

Modelado dinámico del circuito RLC usando análisis numérico

CAMACHO-ALTAMIRANO, Ulices*†, MARTÍNEZ-CARRILLO, Irma y JUÁREZ-TOLEDO, Carlos

Universidad Autónoma del Estado de México, UAPT, Instituto Literario # 100, C.P. 50000 Col. Centro, (+52 722) 226 23 00

Recibido 2 de Enero, 2017; Aceptado 8 de Marzo, 2017

Resumen

El análisis de las redes eléctricas mediante modelos matemáticos para conocer el comportamiento dinámico es usualmente confiable, sin embargo, los resultados obtenidos mediante sistemas numéricos y de laboratorio no siempre proporcionan la misma información, ya que el modelo matemático es un modelo ideal que no considera pérdidas o perturbaciones que pudieran estar presentes. En este trabajo se diseña un circuito con elementos resistivos, capacitivos e inductivos (RLC) en serie conectados a una fuente de voltaje, mediante mediciones en tiempo real de cada uno de sus elementos se obtiene una base de datos que serán procesados con el uso de técnicas numéricas para reconstruir la señal original obtenida de las mediciones de laboratorio. Para conocer la precisión del método propuesto se utiliza la herramienta numérica del toolbox de Matlab para obtener la señal del sistema algebraico, además se compara con el sistema original mediante la medición del voltaje del circuito evaluado en el tiempo.

Base de datos, circuito RLC, integración numérica, reconstrucción de señal.

Abstract

The mathematical models to know the dynamic behaviour of the electrical networks are commonly used, however, the results are not always similar with the laboratory systems, because the numerical system does not consider nonlinearities in the elements. In this work, a circuit with RLC series elements connected to a voltage source is designed, using real-time measurements a database is obtained that will be processed with numerical techniques by reconstructing the original signal. Matlab numerical toolbox is used to know the precision of the method, in addition, the results are compared with the experimental system by measuring the voltage in the time.

Database, numerical integration, RLC circuit, reconstruction of signal

Citación: CAMACHO-ALTAMIRANO, Ulices, MARTÍNEZ-CARRILLO, Irma y JUÁREZ-TOLEDO, Carlos. Modelado dinámico del circuito RLC usando análisis numérico. Revista de Innovación Sistemática 2017. 1-1:1-9

*Correspondencia al Autor (Correo Electrónico: ucamachoa713@alumno.uaemex.mx)

† Investigador contribuyendo como primer autor.

Introducción

El análisis de los modelos matemáticos para conocer el comportamiento ideal de los fenómenos en diversas áreas de la ciencia, son de gran interés, debido a que representan un esquema general del sistema (Austria, 2016). El uso de estos modelos algebraicos para representar los fenómenos físicos ha sido de gran ayuda para la ingeniería. Ruiz (2016) describe que los modelos algebraicos pretenden obtener soluciones exactas de los experimentos físicos, aunque la gran desventaja es que es común el uso de una matemática compleja para desarrollar e interpretar los modelos (Revue, 2016).

La solución de los problemas por medio de métodos algebraicos en sistemas con variables de estados suele ser resuelto con modelos dinámicos, (Ogata 2003), comúnmente planteados por sistemas en el dominio de Laplace, por lo que, resulta complicado y costoso computacionalmente, descrito en Martínez (2015). De acuerdo con Javed (2008) y Robles del Peso (2006) es importante y frecuente el uso de métodos numéricos para dar respuesta a diversos modelos matemáticos, ya que las soluciones analíticas a tales problemas pueden ser inexistentes.

Una de las limitantes históricas de los métodos numéricos habían sido los sistemas y herramientas computacionales. Con el crecimiento de las computadoras los métodos numéricos son cada vez más utilizados, debido a sus grandes ventajas como son (Hernández, 2015; Pacheco, 2012):

- Manipulación de sistemas de gran dimensión.
- Puede incorporar No-linealidades a sus sistemas numéricos.

- Resuelve geometrías complicadas muy utilizadas en elemento finito
- Traslada la matemática complicada al uso de aritmética simple

El análisis y estudio de un sistema RLC (Resistivo, Inductivo y Capacitivo) se modela a través de la solución de ecuaciones diferenciales, una opción algebraica que muestra buenos resultados es el mapeo del sistema al dominio de Laplace.

La presencia de los elementos de inductancia y capacitancia dentro de un circuito genera un sistema de segundo orden, constituido por ecuaciones diferenciales Boylestand (2009).

El artículo presenta una visión novedosa para aproximar el modelo de un sistema RLC por medio de una aproximación polinomial, el polinomio resultante es comparado con el modelo algebraico y real.

El objetivo del artículo obtener un modelo polinomial (modelo numérico) usando un sistema numérico con aritmética simple en sustitución al modelo Laplaciano convencional (modelo algebraico).

El modelo numérico obtenido tiene la característica de ser un sistema polinomial de cuarto orden y, el cual al igual que el algebraico también aproxima de manera adecuada a la respuesta de laboratorio. Como se muestra en los resultados, la ventaja del modelo propuesto es la simplicidad de la ecuación obtenida.

Para validar el modelo se utilizó un sistema en serie RLC donde se presentan los tres casos:

- Modelo algebraico resuelto por transformada de Laplace.
- Modelo numérico sistema polinomial.

- Modelo real es obtenido en el laboratorio por medio de un osciloscopio.

Modelo Algebraico del sistema RLC

El comportamiento dinámico de un circuito serie RLC conectado a una fuente de voltaje de cd es representado en la figura 1.

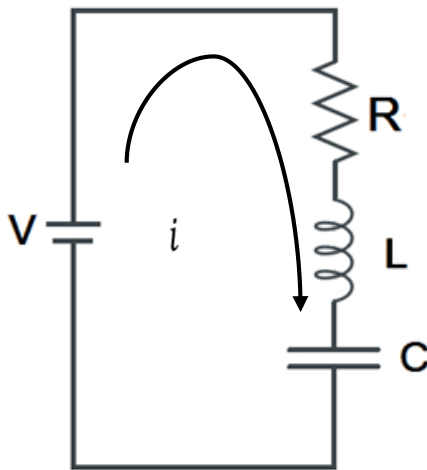


Figura 1 Circuito RLC en serie
Fuente: *Elaboración propia*

Donde R es la resistencia en Ohms (Ω), L la inductancia en Henrios (H) y C es el capacitor en Faradios (F). El voltaje de cada elemento se puede describir por medio de las siguientes expresiones:

- El voltaje de la resistencia R viene dado directamente por ley de Ohm:

$$V_R = Ri \quad (1)$$

Donde V representa la potencia disipada en la resistencia R debido al paso de corriente i.

- La inductancia tiene la característica de acumular y ceder energía en forma de campo magnético y el voltaje es definido por la siguiente derivada:

$$V_L = L \frac{di}{dt} \quad (2)$$

- Finalmente, el voltaje del capacitor C cuya función es la de almacenar y ceder energía en forma de campo eléctrico se determina por la siguiente integral:

$$V_C = \frac{1}{C} \int i dt \quad (3)$$

Usando las leyes de Kirchoff para una malla cerrada con elementos en serie el voltaje total resulta

$$V = V_R + V_L + V_C \quad (4)$$

Sustituyendo (1), (2) y (3) en (4) la expresión diferencial que describe el comportamiento dinámico del sistema es:

$$V = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (5)$$

Donde i es la corriente que circula por el circuito cerrado RLC. Con la finalidad de tener una función analítica que represente el comportamiento del sistema de estudio en el tiempo, se aplicará el método de transformada de Laplace y transformada inversa de Laplace a la ecuación (2), dividiendo entre L y derivando con respecto del tiempo se obtiene:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (6)$$

Donde se observa que el voltaje de la fuente V se iguala a cero después de la primera derivada, debido a que es constante a lo largo de todo el estudio (Butusov, 2017).

Identificando como señal de entrada el voltaje de la fuente V , señal de salida la i y condiciones iniciales cero de la ecuación (2) resulta la función de transferencia de la forma

$$\frac{I(S)}{V(S)} = \frac{1}{L} \frac{S}{S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC}} \quad (7)$$

Introduciendo como señal de entrada una función escalón de la forma $V(S) = \frac{A}{S}$ en (7) se obtiene

$$I(S) = \frac{A}{L} \frac{1}{S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC}} \quad (8)$$

Aplicando transformada inversa de Laplace a la ecuación (8) resulta

$$i(t) = A \frac{\frac{1}{C^2} e^{-\frac{Rt}{2L}}}{\left(\frac{CR^2}{4} - L\right)^{\frac{1}{2}}} \sinh\left(\frac{t\left(\frac{CR^2}{4} - L\right)^{\frac{1}{2}}}{LC^{\frac{1}{2}}}\right) \text{Amp.} \quad (9)$$

Por lo tanto

$$V_c = \frac{1}{C} \int i dt = -Ae^{-\frac{Rt}{2L}} \left[\cosh\left(\frac{t\left(\frac{CR^2}{4} - L\right)^{\frac{1}{2}}}{LC^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{RC^{3/2}}{2\left(\frac{CR^2}{4} - L\right)^{\frac{1}{2}}} \sinh\left(\frac{t\left(\frac{CR^2}{4} - L\right)^{\frac{1}{2}}}{LC^{\frac{1}{2}}}\right) \right] V \quad (10)$$

Modelo Numérico del sistema RLC

Con el desarrollo de las computadoras las herramientas numéricas han sido cada vez utilizadas. De acuerdo con Zhou (2017) la aproximación polinomial ha sido ampliamente usada para dar soluciones aproximadas de problemas paramétricos.

En este artículo se propone un polinomio de cuarto orden debido a que en el laboratorio se identifican cinco posiciones tal como lo muestra la tabla 1 (Bird 2017). En los resultados se muestra que un polinomio de cuarto grado aproxima de manera eficiente al circuito RLC.

k-ésimo tiempo en τ	Carga del capacitor V_c en % de Voltaje de entrada
1	63.2
2	86.5
3	95.0
4	98.2
5	99.3

Tabla 1 Porcentaje de carga de un capacitor
Fuente: (Bird, 2017)

Para obtener el polinomio para aproximar el voltaje en el capacitor es necesario introducir los siguientes conceptos.

Chapra (2006) describe a la aproximación por diferencias hacia adelante de una función tabulada $Vc(x_i)$ se define como:

$$\Delta Vc_i = Vc_{i+1} - Vc_i \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (11)$$

Donde Vc_i es el voltaje de carga del capacitor conocido de la tabla 1.

Estas diferencias reciben el nombre de diferencias de primer orden de función $Vc(x)$ sobre el intervalo función (t, t_n) .

La diferencia de segundo orden es descrita por:

$$\Delta^2 Vc_i = \Delta(\Delta Vc_i) = \Delta Vc_{i+1} - \Delta Vc_i \quad i = 0, \dots, n-2 \quad (12)$$

De forma general, para diferencias de k -ésimo orden, se tiene:

$$\Delta^k Vc_i = \Delta^{k-1} Vc_{i+1} - \Delta^{k-1} Vc_i \quad i = 0, \dots, n-k \quad (13)$$

Las diferencias hacia adelante pueden reescribirse con el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}
 V_{C_2} &= V_{C_1} + \Delta^1 V_{C_1} \\
 V_{C_3} &= V_{C_1} + 2\Delta^1 V_{C_1} + \Delta^2 V_{C_1} \\
 V_{C_4} &= V_{C_1} + 3\Delta^1 V_{C_1} + 3\Delta^2 V_{C_1} + \Delta^3 V_{C_1} \\
 V_{C_5} &= V_{C_1} + 4\Delta^1 V_{C_1} + 6\Delta^2 V_{C_1} + 4\Delta^3 V_{C_1} + \Delta^4 V_{C_1}
 \end{aligned}$$

En forma compacta

$$\begin{aligned}
 V_{C_2} &= (1 + \Delta)V_{C_1} \\
 V_{C_3} &= (1 + \Delta)^2 V_{C_1} \\
 V_{C_4} &= (1 + \Delta)^3 V_{C_1} \\
 V_{C_5} &= (1 + \Delta)^4 V_{C_1} \\
 (14)
 \end{aligned}$$

De tal manera que para el k -ésimo orden, se simplifica en la ecuación (15)

$$V_{C_{k+1}} = (1 + \Delta)^k V_{C_1} \quad (15)$$

El teorema del binomio de Newton es un arreglo mediante el cual se puede escribir el desarrollo de las potencias positivas de un binomio y las k combinaciones de un grupo de i elementos definen la ecuación:

$$\begin{aligned}
 V_{C_{k+1}} &= \binom{k}{0} V_{C_{i+1}} + \binom{k}{1} \Delta^1 V_{C_1} + \binom{k}{2} \Delta^2 V_{C_1} + \binom{k}{3} \Delta^3 V_{C_1} + \\
 &\dots + \binom{k}{k} \Delta^k V_{C_1} \\
 (16)
 \end{aligned}$$

Donde

$$\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!} \quad (17)$$

Es la fórmula del coeficiente binomial, como se establece en Cheng-I y Yeong-Chin (2016).

Podemos reescribir cada ecuación usando la notación del Binomio de Newton de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 V_{C_2} &= V_{C_1} + \Delta^1 V_{C_1} = \binom{1}{0} V_{C_1} + \binom{1}{1} \Delta^1 V_{C_1} \\
 V_{C_3} &= V_{C_1} + 2\Delta^1 V_{C_1} + \Delta^2 V_{C_1} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\binom{2}{0} V_{C_1} + \binom{2}{1} \Delta^1 V_{C_1} + \binom{2}{2} \Delta^2 V_{C_1} \\
 V_{C_4} &= V_{C_1} + 3\Delta^1 V_{C_1} + 3\Delta^2 V_{C_1} + \Delta^3 V_{C_1} = \\
 &\binom{3}{0} V_{C_1} + \binom{3}{1} \Delta^1 V_{C_1} + \binom{3}{2} \Delta^2 V_{C_1} + \binom{3}{3} \Delta^3 V_{C_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{C_5} &= V_{C_1} + 4\Delta^1 V_{C_1} + 4\Delta^2 V_{C_1} + 4\Delta^3 V_{C_1} \\
 &+ \Delta^4 V_{C_1} = \binom{4}{0} V_{C_1} + \binom{4}{1} \Delta^1 V_{C_1} + \binom{4}{2} \Delta^2 V_{C_1} \\
 &+ \binom{4}{3} \Delta^3 V_{C_1} + \binom{4}{4} \Delta^4 V_{C_1} \\
 (18)
 \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores de forma recursiva se pueden simplificar

$$\begin{aligned}
 V_{C_{k+1}} &= \binom{k}{0} V_{C_1} + \binom{k}{1} \Delta^1 V_{C_1} + \binom{k}{2} \Delta^2 V_{C_1} \\
 &+ \binom{k}{3} \Delta^3 V_{C_1} + \binom{k}{4} \Delta^4 V_{C_1} \\
 (19)
 \end{aligned}$$

Y es fácil demostrar que si $j=0$ tenemos para cualquier k

$$\binom{k}{0} = \frac{k!}{0!(k-0)!} = \frac{k!}{(k)!} = 1 \quad (20)$$

Podemos simplificar el polinomio recursivo como

$$\begin{aligned}
 y_{k+1} &= y_1 + \binom{k}{1} \Delta^1 y_1 + \binom{k}{2} \Delta^2 y_1 + \binom{k}{3} \Delta^3 y_1 \\
 &+ \dots + \binom{k}{k} \Delta^k y_1 \\
 (21)
 \end{aligned}$$

Se observa que $\binom{k}{j}$ es un polinomio en k de grado j , por lo que y_k , se puede expresar como

$$y_{k+1} = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + \dots + a_j k^j \quad (22)$$

Si una función es continua en $a \leq x \leq b$, se puede aproximar a un polinomio $P_n(x_i)$, de grado n . Debido a que el sistema tiene cinco puntos bien definidos (tabla 1) el polinomio de cuarto orden resultante tiene la siguiente forma:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \quad (23)$$

Donde $(a_0, a_1, a_2, a_3 \text{ y } a_4)$ corresponden a las incógnitas descrita en Juárez (2016).

Resultados

Se utilizó el circuito de la figura 2 para verificar el método propuesto,

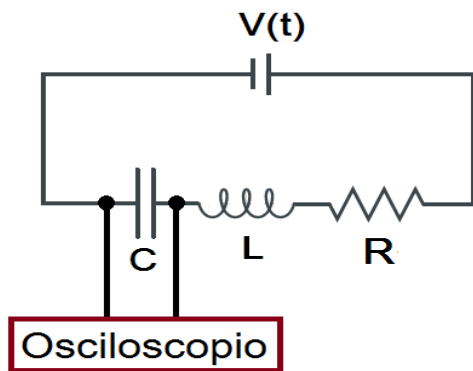


Figura 2 Circuito RLC con osciloscopio
Fuente: Elaboración propia

Donde el valor de la fuente es $V= 5 \text{ vdc}$, $C= 330\mu\text{F}$, $R=4.7\text{k}\Omega$ y $L=680\mu\text{H}$.

Una forma de validar el sistema es por medio de la constante tiempo τ cuyo valor es Boylestand (2009):

$$\tau =RC \tag{24}$$

Con el valor de voltaje dado por

$$V\tau= (63.2\%)(V) \tag{25}$$

Por lo que de forma teórica $\tau =1.65\text{s}$ y $V\tau =3.16\text{vdc}$. La figura 3 muestra en rojo los resultados de laboratorio usando un Osciloscopio Digital de Banco de 200 MHz - Tektronix TDS2022C, donde los valores aproximados resultantes son para el tiempo de $\tau =1.60\text{s}$ y para el voltaje de $V\tau =3.08\text{vdc}$.

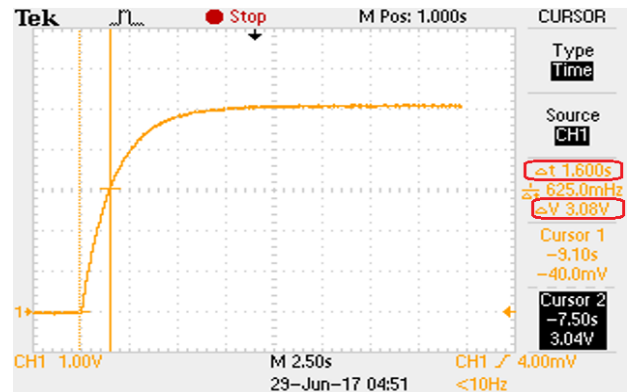


Figura 3 Validación del circuito RLC con el osciloscopio
Fuente: Elaboración propia

Solución Numérica

Como se muestra a continuación el uso de la interpolación polinomial brinda una opción eficiente y sencilla para describir el comportamiento del sistema RLC.

Los cinco pares ordenados que se tomaron en consideración para realizar la interpolación polinomial son los valores conocidos de la tabla 1. Para un voltaje de entrada de $V=5\text{vcc}$ y $t=1.65\text{s}$ tenemos los siguientes resultados mostrados en tabla 2.

Tiempo en τ	Tiempo en segundos	Voltaje
1	1.65	3.16
2	3.3	4.325
3	4.95	4.75
4	6.6	4.91
5	8.25	4.965

Tabla 2 Voltaje de un capacitor respecto del Tiempo τ
Fuente: Elaboración propia

Utilizando la ecuación (23) el polinomio de cuarto grado se describe como

$$P_4x = V(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 \tag{26}$$

Como los cinco puntos conocidos de la tabla 2 satisfacen la expresión 26 se puede obtener el siguiente sistema lineal para determinar los coeficientes $[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4]$

$$\begin{aligned} a_0 + 1.65a_1 + (1.65^2)a_2 + (1.65^3)a_3 + (1.65^4)a_4 &= 3.16 \\ a_0 + 3.30a_1 + (3.30^2)a_2 + (3.30^3)a_3 + (3.30^4)a_4 &= 4.325 \\ a_0 + 4.95a_1 + (4.95^2)a_2 + (4.95^3)a_3 + (4.95^4)a_4 &= 4.75 \\ a_0 + 6.60a_1 + (6.60^2)a_2 + (6.60^3)a_3 + (6.60^4)a_4 &= 4.91 \\ a_0 + 8.25a_1 + (8.25^2)a_2 + (8.25^3)a_3 + (8.25^4)a_4 &= 4.965 \end{aligned} \quad (27)$$

Coefficiente	Resultado
a_0	0.0018
a_1	2.8168
a_2	-0.6629
a_3	7.3199×10^{-2}
a_4	-3.0777×10^{-3}

Tabla 3 Solución del sistema lineal de la ecuación 27

Fuente: *Elaboración propia*

La solución del sistema es mostrado en la tabla 3 y la ecuación (28) es la representación polinomial de cuarto grado.

$$f(x) = 0.0018 + 2.8168t - 0.6629t^2 + 7.3199 \times 10^{-2}t^3 - 3.0777 \times 10^{-3}t^4 \quad (28)$$

El grafico 1 muestra la curva del modelo algebraico (ec. 10) modelada con el toolbox simbólico de Matlab, el polinomio de cuarto orden propuesto (ec. 28) y los resultados de laboratorio.

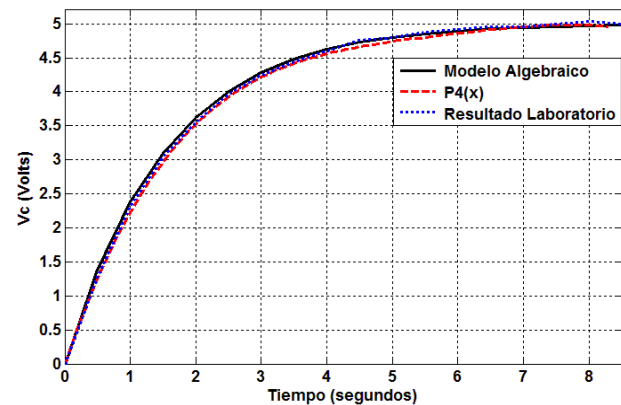


Grafico 1 Modelo algebraico, Solución numérica y Resultado de laboratorio

Fuente: *Elaboración propia*

Para validar la exactitud del modelo Algebraico y el Polinomial contra el valor real de laboratorio se utilizó el error relativo (ver ec. 29)

$$\varepsilon_R = \frac{|V_{Lab} - V_{Aprox}|}{V_{Lab}} \times 100\%$$

Donde V_{Lab} valor medido del laboratorio y V_{Aprox} son las aproximaciones de los modelos algebraico y numérico. La tabla 4 muestra los errores relativos correspondientes a las curvas del grafico 1 evaluados en los puntos establecidos de τ de la tabla 2.

Tiempo en τ	V_{Lab}	$V_{P(4)}$	$V_{Alg.}$	ε_{R_P4}	$\varepsilon_{R_Alg.}$
1	3.2400	3.1600	3.2740	2.4691	1.0493
2	4.4000	4.3250	4.4040	1.7045	0.0909
3	4.8000	4.7500	4.7940	1.0416	0.1250
4	4.9600	4.9100	4.9290	1.0080	0.0625
5	5.0400	4.9650	4.9760	1.4881	1.2698

Tabla 4 Error absoluto de los voltajes de carga en el capacitor respecto del Tiempo τ

Fuente: *Elaboración propia*

En la tabla 4 se observa que las variaciones de las curvas en los puntos seleccionados para τ son menores al 2.5%, por lo que los modelos algebraico y numérico se aproximan al modelo real de laboratorio.

Conclusiones

En el artículo se expone que un polinomio de cuarto orden generado mediante el uso de métodos numéricos, aproxima al modelo real y algebraico de un circuito RLC.

Como se muestra en la ecuación (28) y tabla 3 el polinomio obtenido tiene los coeficientes mayores en $[a_1, a_2]$ respecto al resto $[a_0, a_3, a_4]$, trabajos futuros estarán encaminados a disminuir el grado del polinomio haciéndolo más simple computacionalmente.

Otro trabajo futuro estará encaminado al diseño, monitoreo y construcción de sistemas de control del factor de potencia o algún otro circuito eléctrico RLC que requiera de un control rápido y eficiente. Finalmente se obtendrán los armónicos por medio de herramientas numéricas.

Referencias

Austria, L., Noriega, R., Canales, B. y Ruiz, L. (2016). "Diseño de un convertidor de potencia eléctrica para obtener menos pérdidas de energía". *Revista de Aplicaciones de la Ingeniería*. volumen 3, pp. 51-59, ISSN 2410-3454.

Bird, J. (2017). "Electrical Circuit Theory and Technology". Sixth edition. Routledge. ISBN 978-1-315-56192-9. pp. 296

Boylestand, R. L. y Nashelsky, L. (2009). "Electronic Devices and Circuit Theory". USA. Pearson/Prentice Hall. ISBN 0135026490. pp. 31.

Butusov, D. N., Ostrovski, V. Y. and Pesterev, D. O. (2017). "Numerical Analysis of Memristor-Based Circuits with Semi-Implicit Methods". *IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIconRus)*. pp. 271-276, DOI: 10.1109/EIconRus.2017.7910545.

Chapra, S. C. y Canale, R. P. (2006). "Métodos Numéricos para Ingenieros". 5ta edición. McGraw-Hill. ISBN 970-10-6114-4. pp. 509

Cheng-, C. and Yeong-Chin C. (2016). "Signal Reconstruction Based on Newton's Forward Divided Difference for SCADA of Wide-Area Intelligent Energy System". *2016 International Symposium on Computer, Consumer and Control*, pp. 682-685. DOI 10.1109/IS3C.2016.175.

Hernández, I., Juárez, C. y Martínez, I., (2015). "Interpolación polinomial para determinar el tiempo de tratamiento criogénico para acero AISI D2 en medio básico". *Pistas educativas*, ISSN 1465-1249.

Javed, M., Aftab, H. and Qasim, M., (2008). "RLC Circuit Response and Analysis (Using State Space Method)". *IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security* April 2008. volumen 8, pp. 48-54.

Juárez, C., Martínez, I. y Betancourt, R. J. (2016). "Analysis of the Natural Response of RC Circuit using Weierstrass Approximation Theorem". *Pistas educativas*, ISSN 1405-1249.

Martínez, I., Juárez, C., (2015). "Modelado de un Sistema Máquina Bus Infinito Usando Transformada de Laplace". *Pistas educativas*, ISSN 1465-1249.

Ogata, K. (2003). "Ingeniería de Control Moderno". Madrid. 4ta edición. Prentice Hall. ISBN 0-13-060907-2. pp. 973.

Pacheco, N. J., Juárez, C. y Martínez, I., (2012). "Análisis Dinámico de la Estabilidad Usando Interpolación de Alto Orden". Ingeniería Investigación y Tecnología de la UNAM, volumen 13, pp. 451-460, ISSN 1405-7743.

Revuelta, J., González, A. y Bosh, R. (2016). "Comparación de métodos experimentales para obtener los parámetros eléctricos de un motor de inducción". Revista de Sistemas Experimentales. volumen 3, pp. 8-17.

Robles del Peso, A. y García Benedito J. (2006). "Métodos Numéricos en Ingeniería. Prácticas con Matlab". Universidad de Oviedo. ISBN 13-978-84-8317-563-7. pp. 163.

Ruiz, F., Hernández, E., Aguilar, K. y Macías, E. (2016). "Comparación de la solución analítica y numérica de la ecuación de difusión de calor unidimensional en estado transitorio aplicado a un muro". Revista de Aplicaciones de la Ingeniería. volumen 3, pp. 160-169, ISSN 2410-3454.

Zhou, Y., Wu, H., Gu, C. and Song, Y., (2017). "A Novel Method of Polynomial Approximation for Parametric Problems in Power Systems". IEEE Transactions on power systems. volumen 12. DOI: 10.1109/TPWRS.2016.2623820.