# Cálculo de velocidad máxima permitida en trayectoria curva de un vehículo transportador de productos lácteos

GARCÍA, César\*† y RAMÍREZ, Ignacio

Recibido Enero 13, 2017; Aceptado Marzo 15, 2017

#### Resumen

Los accidentes por volcadura en vehículos para trabajo pesado son un problema de seguridad vial, que ocasiona pérdidas económicas y humanas elevadas. El presente artículo muestra el análisis realizado a un camión transportador de productos lácteos modelo ELF 200 para determinar la velocidad a la cual se produce una volcadura sobre una trayectoria curva. Se determina el centro de gravedad del vehículo en base a la capacidad de carga del mismo. Se desarrolla el análisis considerando primero una trayectoria sin inclinación y posteriormente una trayectoria peraltada. Mediante el uso de las ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido se determina la velocidad de volcadura y se realiza un análisis con el centro de gravedad del vehículo desplazado. Los resultados obtenidos son comparados con los obtenidos mediante las ecuaciones diferenciales de movimiento para un vehículo de dos y tres grados de libertad derivadas de las ecuaciones de Lagrange. Estos resultados proporcionan la información necesaria para evitar futuras pérdidas económicas a la empresa de productos lácteos. El trabajo presentado es la base de un proyecto de investigación que incluye el análisis dinámico completo de dicho vehículo.

## Abstract

Rollover accidents in Heavy-Duty vehicles are a main road safety problem which leads to high human and economic losses. This paper shows the dinamyc analysis of an ISUZU Truck ELF 200 model which trasports dairy products to determine speed at which a rollover takes place on a curved trajectory. The center of gravity is determined based on the load capacity of the vehicle. The analysis is performed considering first a curved trajectory without inclination and then a trajectory with some camber. Trough the use of rigid body motion equations, rollover speed is determined and an analysis is made considering a displacement of the center of gravity. The obtained results are compared with those obtained by the differential equations of motion of a two and three degrees of freedom vehicle derived form the Lagrange's equations. These results provide necessary information to avoid economic losses to the dairy company. The work here presented is the basis of a complete research project which includes the complete dynamic analysis of such vehicle.

Rollover, speed, dynamic analysis

### Volcadura, velocidad, análisis dinamico

**Citación:** GARCÍA, César y RAMÍREZ, Ignacio. Cálculo de velocidad máxima permitida en trayectoria curva de un vehículo transportador de productos lácteos. Revista de Ingeniería Mecánica 2017, 1-1: 31-38

<sup>\*</sup> Correspondencia al Autor (Correo Electrónico: ceogarcia26@gmail.com)

<sup>†</sup> Investigador contribuyendo como primer autor.

## Introducción

Los accidentes debido a volcaduras en vehículos para trabajo pesado son un problema de seguridad vial alrededor del mundo. (Winkler, 2000) Aunque los accidentes por volcadura son relativamente poco comunes, son incidentes normalmente mortales cuando estos ocurren. El porcentaje de accidentes por volcadura en México en 2015 fue de 2.21%, similar al porcentaje en el estado de Hidalgo de 2.87% (www.inegi.org.mx, s.f.). Los accidentes por volcadura de un camión transportador de productos lácteos ascendieron a 8, ocasionando pérdidas cercanas a 2.0 millones de pesos durante ese año. La figura 1 muestra la incidencia de dichos accidentes en 2015 y las pérdidas económicas generadas, también se puede observar que el principal vehículo involucrado es un camión ligero modelo ELF 200. (Danone de México S.A. de C.V. 2015)

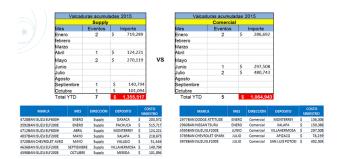
Por lo tanto, es de suma importancia llevar a cabo el análisis dinámico en un camión transportador de productos lácteos para determinar todas las variables involucradas en un accidente por volcadura, tanto las que dependen del camino como las que dependen del camión y sus propiedades físicas. Las variables a tomar en cuenta respecto de las del camión características son: peso. dimensiones de chasis y compartimento de carga, ubicación del centro de gravedad del vehículo y el coeficiente de fricción entre las ruedas y el pavimento. Por otra parte, las características del camino son el ángulo de inclinación o peralte y el radio de la curva por la cual circula el vehículo, así como también las características del pavimento.

La volcadura de un vehículo se da cuando las ruedas internas a la curva pierden contacto con el piso, provocando que este gire sobre las ruedas externas. Por otra parte, el deslizamiento de un vehículo en una trayectoria curva se da cuando la fuerza centrifuga opuesta a la fuerza de fricción alcanza o sobrepasa su valor máximo de rozamiento estático. Es importante hacer notar que antes de que ocurra una volcadura ocurrirá primero el deslizamiento lateral y que, en casos críticos es deseable que ocurra primero dicho deslizamiento debido a que se puede corregir este error teniendo un conductor con cierta experiencia.

El Presente trabajo proporciona un análisis dinámico para determinar la velocidad permitida máxima de un vehículo transportador de productos lácteos en una trayectoria curva, así como también sus dimensiones y las características físicas del compartimento de carga tomando como base un modelo de camión ligero de 4.1 a 5.2 toneladas de peso bruto vehicular, con el fin de evitar volcaduras y pérdidas económicas y humanas a la empresa proveedora de dichos productos.

Se han realizado trabajos para predecir la tendencia de una volcadura en tiempo real para indicar el riesgo de este tipo de accidente en un autobús. Este algoritmo de predicción consiste en un análisis de estimación de volcadura, basado en el cálculo de la velocidad de advertencia em tiempo real. Guizhen diseñó algoritmo dinámico simple para determinar el ángulo de deslizamiento y la inclinación del camino y así determinar la influencia que tienen estos en la tendencia de una volcadura. Mediante la comparación de la aceleración lateral máxima estable con la aceleración lateral posible dependiendo del límite de fricción entre el pavimento y la rueda, se determinó la velocidad usando las mediciones de estas aceleraciones y el radio de giro del vehículo. (Guizhen, Honggang, & Pengcheng, 2016)

Dicho análisis permitirá generar un modelo matemático, el cual hará posible considerar las variables que causan que el camión sufra un accidente por volcadura; considerando la inclinación de la curva se estimará la distancia máxima a la cual puede estar desplazado el centro de gravedad del vehículo respecto de su línea de centros. Se llevará a cabo el estudio para un vehículo cuyo centro de gravedad está localizado sobre la línea de centros y cuando se encuentra desplazado una distancia dx de la línea de centros.



**Figura 1** Incidencia de accidentes por volcadura en 2015

## Metodología

## Características del Vehículo

El presente estudio considera a un camión transportador de productos lácteos modelo ELF 200 como el que se muestra en la figura 2.



Figura 2 Modelo del vehículo a analizar

Las características del vehículo han sido proporcionadas por parte de la empresa proveedora de productos lácteos en México, las cuales incluyen dimensiones del camión, incluidas en la ficha técnica del mismo y las características del compartimento de carga, proporcionadas por la empresa proveedora de compartimentos de carga las cuales incluyen dimensiones del compartimento de carga, masa (figura 3) y centro de gravedad de dicho compartimento

FICHA TECNICA DANONE PROXY 2 / 2012											
DIMENSIONES											
LARGO INTERIOR	3.07 mts										
ANCHO INTERIOR	1.86 mts										
ALTO INTERIOR	1.83 mts										
LARGO EXTERIOR	3.28 mts										
ANCHO EXTERIOR	2.03 mts										
ALTO EXTERIOR	2.00 mts										
CHASIS	ISUZU ELF 200										
EQUIPO DE REFRIGERACION	CARRIER 30S										
PESOS											
PESO DE CARROCERIA	860 kg	*PESO BASCULA									
PESO DE CHASIS		PESO BASCOLA									
	1875 kg										
PESO EQUIPO DE REFRIGERACION	125 kg										
TOTAL	2860 kg										

**Figura 3** Dimensiones y masa del compartimento de carga

## Cinética

Considérese el camión de masa m como el que se muestra en la figura 3, el cual circula por una trayectoria curva de radio R y peralte con una inclinación  $\theta$ , el cual está sujeto a dos fuerzas normales  $N_1$  y  $N_2$  y dos fuerzas de fricción entre las llantas y el pavimento  $Fr_1$  y  $Fr_2$ . Suponga que el centro de gravedad se encuentra como se indica en la figura.

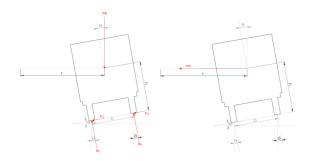


Figura 4 Vehículo de masa m que se desplaza sobre una trayectoria curva de radio r y ángulo de inclinación  $\theta$ 

Tomado en cuenta un análisis cinético de cuerpo rígido se tiene que la suma de fuerzas normales es igual a la sumatoria de la masa del camión por la aceleración normal del mismo.

$$F_{r1}\cos\theta + F_{r2}\cos\theta + N_1\sin\theta + N_2\sin\theta = \frac{mV^2}{R}$$
 (1)

Posteriormente, haciendo suma de fuerzas en dirección vertical se tiene que:

$$N_1 + N_2 = mg\cos\theta \tag{2}$$

Al hacer suma de momentos alrededor del apoyo en la llanta exterior al centro de la curva y sustituyendo ecuaciones 1 y 2 se tiene que:

$$\Sigma M_{o'} = ma_n \cos \theta (h) - ma_n \sin \theta \left(\frac{b}{2}\right)$$
$$-N_1(b) + mg \cos \theta \left(\frac{b}{2}\right) + mg \sin \theta (h) =$$
$$ma_n \left(h \cos \theta - \frac{b}{2} \sin \theta\right) \tag{3}$$

Sea la aceleración normal an igual a la velocidad al cuadrado dividido por el radio de curvatura *r*:

$$a_n = \frac{V^2}{R} \tag{4}$$

El vehículo se deslizará cuando la fuerza se fricción sea igual al producto de la fuerza normal por el coeficiente de deslizamiento estático, es decir:

$$F_r = N\mu_s \tag{5}$$

Sustituyendo (5) en (1) y simplificando se tiene que:

$$\mu_s \cos \theta (N_1 + N_2) + \sin \theta (N_1 + N_2) = \frac{v^2}{R}$$
(6)

Sustituyendo la ecuación (2) en (6) y simplificando se tiene que:

$$g\mu_s\cos^2\theta + g\sin\theta\cos\theta = \frac{v^2}{R}$$

Finalmente despejando v se obtiene la velocidad de deslizamiento lateral.

$$V = \sqrt{gR\cos\theta \left(\mu_s\cos\theta + \sin\theta\right)} \tag{7}$$

Por otra parte, la velocidad de volcadura ocurre cuando  $N_I$ =0, entonces de (3) se tiene que:

$$V = \sqrt{\frac{gR(h\sin\theta + \frac{b}{2}\cos\theta)}{h\cos\theta - \frac{b}{2}\sin\theta}}$$
 (8)

Es deseable que la velocidad de deslizamiento sea menor que la velocidad de volcadura por lo que:

$$\sqrt{gR\cos\theta \left(\mu_{s}\cos\theta + \sin\theta\right)}$$

$$< \sqrt{\frac{Rg\left(h\sin\theta + \frac{b}{2}\cos\theta\right)}{h\cos\theta - \frac{b}{2}\sin\theta}}$$

$$\cos\theta \left(\mu_{s}\cos\theta + \sin\theta\right) < \frac{h\sin\theta + \frac{b}{2}\cos\theta}{h\cos\theta - \frac{b}{2}\sin\theta}$$

$$\mu_{s}\cos\theta < \frac{h\sin\theta + \frac{b}{2}\cos\theta}{\cos\theta \left(h\cos\theta - \frac{b}{2}\sin\theta\right)} - \sin\theta$$

$$\mu_{s} < \frac{h\sin\theta + \frac{b}{2}\cos\theta}{\cos^{2}\theta \left(h\cos\theta - \frac{b}{2}\sin\theta\right)} - \tan\theta$$

Ahora considere el vehículo de la figura 2 cuyo centro de gravedad está desplazado una distancia *a* hacia afuera del centro de la curva. Haciendo análisis cinético y utilizando las ecuaciones 1-5 se obtiene la velocidad de deslizamiento lateral cunado el centro de gravedad está desplazado una distancia *a*.

$$V = \sqrt{gR\cos\theta \left(\mu_{\rm s}\cos\theta + \sin\theta\right)} \tag{7}$$

GARCÍA, César y RAMÍREZ, Ignacio. Cálculo de velocidad máxima permitida en trayectoria curva de un vehículo transportador de productos lácteos. Revista de Ingeniería Mecánica 2017

Nótese que la ecuación de velocidad de deslizamiento cunado el centro de gravedad del vehículo esta desplazado una distancia *a*, es la misma que para cuando el centro de gravedad está alineado con el eje de simetría del vehículo.

Por otra parte, la velocidad de volcadura dicho vehículo cuando el centro de gravedad se encuentra desplazado, se da cuando *N1*=0 por lo tanto:

$$V = \sqrt{\frac{gR\left[\cos\theta\left(\frac{b}{2} - a\right) + h\sin\theta\right]}{h\cos\theta - \left(\frac{b}{2} - a\right)\sin\theta}} \tag{9}$$

Como se mencionó anteriormente es deseable que la velocidad de deslizamiento sea menor que la velocidad de volcadura; igualando ecuaciones (7) y (9) se tiene que:

$$gR\cos\theta(\mu_{s}\cos\theta + \sin\theta)$$

$$< \frac{gR\left[\cos\theta\left(\frac{b}{2} - a\right) + h\sin\theta\right]}{h\cos\theta - \left(\frac{b}{2} - a\right)\sin\theta}$$

$$\mu_{s} < \frac{\cos\theta\left(\frac{b}{2} - a\right) + h\sin\theta}{\cos\theta - \left(\frac{b}{2} - a\right)h\sin\theta} - \tan\theta$$
(10)

## Ecuaciones diferenciales de movimiento plano de un vehículo.

Considere el modelo de un vehículo como el mostrado en la figura 5, el cual cuneta con 3 grados de libertad, la velocidad u se puede considerar constante y como variables del movimiento están la velocidad lateral v con referencia al punto A, la velocidad de giro r y el ángulo de giro  $\varphi$ .

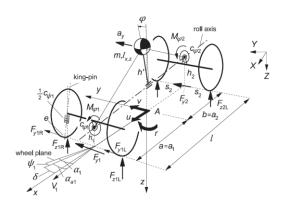


Figura 5 Modelo de un vehículo con tres grados de libertad

En esta sección son utilizadas las ecuaciones de Lagrange para la obtención de las ecuaciones de movimiento para un sistema con n grados de libretad, y coordenadas generales  $q_i$ , el sistema posee energía cinetica T, energía potencial U y fuerzas externas  $Q_i$ asociadas coorgendas con las antes internas mencionadas. Las fuerzas que provienen de la suspensión pueden ser consideradas como fuerzas externas que forman parte del trabajo total W. La ecuación de Lagrange es la siguiente:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial u}{\partial q_i} = Q_i \tag{11}$$

La ecuación (11) es necesaria para la obtencion de las ecuaciones de movimiento y describe el movimiento sobre un camino plano. Es necesario considerar coordenadas cartesianas x y y desde el punto de referencia donde esta localizado el centro de gravedad, el ángulo de deslizamiento lateral  $\psi$  y el ángulo de giro  $\varphi$ . En casos donde  $\psi$  puede tomar valores mayores como es este caso de estudio, en el que un vehículo se mueve a lo largo de una trayectoria circular es preferible utilizar ecuaciones modificadas donde las velocidades u, v y r como variables de movimiento adicionales a  $\varphi$ . Siendo las relaciones entre los cojuntos de variables las siguientes:

$$u = \dot{X}\cos\psi + \dot{Y}\sin\psi \tag{12}$$

$$v = -\dot{X}\sin\psi + \dot{Y}\cos\psi \tag{13}$$

GARCÍA, César y RAMÍREZ, Ignacio. Cálculo de velocidad máxima permitida en trayectoria curva de un vehículo transportador de productos lácteos. Revista de Ingeniería Mecánica 2017

$$r = \dot{\psi} \tag{14}$$

Donde u es la velocidad lateral a lo largo del eje y, v la velocidad lineal al lo largo del eje x y r la velocidad angular alrededor del eje z.

La energía cinetica puede ser expresada en términos de u, v y r, y el ángulo de deslizamiento lateral  $\psi$  puede ser eliminado multiplicando las ecuaciones finales de X y Y por el  $cos \psi$  y  $sen \psi$ .

Posteriormente se obtiene el conjunto de ecuaciones de Lagrange para las variables *u*, *v* y *r* y en consecuencia para las coordenadas reales, siendo: (Pacejka, 2012)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial u} - r\frac{\partial T}{\partial v} = Q_u$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} + r\frac{\partial T}{\partial u} = Q_v$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} - v\frac{\partial T}{\partial u} + u\frac{\partial T}{\partial v} = Q_r$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \phi} - \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{\partial U}{\partial \phi} = Q_{\phi}$$
(15)

Donde:

$$T = \frac{1}{2}m\{(u - h'\varphi r)^{2} + (v + h'\dot{\varphi})^{2}\} + \frac{1}{2}I_{X}\dot{\varphi}^{2} + \frac{1}{2}I_{y}(\varphi r)^{2} + \frac{1}{2}(r^{2} - \varphi^{2}r^{2} + 2\theta_{r}r\dot{\varphi}) - I_{xz}r\dot{\varphi}$$
(16)

$$U = \frac{1}{2} \left( C_{\varphi 1} + C_{\varphi 2} \right) \varphi^2 - \frac{1}{2} mgh' \varphi^2$$
 (17)

### Características del camino

Una curva circular simple se define por su radio y por la deflexión de entre las tangentes que une. Para una curva específica su radio R se selecciona de manera que sea el mayor posible dentro de las limitaciones impuestas por las condiciones del terreno.

El radio mínimo de una curva depende también de la velocidad del automóvil y el coeficiente de fricción lateral. (Secretaria de Comunicaciones y Transportes, 2016) La tabla 1 muestra distintos radios de curvatura para distintas velocidades promedio.

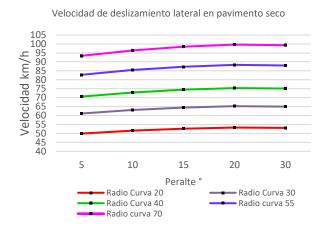
$V_k$	3	4	5	6	7	8	9	1	1
m/h	0	0	0	0	0	0	0	0	1
								0	0
R <sub>mi</sub>	2	4	7	1	1	2	2	3	4
n	0	0	0	0	5	1	7	5	2
				5	5	0	0	5	0

**Tabla 1** Radio mínimo de curvatura para velocidades dadas (Secretaria de Comunicaciones y Transportes, 2016)

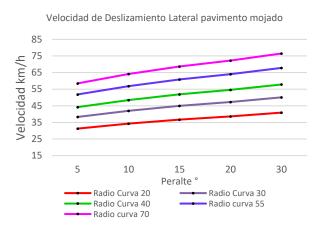
El coeficiente de fricción estática entre el pavimento y los neumáticos del vehículo es un factor importante para relaizar los calcuos de movimiento de un vehículo, entre otros factores principalmente depende velocidad a la cual se desplaza un vehículo en curva. Se han realzado distintas observaciones para el factor de fricción en carreteras con cracteristicas de la composición del pavimento similares, y se ha podido concluir que para una velocidad de 50 km/h el coeficiente de fricción varia de 0.75 a 0.9 en una superficie seca, por otra parte, a una velocidad de 30 km/h el coeficiente de fricción es de 0.5 en un pavimento mojado y disminuye hasta 0.35 cuando se aumenta la velocidad a 70 km/h, con esto se puede concluir que el coeficiente de fricción disminuirá a medida que la veocidad aumenta, aún cuando las condiciones de los neumáticos no cambien. (AASHTO, 2011)

### Resultados

Las siguientes gráficas muestran las velocidades a las que ocurre el deslizamiento lateral y la volcadura del vehículo en una trayectoria curva cuyo peralte o inclinación varía des de 5 a 30 grados y el radio de la curva varía desde 20 a 70 metros.



**Gráfico 1** Velocidad de deslizamiento lateral con un coeficiente de fricción de 0.9



**Gráfico 2** Velocidad de deslizamiento lateral con un coeficiente de fricción de 0.3

Se puede observar en las gráficas 1 y 2 la velocidad de deslizamiento lateral cuando se tiene un coeficiente de fricción de 0.9 equivalente al pavimento seco y un coeficiente de 0.3 correspondiente a un pavimento mojado respectivamente.

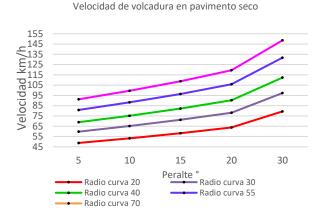
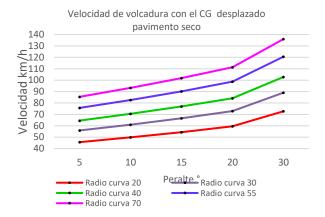


Gráfico 3 Velocidad de volcadura en pavimento seco



**Gráfica 4** Velocidad de volcadura cuando el centro de gravedad esta desplazado hacia el lado derecho del vehículo

Las gráficas 3 y 4 muestran las velocidades de volcadura cuando el pavimento esta seco y cuando el centro de gravedad esta desplazado una distancia *a* del eje longitudinal del vehículo.

## Anexos

### Nomenclatura:

R - Radio de la curva

 $\theta$  - inclinación de la curva o peralte

 $N_1$  - Fuerza normal 1

 $N_2$  - Fuerza normal 2

 $F_{rl}$  - Fuerza de reacción lateral izquierda

 $F_{r2}$  - Fuerza de reacción lateral derecha

m - masa del vehículo

g - fuerza de gravedad

V - Velocidad líneal del vehículo

 $\mu_s$  - coeficiente de fricción estatica

h - altura del pavimento al centro de gavedad
b - distancia entre neumáticos izquierdo y derecho

 a – Distancia a la cual se encuentra desplazado el centro de gravedad del vehículo n - grados de libertad del modelo

 $q_i$  - coordenadas genaralizadas

*Q<sub>i</sub>* - Fuerzas externas generalizadas asociadas con las coordenadas

T - energía cinetica del sistema

U - energía potencial del sistema

t - tiempo

ψ - ángulo de derrape

 $\phi$  – ángulo de giro alrededor del eje de volcadura

u – velocidad lineal en la dirección x

v – velocidad lineal en la dirección y

r − velocidad de giro alrededor del eje y

## Agradecimiento

Agradezco al Instituto Tecnológico de Pachuca y al CONACyT por su apoyo en la realización de este proyecto de investigación.

## **Conclusiones**

Es posible determinar la velocidad a la cual ocurrirá la volcadura de un vehículo, como se muestra en las gráficas, a medida que se aumenta el radio de la curva y la inclinación, es posible aumentar la velocidad del vehículo. Note que la velcidad a la cual es posible trasladarse disminuye hasta 25 km/h cuando el pavimento se encuentra mojado, por lo que se deben extremar precauciones al momento de tener condiciones climáticas adversas.

Por otra parte, un factor muy importante en el comportamento de la estabilidad del vehículo, es la posición del centro de gravedad del mismo, así como la distribución de su carga; esto propicia que se tenga que disminuir la velocidad de desplazamiento hasta 7 km/h, lo cual requiere de una mayor habilidad de manejo.

Es necesario realizar el diseño adecuado de una caja contenedora de producto lácteos, en la cual las cargas este distribuidas adecuadamente.

El presente trabajo sirve de base para la realización de un análisis dinámico completo a un camión transportador de productos lácteos, el cual incluye un análisis modal a la suspensión del vehículo estudiado y una simulación con software utilizado en la industria automotriz el cual permitirá validar y comparar los resultados obtenidos mediante las ecuaciones de movimiento y el método matemático analítico. Con el fin de proponer un mejor diseño del compartimento de carga y en caso de ser necesario, una suspensión que mejore la estbilidad y manejo del vehículo.

### Referencias

AASHTO. (2011). A Policy on Geometric Design of Highways and Streets.

Danone de México S.A. de C.V. (2015). *Análisis de Riesgo Volcadura*.

Guizhen, Y., Honggang, L., & Pengcheng, W. (2016). Real Time Bus Rollover Prediction Algorithm with Road Bank Estimation. *Chaos Solitons and Fractals (Elsevier)*, 270-283.

Pacejka, H. (2012). *Tyre and Vehicle Dynamics*. Butterworth Heinemann.

Secretaria de Comunicaciones y Transportes, S. T. (2016). *Manual de Proyecto Geométrico de Carreteras*.

Winkler, C. (2000). Rollover of Heavy Comercial Vehicles. *Research Review*, 31(4).

Wong, H. T. (2010). Terms of trade and economic growth in Japan and Korea: an empirical analysis. *Empirical Economics*, 38(1), 139-158.

www.inegi.org.mx. (s .f.).

GARCÍA, César y RAMÍREZ, Ignacio. Cálculo de velocidad máxima permitida en trayectoria curva de un vehículo transportador de productos lácteos. Revista de Ingeniería Mecánica 2017