

## Estimación del parámetro SNR para el filtro de Wiener, usando algoritmos genéticos

HERNANDEZ-LOPEZ, Eynard\*†, GUTIERRES-Sergio y CRUZ-DIOSDADO, Leonardo

*Ingeniería industrial del Tecnológico de Estudios Superiores del Oriente del Estado de México*

Recibido Julio 5, 2015; Aceptado Septiembre 3, 2015

### Resumen

En el presente trabajo se estima un parámetro de regularización para el Filtro de Wiener por medio de Algoritmos Genéticos. Esta estimación se compara con los siguientes métodos para la recuperación de imágenes: Filtro Inverso, Filtro de Wiener y el Algoritmo de Lucy-Richardson. Además, se utiliza un desarrollo alternativo al de Lucy-Richardson cuya metodología es la técnica de Maximización de la Esperanza.

**Problemas inversos, filtro de Wiener, algoritmos genéticos, procesamiento de imágenes**

### Abstract

Bibliographic records were obtained from scientific articles on Mexican cancer research published in high impact journals worldwide. The bibliographic records were retrieved from the Thomson Reuters databases: *Science Citation Index SCI, SSCI Social Science Citation Index and Conference Proceedings* on July 2012. The search covered the period 1977 to 2012 of the published works on cancer research conducted by at least one author whose affiliation institution were from Mexico.

**Problems, Wiener filter, genetic algorithms, image procedures**

**Citación:** HERNANDEZ-LOPEZ, Eynard, GUTIERRES-Sergio y CRUZ-DIOSDADO, Leonardo. Estimación del parámetro SNR para el filtro de Wiener, usando algoritmos genéticos. *Revista de Aplicación Científica y Técnica* 2015, 1-2: 83-89

\* Correspondencia al Autor (Correo Electrónico: [eynardh7@gmail.com](mailto:eynardh7@gmail.com))

† Investigador contribuyendo como primer autor.

## Introducción

En la actualidad, tanto en la ciencia como en cualquier actividad cotidiana, las imágenes son esenciales, por ejemplo, es usual publicar fotografías en las redes sociales, ver imágenes de personas, paisajes o fotografías de las últimas noticias. Las imágenes engloban muchas áreas, entre las que encontramos la fotografía astronómica, las imágenes médicas (donde los detalles permiten tomar decisiones asertivas o fatales en el caso de que la imagen oculte información), reconocimiento de retina, huellas digitales, entre otras. En estas facetas de la fotografía, se pretende capturar y observar la imagen original o real, esto es, que la imagen represente fielmente la realidad capturada en un momento preciso. Sin embargo, el proceso de captura de una imagen no es perfecto, debido especialmente a fenómenos de degradación, que pueden derivar de fenómenos naturales o que provienen intrínsecamente del dispositivo de captura. Para restaurar una imagen, a la que se llamará *imagen observada*  $g$ , en una imagen estimada (que es la imagen recuperada), a la que se denota por  $f$ , se emplea la ecuación integral de Fredholm de primer tipo como en Vogel, Curtis R.<sup>14</sup>, la cual se expresa mediante

$$g(x) = \int H(x,y)f(y)dy, \quad (1)$$

donde  $H$  es el kernel de la ecuación integral, también conocida como *función de dispersión del punto*. La ecuación (1) tiene la siguiente versión matricial,

$$g = Hf, \quad (2)$$

en este caso  $g$  y  $f$  representan vectores de dimensión finita, mientras que  $H$  es una matriz cuadrada de rango finito que representa el proceso de degradación requerido mediante la formación de la imagen.

Aunado a este proceso, si la imagen se contamina por alguna fuente de ruido, como ruido resultante de fenómenos electromagnéticos o de otra naturaleza, entonces se expresa a éste con un vector  $\eta$  de dimensión finita. En lo sucesivo se estudiará la ecuación de convolución siguiente

$$g = Hf + \eta. \quad (3)$$

En general, la ecuación (2) no tiene solución. En consecuencia, el problema de la ecuación (1) está mal planteado en el sentido de Hadamard, como se menciona en Vogel, Curtis R.<sup>14</sup>. Lo que obliga a buscar otras formas de encontrar soluciones aceptables al problema de deconvolución de imágenes (3), como lo formulan González R. C. and Woods R. E.<sup>5</sup>. Algunos de estos métodos se expondrán en el presente trabajo.

## Métodos y comparación

El objetivo principal de la recuperación de imágenes es estimar la imagen  $f$  de la ecuación (2). Sin embargo, en ocasiones el kernel  $H$  también es desconocido. Esto implica estimarlos simultáneamente, a este problema se le denomina *deconvolución ciega*. Este problema es muy complicado por la estimación de  $H$ . Cuando se tiene una estimación parcial de  $H$ , el problema original se conoce como *deconvolución miope*. Por otro lado, cuando  $H$  es conocida, éste se resuelve usando el método de mínimos cuadrados; el cuál se denomina *filtro inverso*.

En el presente trabajo se comparan métodos para deconvolución con distintas características, a saber, el filtro inverso, el filtro de Wiener y finalmente el algoritmo de Lucy-Richardson.

**Filtro inverso**

El método de deconvolución es el más sencillo y rápido de implementar por su facilidad computacional. Considérese la ecuación (2) y el siguiente operador

$$J(\hat{f}) = \|g - H\hat{f}\|^2, \tag{4}$$

En el cual  $\hat{f}$  es la estimación de la imagen  $f$  y  $\|\cdot\|$  es alguna norma definida en un espacio vectorial. Esta ecuación es un problema de optimización que se puede resolver mediante mínimos cuadrados. Esto es, minimizar el operador (4), dadas las aproximaciones de  $H$  y  $f$ . En la implementación de este método se emplea una aproximación inicial de la imagen observada  $g$ , conocida como *filtro de mediana*, como lo exponen González R. C. and Woods R. E.<sup>5</sup>. Obsérvese que estas aproximaciones al problema acumulan un error considerable.

Al resolver el problema de optimización (4), se obtiene la siguiente solución

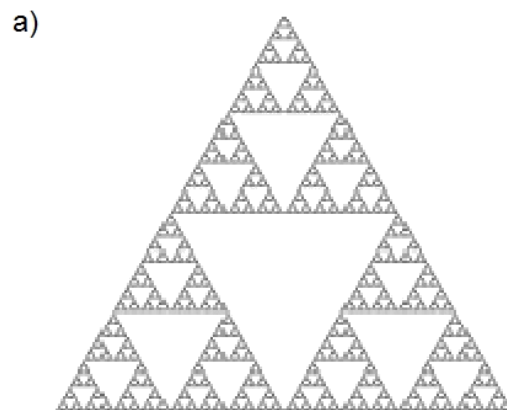
$$\hat{f} = H^{-1}g, \tag{5}$$

Donde  $\hat{f}$  es un vector finito. Por otro lado, cuando se aplica la transformada rápida de Fourier a este sistema, se obtiene el filtro inverso buscado

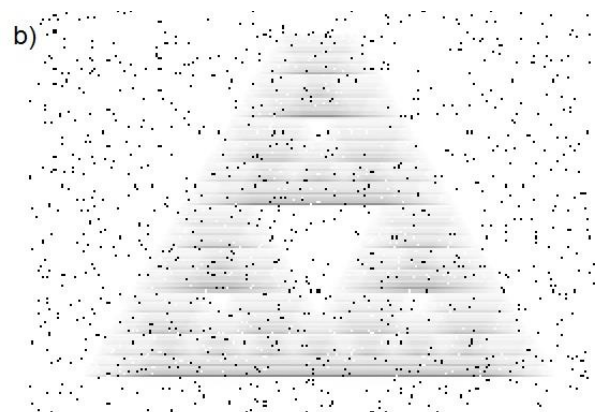
$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)}, \tag{6}$$

Para  $u=0,1,2,\dots, M-1$  y  $v=0,1,2,\dots, N-1$ , donde las coordenadas  $(u,v)$  indican el dominio de frecuencia. La *figura 1* muestra la implementación de este método para un *borrado lineal* y ruido de tipo *sal y pimienta*.

En el inciso (a) de la *figura 1*, el reloj es una fotografía que representa la imagen original  $f$  en el problema planteado; en (b), está la imagen degradada  $g$  mediante un borrado lineal  $H$ , mientras que (c) es la imagen degradada (b), recuperada con el filtro inverso. En términos cualitativos, la recuperación desde la imagen degradada (b) es parecida a la imagen original  $f$ . En (d), se presenta la imagen original degradada con *borrado lineal* y ruido *sal y pimienta*. Finalmente, (e) es la recuperación de la imagen (d). En este caso, el filtro inverso no ofrece una solución cualitativa ni cuantitativa óptima (en el sentido error norma de *Frobenius* Vogel, Curtis R.<sup>14</sup>). En consecuencia, se debe apostar por un método alternativo.



**Figura 1** Imagen Original



**Figura 2** Imagen degradada con borrado lineal y ruido sal y pimienta

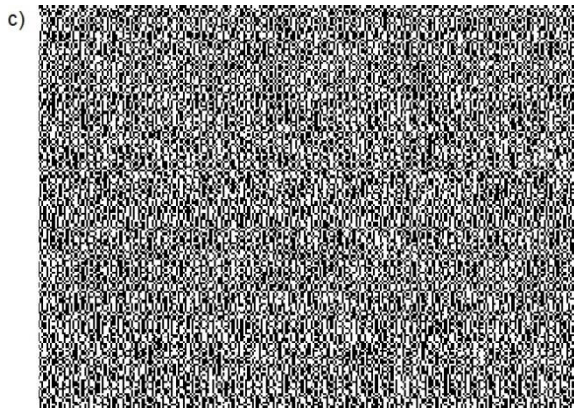


Figura 3 Imagen recuperada con el filtro inverso

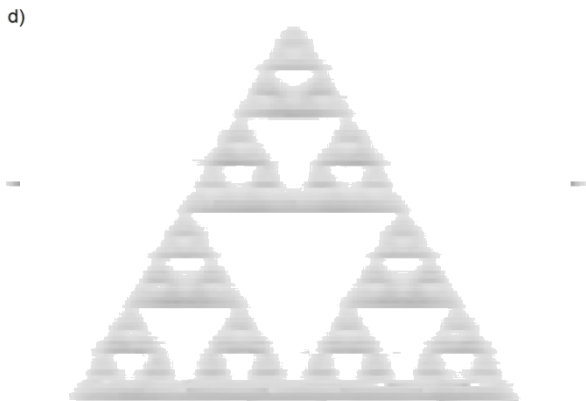


Figura 4 Imagen recuperada con Filtro de Wiener

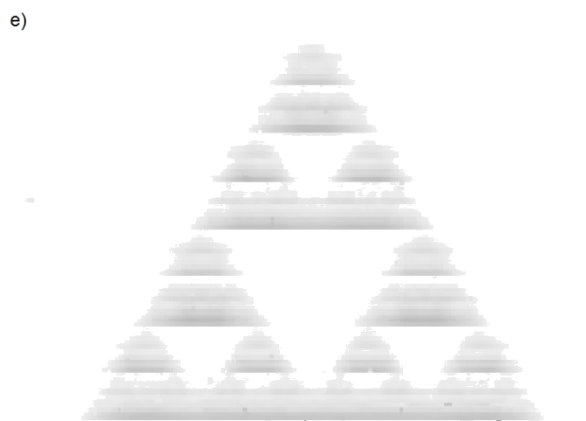


Figura 5 Imagen recuperada con Algoritmo de Lucy-Richardson

**Filtro de Wiener**

El Filtro de Wiener es una de las aproximaciones más conocidas en la restauración de imágenes. Éste se obtiene de un problema de optimización, ya que se busca un estimador de la degradación de la imagen, minimizando el error estadístico siguiente

$$e_i = f_i - \hat{f}_i, \tag{7}$$

Donde los elementos del vector de error  $e_i$  pueden ser positivos o negativos. Así, al minimizar la media cuadrática de error se obtiene el filtro. En consecuencia, el problema de optimización está dado por

$$E[(e^T e)] = E[Tr(e^T e)], \tag{8}$$

En el cual  $E$  y  $Tr$  representan la esperanza matemática y el operador traza, respectivamente. Si se sustituye el término  $\hat{f}$  por  $Yg$ , donde  $Y$  es el filtro deseado y  $g$  es la imagen observada para la ecuación  $g = Hf + \eta$ , con  $\eta$  siendo un ruido aditivo, se obtiene el funcional

$$J(Y) = E \left[ Tr \left( (f_i - \hat{f}_i)(f_i - \hat{f}_i)^T \right) \right]. \tag{9}$$

Debido a que los operadores  $E$  y  $Tr$  son lineales, estos pueden ser intercambiados. Además, si  $Tr(A) = Tr(A^T)$  y bajo el supuesto que  $f$  y  $\eta$  son independientes, entonces  $E(\eta f^T) = E(f \eta^T) = 0$ . De esta forma, al expandir  $J(Y)$  se obtiene

$$J(Y) = Tr \left[ R_f - 2YHR_f + YHR_fH^T + YR_nY^T \right],$$

Donde  $R_f$  y  $R_n$  son arreglos de autocorrelación, como aparece en Isaacson E. and Keller H. B<sup>7</sup>. Resolviendo para  $Y$  se sigue que

$$Y = R_f H^T (H R_f H^T + R_n)^{-1}. \quad (10)$$

Puesto que  $\hat{f} = Yg$ , se concluye

$$\hat{f} = R_f H^T (H R_f H^T + R_n)^{-1} g. \quad (11)$$

Por último, en el dominio de Fourier

$$\begin{aligned} \hat{F}(u, v) & \quad (12) \\ &= \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \frac{R_n(u, v)}{R_f(u, v)}} G(u, v), \end{aligned}$$

Donde  $R_f(u, v)$  y  $R_n(u, v)$  son matrices de autocorrelación y  $H^*(u, v)$  es el complejo conjugado de la matriz  $H(u, v)$ , para más información véase Isaacson E. and Keller H. B<sup>7</sup>.

### Algoritmo de Lucy-Richardson

Las primeras versiones de este método fueron propuestas por Richardson W. H<sup>12</sup>, y Lucy L. B<sup>9</sup> En el presente artículo se utilizará un desarrollo alternativo. La metodología de este algoritmo es mediante la técnica de *maximización de la esperanza (ME)*, la cual es muy útil para estimar información pérdida en un problema dado.

Para obtener dicho algoritmo se considera el sistema (2), donde la matriz  $H$  es de tamaño  $m \times n$  y los componentes de  $g$  y  $f$  son vectores no negativos de tamaño  $n \times 1$ . Se propone un problema de optimización, el cual consiste en minimizar la discrepancia de *Kullback-Leibler*, véase Vogel, Curtis R<sup>14</sup>.

$$\rho_{KL}(g, Hf) = \langle g, \log(g/Hf) \rangle. \quad (13)$$

Las restricciones de (13) dependen de los valores de cada pixel, los cuales son siempre valores positivos y su normalización.

El algoritmo ME usa dos variables aleatorias discretas, una que representa los valores observados de forma incompleta (los cuales se conocen parcialmente) y la segunda variable aleatoria representa la información pérdida, aunado a una función de probabilidad conjunta, como en Vogel, Curtis R<sup>14</sup>. Considérense  $X$  y  $Y$  variables aleatorias que representan la información completa e incompleta, respectivamente. Tomando en cuenta las restricciones, se tiene que

$$P\{X = j, Y = i\} = p_{X,Y}(j, i; f). \quad (14)$$

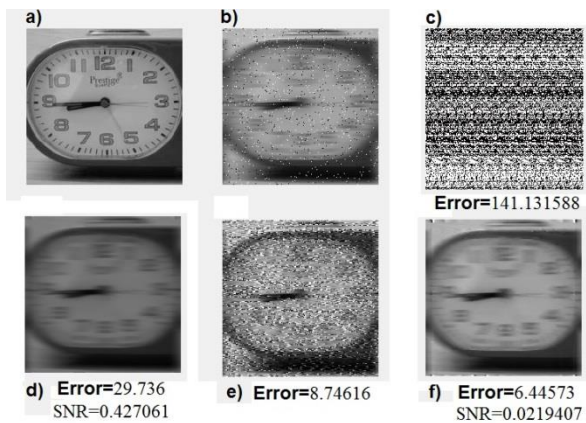
Luego entonces, sobre estas suposiciones se llega a la siguiente expresión

$$Q(f|y; f_v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r g_i [\log h_{ij} f_j^v] \hat{p}_{ij}^v, \quad (15)$$

Como en Medina M. and Hernández E.<sup>10</sup> En el algoritmo ME, la ecuación (15) representa el primer paso. El segundo requiere del proceso de maximización de (15), obteniendo el estimador  $\hat{f}$  de  $f$ , el cual es

$$\begin{aligned} f_j^{v+1} &= f_j^v \sum_{i=1}^m h_{ij} \left( \frac{g_i}{\sum_{l=1}^n h_{il} f_l^v} \right), \quad j \\ &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (16)$$

La ecuación (16) es conocida como el algoritmo de *Lucy-Richarson ME*.



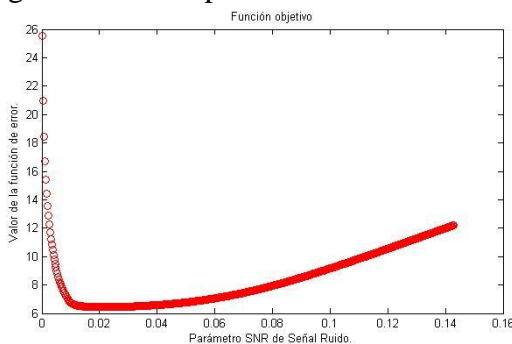
**Figura 6** (a) imagen original, (b) imagen degradada con borrado lineal y ruido sal y pimienta, (c) imagen (b) recuperada con el Filtro Inverso, (d) imagen (b) recuperada con el Filtro de Wiener, (e) imagen (b) recuperada con el Algoritmo de Lucy-Richardson ME, (f) imagen (b) recuperada con Algoritmos Genéticos y Filtro de Wiener.

**Metodología**

La función objetivo del código usado está dada por

$$F(SNR) = \sum \sum |f - Wiener(g, SNR)|^2, \tag{17}$$

En la cual SNR es el *parámetro señal-ruido* a estimar del Filtro de Wiener con dominio paramétrico  $0 \leq SNR \leq 1$ , *Wiener(.)* es la implementación de este filtro, mientras que *f* y *g*, son las imágenes original y degradada respectivamente. El proceso de optimización utiliza *Algoritmos Genéticos*, que se pueden estudiar en Holland J.H. <sup>6</sup>, que son una herramienta de optimización dirigida basada en probabilidad.



**Gráfico 1** Gráfica de función objetivo

**Comentarios Finales**

En la *figura 2* se muestra la comparación de imágenes resultantes de la restauración de una imagen mediante el Filtro Inverso, Filtro de Wiener, el algoritmo de Lucy-Richardson ME y la recuperación de la imagen por medio de *Algoritmos Genéticos-Filtro de Wiener*. En el caso de borrado lineal el Filtro Inverso se considera que tiene una buena calidad, lo mismo pasa con el filtro de Wiener y el algoritmo de Lucy-Richardson ME. Sin embargo, si la imagen es degradada por ruido aditivo, los resultados conseguidos por el Filtro Inverso no son satisfactorios, porque el error es 141.131588, lo que significa que el ruido se amplifica. No obstante, el Filtro de Wiener y el algoritmo de Lucy-Richardson ME, cuyos errores respectivos son 29.736 y 8.74616, lo que demuestra que son más estables sobre la presencia del ruido. Finalmente, cuando se utilizan el Filtro de Wiener y los Algoritmos genéticos, se estima el parámetro señal-ruido del Filtro de Wiener, el cual es un parámetro de regularización para este método, obteniendo valores óptimos. En la *figura 2*, se obtuvo una estimación del parámetro señal ruido con un valor de 0.021947 para este caso particular, y cuyo error es 6.44573. Cabe mencionar que para cada experimento, al agregar ruido pseudo-aleatorio a las imágenes, los métodos aquí expuestos obtienen imágenes diferentes, esto se debe a que el ruido siempre es diferente, lo que provoca que la imagen degradada no sea igual en cada evento y el parámetro estimado sea distinto en cada ensayo.

**Conclusión**

La ecuación (16) garantiza que la solución es siempre positiva. Esta técnica tiene algunas desventajas cuando el número de iteraciones es muy grande, dado que no se aprecia mejora significativa en la recuperación. Por ahora no hay criterio definitivo para estimar el número de iteraciones.

Por otro lado, se estima el parámetro señal-ruido para el Filtro de Wiener mediante Algoritmos Genéticos, lo cual da resultados satisfactorios, pero el costo computacional es alto si la imagen es grande. Como trabajo a futuro, se pretende estimar parámetros de la degradación de una imagen, y utilizar la metodología presentada aquí para estimar imágenes degradadas por medio de factores comunes en la vida real.

### Referencias

- Banham M.R. and Katsaggelos A.K., "Digital Image Restoration", *IEEE Signal Processing Magazine*, 1997.
- Campisi P., Egiazarian K., "Blind Image Deconvolution", *Taylor and Francis Group*, LLC 2007.
- Friedman Nir, "The Bayesian structural EM algorithm", *Proceedings of the Fourteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1998, pp. 129-138.
- Goldberg, David E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning*, Addison-Wesley, 1989.
- González R. C. and Woods R. E., "Tratamiento digital de imágenes", *Buenos Aires*, 1996, pp.773.
- Holland J.H., "Adaptation In Natural And Artificial Systems: An Introductory Analysis With Applications To Biology, Control, And Artificial Intelligence", *A Bradford Book*, 1992, pp. 211.
- Isaacson E. and Keller H. B., "Analysis of Numerical Methods", *J. Wiley & Sons, New York*, 1966.
- Kaipio J. and Somersalo E., "Statistical and Computational Inverse Problems", *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 160, 2004.
- Lucy L. B., "An iterative technique for the rectification of observed distributions", *Astronomy Journal*, 79 (6), 1974, pp. 745-754.
- Medina M. and Hernández E., "Deconvolution, parameter estimation and image recovering", *First Symposium on Inverse Problems and its Applications*, 2010, pp.83-91.
- Moon T. K., "The Expectation-Maximization Algorithm", *Signal Processing Magazine, IEEE*, 1996, 13(6), pp. 47- 60.
- Richardson W. H., "Bayesian-Based Iterative Method of Image Restoration", *JOSA*, 62 (1), 1972, pp. 55-59.
- Vardi Y. and Lee D., "From Image Deblurring to Optimal Investments: Maximum Likelihood Solutions for Positive Linear Inverse Problems", *Journal of the Royal Statistical*, Vol. 55, No. 3, 1993, pp. 569-612.
- Vogel, Curtis R., "Computational methods for inverse problems", *Frontiers in Applied Mathematics Series*, Vol. 23, SIAM, 2002.