

Modelo matemático completo para Robots Seriales

CAMPOS-CALDERA, Carla†*, CAMPOS-CALDERA, Carlos, HAYNES, Arely y ALDERETE-ALDERETE, Javier Enrique

*Departamento de Metal Mecánica, Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Parral*

Recibido 12 de Julio, 2017; Septiembre 8 de Junio, 2017

Resumen

El presente artículo detalla el análisis de un robot serial o manipulador considerando en el mismo dos cadenas cinemáticas de estudio, la primera, en la fase predominante como abierta; mientras que la segunda, en su etapa de manipulación cerrada. Las metodologías empleadas para tal fin se basan en el modelo dinámico del robot calculado mediante las ecuaciones de movimiento de Lagrange y las formulaciones de Ghorbel, con sus respectivos antecedentes en las ecuaciones de Chace. Este estudio pretende ampliar el punto de vista de los análisis tradicionales de robots seriales o manipuladores, partiendo de la premisa de que un manipulador en su modelo dinámico no sólo debe incluir la cadena cinemática abierta que permite su movilidad y el cálculo de fuerzas o pares en tareas programadas; sino que se pretende ampliar los efectos que la cadena cerrada brindaría al momento de tomar objetos (esencialmente para los controladores de fuerza). La formulación matemática del robot va acompañada de simulaciones hechas en Matlab, las cuales permiten visualizar las velocidades, aceleraciones, fuerzas y pares durante las 2 etapas de análisis de un robot serial de 2 g.d.l. La parte final de este trabajo presenta animaciones sencillas mediante modelos 3D elaborados en toolbox integrados en Simulink, que permiten verificar a la par de las simulaciones un comportamiento más real del robot en la ejecución de una trayectoria sencilla pero con dos fases cinemáticas de evaluación como un modelo matemático completo para el robot.

Cadena, Lagrange, robot serial, animación

Abstract

The present article details an analysis of a serial robot taking into consideration the two types of kinematic chains: the predominant open stage; and the closed manipulation stage. To reach such an end, Lagrange's methodologies and Ghorbel's mathematical equations, which correspond with the previous equations by Chace, is used to create the dynamic robot model. This study attempts to broaden the traditional analysis on serial robots or manipulators. Parting from the premise that the dynamic model of a serial robot mainly includes the open kinematic chain, which allows for it to move and calculate the forces and torques in programmed tasks; including an analysis of the dynamic model at a closed manipulation stage, would provide results during the moment a manipulator is taking an object (particularly on the force controllers). The mathematical formulation of the robot is accompanied by simulations made in Matlab, which allow visualizing the velocities, accelerations, forces and torques during the 2 kinematics stages of analysis of a serial robot of 2 d.o.f. The final part of this work presents simple animations using 3D models elaborated in toolbox integrated in Simulink, which allow verifying, along with the simulations, a more realistic behavior of the manipulator during the realization of a simple trajectory, but with the kinematic stages of evaluation as a complete mathematical model for the serial robot.

Kinematics, Lagrange, serial robot, animation

Citación: CAMPOS-CALDERA, Carla, CAMPOS-CALDERA, Carlos, HAYNES, Arely y ALDERETE-ALDERETE, Javier Enrique. Modelo matemático completo para Robots Seriales. Revista de Ingeniería Tecnológica 2017. 1-3:18-26

*Correspondencia al Autor (Correo Electrónico: ccampos@itparral.edu.mx)

† Investigador contribuyendo como primer autor.

Introducción

El artículo se centra en la ampliación de la dinámica de robots seriales antes y después de la etapa de manipulación de objetos, es decir, antes de tomar un objeto el robot serial se modela como una cadena cinemática abierta, una vez que se toma el objeto contra una superficie, la cadena abierta que lo caracteriza se convierte en una cadena cerrada; si la tarea es instantánea la literatura establece que las fuerzas actuantes en el efector final se pueden despreciar; sin embargo, si se supera esa instantaneidad es posible una segunda etapa de análisis (cadena cinemática cerrada) que vale la pena considerar al momento de construir controladores (Lewis, Dawson, Abdallah, 2004), de ahí el valor agregado de las metodologías que se proponen. Las secciones que conforman el artículo son 6, en la sección I se muestra el análisis cinemático del robot, el modelado dinámico (cadena abierta-cerrada) se aborda en las secciones II y III.

En la sección IV se definen las simulaciones y animación de los modelos matemáticos descritos de I a III, el financiamiento para la publicación del artículo se agradece en la sección V. Finalmente la sección VI presenta conclusiones y trabajos a futuro.

Cinemática

Lung – Wen Tsai (Tsai, 1999), define la cinemática como la ciencia que trata con los aspectos de movimiento de un robot de n grados de libertad (g.d.l.) sin considerar las fuerzas o pares que lo causan; se centra únicamente en el cambio geométrico del robot respecto del tiempo (posiciones, velocidades aceleraciones).

La cinemática presenta 2 problemas: cinemática directa e inversa, la primera se enfoca en encontrar la posición y orientación del efector final conocidas las variables articulares del robot, la segunda encuentra las variables articulares del robot conocidas la posición y orientación del efector final.

Fase Simple

En esta subsección se detalla la cinemática directa del robot en su fase simple o cadena abierta. Las ecuaciones (1) y (2) describen la cinemática directa del robot (figura 1) y han sido ampliamente estudiadas dentro de la literatura (Craig, 1989), (Ollero, 2001) y (Fu, Gonzalez, Lee, 1988).

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \quad (1)$$

$$y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (2)$$

En (1) y (2), l_i ($i=1,2$), indica las longitudes de los eslabones, $q=[\theta_1 \theta_2]^T \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ es el vector de coordenadas articulares, $x=[x \ y]^T \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ es el vector de coordenadas operacionales, que representan la posición del efector final.

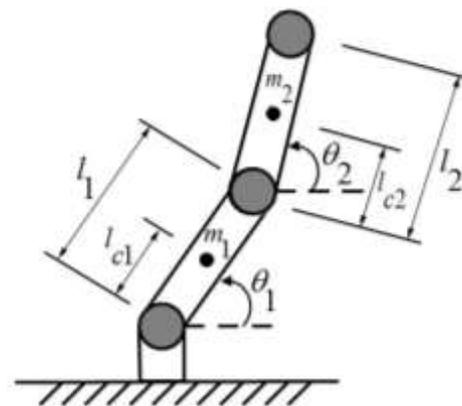


Figura 1 Parámetros robot 2 g.d.l.

Fuente: Elaboración propia

El modelo cinemático inverso del robot es parte de la resolución de los problemas cinemáticos por lo que se inicia considerando los esquemas de las figuras 2 y 3, con la finalidad de encontrar relaciones vectoriales que conduzcan al cálculo de las variables articulares del robot.

Al aplicar el tercer caso de la metodología de Chace (Shigley, 1988), claramente se pueden deducir las ecuaciones (3)-(5) que son base para el modelo cinemático inverso, en las mismas por conveniencia se establece $x_0=y_0=0$.

$$\hat{l}_1 = v\hat{\mu} - u\hat{\lambda} \tag{3}$$

$$\hat{l}_2 = (C - v)\hat{\mu} - u\hat{\lambda} \tag{4}$$

$$C = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \tag{5}$$

Restando (4) de (3) se encuentra v , u se obtiene substituyendo v en (3), conocidas u y v , se encuentran las ecuaciones (6) y (7).

$$\hat{l}_1 = \frac{l_1^2 - l_2^2 + C^2}{2C} \hat{\mu} \mp \sqrt{l_1^2 - \sigma} \hat{\lambda} \tag{6}$$

$$\hat{l}_2 = \left(C - \frac{l_1^2 - l_2^2 + C^2}{2C} \right) \hat{\mu} \pm \sqrt{l_1^2 - \sigma} \hat{\lambda} \tag{7}$$

con:

$$\sigma = \frac{l_1^2 - l_2^2 + C^2}{2C} \tag{8}$$

Se debe recordar de (Shigley, 1988) que $\hat{\mu}$ es un vector de magnitud unitaria, que gracias al ángulo ψ se puede descomponer según la ecuación (9)

$$\hat{\mu} = [\|\hat{\mu}\| \cos \psi \quad \|\hat{\mu}\| \sin \psi \quad 0]^T = [\cos \psi \quad \sin \psi \quad 0]^T \tag{9}$$

por otra parte como $\hat{\lambda} = \hat{\mu} \times \hat{k}$ y $\hat{k} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$, el producto cruz resultante se aprecia en (10).

$$\hat{\lambda} = [\sin \psi \quad -\cos \psi \quad 0]^T \tag{10}$$

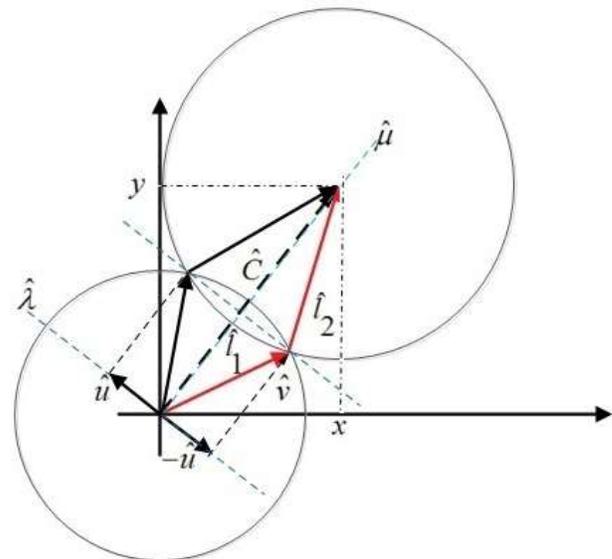


Figura 2 Descomposición vectorial para robot de 2 g.d.l. en base a metodología de Chace

Fuente: Elaboración propia

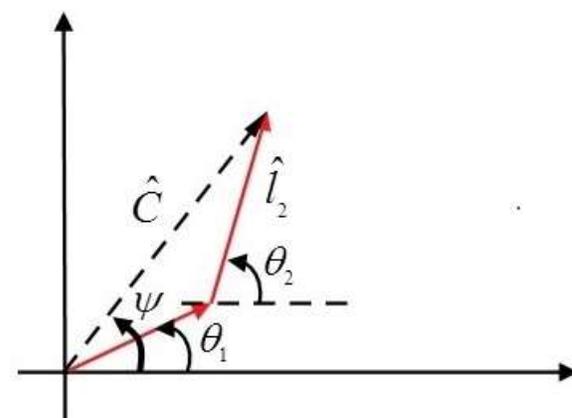


Figura 3 Relación del vector C con el vector de variables articulares

Fuente: Elaboración propia

Al sustituir (9) y (10), en (6) y (7); en forma particular se establece el vector \hat{l}_1 , cuyos elementos se muestran en la ecuación (11).

$$\begin{bmatrix} l_{1x} \\ l_{1y} \end{bmatrix} = \frac{l_1^2 - l_2^2 + C^2}{2C} \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix} \mp \sqrt{l_1^2 - \sigma} \begin{bmatrix} \sin\psi \\ -\cos\psi \end{bmatrix} \quad (11)$$

A partir de (11) se puede ver que la relación $\text{atan}(l_{1y}/l_{1x})$ es el ángulo de inclinación de \hat{l}_1 , o bien θ_1 .

$$\theta_1 = \frac{\frac{l_1^2 - l_2^2 + C^2}{2C} \sin\psi \mp \sqrt{l_1^2 - \sigma} (-\cos\psi)}{\frac{l_1^2 - l_2^2 + C^2}{2C} \cos\psi \mp \sqrt{l_1^2 - \sigma} \sin\psi} \quad (12)$$

La expresión para el ángulo θ_2 o inclinación de \hat{l}_2 , sigue un proceso similar al de θ_1 , en (13) se encuentra la descomposición de \hat{l}_2 .

$$\begin{bmatrix} l_{2x} \\ l_{2y} \end{bmatrix} = \left(C - \frac{l_1^2 - l_2^2 + C^2}{2C} \right) \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix} \mp \sqrt{l_1^2 - \sigma} \begin{bmatrix} \sin\psi \\ -\cos\psi \end{bmatrix} \quad (13)$$

por tanto

$$\theta_2 = \frac{\left(C - \frac{l_1^2 - l_2^2 + C^2}{2C} \right) \sin\psi \mp \sqrt{l_1^2 - \sigma} (-\cos\psi)}{\left(C - \frac{l_1^2 - l_2^2 + C^2}{2C} \right) \cos\psi \mp \sqrt{l_1^2 - \sigma} \sin\psi} \quad (14)$$

Esta sección termina al presentar las ecuaciones del modelo de velocidad del robot, aplicando $\partial \mathbf{x} / \partial \theta_i$ las velocidades operacionales del robot $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x} \ \dot{y}]^T$ (15)-(16) son determinadas, a partir de ellas y con la expresión $\dot{\mathbf{q}} = J^{-1} \dot{\mathbf{x}}$ se estiman las velocidades articulares, las aceleraciones articulares se desarrollan por $\ddot{\mathbf{q}} = J^{-1}(\ddot{\mathbf{x}} - \dot{J}\dot{\mathbf{q}})$.

$$\dot{x} = -l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \quad (15)$$

$$\dot{y} = l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \quad (16)$$

Fase Cerrada

La fase cerrada del robot (figura 4) se analiza como un mecanismo corredera – manivela.

Los métodos algebraicos y ecuaciones de Chace (Shigley, 1988), permiten calcular el modelo cinemático directo (17), mostrando una única componente en el eje x.

$$C = l_1 \cos\theta_1 + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2\theta_1} \quad (17)$$

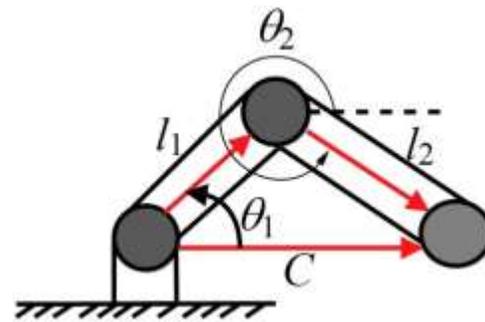


Figura 4 Cadena cerrada robot 2 g.d.l

Fuente: Elaboración propia

La cinemática inversa de esta fase se establece en (18) y (19), retomando para su solución las ecuaciones para una corredera–manivela profundamente analizada en (Shigley, 1988).

$$\theta_1 = \cos^{-1} \left(\frac{C^2 + l_1^2 - l_2^2}{2Cl_1} \right) \quad (18)$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} \left(\frac{C^2 + l_2^2 - l_1^2}{2Cl_2} \right) \quad (19)$$

La cinemática de velocidad de la fase cerrada no se presenta en el presente artículo, puesto que la dinámica no depende de su cálculo.

Dinámica fase simple

En una fase simple o cadena abierta, el modelo dinámico del robot se desarrolla por la conocida metodología de Lagrange (Kelly, Santibáñez, Loria, 2005).

Las energías cinemática y potencial del robot, $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $U(\mathbf{q})$, permiten iniciar el cálculo del Lagrangiano $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, ecuación (20); mediante el cual es posible encontrar las ecuaciones generalizada del movimiento de Lagrange (21).

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q} = \tau \quad (21)$$

El calculo de $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $U(\mathbf{q})$ se realiza por medio de las ecuaciones (22) y (23), siendo m_i la masa de cada uno de los eslabones, I_i la matriz de inercia, h_i el vector al centro de masa referenciado a un marco fijo, g gravedad, i representa el número de g.d.l actuados del robot, por lo tanto $i=1,2$.

$$K_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} \omega_i^T I_i \omega_i \quad (22)$$

$$U_i(\mathbf{q}) = \sum_i m_i g h_i \quad (23)$$

Las ecuaciones de par del robot (figura 1) se definen en (24) y (25).

$$\tau_1 = \ddot{\theta}_1 (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_{1zz}) + 2l_1 l_{c2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + 2l_1 l_{c2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos \theta_1 \quad (24)$$

$$\tau_2 = \ddot{\theta}_2 (m_2 l_{c2}^2 + I_{2zz}) + 2l_1 l_{c2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - 2l_1 l_{c2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_{c2} g \cos \theta_2 \quad (25)$$

La ecuación (21) se puede reescribir en la ecuación (26), en donde $M(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia definida simétrica y positiva, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrípetas y de coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales.

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (26)$$

En base a (24) y (25) la matriz de inercia, coriolis y el vector de gravedad se presentan en (27), (28) y (29).

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_{1zz} & 2l_1 l_{c2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ 2l_1 l_{c2} \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_{c2}^2 + I_{2zz} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & 2l_1 l_{c2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ -2l_1 l_{c2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos \theta_1 \\ m_2 l_{c2} g \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Dinámica cadena cerrada

El análisis de la cadena cerrada se fundamenta complementamente en las ecuaciones deducidas por Ghorbel (Ghorbel, Chételat, Gunawardana, Longchamp, 2011), mismas que se explican y aplican a nuestro caso de estudio.

En la cadena cerrada del robot, el vector de coordenadas generalizadas dependientes es preestablecido como $\mathbf{q}' = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ en donde θ_3 es el ángulo que posiciona la herramienta.

Las coordenadas independientes son seleccionadas de tal forma que el sistema restringido –vea (Ghorbel et al, 2011), (Iliá, Cammarata, y Sinatra, 2007), (Soto, Campa, 2011), (Unda, García, 1985) y (Campos, Campa, Llama, Pámanes, 2011)– proporcione una variable independiente $\alpha(q') = \theta_1$; para lograr tal fin, se necesita un vector operador $\Theta = [1 \ 0 \ 0]^T$, cuyo renglón y columnas serán parte de la matriz de restricción del sistema, ecuación (31).

$$\alpha(q') = \Theta q' \tag{31}$$

Las restricciones $\varphi(q')$ quedan en función de las distancias de cada uno de los eslabones y la herramienta de manipulación del robot, figura 5, por lo que se presentan 2 restricciones, ecuación (32). La variable d dentro de (32) indica la distancia entre las cadenas cinemáticas desarticuladas.

$$\varphi(q') = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 - l_3 \cos \theta_3 - d \\ l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_2 - l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \tag{32}$$

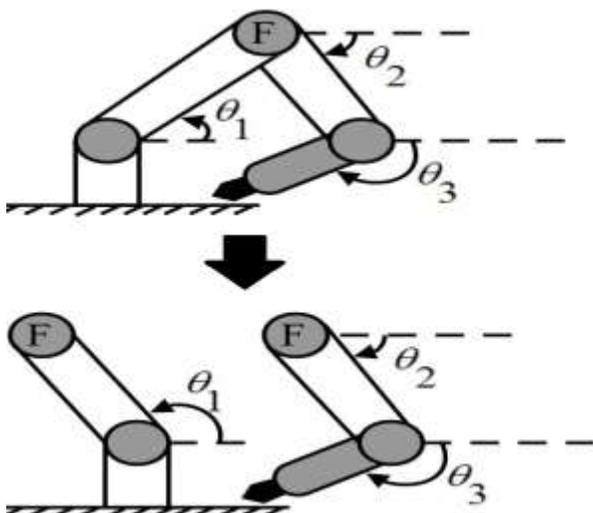


Figura 5 Apertura cadena cerrada y definición de restricciones

Fuente: Elaboración propia

El vector de restricciones holonómicas como lo cita Ghorbel es $R = [\varphi(q') \ \alpha(q')]^T$, del cual se obtiene el jacobiano de restricción $\gamma(q') = \partial R / \partial q'$ cuya proyección $R(q')$ hará posible la reducción del sistema; así como, el cálculo del modelo dinámico de la cadena cerrada mediante las ecuaciones (33) a (36).

$$R(q') = \gamma_q^{-1}(q') \begin{bmatrix} 0_{(n'-n) \times n} \\ I_{n \times n} \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$M^*(q') = R(q')^T M(q') R(q') \tag{34}$$

$$C^*(q') = R(q')^T C(q', \dot{q}') R(q') + R(q')^T M(q') \dot{R}(q) \tag{35}$$

$$g^* = R(q')^T g(q') R(q) \tag{36}$$

En (37) se muestran los valores finales que el vector de R adoptaría.

$$R(q') = \begin{bmatrix} \frac{\text{sen}(\theta_3 - \theta_1)}{3 \ 1} \\ \frac{\text{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{3 \ 2} \\ -\frac{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{2 \ 1} \\ \frac{\text{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{3 \ 2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$M^*(q') \ddot{q}' + C(q', \dot{q}') \dot{q}' + g(q') = \tau \tag{38}$$

El * presente en las ecuaciones (34) a (36), indica las nuevas matrices del sistema cerrado o restringido siendo su ecuación de par (38).

Simulación y Animación

En (Díaz, Gutierrez, Valdés y Hernández 2016) y (López, Serna y Olgún, 2016), se advierte la importancia de realizar simulaciones y animaciones que anticipen el comportamiento físico de mecanismos o exoesqueletos, en (Mendoza, Tapia, Ortega y García, 2016) la construcción de un laboratorio virtual para el monitoreo de la posición de servomotores, reafirma la necesidad de interfaces gráficas que indiquen en todo momento el desenvolvimiento de actuadores (también presentes en la robótica) durante la ejecución de tareas, es por ello que en este artículo se llevan a cabo simulaciones y animaciones de los modelos matemáticos descritos en las secciones de nuestro trabajo.

La simulación y animación de los modelos desarrollados de I a III se logran en un lenguaje de programación dedicado a la manipulación matricial y al cálculo numérico, denominado Matlab; en éste existe una herramienta llamada Simulink, que permite de una manera sencilla animar y emular el comportamiento de cualquier robot.

Los parámetros físicos en que hemos basado las simulaciones considera masas y distancias para los eslabones: $m_1=3.03$ Kg, $m_2=6.20$ Kg, $l_1=0.40$ m y $l_2=0.40$ m. El cálculo de los valores para I_{izz} , se ha simplificado gracias a las propiedades físicas que el paquete Solid Works brinda al momento de realizar las piezas del diseño asistido (CAD) del robot; sin embargo por simplicidad al ser los valores de I_{izz} pequeños, para la simulación se han considerado nulos.

Una vez que el modelo CAD del robot se ha elaborado, se procede a realizar su ensamble en un paquete de realidad virtual denominado V-Realm Builder, el cual genera un escenario tridimensional que se exporta hacia Simulink, en dónde mediante una programación a bloques se anticipan los movimientos del robot.

La trayectoria diseñada se observa en la Gráfica 1, en la Gráfica 2 se presentan las variables articulares ante la ejecución de una tarea sencilla, los pares τ_1 y τ_2 de la fase simple se presentan en la Gráfica 3, mientras que el valor de los pares durante la fase cerrada se visualizan en la Gráfica 4.

Finalmente el modelo 3D del robot se aprecia en la figura 6, cabe mencionar que la figura 1 es un esquema simplificado del modelo 3D.

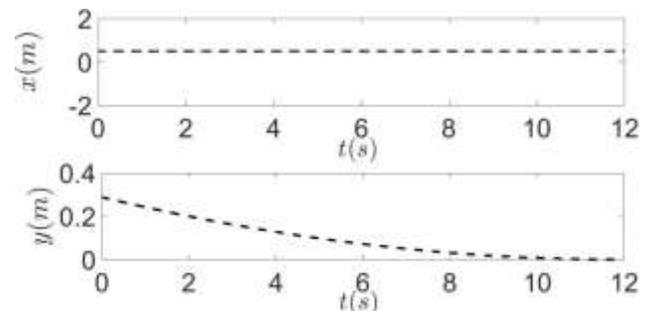


Gráfico 1 Trayectoria fase simple

Fuente: Elaboración propia

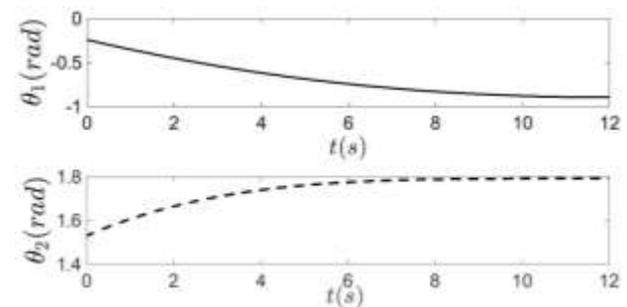
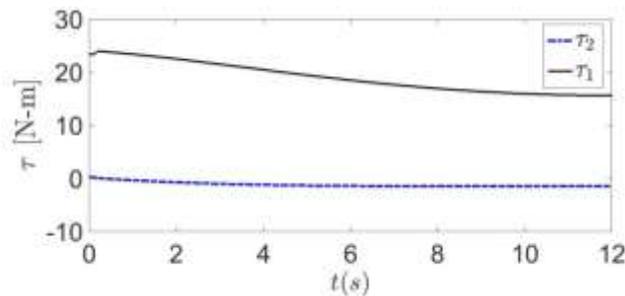


Gráfico 2 Variables articulares

Fuente: Elaboración propia



Gráfica 3 Pares fase simple

Fuente: Elaboración propia

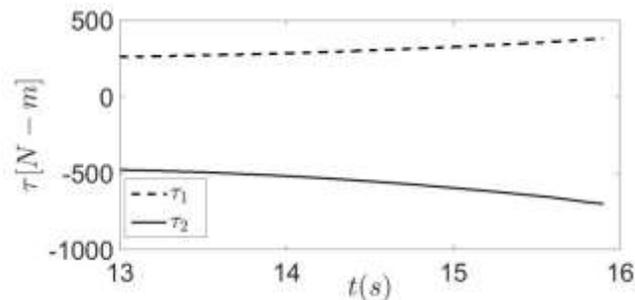


Gráfico 4 Pares fase doble

Fuente: Elaboración propia

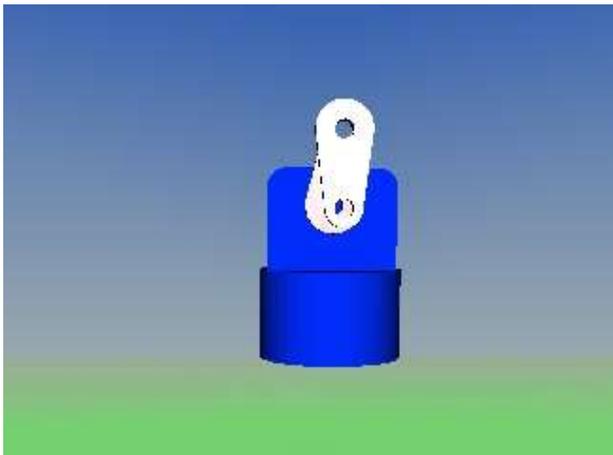


Figura 6 Mundo virtual del robot

Fuente: Elaboración propia

Agradecimiento

Se agradece al Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Parral por financiar la presente publicación.

Conclusiones

En este artículo se obtiene el modelo completo de un robot serial de 2 g.d.l. en la manipulación de un objeto, enfatizado que es necesario modelar la fase cerrada de la cadena cinemática que éste posee.

Es importante destacar que los pares durante la la cadena cerrada, sufren un considerable incremento respecto de la fase simple, lo que conlleva a reconsiderar el diseñar controladores con ganancias adaptables a las dos fases.

A futuro se pretende validar físicamente los resultados de este trabajo empleando sensores de fuerza y esquemas de control de par realimentado o de fuerza; con el fin de extender nuestras metodologías en robots con un mayor número de g.d.l.

Referencias

Lewis FL., Dawson DM, Abdallah CT. (2004). *Robot Manipulator Control: Theory and Practice*. New York, USA: Marcel Dekker Inc.

Tsai L-W. (1999). *Robot Analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*. New York, USA: Jhon Wiley & Sons, Inc.

Craig J. (1989). *Introduction to Robotics: mechanics and control*. New York, USA: Addison – Wesley.

Ollero A. (2001). *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Barcelona, España: MARCOMBO.

Fu K.S., Gonzalez R.C., Lee C.S.G., Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence. México: McGraw-Hill.

Shigley J.E, Uicker J.J. (1988). *Teoría de máquinas y mecanismos*. Edo. México, México: Mc Graw Hill/Interamericana de México.

Kelly R., Santibáñez V., Loria A. (2005), Control of Robot Manipulators in Joint Space: Prentice Hall, México.

Ghorbel, F. H., Chélat O., Gunawardana R., Longchamp R. (2011). Modeling and Set Point of Closed-Chain Mechanisms: Theory and Experiment, *IEEE Transactions on Control systems Technology*, 8(5), 801-815.

D. Iliá, A., Cammarata, y Sinatra R. (Junio 2007). *A novel formulation of dynamic balancing of five – bar linkages*, Congreso Mundial IFToMM, Besanzón, Francia.

Soto I., y Campa R. (2011). *Sobre Modelado dinámico de robots paralelos: Mecanismo de cinco barras como caso de estudio*, XIII Congreso Mexicano de Robótica, San Luís Potosí, México.

Unda J., y García J. (1985). Análisis cinemático y dinámico de sistemas mecánicos formados por varios sólidos rígidos, *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño de ingeniería*, 1(4), 31 – 48.

Campos C., Campa R., Llama M. y Pámanes A. (2011). Modelling, Simulation and Analysis of a 5-Dof Parallelogram-Link Biped Mechanism, *Praise Worthy Prize S.r.l: International Review on Modelling and Simulations (I.R.E.M.O.S)*, 4(6), 3337 – 3352.

Díaz S., Gutierrez C., Valdés D., y Hernández B. (2016). Diseño y control en tiempo real de un brazo de robot mediante una interfaz virtual, *Revista Tecnológica e Innovación*, 3(9), 49-60.

López F., Serna L., y Olguín J. (2016). Desarrollo de un exoesqueleto para la rehabilitación de miembros superiores, *Revista de Tecnología a Innovación*, 3(7), 1-12.

Mendoza R., Tapia G., Ortega F. y García J.M. (2016). Aplicación web par el control remoto de mecanismos mediante Arduino, *Revista de Tecnología e Innovación*, 3(6), 1 – 7.