

Aplicación de elemento espectral a la ecuación de onda completa utilizando fronteras absorbentes

MUÑOZ-GONZALES, Sergio†*, SALDAÑA-CARRO, Cesar, BECERRA-DIAZ, Julio y SANCHEZ-GARCIA, Gustavo

Universidad Politécnica de Tlaxcala. Av. Universidad Politécnica 1 C.P. 90180 Tepeyanco, Tlax.

Recibido Enero 2, 2015; Aceptado Mayo 29, 2015

Resumen

Existen diferentes métodos numéricos para simular la propagación de ondas en un medio estratificado, sin embargo en todos ellos es necesario imponer condiciones de frontera (Dirichlet o Neuman) que generan reflexiones de ondas espurias las cuales no tienen significado físico. Los métodos de Fronteras Absorbentes (PML Perfectly Match Layer) junto con elementos espectrales se utilizan para resolver la ecuación de onda, reduciendo el efecto de reflexión de ondas considerablemente y así simular la continuación de la onda en el medio.

Métodos, Ondas, Elementos espectrales

Citación: MUÑOZ-GONZALES, Sergio, SALDAÑA-CARRO, Cesar, BECERRA-DIAZ, Julio y SANCHEZ-GARCIA, Gustavo. Aplicación de elemento espectral a la ecuación de onda completa utilizando fronteras absorbentes. *Revista de Aplicación Científica y Técnica* 2015, 1-1: 1-10

Abstract

In order to simulate wave propagation in a stratified media many differential methods had been developed, however all these methods need boundary conditions (Dirichlet or Neuman) which create artificial waves reflections without any physical mean. Perfectly Match Layer (PML) along with spectral element methods are used to solve the wave equation, reduce the effect of artificial wave reflections and therefore imitate the wave propagation over the media.

Methods, Waves, Spectral elements

* Correspondencia al Autor (Correo Electrónico: sergio.munoz@uptlax.edu.mx)

† Investigador contribuyendo como primer autor.

Introducción

En física ha sido de interés el poder simular la propagación de ondas en diferentes medios, como es el caso del sonido, desafortunadamente esta tarea no es fácil especialmente cuando se tiene un dominio restringido por los datos y las propiedades físicas del medio. Se considera que las dimensiones del dominio de interés son pequeñas en comparación del medio físico original, entonces es necesario aplicar fronteras absorbentes para simular numéricamente la continuidad de las ondas en el dominio real. Por ejemplo se tiene interés en simular la propagación de una onda en un lugar cerrado, entonces las condiciones que se imponen en las paredes del dominio pueden ser tipo Dirichlet, es decir, se le impone un valor específico a la solución en la frontera. En otro caso si la onda se propaga en un lugar abierto es posible que las dimensiones del dominio sean tan amplias que la capacidad numérica no sea suficiente y/o el tiempo de simulación sea muy largo, en el caso de dominios abiertos generalmente el espacio de interés de influencia de la onda es pequeño en comparación de todo del medio, en tal situación se aplica fronteras absorbentes para simular la continuación de la onda en todo el medio y así evitar reflexiones de ondas que pudieran afectar los resultados en el área de interés.

Bérenger (Berenger, 1996) introdujo un modelo efectivo de fronteras absorbentes PML para ondas electromagnéticas, el cual es considerado el método óptimo para condiciones de frontera absorbente, el esquema comúnmente utilizado por su sencillez en la simulación de ondas es el de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD).

Sin embargo FDTD tiene la desventaja de ser un método de orden dos, al aplicar elementos espectrales se mejora la exactitud de la solución en el dominio espacial y los elementos pueden ser más grandes con el uso de un mayor número de puntos de interpolación por elemento.

Dentro de los modelos para la solución de la ecuación de onda, algunos separan artificialmente la velocidad y el esfuerzo (Y. Q. Zeng, 2001), los que no separan las variables requieren resolver términos de convoluciones e introducir variables auxiliares, útiles en los modelos de integración numérica de convoluciones CPML (D. Kimatitsch, 2008) y modelos de integración recursiva (F. H. Drossaert, 2007). El modelo que se presenta no requiere hacer separación de variables y se resuelve en la presión mediante la ecuación de onda acústica en 2D basado en la formulación de Yotka Rickard (Y. Rickard, 2002).

Ecuación de Onda Acústica

La ecuación de onda (1) es muy conocida y es el primer paso para estudiar la propagación del sonido en diferentes medios al encontrar la presión p (Rossing, 2007), para el caso de la simulación se considera que las propiedades se pueden estimar en un campo medio llamado velocidad (v) el cual es el único parámetro que se considera variable y depende del material por donde pasa la onda.

De forma general se considera la ecuación de onda acústica en 3D

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

Dónde:

$$v = \frac{\lambda}{T} \text{ Velocidad de onda.}$$

λ Longitud de onda.

$$f \text{ Frecuencia de onda y } T = \frac{1}{f}.$$

$$\text{Para los sólidos } v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Dónde: E es el Módulo de Young que tiene que ver con la elasticidad del medio y ρ la densidad.

$$\text{Para los gases } v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Dónde: γ es el coeficiente de dilatación adiabática, R la constante universal de los gases, T temperatura en Kelvin y M la masa molar del gas.

Algunos valores clásicos para la velocidad del sonido son:

- En el aire a 0° C, $v = 331.5$ m/s (por cada grado más v aumenta en 0.6 m/s.
- En agua (a 25° C), $v = 1,493$ m/s
- En madera, $v = 3,700$ m/s
- En hormigón, $v = 4,000$ m/s
- En acero, $v = 5,100$ m/s
- En aluminio, $v = 6,400$ m/s

Formulación de la Frontera Absorbente

Al aplicar la transformada de Fourier a la ecuación de onda (1) se tiene la siguiente ecuación

$$-w^2 \hat{p} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

y al introducir el cambio de variable para la PML (Y. Rickard, 2002)

$$S_x = 1 + \frac{\delta_x}{iw} \quad S_y = 1 + \frac{\delta_y}{iw} \quad S_z = 1 + \frac{\delta_z}{iw} \quad (3)$$

la ecuación (2) queda como

$$-w^2 \hat{p} = v^2 \left(\frac{1}{S_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S_x} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right) + \frac{1}{S_y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{S_y} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \right) + \frac{1}{S_z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{S_z} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \right) \right) \quad (4)$$

Generalmente cuando se hace una formulación de PML se tienen los siguientes operadores para la primera y segunda derivada

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{S_x} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{S_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S_x} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Utilizando las variables auxiliares (5)

$$iw\hat{X}_1 = \frac{1}{S_x} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \quad iw\hat{X}_2 = \frac{1}{S_x} \frac{\partial}{\partial x} (iw\hat{X}_1)$$

$$iw\hat{Y}_1 = \frac{1}{S_y} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \quad iw\hat{Y}_2 = \frac{1}{S_y} \frac{\partial}{\partial y} (iw\hat{Y}_1)$$

$$iw\hat{Z}_1 = \frac{1}{S_z} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \quad iw\hat{Z}_2 = \frac{1}{S_z} \frac{\partial}{\partial z} (iw\hat{Z}_1)$$

(5)

en la ecuación (4) y al regresar a la variable tiempo, se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales que modela las fronteras absorbentes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= v^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x} (\delta_x X_1) - \delta_x X_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} (\delta_y Y_1) - \delta_y Y_2 - \frac{\partial}{\partial z} (\delta_z Z_1) - \delta_z Z_2 \right) \\ \frac{\partial X_1}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial x} - \delta_x X_1 \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (\delta_x X_1) - \delta_x X_2 \\ \frac{\partial Y_1}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial y} - \delta_y Y_1 \\ \frac{\partial Y_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} (\delta_y Y_1) - \delta_y Y_2 \\ \frac{\partial Z_1}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial z} - \delta_z Z_1 \\ \frac{\partial Z_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} (\delta_z Z_1) - \delta_z Z_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Para frecuencias bajas se modifican las ecuaciones (3) como

$$\begin{aligned} S_x &= 1 + \frac{\delta_x}{k_x + iw} & S_y &= 1 + \frac{\delta_y}{k_y + iw} \\ S_z &= 1 + \frac{\delta_z}{k_z + iw} \end{aligned} \quad (7)$$

lo que da como resultado el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= v^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} (\delta_x X_1) - (\delta_x + k_x) X_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} (\delta_y Y_1) - (\delta_y + k_y) Y_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} (\delta_z Z_1) - (\delta_z + k_z) Z_2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial x} - (\delta_x + k_x) X_1 \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (\delta_x X_1) - (\delta_x + k_x) X_2 \\ \frac{\partial Y_1}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial y} - (\delta_y + k_y) Y_1 \\ \frac{\partial Y_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} (\delta_y Y_1) - (\delta_y + k_y) Y_2 \\ \frac{\partial Z_1}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial z} - (\delta_z + k_z) Z_1 \\ \frac{\partial Z_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} (\delta_z Z_1) - (\delta_z + k_z) Z_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Elementos Espectrales

Elementos espectrales (SPECFEM), es elemento finito sólo que en su formulación se construyen las funciones de forma (polinomios de Lagrange) sobre los puntos de integración Gauss-Legendre-Lobatto (Kopriva, 2009). Un esquema numérico de elemento finito en dominio y diferencias finitas explícitas en tiempo para la ecuación de onda, involucra la solución en cada paso de tiempo de un sistema de ecuaciones lineales, sin embargo al utilizar elementos espectrales la matriz del sistema de ecuaciones es diagonal, así en un esquema explícito de diferencias finitas para el tiempo, solamente es necesario la sustitución directa de los valores de las variables (D. Kimatitsch, 2008).

En este caso se planteará el esquema numérico para un problema en 2D como se muestra en la Figura 1, donde se distingue entre el dominio físico al centro y el dominio ficticio en la frontera absorbente. El dominio físico o real junto con el ficticio es el dominio computacional donde se resolverá la ecuación (8), para tal se definen en la frontera condiciones tipo Neuman

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

Donde n es el vector normal a la frontera y condiciones iniciales $p(0)=0$, Puesto que en el tiempo cero se considera que el medio no ha sido perturbado.

A. Coeficientes de Atenuación

Los coeficientes de atenuación generalmente se definen como funciones que van creciendo gradualmente dentro de la frontera absorbente (F. Collino, 2001)

$$\delta(l) = \delta^{\max} \left(\frac{l}{d} \right)^m \tag{9}$$

Para $0 \leq l \leq d$ y d es la longitud de la frontera absorbente en cada dirección, cuando $l=0$ se considera la interface entre el dominio físico y el ficticio. Un valor óptimo para δ^{\max} es

$$\delta^{\max} = \frac{3v_p}{2d} \log\left(\frac{1}{R}\right)$$

Donde R sería el coeficiente de reflexión teórica, v_p la velocidad más alta presente en el medio, en la simulación se consideran los valores $R = 1 \times 10^{-5}$, $m = 2$ y $k = 0.5$ en todos los perfiles.

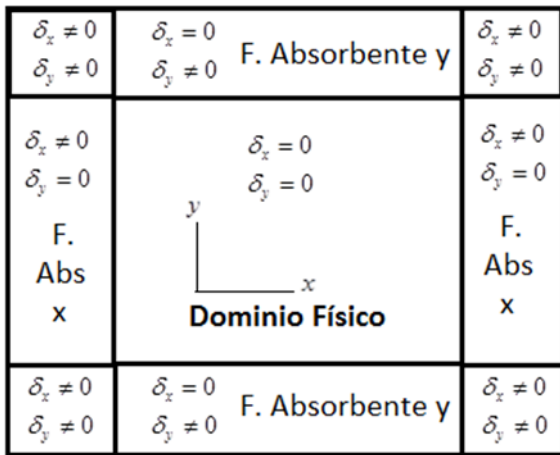


Figura 1 Dominio computacional y colocación de los coeficientes de atenuación (δ) en la PML

Se puede verificar que en el dominio físico se tiene $\delta_x = \delta_y = 0$, entonces la ecuación (6) se reduce sólo a la ecuación de onda original (1), de manera similar ocurre con (8) cuando $\delta_x = \delta_y = 0$ y $k_x = k_y = 0$.

B. Formulación de Elemento Espectral

Para aplicar elemento finito a (1) se tiene que pasar a su forma débil (O.C. Zienkiewicz, 2000)

$$\frac{1}{v^2} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 p_j}{\partial t^2} \int_v N_j N_i dv = - \sum_{j=1}^m p_j \int_v \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} dv + \int_T N_i \frac{\partial p}{\partial n} dT \tag{10}$$

y por ejemplo la ecuación 2, 3 del sistema (8) quedan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \frac{\partial X_{1j}}{\partial t} \int_v N_j N_i dv = \\ & - \sum_{j=1}^m p_j \int_v N_j \frac{\partial N_i}{\partial x} dv + \int_T N_i \frac{\partial p}{\partial n_x} dT \\ & - \sum_{j=1}^m (\delta_x + k_x) X_{1j} \int_v N_j N_i dv \\ & \sum_{j=1}^m \frac{\partial X_{2j}}{\partial t} \int_v N_j N_i dv = \\ & - \sum_{j=1}^m p_j \int_v \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dv + \int_T N_i \frac{\partial u}{\partial n_x} dT \\ & - \sum_{j=1}^m X_{1j} \int_v \frac{\partial \delta_x}{\partial x} N_j N_i dv - \sum_{j=1}^m X_{1j} \int_v \delta_x \frac{\partial N_j}{\partial x} N_i dv \\ & - \sum_{j=1}^m (\delta_x + k_x) X_{2j} \int_v N_j N_i dv \end{aligned} \tag{11}$$

A partir de (10) y (11) se puede obtener la forma débil del resto del sistema de ecuaciones (8). Cada función de forma es la multiplicación de dos polinomios de Lagrange $N_j = L_p(\varepsilon)L_q(\eta)$ construidos sobre los puntos de integración de Gauss-Lobatto-Legendre, en el presente modelo se utilizaron cinco puntos de integración $(-1, -\sqrt{3}/7, 0, \sqrt{3}/7, 1)$ y sus respectivos pesos w_p $(1/10, 49/90, 32/45)$, para $p, q = 1, \dots, 5$, dando así veinticinco puntos de interpolación ($m = 25$) por elemento finito, donde ε y η son las variables de la nueva métrica

$$x = x_0 + \frac{a}{2}\varepsilon, \quad y = y_0 + \frac{b}{2}\eta, \quad (12)$$

que transforman un rectángulo en el plano (x, y) con centro (x_0, y_0) y área ab , en un cuadrado $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ de área cuatro, sobre el plano (ε, η) , como se muestra en la Figura 2.

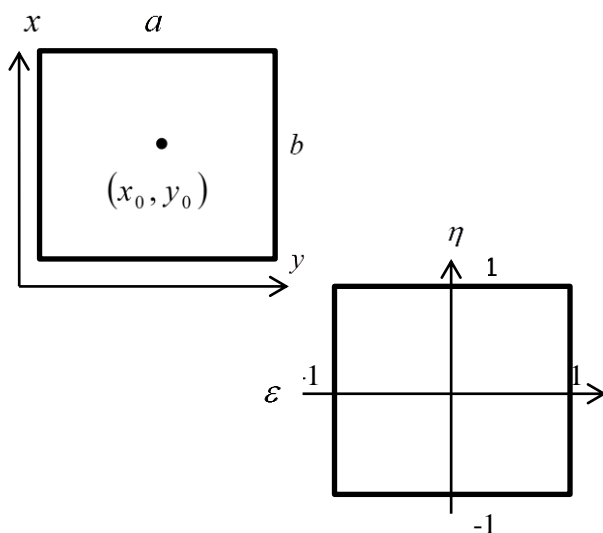


Figura 2 Cambio de métrica utilizado en SPECFEM

Después de aplicar la métrica a la ecuación representativa (10) y (11), las condiciones de frontera y la continuidad en el medio (N. A. Campanis, 2008) se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v^2} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 p_j}{\partial t^2} \int_v N_j N_i dv_e = \\ & - \sum_{j=1}^m p_j \int_v h^2 \frac{\partial N_j}{\partial \varepsilon} \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} + k^2 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} dv_e \\ & \sum_{j=1}^m \frac{\partial X_{1j}}{\partial t} \int_v N_j N_i dv_e = \\ & - \sum_{j=1}^m p_j h \int_v N_j \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} dv_e \\ & - \sum_{j=1}^m (\delta_{xj} + k_{xj}) X_{1j} \int_v N_j N_i dv_e \\ & \sum_{j=1}^m \frac{\partial X_{2j}}{\partial t} \int_v N_j N_i dv_e = \\ & - \sum_{j=1}^m p_j h^2 \int_v \frac{\partial N_j}{\partial \varepsilon} \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} dv_e \\ & - \sum_{j=1}^m X_{1j} \frac{\partial \delta_{xj}}{\partial x} \int_v N_j N_i dv_e \\ & - \sum_{j=1}^m X_{1j} h \delta_{xj} \int_v \frac{\partial N_j}{\partial \varepsilon} N_i dv_e \\ & - \sum_{j=1}^m (\delta_{xj} + k_{xj}) X_{2j} \int_v N_j N_i dv_e \end{aligned} \quad (12)$$

con $h = 2/a$ y $k = 2/b$.

Debido a la construcción de los polinomios de Lagrange en los puntos de interpolación para las funciones de forma $N_j = L_p(\varepsilon)L_q(\eta)$ y $N_i = L_r(\varepsilon)L_s(\eta)$ la integral en la derivada de tiempo es igual a los pesos de integración numérica

$$\int_v N_j N_i dv_e = w_r w_s$$

Dando como resultado que la matriz del sistema de ecuaciones es diagonal, por lo que sólo hay que hacer sustituciones directas para un esquema de marcha en tiempo de diferencias finitas explícito de la forma

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \approx \frac{p^{n+2} - 2p^{n+1} + p^n}{dt^2}$$

Resultados

En la simulación de la ecuación de onda se consideran cuatro modelos diferentes que simulan diferentes configuraciones de velocidades, en un dominio cuadrado de 100 m^2 con elementos de 1 m^2 y diferentes incrementos en tiempo, para cumplir condiciones de estabilidad y número de elementos por longitud de onda. Los primeros dos modelos no contemplan la aplicación de la frontera absorbente, para demostrar la utilidad del método.

Así el dominio está formado por $100 \times 100 = 10,000$ elementos finitos, cada uno discretizado en 25 puntos, 5 por cada eje. Para todos los modelos se utilizan condiciones de Neuman ($\partial p / \partial s = 0$) igual a cero en la frontera.

Modelo 1. Se tiene una fuente puntual en el centro del dominio donde el medio es aire a 0°C , con una velocidad $v = 331.5\text{ m/s}$, con condiciones de Neuman igual a cero.

En este caso se puede apreciar como la onda se propaga hasta la frontera del dominio y de acuerdo a la condición de Neuman las ondas que inciden de forma normal a la frontera son continuadas, pero aquellas que inciden con un ángulo diferente son reflejadas y no muestran la propagación de la onda en el medio físico, afectando los resultados en el dominio computacional

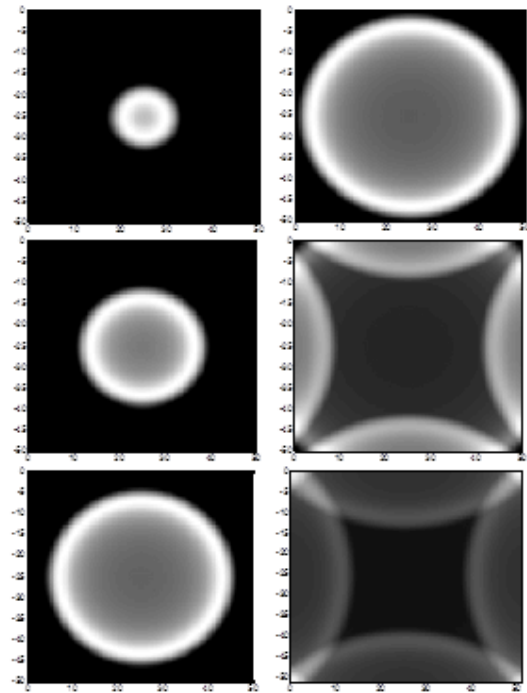


Figura 3 Se muestra de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha, la simulación de la ecuación de onda utilizando las condiciones del modelo 1 sin utilizar PML.

Modelo 2. Se considera una fuente puntual en agua a 20°C , con una velocidad de $v = 1,493\text{ m/s}$, con dos barras una de madera $v = 3,700\text{ m/s}$ y acero $v = 5,100\text{ m/s}$, colocados de manera vertical a la izquierda la madera y a la derecha el acero.

Al igual que en el modelo 1 se puede observar que al incidir la onda en la frontera también se tienen reflexiones que no deberían existir de acuerdo a lo que sucedería en la realidad, pero ocurren en el dominio computacional debido a las condiciones de frontera

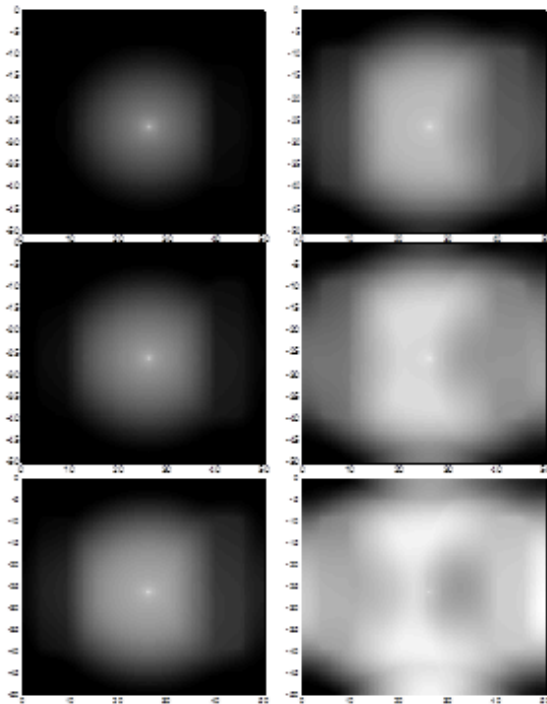


Figura 4 Se muestra de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha, la simulación de la ecuación de onda utilizando las condiciones del modelo 2 sin utilizar PML.

Modelo 3. En este caso se considera una fuente puntual al centro y arriba, con fronteras absorbentes en los cuatro lados del dominio con una velocidad homogénea de $v = 3,000$ m/s.

Se observa en la Figura 5 que al utilizar las fronteras absorbentes en el dominio de interés físico el cual es el dominio computacional, la onda se continua en el medio evitando la reflexión de ondas espurias que podrían dar resultados erróneos como en el modelo 1 y 2.

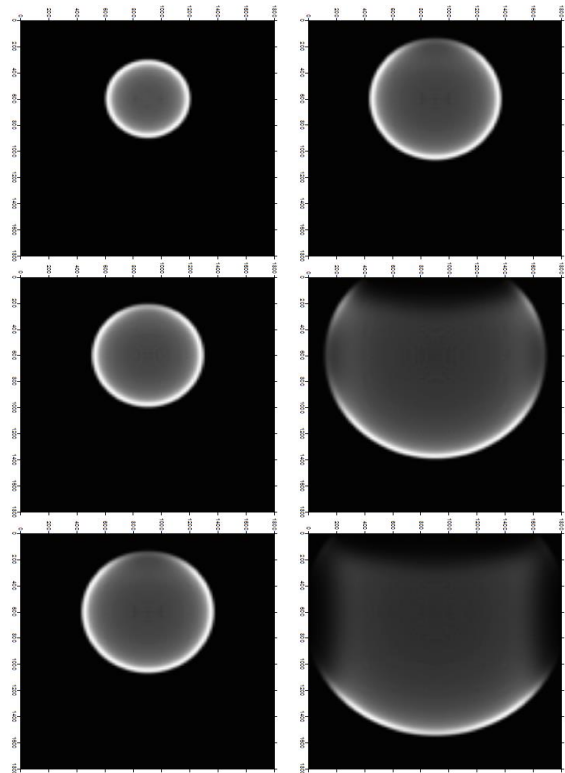


Figura 5 Se muestra de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha, la simulación de la ecuación de onda utilizando las condiciones del modelo 3 utilizando PML

Modelo 4. En este modelo se considera condiciones de Dirichlet $u = 0$ en la frontera superior y en el resto de las fronteras se impuso fronteras absorbentes, con la fuente puntual 3 metros debajo de la superficie y al centro. El dominio fue dividido por la mitad, en la parte superior de éste se tiene una velocidad de $v = 3,000$ m/s y en la mitad inferior $v = 2,000$ m/s.

Cuando la onda toca la superficie con condiciones de Dirichlet se observa como se refleja sobre el dominio y en el resto donde actúan las fronteras absorbentes la onda se continua o se absorbe, también se tiene que la onda se refleja en cierta proporción a la mitad del dominio por el cambio de velocidad y luego se continua en la otra mitad del dominio.

La simulación muestra que las fronteras absorbentes son un buen método para continuar las ondas en el medio y evitar lo más posibles reflexiones espurias sin significado físico, inminentes en los modelos clásicos para la solución de la ecuación de onda.

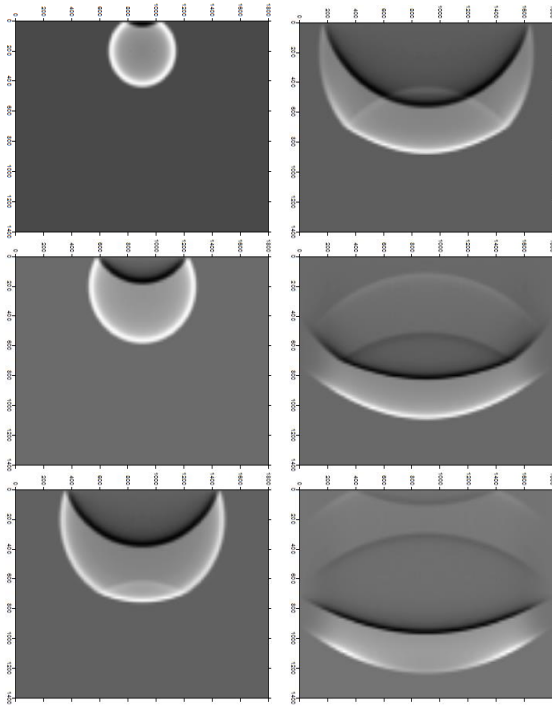


Figura 6 Se muestra de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha, la simulación de la ecuación de onda utilizando las condiciones del modelo 4 utilizando PML.

Conclusiones

Se formuló y resolvió la ecuación de onda acústica utilizando la PML en el contexto numérico de elemento finito e integración de Gauss-Lobatto-Legendre conocido como elemento espectral y diferencias finitas de segundo orden para la discretización en tiempo.

De acuerdo a los resultados se mostró la eficiencia de las fronteras absorbentes mediante la aplicación del método PML, para eliminar la reflexión de ondas espurias que existen debido a las condiciones de frontera que se deben imponer al aplicar un método numérico y así éste cumpla condiciones de estabilidad y convergencia. El método muestra ser estable y puede utilizarse para aplicarlo a medios heterogéneos que simulen medios físicos reales, como por ejemplo en mapas de ruido, campos magnéticos, pre y pos apilado de imágenes sísmicas, etc. Como trabajo futuro se puede simular la ecuación elastodinámica y verificar su eficiencia en problemas más completos que consideran un mayor número de propiedades del medio, no solo la velocidad.

Referencias

- Berenger, J. P. (1996). Three Dimensional Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. *Journal of Computational Physics*, 127, 363-379.
- D. Komatitsch, R. M. (2008). An Unsplit Convolutional Perfectly Matched Layer Improved at Grazing Incidence for the Seismic Wave Equation. *Geophysics*, 73, 51-61.
- D. Komatitsch, J. T. (2003). A Perfectly Matched Layer Absorbing Boundary Condition for the Second Order Seismic Wave Equation. *Geophysics Journal International*, 154, 146-153.
- F. Collino, C. T. (2001). Application of the Perfectly Matched Absorbing Layer Model to the Linear Elastodynamic Problem in Anisotropic Heterogeneous Media. *Geophysics*, 66, 294-307.

F. H. Drossaert, A. G. (2007). A Nonsplit Complex Frequency – Shifted PML Based on Recursive Integration for FDTD Modeling of Elastic Waves. *Geophysics*, 72, 9-17.

Kopriva, D. A. (2009). *Implementing Spectral Methods for Partial Differential Equations*. USA: Springer.

N. A. Campanis, V. A. (2008). *Effective Computational Methods in Wave Propagation*. USA: Chapman & Hall/CRC.

O.C. Zienkiewicz, R. T. (2000). *The Finite Element Method Vol 1*. USA: Butterworth-Heinemann.

Rossing, T. D. (2007). *Handbook of Acoustics*. New York: Springer.

S. Gopalakrishnan, A. C. (2008). *Spectral Finite Element Method Wave Propagation, Diagnostics and Control in Anisotropic and Inhomogeneous Structures*. USA: Springer.

Y. Q. Zeng, J. Q. (2001). The application of the Perfectly Matched Layer in Numerical Modeling of the Wave Propagation in Poroelastic Media. *Geophysics*, 66, 1258-1266.

Y. Rickard, N. G. (2002). A Perfectly Matched Layer for the 3-D Wave Equation in Time Domain. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, 12, 181-183.