con los valor de *Kp = -k1=17.6574* y *Kd = -k2 = 0.3439* obtenidos. Ver figura 9.

ISSN 2523-6865

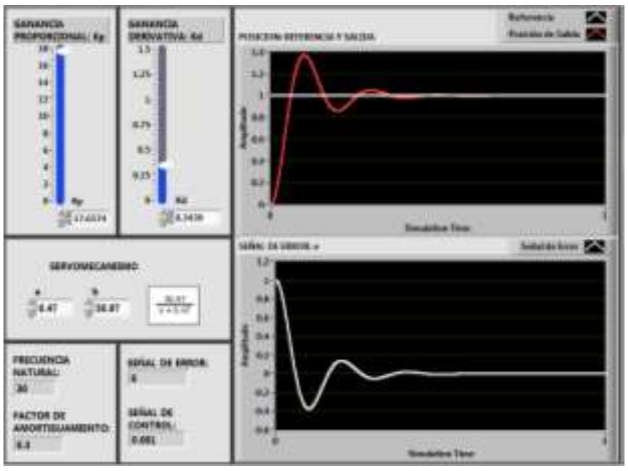

Figura 9 Respuesta subamortiguada del sistema para los valores de K ingresados.

Agradecimientos

A la División Académica de Mantenimiento Industrial y Mecatrónica de la Universidad Tecnológica Fidel Velázquez por el apoyo brindado para el desarrollo de este trabajo de investigación.

Conclusiones

Con el método mostrado en este trabajo, Matlab permite obtener de forma sencilla y práctica los valores de las ganancias de realimentación de estado *K* (*Kp=-k1 & Kd=-k2)*. Por los datos obtenidos en la tabla 1 de la sección de resultados, se tiene que si se incrementa el valor de la ω_n el valor de *Kp* aumenta y si se incrementa el valor del ζ el valor de *Kd* aumenta.

Las simulaciones numéricas mostradas en las figuras 7, 8 y 9 de este trabajo se ejecutan en LabVIEW ingresando en el panel frontal los valores de las ganancias *K*, obtenidas con Matlab, y dejando fijos los valores a y b que son los parámetros del servomecanismo. Se observa que para valores de $0<\zeta<1$ se obtiene una respuesta subamortiguada por lo que el sistema oscila y existe la presencia de sobreenlongación.

Referencias

Ogata, K. (2003). Ingeniería de control moderna. Pearson Educación.

Dorf, Richard C., Bishop, Robert H. (2005). *Sistemas de control moderno*. Pearson Educación.

Reyes Cortés, F. (2012). *MATLAB APLICADO A ROBÓTICA Y MECATRÓNICA* (No. 681.51 670.4272).

Reyes Cortés, F., & Cid Monjaraz, J. (2013). *Mecatrónica: control y automatización* (No. 621 R49 2013.).

Hans-Petter Halvorsen. (2016). Tutorial: *Control and Simulation in LabVIEW*. Recuperado de http://home.hit.no/~hansha/documents/labview/training/Control%20and%20Simulation%20in%20LabVIEW/Control%20and%20Simulation%20in%20LabVIEW.pdf. University College of Southeast Norway

Ronald W. Larsen. (2011). *LabVIEW for Engineers*. Pearson.