

Sincronización de sistemas caóticos descritos por modelos T-S usando propiedades de regulación y observabilidad difusa

HERNÁNDEZ-CORTÉS, Tonatiuh†, RIVERA-ARREOLA, E., Daniel, MEDA-CAMPAÑA, Jesús A.

*Universidad Politécnica de Pachuca
Instituto Politécnico Nacional*

Recibido 4 de Septiembre, 2017; Aceptado 7 de Diciembre, 2017

Resumen

En este artículo la sincronización de sistemas caóticos descritos por modelos difusos T-S en tiempo continuo es tratado mediante teoría de regulación difusa y las propiedades de controlabilidad y observabilidad difusa.

Las condiciones necesarias para el diseño del regulador difuso, con base en la aproximación difusa de la variedad de error cero en estado estacionario como lineal, son presentadas en este trabajo.

Por otra parte, el diseño del observador difuso, con base en la ubicación de polos para una clase de sistemas difusos Takagi-Sugeno tipo SISO, son explotadas en este trabajo. El problema de la sincronización, vista con el enfoque de regulación y observabilidad, se estudia.

Dos ejemplos con osciladores caóticos son usados para ilustrar la efectividad de los métodos propuestos.

Controlabilidad, Observabilidad, Regulación Difusa, Sistema difuso T-S, Sistemas Caóticos

Abstract

In this article the synchronization of chaotic systems described by diffuse models T-S in continuous time is treated by diffuse regulation theory and the properties of controllability and diffuse observability.

The conditions necessary for the design of the diffuse regulator, based on the diffuse approximation of the variety of zero error in stationary state as linear, are presented in this work.

On the other hand, the design of the diffuse Observer, based on the location of Poles for a class of diffuse systems Takagi-SISO type, are exploited in this work. The problem of synchronization, seen with the approach of regulation and observability, is studied.

Two examples with chaotic oscillators are used to illustrate the effectiveness of the proposed methods

Controllability, Observability, Diffuse Regulation, Diffuse system T-S, Chaotic systems

Citación: HERNÁNDEZ-CORTÉS, Tonatiuh† RIVERA-ARREOLA, E., Daniel, MEDA-CAMPAÑA, Jesús A. Sincronización de sistemas caóticos descritos por modelos T-S usando propiedades de regulación y observabilidad difusa. Revista del Diseño Innovativo. 2017 1-1: 53-65

*Correspondencia al Autor Correo Electrónico: tonatiuh@upp.edu.mx

† Investigador contribuyendo como primer autor.

Introducción

Un sistema determinístico descubierto por E.N. Lorenz con un comportamiento aleatorio fue tan inusual que recientemente se ha nombrado como sistema caótico.

Así como los números irracionales e imaginarios, energía negativa, antimateria, etc., la lógica difusa y caos fueron gradualmente aceptados por muchos, si no es que todos, científicos e ingenieros como conceptos fundamentales así como para el desarrollo de tecnologías [1].

En particular, la tecnología de sistemas difusos ha alcanzado su madurez con una amplia gama de aplicaciones en muchas industrias, comercios y campos técnicos, que van desde el control, automatización, inteligencia artificial (para el procesamiento de señales o reconocimiento de imagen de patrones) y comercio electrónico.

Caos por otra parte, fue considerado como uno de los tres descubrimientos monumentales del siglo veinte junto con la teoría de la relatividad y mecánica cuántica; considerado como un fenómeno dinámico no lineal muy especial y alcanzado un estatus actual sobresaliente.

La interacción entre los sistemas difusos y caos se han desarrollado en los últimos 20 años conduciendo a temas de investigación tales como: modelado difuso de sistemas caóticos usando la aproximación dada por Takagi-Sugeno (T-S), descripciones lingüísticas de estos sistemas, control difuso de caos, sincronización y la combinación de caos-difuso para problemas de aplicación en ingeniería.

La sincronización de sistemas caóticos es uno de los problemas más desafiantes en la teoría del control y puede ser referido al menos a las observaciones de Huygen [2]; es entendido como: trayectorias, de dos sistemas caóticos con condiciones iniciales cercanas, que convergen una a otra a medida que $t \rightarrow \infty$, en [3] está reportado que algunos de éstos sistemas poseen una propiedad de auto sincronización.

Sin embargo, no todos los sistemas caóticos se pueden descomponer en dos respuestas de subsistemas separados y asegurar la sincronización. Las ideas en estos trabajos han conducido a mejoras en muchos campos de estudio, tales como: comunicaciones [4], sistemas de encriptación, procesamiento de información compleja con el cerebro humano, reactores bioquímicos acoplados, etc.

La sincronización caótica puede clasificarse como: *Sincronización completa*, cuando dos osciladores caóticos están mutuamente acoplados y uno conduce al otro; *sincronización generalizada*, difiere en caso previo por el hecho que son diferentes osciladores y los estados de uno están completamente definidos por el otro; *sincronización de fase*, ocurre cuando los osciladores acoplados no son idénticos y tienen diferentes amplitudes y permanecen no sincronizados, mientras que la fase de los osciladores evoluciona de forma sincronizada [5].

Vale la pena mencionar que estudios en este campo sobre sistemas no lineales han sido reformulados con base en resultados clásicos previos de teoría de control tal como [6]–[10] y muchos otros.

En este trabajo, la teoría de regulación difusa y los modelos difusos T-S se combinan con el objetivo de resolver la *sincronización difusa completa* de sistemas caóticos mediante el uso de aproximaciones locales lineales, tanto de la variedad de error cero en estado estacionario, así como, la entrada en estado estacionario

La principal contribución del presente trabajo es desarrollar una ley de control, simple y de fácil implementación, para sincronizar sistemas caóticos descritos por modelos difusos T-S en tiempo continuo, con base en la propiedad de regulación, expuesta por Isidori y Byrnes. Además, mediante la aproximación de las transformaciones $x_{ss}(t) = \pi(w(t))$ y $u_{ss}(t) = \gamma(w(t))$ cuando cambian a $x_{ss}(t) = \Pi w(t)$ y $u_{ss}(t) = \Gamma w(t)$, respectivamente, se dan las condiciones necesarias para el diseño del compensador; lo cual evita resolver el problema de las ecuaciones parciales no lineales, expuestas por Isidori y Byrnes. Por otra parte, bajo técnicas desarrolladas para la controlabilidad y observabilidad de sistemas difusos, el problema de sincronización completa de sistemas caóticos puede ser visto como un problema de observación regulada por la señal del error de observación.

I. Formulación del problema

Considerar el sistema no lineal dado por:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w(t), u(t)), \quad (1)$$

$$\dot{w}(t) = s(w(t)), \quad (2)$$

$$e(t) = h(x(t), w(t)), \quad (3)$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$, es el vector de estados de la planta; $w \in W \subset \mathbb{R}^s$, es el vector de estados del exosistema, el cual genera la referencia y/o la señal de perturbación; $u \in \mathbb{R}^m$, es la señal de entrada al sistema; la ecuación (3) describe la salida del error de seguimiento $e \in \mathbb{R}^m$, el cual es usualmente dado por la diferencia entre la salida de la planta y la señal de referencia, es decir, $h(x(t), w(t)) = c(x(t)) - q(w(t))$; $y(t) = c(x)$ es la salida de la planta, y $y_{ref} = q(w(t))$ es la salida del exosistema. Se asume que $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, $s(\cdot)$ y $h(\cdot, \cdot)$ son funciones C^k , con $s(0) = 0$, $f(0,0,0) = 0$ y $h(0,0) = 0$.

El modelado difuso propuesto por Takagi y Sugeno (T-S) cuyas reglas difusas SI-ENTONCES representan relaciones entrada-salida lineales locales, presenta una buena aproximación de un sistema no lineal. El modelo T-S se define mediante la elección adecuada de un conjunto de subsistemas lineales que relaciona las reglas asociadas al conocimiento físico con las descripciones lingüísticas de las propiedades del sistema. Estos subsistemas lineales describen adecuadamente, al menos localmente, el comportamiento del sistema no lineal para una región predefinida.

La aproximación difusa del sistema (1)-(3) se puede escribir como [11]

Planta difusa

Regla i :

SI $z_{1,1}(t)$ es $M_{1,i,1}$ y \dots y $z_{1,p_1}(t)$ es M_{1,i,p_1}

ENTONCES

$$\dot{x} = A_i x(t) + B_i u(t) + P_i w(t), \quad (4)$$

$$y = C_i x(t), \quad \text{para } i = 1 \dots r_1,$$

Exosistema

Regla i :

SI $z_{2,1}(t)$ es $M_{2,i,1}$ y \dots y $z_{2,p_2}(t)$ es M_{2,i,p_2}

ENTONCES

$$\dot{w}(t) = S_i w(t), \tag{5}$$

$$y_{ref} = Q_i w(t), \quad \text{para } i = 1 \dots r_2,$$

donde r_1 y r_2 es el número de reglas de la planta difusa, los conjuntos $M_{1,i,j}$ y $M_{2,i,j}$ se definen a partir del conocimiento previo de la dinámica del sistema.

Se asume que las matrices A_i, B_i, P_i, S_i, Q_i y C_i son obtenidas linealizando el sistema alrededor de algunos puntos de operación $(x, w, u) = (x^i, w^i, u^i)$, es decir,

$$A_i = \left. \frac{\partial f(x, w, u)}{\partial x} \right|_{(x^i, w^i, u^i)}, \quad B_i = \left. \frac{\partial f(x, w, u)}{\partial u} \right|_{(x^i, w^i, u^i)}$$

$$P_i = \left. \frac{\partial f(x, w, u)}{\partial w} \right|_{(x^i, w^i, u^i)}, \quad C_i = \left. \frac{\partial h(x, w)}{\partial x} \right|_{(x^i, w^i)}$$

$$S_i = \left. \frac{\partial s(w)}{\partial w} \right|_{(w^i)}, \quad Q_i = \left. \frac{\partial h(w)}{\partial w} \right|_{(w^i)}$$

Considerando el sector no lineal presentado en [12], que produce una representación exacta del sistema no lineal original, al menos en una región local del diagrama de fase, entonces, el sistema quedará definido por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) [A_i x(t) + B_i u(t) + P_i w(t)], \tag{6}$$

$$\dot{w}(t) = \sum_{i=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) S_i w(t), \tag{7}$$

$$e(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) C_i x(t) - \sum_{i=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) Q_i w(t). \tag{8}$$

donde $x(t) \in R^n$ son estados de la planta; $w(t) \in R^s$ los estados del exosistema; $u(t) \in R^m$ es la señal de control; $e(t) \in R^m$ es el error de seguimiento, y $z_{*,1} = [z_{*,1}(t) z_{*,2}(t) \dots z_{*,p}(t)]$ es una función de $x(t)$ y/o $w(t)$.

Entonces el problema de regulación de la salida exacta está definido como: encontrar, si es posible, un controlador

$$u(t) = \alpha(x(t), w(t)),$$

tal que:

1. el punto de equilibrio de $x = 0$ del sistema en lazo cerrado sin señal externa ($w(t) = 0$)

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) [A_i x(t) + B_i \alpha(x(t), 0) + P_i w(t)],$$

es asintóticamente estable;

2. la solución del sistema en lazo cerrado (6-8) y satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Obsérvese que el modelo difuso T-S (6)-(8) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(t)x(t) + \tilde{B}(t)u(t) + \tilde{P}(t)w(t), \tag{9}$$

$$\dot{w}(t) = \tilde{S}w(t), \tag{10}$$

$$e(t) = \tilde{C}(t)x(t) - \tilde{Q}(t)w(t), \quad (11)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) &= \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t))A_i & \tilde{B}(t) &= \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t))B_i \\ \tilde{P}(t) &= \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t))P_i & \tilde{C}(t) &= \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t))C_i \\ \tilde{S}(t) &= \sum_{i=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t))S_i & \tilde{Q}(t) &= \sum_{i=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t))Q_i \end{aligned}$$

Antes de continuar y de acuerdo con la teoría de regulación de Isidori, la linealización alrededor de $x = 0$ para el sistema no lineal (1)-(3) está dada por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Pw(t), \quad (12)$$

$$\dot{w}(t) = Sw(t), \quad (13)$$

$$e(t) = Cx(t) - Qw(t), \quad (14)$$

además, considerando que existen transformaciones tales que $x_{ss}(t) = \pi(w(t))$, $u_{ss}(t) = \gamma(w(t))$, con $\pi(0) = 0$ y $\gamma(0) = 0$ que satisfacen

$$\frac{\partial \pi(w(t))}{\partial w(t)} s(w(t)) = f(\pi(w(t)), w(t), \gamma(w(t))), \quad (15)$$

$$0 = h(\pi(w(t)), w(t)), \quad (16)$$

el problema de regulación se puede resolver y el controlador estará dado por

$$u(t) = K[x(t) - \pi(w(t))] + \gamma(w(t)). \quad (17)$$

Se puede ver que para el caso lineal las transformaciones $x_{ss}(t) = \pi(w(t))$ y $u_{ss}(t) = \gamma(w(t))$ cambian a $x_{ss}(t) = \Pi w(t)$ y $u_{ss}(t) = \Gamma w(t)$, respectivamente. Por lo tanto las condiciones (15)-(16) se reducen a un conjunto de ecuaciones matriciales lineales (Ecuaciones de Francis)

$$\Pi S = A\Pi + B\Gamma + P, \quad (18)$$

$$0 = C\Pi - Q. \quad (19)$$

Considérese nuevamente el modelo difuso definido por (6-8). De [13] y [11] el problema de regulación difusa se formula como un sistema no lineal descrito por un modelo difuso (T-S), siguiendo una señal de referencia generada por un exosistema también difuso.

Entonces, éste se puede resolver usando reguladores locales siempre y cuando se cumplan las siguientes condiciones: 1) El estado estacionario $\pi(w(t))$ es el mismo para todos los subsistemas locales y 2) las matrices locales de entrada (B_i) son iguales para todos los subsistemas locales, es decir, ($B_1 = B_2 = \dots = B_i$). Por lo tanto, el controlador difuso total toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) K_i \left[x(t) - \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) \Pi_{ij} w(t) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) \Gamma_{ij} w(t). \quad (20) \end{aligned}$$

Con Π_{ij} y Γ_{ij} como solución de $r_1 \cdot r_2$ problemas locales de regulación lineal:

$$\Pi_{ij} S_i = A_i \Pi_{ij} + B_i \Gamma_{ij} + P_i, \quad (21)$$

$$0 = C_i \Pi_{ij} - Q_j. \quad (22)$$

Metodología

Modelado difuso de sistemas caóticos

Para utilizar la técnica de regulación difusa será necesaria la representación de los sistemas caóticos mediante modelos difusos del tipo T-S. Para esto, las técnicas descritas anteriormente se usan para construir dichos modelos.

Atractor de Lorenz con señal de entrada

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -ax_1(t) + ax_2(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= cx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t), \quad (23) \\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - bx_3(t). \end{aligned}$$

Donde a, b y c son constantes y $u(t)$ es el término de control.

Para construir el modelo difuso T-S del atractor de Lorenz, los términos cuadráticos no lineales $x_1(t) x_3(t)$ y $x_1(t) x_2(t)$ deben estar expresados como la suma ponderada de algunas funciones lineales [14] es decir, el término no lineal

$$f(x(t)) = x_1(t)x_2(t)$$

puede ser representador por

$$f(x(t)) = \left[\sum_{i=1}^2 h_i g_i(x(t)) \right] x_2(t),$$

donde

$$g_1(x(t)) = M_1, \quad g_2(x(t)) = M_2,$$

y

$$h_1(x(t)) = \frac{-x_1(t)+M_2}{M_2-M_1}, \quad (24)$$

$$h_2(x(t)) = \frac{x_1(t)-M_1}{M_2-M_1}. \quad (25)$$

Dado que todos los términos de (23) son

funciones de $x_1(t)$ podemos construir un modelo difuso T-S exacto del sistema (23) dado por:

Regla 1:

SI $x_1(t)$ es M_1 ,

ENTONCES

$$\dot{x} = A_1x(t) + Bu(t),$$

Regla 2:

SI $x_1(t)$ es M_2 ,

ENTONCES

$$\dot{x} = A_2x(t) + Bu(t),$$

donde:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & -M_1 \\ 0 & M_1 & b \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & -M_2 \\ 0 & M_2 & -b \end{bmatrix},$$

$$B = [1 \quad 0 \quad 0]^T,$$

con $a = 10$, $b = 8/3$, y $c = 28$, además, podemos utilizar (24) y (25) como funciones de membresía escogiendo a $[M_1 \ M_2]$ como $[-20 \ 30]$, debido a que $x_1(t)$ está aparentemente acotada dentro de la región $[-20 \ 30]$ como se muestra en la fig. 3.1

Atractor de Lorenz difuso

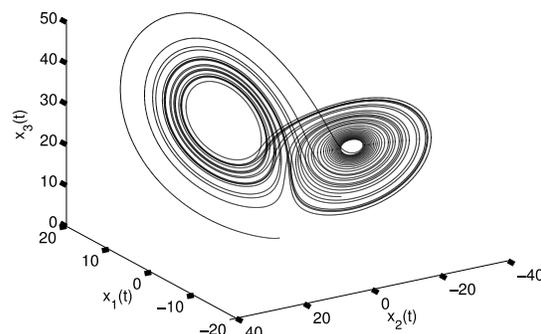


Figura 3.1 Atractor de Lorenz Difuso con condiciones iniciales en $x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$

Atractor de Rössler con señal de entrada

La dinámica está dada por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2(t) - x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + ax_2(t), \\ x_3(t) &= bx_1(t) - (c - x_1(t))x_3(t) - u(t). \end{aligned} \tag{26}$$

donde a, b y c son constantes y u(t) el término de control. Asumimos que $x_1(t) \in [c - d \ c + d]$ y $d > 0$. Entonces el modelo difuso que representa al sistema no lineal (26) bajo $x_1(t) \in [c - d \ c + d]$ está dado por:

Regla 1:

SI $x_1(t)$ es X_{min} ,

ENTONCES

$$\dot{x} = A_1x(t) + Bu(t),$$

Regla 2:

SI $x_1(t)$ es X_{max} ,

ENTONCES

$$\dot{x} = A_2x(t) + Bu(t),$$

donde:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & -d \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & d \end{bmatrix},$$

$$B = [0 \ 1 \ 0]^T,$$

Las funciones de membresía son:

$$h_1(x(t)) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c - x_1(t)}{d} \right) \tag{27}$$

$$h_2(x(t)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c - x_1(t)}{d} \right) \tag{28}$$

con $a = 0.34$, $b = 0.4$, y $c = 4.5$.

Como resultado, se obtiene la misma respuesta que el sistema no lineal definido en (26) como se muestra en la fig. 3.2.

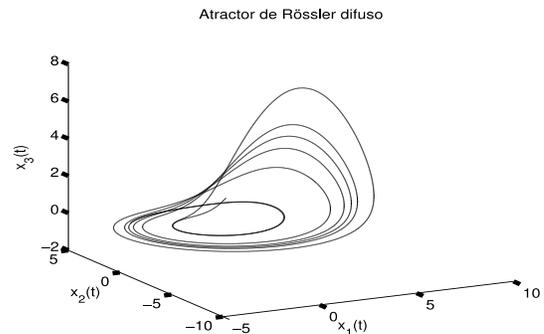


Figura 3.2 Atractor de Rössler Difuso con condiciones iniciales en $x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$

En la siguiente sección la teoría de regulación es empleada para sincronizar sistemas caóticos descritos por modelos difusos en tiempo continuo. Ambos, el sistema de referencia, dado por el exosistema, y la respuesta del sistema, la planta, son modelados por el mismo atractor (Rössler) con la diferencia que el sistema de respuesta está influenciado por una señal de entrada.

Este tipo de sincronización es conocida como Sincronización Completa [15].

Sincronización completa mediante regulación difusa

Considere $\dot{w} = f(w)$ como el sistema de referencia (exosistema) y $\dot{x} = f(x, w, u)$ como el sistema de respuesta (planta); considere las ecuaciones (26) para ambos sistemas, con la diferencia que $\dot{w} = f(w)$ no está presente el término de control.

Tomando en cuenta que estos sistemas se pueden representar de forma exacta por los modelos difusos T-S, cuando $x_1(t) \in [c - d \ c + d]$, el sistema difuso estará definido por las siguientes ecuaciones

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_{1,i}(x_1(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)],$$

$$\dot{w}(t) = \sum_{i=1}^2 h_{2,i}(w_1(t)) S_i w(t),$$

$$e(t) = \sum_{i=1}^2 h_{1,i}(x_1(t)) C_i x(t) - \sum_{i=1}^2 h_{2,i}(w_1(t)) Q_i w(t).$$

Donde:

$$A_1, S_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & -X_{min} \\ 0 & X_{min} & b \end{bmatrix}, \quad A_2, S_2 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & -X_{max} \\ 0 & X_{max} & -b \end{bmatrix},$$

$$B_1, B_2 = [0 \ 1 \ 0]^T, \quad C_i, Q_i = [1 \ 0 \ 0].$$

Ahora bien, la solución para $r_1 * r_2$ problemas matriciales locales para Π_{ij} y Γ_{ij} , definidos por (21) y (22) están dados por:

$$\Pi_{ij} = \Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{1,1} = [0 \ 0 \ 0], \quad \Gamma_{1,2} = [0 \ 0 \ 20],$$

$$\Gamma_{2,1} = [0 \ 0 \ -20], \quad \Gamma_{2,2} = [0 \ 0 \ 0].$$

Como se puede observar todos los subsistemas tienen la misma variedad en estado estacionario $\pi(w(t)) = \Pi w(t)$.

Por otra parte, el diseño de un estabilizador difuso es necesario, aquí varios métodos son posibles no haciendo única la aproximación del PDC, refiérase a [16]–[18]. Las ganancias K_i son:

$$K_1 = [4.47 \ -0.58 \ 5.96], \quad K_2 = [4.47 \ -0.58 \ -14.04],$$

Los resultados, mostrados en la figs. 4.1 y 4.2 con condiciones iniciales en $x_1(0) = 6$, $x_2(0) = 3$ y $x_3(0) = 5$; aplicando la ley de control definida en (20), muestran un comportamiento satisfactorio del controlador

difuso.

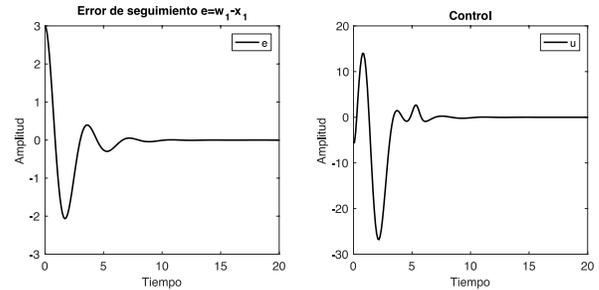


Figura 4.1 Señal de control y error de seguimiento de la sincronización completa de dos atractores Rössler con condiciones iniciales en $x(0) = [6 \ 3 \ 5]^T$, $w(0) = [3 \ 3 \ 5]^T$

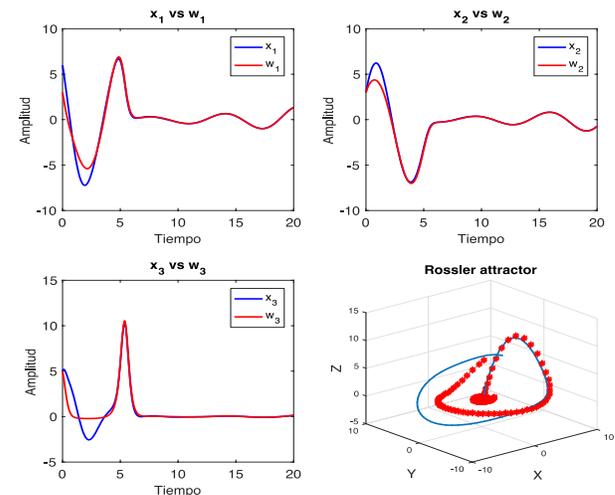


Figura 4.2 Seguimiento de la sincronización completa de dos atractores Rössler con condiciones iniciales en $x(0) = [6 \ 3 \ 5]^T$, $w(0) = [3 \ 3 \ 5]^T$

Es importante mencionar que la propiedad de regulación de estos sistemas incluyen las perturbaciones a rechazar. Por lo que los resultados, mostrados en la figs. 4.3 y 4.4 con condiciones iniciales en $x_1(0) = 6$, $x_2(0) = 3$, $x_3(0) = 5$ y una perturbación a los 20 seg; con la ley de control definida en (20), muestran un comportamiento satisfactorio del controlador difuso a estos sistemas altamente sensibles.

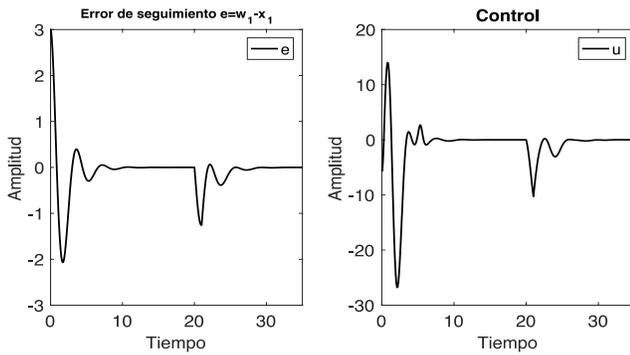


Figura 4.3 Señal de control y error de seguimiento de la sincronización completa de dos atractores Rössler con condiciones iniciales en $x(0) = [6 \ 3 \ 5]^T$, $w(0) = [3 \ 3 \ 5]^T$ y perturbación

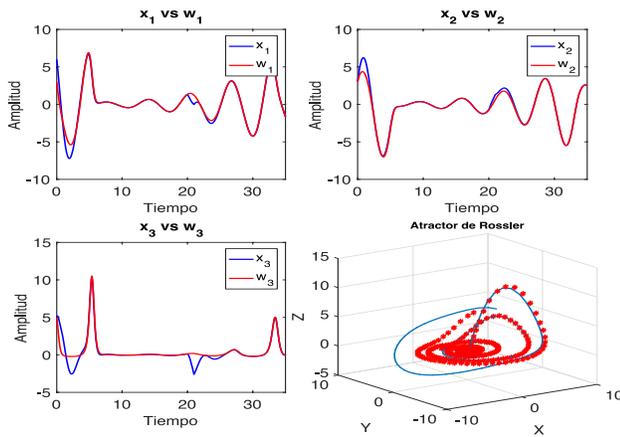


Figura 4.4 Seguimiento de la sincronización completa de dos atractores Rössler con condiciones iniciales en $x(0) = [6 \ 3 \ 5]^T$, $w(0) = [3 \ 3 \ 5]^T$ y perturbación

Observador difuso aplicado a sincronización caótica

La estructura del observador para el sistema difuso T-S (9) se muestra a continuación

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) - L(x(t))(y(t) - \tilde{y}(t)) \quad (29)$$

$$\tilde{y}(t) = C(x(t))\tilde{x}(t)$$

El término $y(t) - \tilde{y}(t)$ representa el error de observación, dado por la diferencia entre la salida del sistema y la salida estimada, es decir,

$$e(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$$

Además, la señal de control está dada por

$$u(t) = -K(\tilde{x}(t)) \tilde{x}(t), \quad (30)$$

donde $\tilde{x}(t)$ es vector de estados estimado en el observador difuso.

Por otra parte, podemos definir como error estacionario a la diferencia entre los estados reales y los observados como:

$$e_e(t) = x(t) - \tilde{x}(t). \quad (31)$$

Derivando el error en estado estacionario con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{e}_e(t) = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t). \quad (32)$$

Teniendo en cuenta que $x = e_e + \tilde{x}$ y sustituyendo $\dot{x}(t)$ y $\dot{\tilde{x}}(t)$ en (32) se obtiene

$$\dot{e}_e(t) = [A(x(t)) - L(x(t))C(x(t))]e_e. \quad (33)$$

Por lo que el sistema es completamente observable si es posible elegir una matriz $L(x(t))$ tal que $A(x(t)) - L(x(t))C(x(t))$ tenga los valores característicos deseables para que el error tienda a cero.

Entonces, el observador está definido por las siguientes ecuaciones

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))Kx(t) - B(x(t))Ke_e, \quad (34)$$

$$\dot{e}_e(t) = [A(x(t)) - L(x(t))C(x(t))]e_e. \quad (35)$$

El sistema resultante se puede interpretar de manera gráfica como lo indica la fig. 5.1.

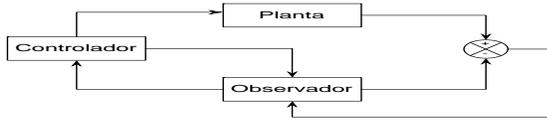


Figura 5.1 Diagrama esquemático del observador difuso.

Por otra parte la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea observable es que el sistema tenga una matriz de observabilidad $O(x(t))$

$$O(x(t)) = \begin{bmatrix} C(x(t)) \\ C(x(t))A(x(t)) \\ C(x(t))(A(x(t)))^2 \\ \vdots \\ C(x(t))(A(x(t)))^{n-2} \\ C(x(t))(A(x(t)))^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

de rango completo, es decir, que existan n vectores fila, o n vectores columna, linealmente independientes.

Para verificar la observabilidad de (4)-(5), es necesario tomar en cuenta las $r - 1$ regiones de interpolación y construir, para cada región, la correspondiente matriz $O(x(t))$. Este procedimiento se facilita cuando a lo más dos reglas difusas están activadas al mismo instante para cualquier $t \geq 0$ y $\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) = 1$.

Entonces, el análisis de observabilidad de dos sistemas adyacentes, se puede verificar mediante la existencia de n filas linealmente independientes de la matriz $O(x(t))$, tomando en cuenta que $h_i(x(t)) + h_j(x(t)) = 1$ para $i, j = 1, \dots, r$, y para las regiones de interpolación se debe cumplir que $h_i \cap h_j \neq \emptyset$. Así pues, considerando que $h_i(x(t)) = 1 - h_j(x(t))$ la matriz de observabilidad difusa $O(x(t))$, para las regiones de interpolación definidas por las reglas i y j , sólo dependerán del valor de la función de membresía $h_j(x(t))$. Por lo que, (4)-(5) es difuso observable si las $r - 1$ regiones de interpolación, tienen rango completo para $h_j(x(t)) \in [0 \ 1]$.

Considere ahora el sistema caótico de Lorenz como $\dot{x} = f(x, w, u)$. Las ecuaciones para el sistema mencionado anteriormente son descritas en (23), con $\alpha = 10$, $\beta = 8/3$ y $r = 28$. Este sistema puede ser exactamente representado por un modelo difuso T-S de dos reglas dentro de la región $x_1 \in [M_1, M_2]$. Descrito por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\},$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t))C_i x(t)$$

La representación del sistema difuso global es:

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t),$$

$$y(t) = C(x(t))x(t),$$

con $M_1 = -30, M_2 = 30$,

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} -10h_1(x(t)) - 10h_2(x(t)) & 10h_1(x(t)) + 10h_2(x(t)) & 0 \\ 28h_1(x(t)) + 28h_2(x(t)) & -h_1(x(t)) - h_2(x(t)) & 30h_1(x(t)) - 30h_2(x(t)) \\ 0 & 30h_1(x(t)) - 30h_2(x(t)) & -\frac{8h_1(x(t))}{3} - \frac{8h_2(x(t))}{3} \end{bmatrix}$$

$$y C(x(t)) = [1 \ 0 \ 0]$$

Note que en el sistema se encuentra ausente el término $B(x(t))u(t)$, puesto que, en este caso, se requiere estimar el vector de estado $x(t)$ y no estabilizar el sistema caótico.

Debido a que sólo existe una región de interpolación ($r - 1 = 1$) y considerando $h_1(x(t)) = 1 - h_2(x(t))$, entonces, la matriz $O(x(t))$, puede expresarse sólo en términos de la función de membresía $h_2(x(t))$, es decir,

$$O(x(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & 10 & 0 \\ 380 & -110 & 300 - 600 h_2(x(t)) \end{bmatrix}$$

Por otra parte, la condición para la observabilidad difusa recae en el rango de la matriz $O(x(t))$. Por lo tanto, mediante el cálculo de las raíces del determinante: $\det(O(x(t))) = 0$, es posible comprobar que el rango de $O(x(t))$ es completo para toda $h_2(x(t)) \in [0, 1]$. Lo anterior conduce a la conclusión de que el sistema difuso es observable.

Ahora bien, con el fin de obtener la ganancia del observador, es necesario proponer valores propios tales como: $s_1 = -5, s_2 = -3, y s_3 = -3$. Entonces, la ecuación característica está definida como:

$$P(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)$$

$$P(s) = s^3 + 11s^2 + 39s + 45$$

Además, a partir del teorema de Caley-Hamilton se obtiene la matriz polinomial:

$$P(A(x(t))) = A(x(t))^3 + 11A(x(t))^2 + 39A(x(t)) + 45I$$

con I como la matriz identidad de dimensiones apropiadas, resultando:

La ganancia del observador se calcula mediante

$$L(x(t)) = P[A(x(t))]^{-T} \begin{bmatrix} C(x(t)) \\ C(x(t))A(x(t)) \\ C(x(t))(A(x(t)))^2 \\ \vdots \\ C(x(t))(A(x(t)))^{n-2} \\ C(x(t))(A(x(t)))^{n-1} \end{bmatrix},$$

donde $-T$ representa la inversa de la matriz transpuesta, entonces

$$L(x(t)) = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

Los resultados obtenidos con $x(0) = [2 \ 1 \ 1]^T$ y $\bar{x}(0) = [-5 \ 0 \ 0]^T$ se muestran en las fig. 5.2 y 5.3. Claramente, el comportamiento del estado del observador diseñado se estima de forma adecuada.

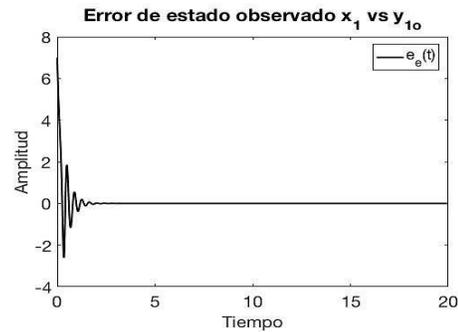


Figura 5.2 Señal de error entre el estado observado y el estado real con $x(0) = [2 \ 1 \ 1]^T$ y $\bar{x}(0) = [-5 \ 0 \ 0]^T$

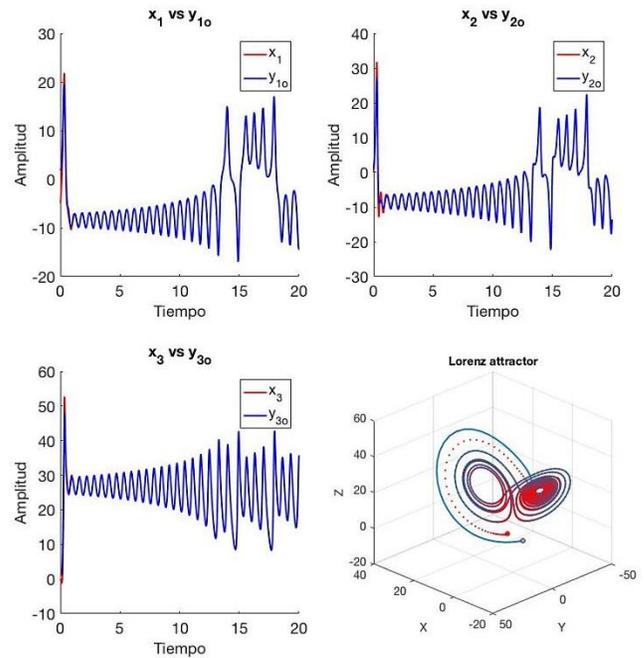


Figura 5.3 Seguimiento de la sincronización completa de dos atractores Lorenz con condiciones iniciales en $x(0) = [2 \ 1 \ 1]^T, w(0) = [-5 \ 0 \ 0]^T$

Conclusiones

En este trabajo se ha propuesto la sincronización de sistemas caóticos mediante la teoría de regulación difusa; las condiciones para el diseño del controlador se presentan. Además, el diseño de un observador difuso con base en la ubicación de valores propios, como un estimador de estado caótico se ha propuesto. En ese sentido, el comportamiento del observador puede ser fácilmente modificado mediante la selección de los valores propios. La sincronización completa de dos osciladores caóticos, queda de manifiesto de la efectividad del controlador y observador propuestos.

Referencias

- G. C. Zhong Li Wolfgang A. Halang, *Integration of Fuzzy Logic and Chaos Theory*, vol. 187. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- C. Hugenii, “Horologium Oscillatorium (Parisiis, France, 1973). English translation: The Pendulum Clock (Iowa State University Press),” 1986.
- L. Kocarev and U. Parlitz, “Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, 1996.
- K. M. Cuomo and A. V. Oppenheim, “Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 71, no. 1, pp. 65–68, Jul. 1993.
- I. Zelinka, S. Celikovskiy, H. Richter, and G. Chen, *Evolutionary Algorithms and Chaotic Systems*. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- K. Tanaka and H. O. Wang, *Fuzzy Control Systems Design and Analysis. A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley and Sons, Inc., 2001.
- E. Solak, Ö. Morgül, and U. Ersoy, “Observer-based control of a class of chaotic systems,” *Phys. Lett. A*, vol. 279, no. 1–2, pp. 47–55, 2001.
- Ö. Morgül and E. Solak, “On the Synchronization of Chaos Systems by Using State Observers,” *Int. J. Bifurc. Chaos*, vol. 7, no. 6, pp. 1307–1322, 1997.
- T. Hernández-Cortés, A. V. Curtidor López, J. Rodríguez-Valdez, J. A. Meda Campaña, R. Tapia Herrera, and J. de J. Rubio, “Synchronization of Discrete-Time Chaotic Fuzzy Systems by means of Fuzzy Output Regulation Using Genetic Algorithm,” *Math. Probl. Eng.*, vol. 2015, p. 18, 2015.
- T. Hernández Cortés, J. A. Meda Campaña, L. A. Páramo Carranza, and J. C. Gómez Mancilla, “A Simplified Output Regulator for a Class of Takagi-Sugeno Fuzzy Models,” *Math. Probl. Eng.*, vol. Article ID, 2015.
- J. a. Meda-Campaña, B. Castillo-Toledo, and G. Chen, “Synchronization of chaotic systems from a fuzzy regulation approach,” *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 160, no. 19, pp. 2860–2875, Oct. 2009.
- K. Tanaka and H. O. Wang, *FUZZY CONTROL SYSTEMS DESIGN AND ANALYSIS*. 2001.
- A. Isidori and C. Byrnes, “OUTPUT REGULATION OF NONLINEAR SYSTEMS,” *Autom. Control. IEEE Trans.*, vol. 35, no. 2, pp. 131–140, 1990.
- J. Lee, J. B. Park, and G. Chen, “Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties,” *Fuzzy Syst. IEEE Trans.*, vol. 9, no. 2, pp. 369–379, 2001.
- K. Pyragas, “Weak and strong synchronization of chaos,” *Phys. Rev. E*, vol. 54, no. 5, pp. R4508–4512, 1996.

J. Meda-Campana, J. Rodriguez-Valdez, T. Hernandez-Cortes, R. Tapia-Herrera, and V. Nosov, "Analysis of the fuzzy controllability property and stabilization for a class of TS fuzzy models," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 6706, no. c, pp. 1–1, 2014.

D.-H. Lee, J.-B. Park, and Y.-H. Joo, "Further Theoretical Justification of the α -Samples Variation Approach for Discrete-Time Takagi-Sugeno Fuzzy Systems," *Fuzzy Syst. IEEE Trans.*, vol. 19, no. 3, pp. 594–597, 2011.

Narimani and H. K. Lam, "{SOS--}Based Stability Analysis of Polynomial Fuzzy-Model-Based Control Systems Via Polynomial Membership Functions," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 18, no. 5, pp. 862–871, 2010.