

Control par calculado para seguimiento de trayectoria aplicado a la dinámica de un robot de 3gdl con propósitos didácticos

Torque control calculated for trajectory tracking applied to the dynamics of a 3gdl robot for educational purposes

HERNÁNDEZ-DURÓN, Juan Carlos†*, ORTIZ-SIMÓN, José Luis, AGUILERA-HERNÁNDEZ, Martha and OLIVARES-CABALLERO, Daniel

Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo

ID 1^{er} Autor: *Juan Carlos, Hernández-Durón* / ORC ID: 0000-0002-6707-574X

ID 1^{er} Coautor: *José Luis, Ortiz-Simón* / ORC ID: 0000-0001-6548-3849, CVU CONACYT ID: 209883

ID 2^{do} Coautor: *Martha, Aguilera-Hernandez* / ORC ID: 0000-0001-8127-190X, CVU CONACYT ID: 19115

ID 3^{er} Coautor: *Daniel, Olivares-Caballero*

DOI: 10.35429/JTO.2020.13.4.1.8

Recibido 10 de Marzo, 2020, Aceptado, 30 de Junio, 2020

Resumen

El artículo muestra el procedimiento necesario para obtener el modelo dinámico de un robot, con el propósito de poder seguir una trayectoria deseada implementando una ley de control por par calculado. El robot fue diseñado de manera sencilla por motivos didácticos. Este posee tres grados de libertad, cuatro eslabones y tres articulaciones para desplazarse en su espacio de trabajo, dos de estas articulaciones son de revolución mientras que la tercera es una articulación prismática. El modelo dinámico del robot es obtenido utilizando los jacobianos y símbolos de Christoffel del centro de masa de cada eslabón. Además de incluir el vector de fuerzas gravitatorias y las fricciones de las articulaciones. El objetivo del modelo dinámico es poder simular el robot en "Simulink" y probar distintas trayectorias utilizando la ley de control de par calculado en las que las ganancias del control serán manipuladas hasta encontrar un valor que satisfaga la trayectoria deseada.

Control par calculado, Modelo dinámico de un robot, Seguimiento de trayectorias

Abstract

The article shows the needed procedure to obtain the dynamic model of a robot, with the purpose of being able to follow a planned path using the control law "CTC" Computed Torque Control. The robot was designed in a simple way for didactic reasons, this robot has three degrees of freedom, four links and three joints to move around in the work place. Two out of these joints are rotatory joints meanwhile the third one is a prismatic joint. The dynamic model of the robot is obtained using the Jacobians and Christoffel symbols of the center of mass of each link. Also including the Gravitational vector and the frictions of each joint. The objective of the dynamic model is to be able to simulate the robot in "Simulink" and test different paths using the computed torque control in which the gains of the control will be manipulated until a value that satisfies the desired path is found

Computed torque control, Dynamic model of a robot, Path and trajectory planning

Citación: HERNÁNDEZ-DURÓN, Juan Carlos, ORTIZ-SIMÓN, José Luis, AGUILERA-HERNÁNDEZ, Martha and OLIVARES-CABALLERO, Daniel. Control par calculado para seguimiento de trayectoria aplicado a la dinámica de un robot de 3gdl con propósitos didácticos. Revista de Operaciones Tecnológicas. 2020. 4-13: 1-8

* Correspondencia del Autor (Correo electrónico: jchdsec10@hotmail.com)

† Investigador contribuyendo como primer autor.

Introducción

En el área de ingeniería Mecatrónica, los estudiantes tienen múltiples asignaturas las cuales les enseñan a modelar diferentes mecanismos para conocer el comportamiento de estos, ser capaces de controlar sus movimientos, optimizar el consumo seleccionando los actuadores necesarios y simular sistemas de control para seguir una trayectoria y realizar alguna tarea específica.

Aunque el tema del control de los mecanismos y su análisis ya sea un tema algo revisto, usualmente en la literatura se toman ejemplos muy generalizados los cuales pueden llegar a confundir a los lectores en la forma de cómo aplicar los procedimientos explicados, o en otros casos es lo contrario y los ejemplos son demasiados sencillos al grado que el lector puede terminar con dudas de cómo proceder al trabajar con mecanismos más complejos.

Este artículo desarrolla el procedimiento necesario para obtener el análisis y modelo matemático de una cadena cinemática, esto con el motivo de tener una simulación de este y poder observar su comportamiento ante las fuerzas aplicadas en sus actuadores. En base a este modelo generar un sistema de control por par calculado, el cual se encargará de que la trayectoria sea seguida de manera correcta y que se pueda realizar la tarea designada.

Diseño mecánico

Se optó por diseñar un robot de cuatro eslabones y tres articulaciones con el propósito de tener un sistema demostrativo con dos uniones revolutas y una prismática.

El eslabón 0 o la superficie a la que se sujeta el robot se encuentra unido por una junta rotativa al eslabón 1, de igual manera el eslabón 1 y 2 se unen por una junta de este tipo. Los eslabones 2 y 3 se unen mediante una junta prismática. La orientación y posición de los eslabones se observa en la figura 1.

Marcos referenciales

Los marcos referenciales se asignan de acuerdo a la convención Denavit Hartenberg (DH). Ver figura 1.

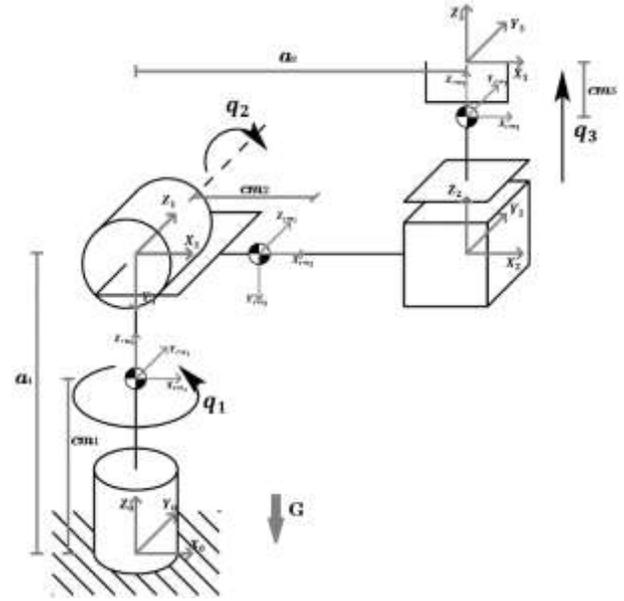


Figura 1 Diseño del robot con sus marcos referenciales

De acuerdo a la convención DH se obtiene la tabla de parámetros indicada en la tabla 1.

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
cm_1	0	0	cm_1	q_1
1	0	$-\pi/2$	a_1	q_1
cm_2	cm_2	0	0	q_2
2	a_2	$\pi/2$	0	q_2
cm_3	0	0	$q_3 - cm_3$	0
3	0	0	q_3	0

Tabla 1 Tabla de parámetros de eslabón y centros de masa

Cinemática directa

En base a los datos de la tabla 1 se obtienen las matrices de transformación de cada marco referencial respecto al marco anterior.

La matriz de transformación contiene en su interior una matriz de rotación y un vector de posición (ver ecuación 1). La matriz de rotación representa la orientación del marco que se analiza y el vector la posición de este.

$$T = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & P_x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & P_y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

La matriz de transformación generalizada está dada por la ecuación 2

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\alpha_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Considerando $c_{\theta_i} = \cos \theta_i$ y de igual forma $s_{\theta_i} = \sin \theta_i$.

Debido a que el objetivo del robot es manipular objetos con el efector final es necesario obtener una ecuación que relacione la orientación y posición del efector final con referencia al marco referencial 0. La matriz de transformación de 3 a 0 se obtiene usando las matrices de los eslabones 1, 2 y 3 y aplicando algebra lineal.

$${}^0T = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 \quad (3)$$

$${}^0T = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & c_1 (a_2 c_2 + q_3 s_2) \\ c_2 s_1 & c_1 & s_1 s_2 & s_1 (a_2 c_2 + q_3 s_2) \\ -s_2 & 0 & c_2 & a_1 - a_2 s_2 + q_3 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Considerando $c_i = \cos q_i$, $s_i = \sin q_i$
con $q_i = \begin{cases} \theta_i & \text{para union revoluta} \\ d_i & \text{para union prismatica} \end{cases}$

La ecuación 4 contiene las 12 ecuaciones que corresponden al modelo cinemático directo del efector final.

$$\begin{aligned} r_{11} &= c_1 c_2 \\ r_{21} &= c_2 s_1 \\ r_{31} &= -s_2 \\ r_{12} &= -s_1 \\ r_{22} &= c_1 \\ r_{32} &= 0 \\ r_{13} &= c_1 s_2 \\ r_{23} &= s_1 s_2 \\ r_{33} &= c_2 \\ d_x &= c_1 (a_2 c_2 + q_3 s_2) \\ d_y &= s_1 (a_2 c_2 + q_3 s_2) \\ d_z &= a_1 + q_3 c_2 - a_2 s_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Centros de masa

El modelo dinámico del robot requiere las posiciones y orientaciones de los centros de masa de cada eslabón. La figura 1 muestra la posición y orientación de los marcos referenciales de los centros de masa. Los parámetros de los centros de masa se observan en la tabla 1.

Modelo dinámico

El modelo dinámico relaciona las fuerzas y pares aplicados con los movimientos articulares. La tabla 1 contiene los componentes necesarios para obtener el modelo dinámico del robot.

La ecuación 6 corresponde al vector de fuerzas y torques que se aplica a las articulaciones.

$$\tau = D_{(q)} \ddot{q} + C_{(q, \dot{q})} \dot{q} + G_{(q)} + F_r \dot{q} \quad (6)$$

Donde D corresponde a la matriz de inercias, C es la matriz de coriolis, G corresponde al vector de fuerzas gravitacionales y F_r contiene las fuerzas de fricción de las articulaciones.

Matriz de inercias ($D_{(q)}$)

La obtención de la matriz de inercias "D" se realiza según la ecuación 7, esta ecuación requiere los jacobianos de cada centro de masa.

$$D = \sum_{i=1}^n (m_i J_{v_{cm_i}}^T J_{v_{cm_i}} + J_{\omega_{cm_i}}^T {}_{i-1}^0 R I_i {}_{i-1}^0 R^T J_{\omega_{cm_i}}) \quad (7)$$

El jacobiano contiene tanto el jacobiano de velocidad lineal " J_{v_i} " como el jacobiano de velocidad angular " J_{ω_i} ", ambos necesarios para obtener la matriz de inercias. Mientras que ${}_{i-1}^0 R$ corresponde a la matriz de rotación anterior del eslabón que se analiza con respecto al marco 0. I_i corresponde al tensor de inercia del eslabón.

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{v_i} \\ J_{\omega_i} \end{bmatrix} \quad (8)$$

El método de obtención de los jacobianos fue el producto cruz. Debido a que las articulaciones 1 y 2 son rotativas se usó la ecuación 10 para obtener sus jacobianos. Mientras que para la articulación 3 se aplicó la ecuación 11. Las ecuaciones se aplicaron múltiples veces hasta alcanzar el valor i del eslabón. Después se procedió a llenar con 0 los jacobianos hasta que tuvieran la forma de la ecuación 9

$$J = [J_1 \quad J_2 \quad J_3] \quad (9)$$

$$J_i = \begin{bmatrix} Z_{i-1} \times ({}^0P_n - {}_{i-1}^0P) \\ Z_{i-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$J_i = \begin{bmatrix} Z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$J_{cm_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$J_{cm_2} = \begin{bmatrix} -cm_2 c_2 s_1 & -cm_2 c_1 s_2 & 0 \\ cm_2 c_1 c_2 & -cm_2 s_1 s_2 & 0 \\ 0 & -cm_2 c_2 & 0 \\ 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$J_{cm_3} = \begin{bmatrix} s_1 s_2 \widehat{q}_3 - a_2 c_2 s_1 & -a_2 c_1 s_2 - c_1 c_2 \widehat{q}_3 & c_1 s_2 \\ a_2 c_1 c_2 - c_1 s_2 \widehat{q}_3 & -a_2 s_1 s_2 - c_2 s_1 \widehat{q}_3 & s_1 s_2 \\ 0 & s_2 \widehat{q}_3 - a_2 c_2 & c_2 \\ 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Considerando $\widehat{q}_3 = (cm_3 - q_3)$.

Las matrices de los tensores de inercia se tomaron como matrices generalizadas.

$$I_i = \begin{bmatrix} I_{xx_i} & I_{xy_i} & I_{xz_i} \\ I_{yx_i} & I_{yy_i} & I_{yz_i} \\ I_{zx_i} & I_{zy_i} & I_{zz_i} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Una vez obtenidos los jacobianos de los tres centros de masa correspondientes a cada eslabón, es posible calcular la matriz de inercia del robot usando la ecuación 7.

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = I_{xx_3} + I_{yy_2} + I_{zz_1} + cm_3^2 m_3 + m_3 q_3^2 - I_{xx_3} c_2^2 + I_{zz_3} c_2^2 - I_{xz_3} c_2 s_2 - 2cm_3 m_3 q_3 + a_2^2 m_3 c_2^2 + cm_2^2 m_2 c_2^2 - cm_3^2 m_3 c_2^2 - q_3^2 c_2^2 + 2cm_3 m_3 q_3 c_2^2 - 2a_2 cm_3 m_3 c_2 s_2 + 2a_2 m_3 q_3 c_2 s_2$$

$$D_{12} = I_{yz_3} c_2 - I_{yz_2} - I_{xy_3} s_2$$

$$D_{13} = 0$$

$$D_{21} = I_{yz_3} c_2 - I_{yz_2} - I_{xy_3} s_2$$

$$D_{22} = m_3 a_2^2 + m_2 cm_2^2 + m_3 cm_3^2 - 2m_3 cm_3 q_3 + m_3 q_3^2 + I_{yy_3} + I_{zz_2}$$

$$D_{23} = -a_2 m_3$$

$$D_{31} = 0$$

$$D_{32} = -a_2 m_3$$

$$D_{33} = m_3 \quad (16)$$

Matriz de Coriolis ($C_{(q,\dot{q})}$)

La obtención de la matriz de Coriolis se realizó usando los símbolos de Christoffel. La ecuación 17 muestra la formula general para obtener los símbolos de Christoffel.

$$C_{i,j,k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \quad (17)$$

Donde los elementos

$$C_{kj} = \sum_{i=1}^n (c_{ijk} \dot{q}_i) \quad (18)$$

Forman la matriz de Coriolis de la forma

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \frac{I_{xx_3} \dot{q}_2 s_2 q_2}{2} - I_{xz_3} \dot{q}_2 c_2 q_2 - \frac{I_{zz_3} \dot{q}_2 s_2 q_2}{2} - \frac{cm_3 m_3 \dot{q}_3}{2} + \frac{m_3 q_3 \dot{q}_3}{2} - \frac{a_2^2 m_3 \dot{q}_2 s_2 q_2}{2} - \frac{cm_2^2 m_2 \dot{q}_2 s_2 q_2}{2} + \frac{cm_3^2 m_3 \dot{q}_2 s_2 q_2}{2} + \frac{m_3 q_3^2 \dot{q}_2 s_2 q_2}{2} + \frac{cm_3 m_3 \dot{q}_3 c_2 q_2}{2} + \frac{a_2 m_3 \dot{q}_3 s_2 q_2}{2} - \frac{m_3 q_3 \dot{q}_3 c_2 q_2}{2} - a_2 cm_3 m_3 \dot{q}_2 c_2 q_2 + a_2 m_3 q_3 \dot{q}_2 c_2 q_2 - cm_3 m_3 q_3 \dot{q}_2 s_2 q_2$$

$$C_{12} = \frac{m_3 \dot{q}_1 s_2 q_2 cm_3^2}{2} - m_3 \dot{q}_1 s_2 q_2 cm_3 q_3 - a_2 m_3 \dot{q}_1 c_2 q_2 cm_3 + \frac{m_3 \dot{q}_1 s_2 q_2 q_3^2}{2} + a_2 m_3 \dot{q}_1 c_2 q_2 q_3 - I_{xz_3} \dot{q}_1 c_2 q_2 + \frac{I_{xx_3} \dot{q}_1 s_2 q_2}{2} - \frac{I_{zz_3} \dot{q}_1 s_2 q_2}{2} - I_{xy_3} \dot{q}_2 c_2 - I_{yz_3} \dot{q}_2 s_2 - \frac{a_2^2 m_3 \dot{q}_1 s_2 q_2}{2} - \frac{cm_2^2 m_2 \dot{q}_1 s_2 q_2}{2}$$

$$C_{13} = m_3 \dot{q}_1 (2q_3 - 2cm_3 + a_2 s_2 q_2 - 2q_3 c_2^2 + 2cm_3 c_2^2) / 2$$

$$C_{21} = \dot{q}_1 \left(I_{xz_3} c_2 q_2 - \frac{I_{xx_3} s_2 q_2}{2} + \frac{I_{zz_3} s_2 q_2}{2} + \frac{a_2^2 m_3 s_2 q_2}{2} + \frac{cm_2^2 m_2 s_2 q_2}{2} - \frac{cm_3^2 m_3 s_2 q_2}{2} - \frac{m_3 q_3^2 s_2 q_2}{2} + a_2 cm_3 m_3 c_2 q_2 - a_2 m_3 q_3 c_2 q_2 + cm_3 m_3 q_3 s_2 q_2 \right)$$

$$C_{22} = -m_3 \dot{q}_3 (cm_3 - q_3)$$

$$C_{23} = -m_3 \dot{q}_3 (cm_3 - q_3)$$

$$C_{31} = cm_3 m_3 \dot{q}_1 - m_3 q_3 \dot{q}_1 - cm_3 m_3 \dot{q}_1 c_2^2 + m_3 q_3 \dot{q}_1 c_2^2 - a_2 m_3 \dot{q}_1 c_2 s_2$$

$$C_{32} = cm_3 m_3 \dot{q}_2 - m_3 q_3 \dot{q}_2$$

$$C_{33} = 0 \quad (19)$$

Tomando en cuenta que $s_{2q_i} = \text{sen } 2q_i$ y $c_{2q_i} = \text{cos } 2q_i$

Vector de fuerzas gravitacionales ($G_{(q)}$)

El vector gravitacional contiene la fuerza producida por la gravedad en cada articulación. Este es obtenido mediante la ecuación 21 la cual requiere la energía potencial (ecuación 20)

$$E_p = \sum_{i=1}^n (m_i g^T \mathbf{0}_i P) \quad (20)$$

$$G = \frac{\partial E_p}{\partial q_i} \quad (21)$$

HERNÁNDEZ-DURÓN, Juan Carlos, ORTIZ-SIMÓN, José Luis, AGUILERA-HERNÁNDEZ, Martha and OLIVARES-CABALLERO, Daniel. Control par calculado para seguimiento de trayectoria aplicado a la dinámica de un robot de 3gdl con propósitos didácticos. Revista de Operaciones Tecnológicas. 2020

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = 0$$

$$G_2 = g m_3 (a_2 c_2 - s_2 (c m_3 - q_3)) - c m_2 g m_2 c_2$$

$$G_3 = g m_3 c_2 \quad (22)$$

Fricción (F_r)

Las articulaciones que unen los eslabones poseen fricción, por motivos de simplicidad a la matriz de fricciones se le asignaron valores de uno.

$$F_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Simulación en Simulink de Matlab 2015

Para a simulación en Simulink se requiere el modelo dinámico anteriormente obtenido (ecuación 6) y se manipula algebraicamente a manera de despejar \ddot{q} . Esto se realiza para poder conocer el valor articular de las articulaciones en base a la fuerza que se introduzca al sistema.

$$\ddot{q} = D^{-1}(\tau - C\dot{q} - G - F_r\dot{q}) \quad (24)$$

La ecuación 24 se introducirá en un bloque de función en Simulink, posteriormente se le asignaran los valores necesarios para las constantes. Las constantes del robot se obtuvieron al realizar un modelo en SOLIDWORKS con una aleación de aluminio 1060 como material y se inspeccionaron las propiedades de cada eslabón para obtener las masas y tensores de inercia correspondientes.

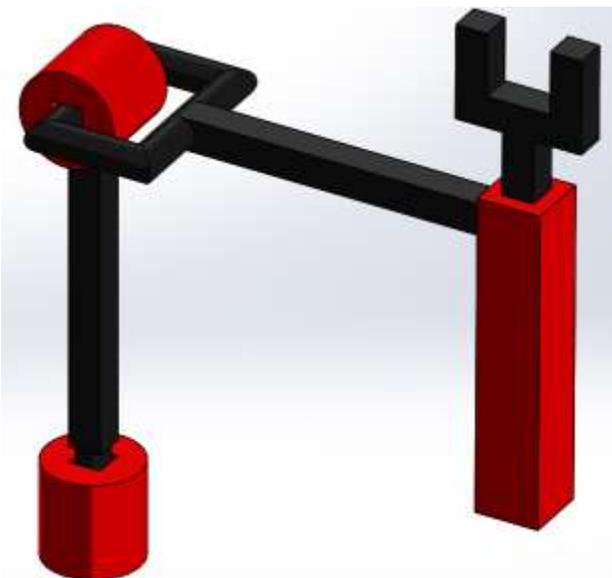


Figura 2 Modelo del robot en SOLIDWORKS 2019

La figura 2 muestra el modelo realizado en SOLIDWORKS 2019. El set de ecuaciones 25 muestra las constantes necesarias para simular el modelo en Simulink.

$$a_1 = 0.1m$$

$$a_2 = 0.1m$$

$$c m_1 = 0.07045m$$

$$c m_2 = 0.04375m$$

$$c m_3 = 0.05214m$$

$$m_1 = 0.03442 \text{ Kg}$$

$$m_2 = 0.05988 \text{ Kg}$$

$$m_3 = 0.04860 \text{ Kg}$$

$$I_1 = \begin{bmatrix} 5.00 * 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 5.00 * 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 5.42 * 10^{-7} \end{bmatrix} \text{ Kg m}^2$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1.35 * 10^{-5} & 2.4 * 10^{-10} & -2.52 * 10^{-9} \\ 2.4 * 10^{-10} & 1.05 * 10^{-4} & -1.1 * 10^{-10} \\ -2.52 * 10^{-9} & -1.1 * 10^{-10} & 9.24 * 10^{-5} \end{bmatrix} \text{ Kg m}^2$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 7.14 * 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 7.52 * 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 4.59 * 10^{-6} \end{bmatrix} \text{ Kg m}^2 \quad (25)$$

Ley de control par calculado

Esta ley de control se basa en separar los términos lineales y no lineales, esto se realiza con el propósito de obtener una respuesta lineal y un comportamiento más uniforme.

La ecuación 6 se puede reescribir de la siguiente manera: (ver ecuación 26)

$$\tau = Y_{(\ddot{q}, \dot{q}, q)} \theta \quad (26)$$

La separación de los términos no es más que una factorización de los componentes donde “Y” contiene todos los términos no lineales y “ θ ” los términos lineales.

Una vez obtenidos los términos necesarios se agregó la señal de control $\hat{\tau}$

$$\tau = \hat{\tau} + Y_{(\ddot{q}, \dot{q}, q)} \theta \quad (27)$$

considerando $\hat{\tau} = K_v \Delta \dot{q} + K_p \Delta q$ donde K_p y K_v representan las ganancias, Δq y $\Delta \dot{q}$ los errores de posición y velocidad.

El modelo en Simulink aplicando la ecuación 27 se puede observar en la figura 3

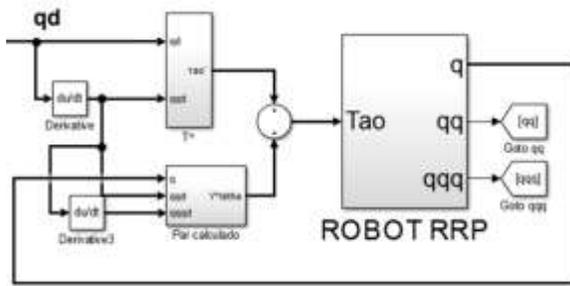


Figura 3 Control par calculado en Simulink

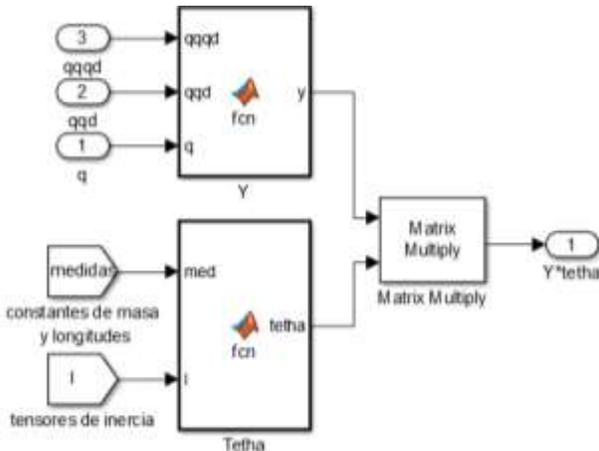


Figura 4 Matriz Y y vector θ

El regresor y el vector θ se encuentran dentro del bloque “Y*tetha” (figura 4), mientras que los componentes del bloque T’ se pueden observar en la figura 5.

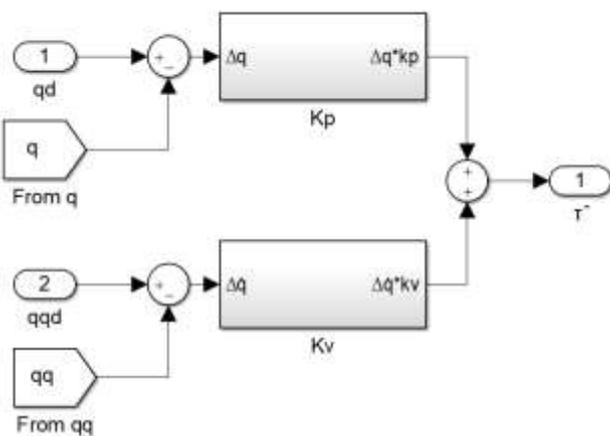


Figura 5 Contenido del bloque T’

El contenido de los bloques Kp y Kv es simplemente son las ganancias que multiplican al error correspondiente.

i	1	2	3
K_p	7	6	5
K_v	1	1	1

Tabla 2 Ganancias K_p y K_v

Modelo Cinemático Inverso

Para poder trabajar en el espacio cartesiano de manera adecuada es necesario tener el modelo cinemático inverso, este se encargará de convertir las coordenadas cartesianas a valores articulares los cuales serán usados por la ley de control.

El valor articular para cada articulación se obtiene en función a las posiciones deseadas. La figura 6 muestra el robot en una posición de la cual se pueden despejar los valores articulares usando funciones trigonométricas. Las ecuaciones 28, 29 y 30 muestran el valor necesario para alcanzar la posición deseada.

$$q_1 = \tan^{-1}(Y_d/X_d) \tag{28}$$

$$q_2 = \cos^{-1}\left(\frac{Z_d - a_1}{\sqrt{X_d^2 + Y_d^2 + (Z_d - a_1)^2}}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{a_2}{\sqrt{X_d^2 + Y_d^2 + (Z_d - a_1)^2}}\right) \tag{29}$$

$$q_3 = \sqrt{X_d^2 + Y_d^2 + (Z_d - a_1)^2} - a_2 \tag{30}$$

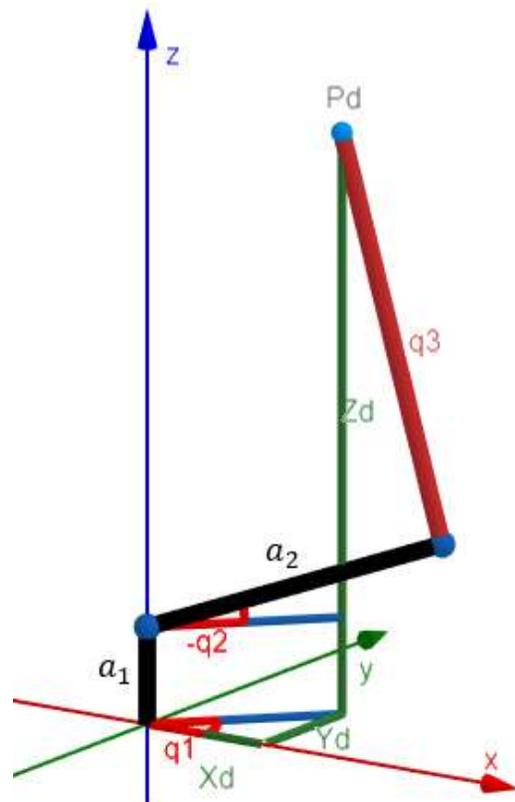


Figura 6 Proyección ortográfica del robot

Trajectory

La trayectoria que se probó se encuentra descrita por la ecuación 31 esta trayectoria es una espiral que comienza desde abajo hacia arriba (grafico 1).

$$T_d = \begin{bmatrix} 0.2 + .1 \cos(5t + \pi/2) \\ .2 \sin(5t + \pi/2) \\ 0.15 + t/10 \end{bmatrix} \quad (31)$$

El modelo final incluyendo los bloques de cinemática inversa y trayectoria se puede observar en la figura 7.

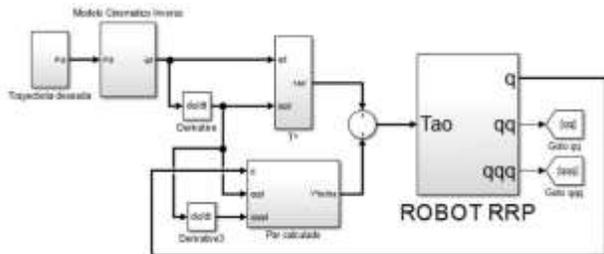


Figura 7 Modelo del robot en Simulink

Resultados

El robot con una posición inicial según la ecuación 32 y siguiendo la trayectoria descrita por la ecuación 31 tiene una respuesta aceptable con un error inicial pero después de un cierto tiempo logra converger en la trayectoria deseada. En el gráfico 1 se puede ver la trayectoria deseada en verde y la trayectoria del efector final en azul

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.15 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Mientras que el gráfico 2 muestra los valores articulares en el tiempo. Teniendo en cuenta que las líneas en verde representan la articulación 1, las de color azul la articulación 2 y en naranja la articulación 3. Las líneas punteadas representan el valor articular necesario para seguir la trayectoria deseada, y las líneas continuas son los valores articulares reales del robot.

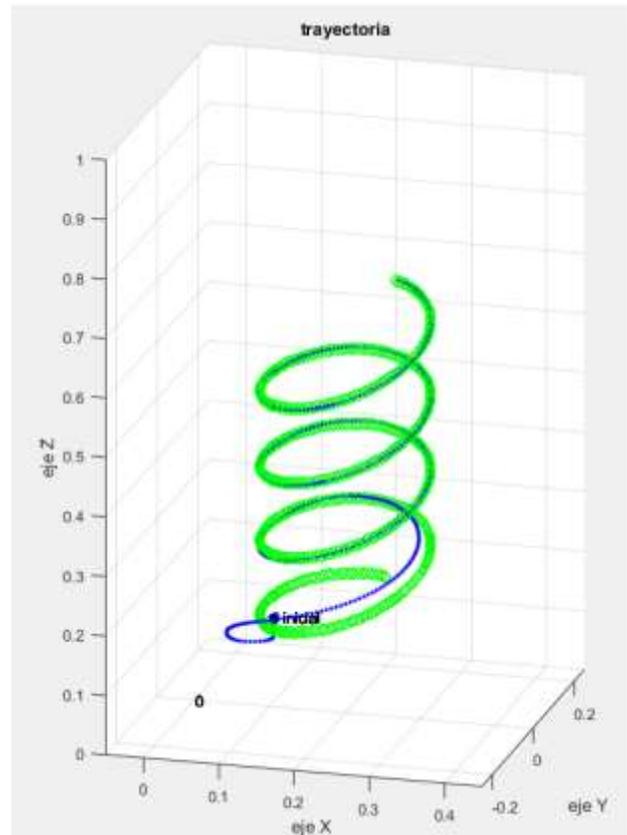


Gráfico 1 Comparación de trayectoria deseada con la trayectoria descrita

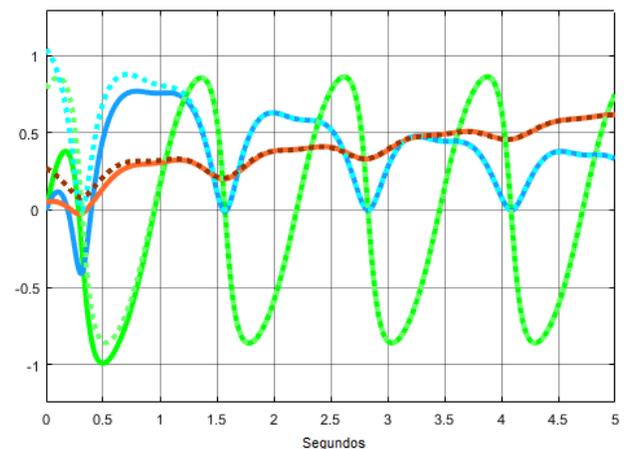


Gráfico 2 Valores articulares en el tiempo; q₁(verde) y q₂ (azul) en radianes, q₃ (naranja) en metros

Conclusión

El gráfico 1 nos muestra a el efector final logrando alcanzar la trayectoria final con un pequeño margen de error al comienzo. Si se observa el grafico 2, el efector final convergió en la trayectoria final a los 1.25 segundos aproximadamente, esto debido a que la articulación dos fue la ultima en converger en el valor articular deseado, mientras que las articulaciones 1 y 3 convergieron al transcurrir un segundo.

El control por par calculado resulta ser un control muy preciso debido a que toma en cuenta las velocidades y aceleraciones articulares, además de que al separar los términos entre lineales y no lineales, se logra tener un control más uniforme.

El artículo desarrolla el diseño, modelado y control del robot, con motivos didácticos a manera de servir como guía para cualquier lector con dudas en como modelar o controlar algún robot.

Referencias

[1] Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2005). *Robot Modeling and Control* (1.a ed., Vol. 1). Wiley.

[2] Craig, J. J. (2006). *Robotica* (3.a ed., Vol. 1). Pearson Educación de México.

[3] Salinas, S. A., & Vivas Albán, O. A. (2009). MODELADO, SIMULACIÓN Y CONTROL DEL ROBOT PARA CIRUGÍA LAPAROSCÓPICA «LAPBOT». *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 17(3), 324-327. <https://doi.org/10.4067/s0718-33052009000300005>

[4] Ortiz Simón, J. L., Minor Martínez, A., Ordorica Flores, R., Limón Aguilar, J. L., & Suaste, E. (2011). *Kinematic fundamentals of a biomechatronic laparoscopy system*. *The International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery*, 7(3), n/a. <https://doi.org/10.1002/rcs.395>