Capítulo 2

Usos y limitaciones de la dinámica estocástica en el análisis macroeconómico convencional

José Hernández

J. Hernández
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, Departamento de Economía, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa-Tamaulipas, Delegación Azcapotzalco, 02200, México, D.F.
jlhm@correo.azc.uam.mx

M.Ramos, F.Miranda (eds.) *Optimización-Estocástica-Recursiva-Coherente-Sistémica y sus variantes (probabilidad, econometría y estadística aplicada),* Temas Selectos de Optimización-©ECORFAN-Santiago de Compostela, España, 2012.

Abstrac

In the paper is intended to show the development of macroeconomic analysis with the utilization of mathematics methods. The method most utilized by economist to build economics models with recurs characteristics and uncertain of the economics phenomenon, is the stochastic dynamics analysis. In this sense, it is considered to elaborate a economic growth model where it is introduced the public expenditure and the uncertainty, with the dynamic analysis minimum, to conclude that not it must to abuse in the build of models with the use of sophisticated techniques, but without economics content in its designs and results.

2 Introducción

Es comúnmente aceptado que los nuevos desarrollos en alguna rama de la ciencia son sujetos a escepticismo y desafío. Esto es una parte importante del proceso científico. Solo si los nuevos resultados tienen éxitos cesan los ataques hacia ellos y, entonces, llegan a ser aceptados, tanto la metodología empleada como los resultados mismos, por una parte de la colectividad científica del campo a que se refiera abriendo nuevas líneas de investigación con la nueva base científica adoptada. Por supuesto, esta situación no es ajena al campo de la economía. En particular, el progreso analítico de la economía ha estado supeditado al desarrollo de las técnicas matemáticas que permitan el estudio de los fenómenos económicos, en tanto que el mundo económico puede ser entendido por los modelos construidos con la formalización de las relaciones económicas, que al ser una abstracción de la realidad, permiten su simplificación e interpretación de las principales variables económicas.

Así, en los inicios de la ciencia económica, el problema central radicaba tanto en el análisis de las causas del progreso económico de las naciones en el marco de un incipiente sistema capitalista, como en la búsqueda de situaciones de equilibrio bajo ciertas condiciones establecidas. Dado la elegancia y aceptación en los resultados que presentaba el segundo punto, durante las últimas dos décadas del siglo XIX y las tres primeras del siglo XX, se le dio a éste una mayor preponderancia dentro de la ciencia económica, avanzando en el establecimiento de los fundamentos microeconómicos que permiten comprender el funcionamiento de los mercados y la actuación de los agentes que en él intervienen por medio del método matemático del análisis estático. Con la utilización de las técnicas matemáticas de optimización clásica, permitió, dentro del análisis económico, encontrar los valores de las variables de interés, que una vez alcanzadas, tendían a perpetuarse por si solas, dando por un hecho la posibilidad de alcanzar la posición de equilibrio, aún cuando ocurra un cambio en un parámetro del modelo seleccionado, pues se tendrá un desplazamiento de la posición de equilibrio inicial a la posición de equilibrio final. Por lo tanto, en la segunda década del siglo XX, los economistas habían encontrado un consenso en la utilización de las herramientas microeconómicas con los métodos matemáticos del equilibrio estático para el análisis agregado de corto plazo y de los cambios en la demanda y oferta de bienes y factores productivos.

Sin embargo, desde sus orígenes, la evolución expansiva de este sistema no ha sido uniforme sino que ha seguido una trayectoria de fluctuaciones persistentes e irregulares que se ha manifestado tanto en la actividad productiva (producto, inversión, empleo, ingreso) como en la actividad monetaria y financiera (precios, tipos de interés, activos financieros, deuda). Esta situación tuvo su máxima expresión en la Gran Depresión de 1929 en las principales economías del mundo, donde los economistas no encontraban la explicación satisfactoria de los hechos.

Así, dados estos hechos, empezaron a creer que la teoría microeconómica vigente no tenia las bases adecuadas para entender lo que ocurría con las fluctuaciones de corto y largo plazo de las dos variables básicas de la economía: el producto nacional y el nivel general de precios.

Por tal motivo, para los años 1930s, se retomó el análisis de los ciclos económicos que Clement Juglar describió en 1860, llamándolos ciclos de negocios, así como los denominados ciclos de inventario de Kitchin, propuestos en 1923, y las ondas largas de Kondratieff de 1924 y 1925, mismos que aunque tenían una base netamente empírica, Mitchell (1927) reafirmó con una modelación de la economía basada en retardos, dado la carencia de métodos matemáticos adecuados para el análisis de las fluctuaciones hasta ese momento. A la par de lo anterior, también se fue desarrollando, a partir de la publicación en 1936 de la Teoria general de la ocupación, el interés y el dinero de J. M. Keynes, la teoría macroeconómica como respuesta a la insatisfacción que provocó la microeconomía para el entendimiento de los problemas económicos vigentes, dando una mayor importancia a las condiciones monetarias, a las psicológicas de los agentes económicos y al papel del gobierno en el proceso económico.

El auge de la macroeconomía keynesiana al rango de ortodoxia y el renovado interés de los ciclos económicos, hizo que autores tan disímbolos en el análisis económico como Schumpeter, Kalecki, Kaldor y Samuelson proporcionaran las nuevas teorías y modelos modernos del ciclo económico. Posteriormente, al conjugarse con el desarrollo de los sistemas dinámicos en el campo de las matemáticas, dio lugar al establecimiento del análisis dinámico en el proceso de crecimiento de una economía de mercado con decisiones centralizadas o descentralizadas, cuyo objetivo se estableció como la búsqueda de la trayectoria que las diferentes fuerzas (variables) de un modelo deben tender para dirigirse hacia una nueva posición de equilibrio, si inicialmente se encuentran lejos de una posición de equilibrio debido a un cambio en un parámetro que lleva fuera del equilibrio analizando, además, el carácter específico de la trayectoria, en el sentido de si dicho cambio es permanente, fluctuante u oscilatoria que las variables seguirán camino del equilibrio, utilizando para ello los avances de la teoría del control óptimo y del cálculo de variaciones, aplicado para los sistemas dinámicos en tiempo continuo[3].

Pero, no es sino hasta los años 1970s cuando, con el advenimiento de la tecnología computacional y con la característica de que los fenómenos económicos no podían ser explicados con el análisis macroeconómico tradicional, al presentarse shocks de oferta inesperados, desaceleración económica pese a los empujes de demanda e inacción de los agentes económicos ante la política monetaria y fiscal por la presencia de incertidumbre que gira en torno a las decisiones de los agentes económicos; entonces, para poder llevar a cabo un análisis macroeconómico mediante la construcción de modelos que incorporaran los anteriores elementos, y pudieran tanto explicar la evolución de las principales variables económicas a lo largo del tiempo como entender la dinámica del sistema de precios, se hizo necesario utilizar las técnicas de la dinámica estocástica en la modelación macroeconómica de crecimiento económico (Brock and Mirman, 1972) primero y después en los modelos de política económica (Lucas 1972) y de ciclos económicos (Lucas, 1977, y Kidland and Presscott, 1982).

Asimismo, dado el consenso en torno a que un rasgo esencial que prevalece en las economías reales es la presencia de incertidumbre, tanto en el efecto de un instrumento de política económica como en el de las decisiones de los agentes privados, entonces, la dinámica estocástica es una herramienta matemática que ha venido recibiendo una atención y uso creciente entre los economistas para formular modelos macroeconómicos que expliquen los fenómenos económicos presentes.

[3] Aquí cabe destacar la importancia del Principio de Bellman (1957): "Una política óptima tiene la propiedad de que, cualesquiera sean el estado y las decisiones iniciales, las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la decisión inicial".

Derivados de los procesos de expansión del sistema de economías de mercado que conlleva per se un alto grado de incertidumbre y no una cotidianeidad económica determinista como se supone en los modelos simples de macroeconomía[4].

No obstante lo anterior, desde fines de la última década del siglo pasado, se ha venido utilizando, en mayor medida, las herramientas del cálculo estocástico en el desarrollo de los modelos de equilibrio general de la literatura económica[5], al considerarse como de primordial importancia atender la volatilidad de las variables económicas como precios o tasas de crecimiento, por ejemplo, pero suponiendo que tienen una distribución normal.

Esto es, sin movimientos inesperados, de auges o caídas, en la trayectoria de la variable considerada. Aunque, de forma evolutiva, en la última década, el supuesto de considerar que las variables siguen una distribución normal o log normal se ha dejado atrás. En cambio, dada la evidencia empírica, se ha considerado que los movimientos volátiles de las variables son los que ocurren con más frecuencia, siendo sobre todo externos y repentinos. Esto ha implicado el análisis de procesos de difusión con saltos dentro del cálculo estocástico.

Por consecuencia, el objetivo del presente trabajo es mostrar que para el desarrollo del análisis económico en general, y macroeconómico en particular, es necesario utilizar los métodos matemáticos que permitan que la formulación y selección de un modelo, que represente de manera simplificada el fenómeno económico de interés con sus características recurrentes, sea contrastado con la información disponible al respecto.

Uno de estos métodos que cumplen con estas características es el análisis dinámico estocástico. Para mostrar lo anterior, el trabajo se divide en cuatro secciones. En la primera sección se desarrolla un esquema general de la dinámica estocástica, en general, como herramienta matemática para su utilización en la modelización macroeconómica.

En la segunda sección se muestra la evolución respecto al uso de la dinámica estocástica en el análisis macroeconómico para posteriormente, en la tercera sección, formular un modelo macroeconómico utilizando la herramienta de la dinámica estocástica para analizar un fenómeno económico de renovado interés: el crecimiento económico fluctuante en situaciones de incertidumbre. Por último, en la cuarta sección se presentan las conclusiones respecto a las ventajas y desventajas del uso de la dinámica estocástica para la formulación de modelos macroeconómicos en particular.

2.1 Dinámica estocástica

2.1.1 Análisis clásico bajo previsión perfecta

Cuando el tiempo es una variable que influye en las relaciones propuestas de un modelo cualquiera que represente cualquier fenómeno a estudiar, se tiene una relación del tipo:

---

[4] Welfens (2008) y Flaschel et al (2008) proporcionan una guía completa respecto a los tópicos tratados en los modelos macroeconómicos hoy en día, conjuntamente con las técnicas matemáticas usadas. Mientras que libros de texto de Macroeconomía Avanzada como los de Romer (2002), Blanchard and Fisher (1996), Azariadis (1993), Turnovsky (1995) y Shone (1997), entre otros, en general siguen tratando los problemas de crecimiento y fluctuaciones del consumo e inversión, como determinantes del producto, por un lado, y del manejo de la política económica, por el otro, con la salvedad de que en lugar de tener ecuaciones deterministas y de optimización estática, como en los viejos textos de macroeconomía, se tienen relaciones dinámicas y estocásticas.

[5] Los ejemplos clásicos al respecto son Giulano y Turnovsky (2003), Turnovsky (1999), y Turnovsky y Smith (2006).

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

Que describe la evolución de una función X a lo largo del tiempo. Este es un sistema dinámico donde la variable es continua con valores de X en el campo de los números reales $(\mathbb{R})$ y dominio en los naturales $(\mathbb{N})$.

Si consideramos al tiempo como una variable discreta que puede tomar valores t=0, 1, 2,… entonces (2.1) es una función con valores de X en el campo de los números reales y dominio en los naturales, por lo tanto se tiene una sucesión de vectores $X_0, X_1, X_2, \ldots,$ donde cada vector se supone relacionado con el vector previo por medio de una relación dada por

$$x_{t+1} = f(x_t) \quad (2.2)$$

La cual nos proporciona una forma de pasar de un periodo al siguiente, lo que implica que el valor de la variable en un momento dado depende sólo del valor de las variables en el periodo anterior. Pero, si consideramos al tiempo como una variable del modelo mismo, entonces tendríamos

$$x_{t+1} = f(x_t, t) \quad (2.3)$$

Que representa un sistema dinámico discreto general, el cual puede ser de orden m si se presenta como una ecuación de la forma

$$x_{t+m} = f(x_{t+m-1}, x_{t+m-2}, \ldots, x_{t+m-2}, t) = f_t(x_{t+m-1}, x_{t+m-2}, \ldots, x_{t+m-2}, x_t) \quad (2.3.1)$$

La cual será lineal si la función f es lineal y donde $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ constituyendo un espacio vectorial que tiene como subconjunto al conjunto de estados (o imagen de la función). Por lo tanto, el estado de la variable X depende no solo del estado anterior, sino de los estados en los m periodos anteriores.

En consecuencia, siguiendo la metodología desarrollada, entre otros, por Malliaris and Brock (1991), Aoki (1998), Shone (1997), Lomelí y Rumbos (2003) y Medio (1992), en la formulación de un modelo que presente una dinámica estocástica va a depender de determinar si las observaciones (o datos) que representan las variables siguen un proceso estocástico[6] (aleatorio) o bien si están generados por un fenómeno no lineal.

De tal manera que asume un comportamiento caótico. Por tal motivo, es necesario suponer la linealidad del modelo para que así la existencia del comportamiento estocástico se explique por la introducción de variables aleatorias, conformando un modelo lineal estocástico.

Así, supongamos que $\{X_t\}$ es una sucesión de variables relacionadas por la ecuación de diferencias:

[6] Cuando una variable aleatoria, x_t, sigue una distribución de probabilidad, se dice entonces que la sucesión $\{x_t\}$ forma un proceso estocástico discreto, el cual será estacionario si su media y varianza son invariantes en el tiempo. Para ello, es necesario que dicho proceso sea ruido blanco, lo cual implica que sea independiente e idénticamente distribuido (es decir, siga una distribución normal), con media cero y varianza sigma cuadrada, para toda t. Sin embargo, dicho proceso puede estar o serialmente correlacionado, si la covarianza de la variable aleatoria en el periodo t esta ligada al periodo anterior t-s, o ser autorregresivo, si la variable aleatoria en el periodo t, está en función de la misma variable aleatoria en periodos anteriores, t-s. Por último, los procesos estocásticos serán martingalas si su valor esperado es igual al valor de la variable aleatoria en el periodo actual, t, condicionada a la utilización de toda la información disponible a dicho periodo. Esto significa entonces que una martingala es un proceso estocástico tal que la mejor predicción que de él se pueda hacer, dada cierta información disponible, es simplemente el valor antes observado.

$$x_t = \alpha x_{t+1} + \beta \quad (2.4)$$

Donde el valor de la variable X depende del valor futuro o más concretamente de lo que se espera sea en el futuro, β es un coeficiente.

Haciendo iteración hacia adelante:
$$x_t = \alpha(\propto x_{t+2} + \beta) + \beta = \propto (\alpha(\propto x_{t+3} + \beta) + \beta) + \beta = \cdots = \alpha^n x_{t+n} + \beta \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k$$

Y la solución existe si se cumplen las siguientes condiciones

$|\propto| < 1$
$\lim_{n\to\infty} \propto^n x_{t+n}$ existe

Si $\lim_{n\to\infty} \propto^n x_{t+n} = 0$, entonces la solución esta dada por $x_t = \frac{\beta}{1-\propto}$. El término $\beta \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{\beta}{1-\propto}$ es la parte fundamental de la solución. Mientras el término $\lim_{n\to\infty} \propto^n x_{t+n}$ es la parte de burbuja de la solución. Si $\lim_{n\to\infty} \propto^n x_{t+n} \neq 0$, entonces la solución no es la parte fundamental y se puede decir que existen burbujas especulativas. Sin embargo, aun cuando no existan dichas burbujas y tengamos una variable adicional en la ecuación (2.4), de forma que se denote la siguiente relación:

$$x_t = \alpha x_{t+1} + \beta y_t \quad (2.4.1)$$

Iterando hacia el futuro:

$$x_t = \alpha^n x_{t+n} + \beta \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k y_{t+1}$$

Suponiendo que se cumple $\lim_{n\to\infty} \propto^n x_{t+n} = 0$, la solución $x_t = \beta \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k y_{t+k}$ no nos permitirá conocer el límite de la serie, en tanto no se tenga toda la información acerca de la sucesión $\{y_{t+k}\}_{k=0}^{\infty}$. Lo contrario implica que se tiene una previsión perfecta acerca del futuro, lo cual es irreal, por la presencia de incertidumbre en la cotidianidad.

2.1.2 Análisis clásico con incertidumbre

Si a la ecuación (4ª) se le da un sentido aleatorio, esta se reescribe como:

$$x_t = \alpha \mathbb{E}(x_{t+1}) + \beta y_t \quad (2.5)$$

Donde $\mathbb{E}$ es el valor esperado o esperanza matemática en el periodo t de la variable X en el periodo posterior $(t+1)$. Siguiendo a Malliaris and Brock (1991: pp.8-19), la forma de calcular $\mathbb{E}$ puede variar, desde la clásica función de distribución para una variable aleatoria discreta, donde $\mathbb{E}$ es el primer momento, lo cual implica que el valor esperado o esperanza matemática se forma por el promedio de los valores pasados; hasta producto de una probabilidad condicional, de tal manera que $\mathbb{E}$ es igual al conjunto de información disponible en el momento t, formándose así una martingala.

Por lo anterior, la forma de calcular el valor esperado de la variable X como mejor indicador para el futuro con presencia de incertidumbre, es una elección que depende de lo siguiente: si se toma al valor esperado como el primer momento de la variable aleatoria central, entonces tenemos que $\mathbb{E}(x_{t+1}) = \bar{x}$, donde $\bar{x}$ denota el promedio de los valores pasados; pero, si consideramos a la esperanza matemática como una martingala, de forma que está condicionada por toda la información disponible en el periodo, entonces tenemos que $\mathbb{E}(x_{t+1}/I_t) = x_t$, donde I_t denota el conjunto $\{x_{t-i}, y_{t-i}; i = 0, 1, \dots, t\}$ de toda la información disponible en el periodo t, es decir, todos los valores pasados de las variables, así como también al conjunto de valores de todos los parámetros del modelo.

Esto último supone que se tiene toda la información pasada y es idéntica para todos. Si además, se considera que existe un conjunto de información mínima, I_m, contenido en todos los conjuntos de información, entonces es posible tomar la esperanza matemática con respecto a alguna medida de probabilidad común[7].

Por tanto, para resolver (2.5), iteramos un periodo hacia el futuro y tomamos la esperanza condicionada a la información en t y obtenemos

$$\mathbb{E}_t(x_{t+1}) = \alpha \mathbb{E}_t\left(\mathbb{E}_{t+1}(x_{t+2})\right) + \beta\, \mathbb{E}_t(y_{t+1})$$

Aplicando la Ley de Esperanzas Iteradas[8],

$$\mathbb{E}_t(x_{t+1}) = \alpha \mathbb{E}_t(x_{t+2}) + \beta \mathbb{E}_t(y_{t+1})$$

Y sustituyendo este resultado en (2.5):

$$x_t = \alpha[\alpha \mathbb{E}_t(x_{t+2}) + \beta \mathbb{E}_t(y_{t+1})] + \beta y_t \;=\; \alpha^2 \mathbb{E}_t(x_{t+2}) + \alpha\beta \mathbb{E}_t(y_{t+1}) + \beta y_t \tag{2.6}$$

Si, en cambio, se itera dos periodos a (2.5), se toma la esperanza condicionada en t y se aplica la ley de esperanzas iteradas, se obtiene

$$\mathbb{E}_t(x_{t+2}) = \alpha \mathbb{E}_t(x_{t+3}) + \beta \mathbb{E}_t(y_{t+2})$$

Y sustituyendo en (2.5):

$$\begin{aligned} x_t &= \alpha^2 [\alpha \mathbb{E}_t(x_{t+3}) + \beta \mathbb{E}_t(y_{t+2})] + \alpha\beta \mathbb{E}_t(y_{t+1}) + \beta y_t \\ &= \alpha^3 \mathbb{E}_t(x_{t+3}) + \alpha^2 \beta \mathbb{E}_t(y_{t+2}) + \alpha\beta \mathbb{E}_t(y_{t+1}) + \beta y_t \end{aligned} \tag{2.7}$$

Después de n iteraciones se obtiene

$$x_t = \alpha^n \mathbb{E}_t(x_{t+n}) + \beta \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \mathbb{E}_t(y_{t+k}) \tag{2.8}$$

El cual es el equivalente estocástico de la solución de la ecuación (2.4.1).

[7] Aunque el valor futuro de x_t es desconocido y pueda tomar toda una gama de valores, cada uno de ellos con cierta probabilidad, pues x_t es una variable aleatoria para cada periodo, de alguna manera es posible utilizar toda la información disponible para encontrar esta distribución de probabilidad y es con respecto a ésta que se toma el valor esperado o esperanza.

[8] La cual señala que para todo I_t y $k \geq 0$, entonces se cumple $\mathbb{E}_t(\mathbb{E}_{t+k}(\cdot)) = \mathbb{E}_t(\cdot)$, $\mathbb{E}_{t+k}(\mathbb{E}_t(\cdot)) = \mathbb{E}_t(\cdot)$

Suponiendo que no hay burbujas especulativas, es decir que se cumple $\lim_{n\to\infty} \propto^n \mathbb{E}(x_{t+n}) = 0$, la solución es $x_t = \beta \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \mathbb{E}(y_{t+k})$, que es la parte fundamental de una ecuación dinámica estocástica. Sin embargo, se continúa sin conocer el límite de la serie a menos de que tengamos más información acerca de la sucesión $\{\mathbb{E}(y_{t+k})\}_{k=0}^{\infty}$.

Ahora bien, en caso de que $\lim_{n\to\infty} \propto^n \mathbb{E}(x_{t+n}) \neq 0$; es decir, que la solución de la ecuación estocástica (2.2) admita burbujas (o equilibrios múltiples), además de suponer que x_t^* es la solución fundamental y, por tanto, que

$$x_t = x_t^* + \gamma_t \tag{2.9}$$

Sea cualquier otra solución, donde $\gamma_t = \alpha\mathbb{E}_t(\gamma_{t+1})$. Entonces, despejando la esperanza: $\mathbb{E}_t(\gamma_{t+1}) = \gamma_t \alpha^{-1}$, se tiene que, para cualquier periodo: $\mathbb{E}_t(\gamma_{t+k}) = \gamma_t \alpha^{-k}$. Si $|\alpha| < 1$, el límite que se obtiene es:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}_t(\gamma_{t+k}) = \lim_{k\to\infty} \alpha^{-k} \gamma_t$$

El cual diverge puesto que la esperanza de γ_t es explosiva, por lo tanto, γ_t representa la burbuja de la solución[9].

En cambio, si consideramos que la sucesión $\{y_t\}$ esta determinado de manera exógena, se tiene entonces que x_t está dado por

$$x_t = \propto_0 + \alpha_1 \mathbb{E}_{t-1}(x_t) + \alpha_2 \mathbb{E}_{t-2}(x_t) + y_t \tag{2.10}$$

Donde $\alpha_i \in (0,1)$ y los valores esperados de x_t que se tuvieron en los dos periodos anteriores. Así, x_t puede expresarse en forma reducida si está en función de $\{y_t\}$. Esto se logra si se toma la esperanza más antigua de (2.10), $\mathbb{E}_{t-2}$, a toda esa ecuación, se utiliza luego la ley de esperanzas iteradas y del resultado se despeja $\mathbb{E}_{t-2}(x_t)$, obteniendo

$$\mathbb{E}_{t-2}(x_t) = \frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}[\mathbb{E}_{t-2}(y_t) + \alpha_0]$$

Realizando el mismo proceso para $\mathbb{E}_{t-1}$:

$$\mathbb{E}_{t-1}(x_t) = \frac{1}{1-\alpha_1}\left[\alpha_0 + \alpha_2\left[\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}[\mathbb{E}_{t-2}(y_t) + \alpha_0]\right] + \mathbb{E}_{t-1}(y_t)\right]$$

Sustituyendo $\mathbb{E}_{t-2}(x_t)$ y $\mathbb{E}_{t-1}(x_t)$ en (2.10), y simplificando se obtiene la forma reducida para x_t:

$$x_t = y_t + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\mathbb{E}_{t-1}(y_t) + \frac{\alpha_2}{(1-\alpha_1-\alpha_2)(1-\alpha_1)}\mathbb{E}_{t-2}(y_t) + g$$

Donde $g = \alpha_0\left(1 + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}\right)$

[9] Sin embargo, si x_t esta sujeta a una condición terminal en el futuro, t=T, entonces en T se tiene que $\gamma_T = 0$. Iterando hacia el pasado a partir de t=T se tiene que $\gamma_t = 0$ para todo t=0,…, T, de manera que no hay burbujas.

Es obvio que el análisis puede extenderse para $\mathbb{E}_{t-k}(x_t), k = 1, \ldots, t.$ En consecuencia, y_t, en general, puede representar un vector de variables exógenas que pueden incluir shocks estocásticos. Sin embargo, también es posible que se presenten situaciones donde los valores esperados de x_t, dependen tanto de la varianza que se tuvo de la misma en el periodo anterior, la esperanza del valor futuro y algún parámetro y_t. En este caso, la técnica adecuada es la de coeficientes indeterminados para hallar la solución respectiva.

Ahora bien, generalmente los sistemas dinámicos no lineales presentan un comportamiento caótico. Esto también puede presentarse cuando un fenómeno está descrito por un sistema lineal y una o más variables del modelo son intrínsecamente estocásticas[10]. Por tanto, si identificamos al caos como un comportamiento netamente desordenado, lo que se desea es mostrar la inestabilidad del sistema dinámico definido por (2.2).

Dada una condición inicial x_0, considérese un punto cercano $y_0 = x_0 + \delta_0$ en donde $|\delta_0|$ es pequeño y mide la separación entre la condición inicial y el punto cercano. Iterando n veces, comenzando con x_0 y y_0, de manera que se obtenga la separación que existe entre ambos puntos después de n iteraciones, $\delta_n = y_n - x_n$. Si $|\delta_0| \simeq |\delta_0|e^{n\lambda}$, donde λ es el exponente de Liapunov, que se define como

$$\lambda = \lim_{\delta_0 \to 0} \frac{1}{n} ln \left|\frac{\delta_n}{\delta_0}\right| \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} ln |f'(x_k)|$$

Si el límite existe[11]. Por lo tanto, si $\lambda>0$ existe caos, debido a la sensibilidad de las condiciones iniciales.

2.1.3 Procesos estocásticos de difusión: Movimiento browniano geométrico

Si queremos, por otra parte, analizar la dinámica de la variable X, donde ésta presenta movimientos aleatorios continuos y está determinada tanto por situaciones deterministas como por la incertidumbre, de manera que contiene la información generada por un proceso estocástico y tenemos entonces que representar la dinámica estocástica de X a través de la denominada ecuación diferencial estocástica:

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) \tag{2.11}$$

Donde $\mu(t)dt$ es un término de tendencia (determinístico) y $\sigma(t)dW(t)$ es el diferencial de un proceso de Wiener[12] (estocástico) .

---

[10] Esto es de particular importancia, pues hacer el tiempo discreto tiene implicaciones para la dinámica del modelo, pues puede generarse un comportamiento caótico en donde antes no lo había. Por lo tanto, se debe tener en cuenta si esta complejidad es o no deseable considerando si ésta es endógena al sistema o resultado de una mala modelización como, por ejemplo, si se considera un modelo logístico, este es simple en tiempo continuo, pero en tiempo discreto tiene un comportamiento complejo, Cfr. Medio (1992), chapter 11.

[11] Para una idea general de la demostración de la definición, véase Lomeli y Rumbos (2003), pp.189 y ss. donde, además, muestran que también se puede analizar el comportamiento caótico por medio del teorema de Li y Yorke.

[12] Un proceso de Wiener $\{W(t)\}$ se caracteriza por las siguientes propiedades: i) El proceso comienza en cero ($W(0) = 0$); Las diferencias $\Delta W(t) = W(t) - W(s)$ son ruido blanco gaussiano, por lo cual se distribuyen como una normal com media cero y varianza $t - s = \Delta t$ para toda $s < t$; iii) Para todo $s < t \leq v < x$ las diferencias $W(t) - W(s)$ y $W(x) - W(v)$ son variables aleatorias independientes y; iv) Las trayectorias de un proceso de Wiener son continuas.

Donde σ mide la variabilidad de la variable X a lo largo de su trayectoria en el tiempo t y μ es una constante determinista.Por consecuencia, X representa una familia indexada de variables aleatorias en el intervalo de tiempo [0, T], $\{X(t)\}$, cuyas trayectorias que se obtengan son una aproximación de una simulación discreta de un proceso continuo, las cuales son curvas continuas que no son diferenciables en ningún punto[13].

La derivación de la ecuación (2.11) proviene de lo siguiente: Dado un proceso de Wiener, W, se dice que cualquier proceso g pertenece a la clase $L^2[a,b]$ si es adaptado a la filtración[14] $\{F_t^w\}_{t\geq 0}$ tal que $\int_a^b |g(s)|^2\, ds < \infty$.

Es decir, el proceso g debe ser de cuadrado integrable, donde el conjunto de puntos donde no se cumple es despreciable[15]. Además, el proceso g es simple en $[a,b]$ si existe un conjunto de puntos determinísticos $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ y un conjunto de constantes $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ tales que $g(t) = ck$ si $t_k < t < \cdots < t_{k+1}$ para $k = 0,1,\ldots,n-1$, lo que implica la constancia de g.

Por lo anterior, la integral estocástica en el intervalo $[a,b]$ del proceso simple g será

$$\int_a^b g(s)\, dW(s) = \sum_{k=0}^{n-1} g(k)\,[W(t_{k+1}) - W(t_k)]$$

Si existe una sucesión de procesos simples cuando $n \to \infty$, entonces podemos obtener la sucesión $X_n = \int_a^b g_n(s)\, dW(s)$, para cada n, de forma que la sucesión X_n tiene el límite, X, cuando $n \to \infty$, entonces:

$$X(t) = \int_a^b g(s)\, dW(s) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g(s)\, dW(s) \tag{2.12}$$

Donde X es un proceso estocástico de ruido blanco y dadas las propiedades de esperanza nula y varianza[16], entonces X es F_t^w-medible porque está dentro de las trayectorias del proceso de Weiner en el intervalo $[a,b]$.

---

[13] Esto es porque dada la segunda propiedad de un proceso de Wiener, se tiene entonces que el valor esperado de las diferencias es nulo ($E[\Delta W(t)] = 0$) y la varianza es la diferencia temporal: $E[\Delta W(t)^2] = Var[\Delta W(t)] = \Delta t$ y $Var[[\Delta W(t)^2]] = 2(\Delta t)^2$.

[14] La filtración F_t^x se puede interpretar como un flujo de información generado por el proceso X desde $t = 0$. El funcionamiento es el siguiente: Sea A un evento tal que su información proporcionada esta dentro de la información generada por el proceso $\{X\}$ en el intervalo $[0,t]$, entonces es posible escribir ello como $A \in F_t^x$ lo cual, además, nos permite saber si A ocurre o no dentro de la trayectoria $X(t)$. Asimismo, si Z es una variable aleatoria tal que se determina dentro de la trayectoria $X(t)$, entonces también $Z \in F_t^x$. A su vez, si $\{Y(t)\}$ es otro proceso estocástico, tal que para todas las variables aleatorias dentro de $Y(t)$ con $0 \leq t$ se cumple que $Y(t) \in F_t^x$, entonces se puede decir que $\{Y(t)\}$ es adaptado a la filtración F_t^x. Esto significa que las observaciones de las variables aleatorias contenidas en el proceso estocástico quedan supeditadas a las observaciones de la trayectoria $X(t)$, Cfr. Maillairis and Brock (1991).

[15] Esto significa que el proceso g pertenece a la clase L^2 si $g \in L^2[0,t]$para todo $t > 0$.

[16] Esto es: i) $E[X] = 0$ y ii) $E[X^2] = \int_a^b E[|g(s)|^2]\, ds$.

Lo anterior implica que para cualquier proceso $g \in L^2$, el proceso X definido en (2.12), para el intervalo $[0,t]$, es una F_t -martingala[17]. En consecuencia, si consideramos adicionalmente al proceso estocástico, X, un número real, x_0, y a μ y σ como dos procesos F_t^w-adaptados, tenemos que:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)\, dW(t) \text{ para toda } t \geq 0 \tag{2.13}$$

Si consideramos la condición inicial $X(0) = x_0$ y diferenciamos (2.13), obtenemos el diferencial estocástico de X dado por:

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) \tag{2.14}$$

Esta ecuación representa la dinámica estocástica de X, donde el primer término corresponde a la tendencia y el segundo término es el componente de ruido gaussiano (aleatorio).

Ambos términos pueden ser representados por funciones del tipo $f = f(t, X)$, siendo estas diferenciables una vez en t y doblemente diferenciables en X. Por tanto, podemos transformar (2.14) en lo que se denomina proceso de difusión, el cual es un proceso estocástico dado por la ecuación:

$$dZ = f(t, X(t))(t) = \mu\big(t, X(t)\big)dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \tag{2.14.1}$$

La cual puede relacionarse con modelos determinísticos con incertidumbre y es plenamente coincidente con (2.11) en términos del tiempo[18] y el problema entonces se reduce a encontrar un proceso estocástico que satisfaga la ecuación diferencial estocástica y la condición inicial. Sin embargo, para resolver la ecuación diferencial estocástica, es necesario que se encuentre primero el diferencial de una función de un proceso estocástico. Para hacerlo se utiliza el denominado Lema de Itô[19] que proporciona la solución simple a una ecuación diferencial estocástica como (2.14). Donde, además, si μ y σ son constantes y $\sigma > 0$, entonces la solución es el proceso estocástico denominado Movimiento browniano geométrico, la cual cumple con las siguientes propiedades:

X es un proceso estocástico F_t^w-adaptado,
X tiene trayectorias continuas,
X es un proceso de Markov, y

---

[17] Un proceso estocástico X se llama F_t-martingala si cumple lo siguiente: i) X es adaptado a la filtración $\{F_t\}_{t>0}$; ii) $E[|X(t)|] < \infty$ para toda t y; iii) Para toda s y t tal que $s \leq t$, dadas las propiedades de esperanzas condicionadas, $E[X(t)/F_s] = X(s)$. El cumplimiento de estas propiedades implica que toda la información generada por los eventos observados hasta el momento t se obtiene a partir del proceso X, por lo cual, cualquier otra variable aleatoria depende de la trayectoria de $X(s)$ en el intervalo $0 \leq s \leq t$ (Nuñez y Segundo (2012: Cap. 3).

[18] Nótese que si a las ecuaciones (11) y (14ª) las dividimos por la variable aleatoria X obtenemos:

$\frac{dX}{X} = \mu dt + \sigma dW$. Lo cual significa que la proporción del crecimiento de la variable X, para un corto periodo de tiempo, dt, tiene una distribución normal con media μdt y varianza $\sigma^2 dt$.

[19] El Lema de Ito señala lo siguiente: Sea X un proceso estocástico con diferencial estocástico $dX(t) = \mu(t)\, dt + \sigma(t)dW(t)$ donde μ y σ son procesos adaptados y sea $f = f(t, X)$ una función diferenciable respecto a t y doblemente diferenciable respecto a X. Si Z es un proceso definido como $Z = f(t, X(t))$, entonces Z tiene un diferencial estocástico, dZ, dado por $dZ = df\big(t, X(t)\big) = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\} dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dW(t)$.

Existe una constante C tal que $E[|X(t)|] \leq Ce^{Ct}(1+|x_0|^2)$

Así, la solución esta dada por:

$$X(t) = x_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)} \tag{2.15}$$

Cuyo valor esperado es

$$E[X(t)] = x_0 e^{\mu t} \tag{2.16}$$

(2.15) es una solución válida cuando el proceso estocástico tiene una sola fuente de aleatoriedad. En cambio, si hay más de una fuente, entonces se tendrán soluciones que muestran procesos brownianos n-dimensionales. Por ejemplo, sea el caso de un proceso que tiene dos fuentes, entonces tenemos que considerar un proceso $W = [w_1, w_2]$ siendo w_1 y w_2 dos procesos de Wiener independientes, con media, $\mu = [\mu_1(t), \mu_2(t)]$, o vector de tendencia y la matriz de varianza-covarianza, $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(t) & \sigma_{12}(t) \\ \sigma_{21}(t) & \sigma_{22}(t) \end{bmatrix}$, la matriz de difusión.

Por tanto, el proceso bi-dimensional $X = [x_1, x_2]$, presenta un diferencial estocástico dado por:

$$\begin{bmatrix} dx_1(t) \\ dx_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{bmatrix} \cdot dt + \begin{bmatrix} \sigma_{11}(t) & \sigma_{12}(t) \\ \sigma_{21}(t) & \sigma_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw_1(t) \\ dw_2(t) \end{bmatrix} \equiv dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) \tag{2.17}$$

Si Z es un proceso tal que $Z = f(t, X(t))$, siendo f una función de $\mathcal{R}^3$ en $\mathbb{R}$ diferenciable en t y doblemente diferenciable en X, y si X es un proceso bi-dimensional con diferencial estocástico dado por (2.17), entonces, aplicando el Lema de Itô, f tiene el siguiente diferencial estocástico:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} + \mu_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{1}{2} s_1 dt + s_2 \tag{2.18}$$

Siendo $s_1 = \{\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2\} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2(\sigma_{21}^2 \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 \sigma_{12}^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + (\sigma_{12}^2 + \sigma_{22}^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ y

$s_2 = \{\sigma_{11} + \sigma_{21}\} \frac{\partial f}{\partial x_1} dW_1 + (\sigma_{12} + \sigma_{22}) \frac{\partial f}{\partial x_2} dW_2$

La ecuación (2.18) es equivalente a[20]

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{1}{2} S \tag{2.19}$$

Donde $S = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1 dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2 dx_2$

De forma que (2.19) representa la solución al proceso estocástico bi-dimensional.

---

[20] Ello resulta cuando se aplica lo siguiente: i) $(dt)^2 = 0$; ii) $dt \cdot dw_i = 0 \quad i = 1{,}2$; iii) $(dw_i)^2 = dt \quad i = 1{,}2$ y; iv) $dw_i dw_j = 0 \quad i = 1{,}2$.

2.1.4 Procesos Estocásticos de Difusión con Saltos

Cuando una variable X presenta una frecuencia alta de movimientos volátiles, causados de manera externa y repentina, entonces tenemos que dicha variable presenta un proceso estocástico de difusión con saltos, de tal forma que su dinámica se representa por medio de la ecuación:

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) + vX(t)dQ(t) \tag{2.20}$$

Donde α es un parámetro que muestra la tendencia de la variable X condicionada a que ningún salto se produzca; σ es la volatilidad esperada de la variable; v mide los posibles saltos de la variable; W es un proceso de Wiener estandarizado[21]. Por su parte, se supone que los saltos en la variable siguen un procesos de Poisson, Q, cuyo parámetro de intensidad queda definido por las condiciones:

$$\begin{aligned} &X_r\{un\ salto\ unitario\ durante\ dt\} = X_r\{dQ(t) = 1\} = \lambda_X dt + 0(dt) \\ &\qquad X_r\{ningún\ salto\ en\ dt\} = X_r\{dQ(t) = 0\} = 1 - \lambda_X dt + 0(dt) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Por tanto, los saltos quedan estandarizados por:

$$E[dQ(t)] = Var[dQ(t)] = \lambda_X dt \tag{2.22}$$

Por lo cual, el número inicial de saltos se supone nulo, lo que implica que $Q(0) = 0$. En consecuencia, si suponemos la no correlación entre los procesos de Wiener, $W(t)$, y de Poisson, $Q(t)$, entonces podemos obtener endógenamente a los componentes de tendencia, α, de difusión, $\sigma dW(t)$, y de salto, $vdQ(t)$, de (2.20).

Sea m el vector de componentes exógenos que determina a los componentes estocásticos de difusión y saltos y $\frac{1}{X}$ es el inverso de la variable en cuestión, por lo que su cambio porcentual queda dado por:

$$Xd\left(\frac{1}{X}\right) = \alpha_m dt + \sigma_m dW(t) + (\frac{1}{1+v_m} - 1)dQ(t) \tag{2.23}$$

Entonces aplicando el Lema de Itô al proceso estocástico (2.20), se tiene que el comportamiento de la variable X esta determinado endógenamente por el modelo mismo, de tal manera que lo anterior implica que los cambios que ocurran en la variable X se verán afectados por la volatilidad, determinada por el proceso de Wiener aplicada a la misma variable X y por saltos ocurridos en ésta, derivados estócasticamente, y definidos mediante un proceso de Poisson.

2.2 Evolución de la dinámica estocástica en el análisis macroeconómico convencional

El tipo de economías a las que se les puede aplicar los métodos estocásticos para el análisis económico es sorprendentemente grande, sobre todo cuando se tiene el consenso de que éstas fluctúan con una tendencia marcada y muestran una dinámica que puede ser aproximada mediante una ecuación lineal de movimiento a lo largo del tiempo, con presencia de incertidumbre.

---

[21] Esto significa que W presenta incrementos normales independientes cuyo valor esperado es $E[dW(t)] = 0$ y varianza $Var[dW(t)] = dt$.

Dicho comportamiento aunque ha sido observado desde la evolución del sistema capitalista, su análisis mediante el uso de sistemas dinámicos ha sido paulatino, en principio, y excesivamente tratado últimamente.

Sin embargo, a pesar de lo anterior, por mucho tiempo la utilización del tiempo continuo en el análisis económico mostró su utilidad, sobre todo cuando se aproximaban procesos en donde la evolución de una situación a la siguiente no era muy brusca y se tiene la posibilidad adicional de analizar los estados intermedios; por tanto, de aquí surge la razón del porque la modelización económica pospuso la consideración del tiempo como variable y se inició con modelos estáticos, donde a partir de un conjunto de hipótesis sobre los agentes (denominadas comúnmente como racionalidad), se llega a la conclusión de la existencia de un equilibrio entre las fuerzas económicas.

Pero, también se tiene la deficiencia de no describir como se llega al equilibrio, por lo cual no se identifica lo *aleatorio o estocástico* que aqueja la cotidianeidad económica sino que se considera a ésta como un fenómeno esencialmente determinista, con lo cual se genera una incapacidad predictiva de los modelos, misma que proviene o de la formulación de las ecuaciones, pues las variables pueden ser intrínsecamente estocásticas y, por lo tanto, su evolución es impredecible hasta cierto punto; o de que las variables involucradas sean de origen determinista, pero su evolución esté descrita por un sistema dinámico no lineal que presente un comportamiento caótico fuera de la realidad.

Ahora bien, conforme el análisis de las series de tiempo tradicional, se puede observar que el comportamiento de las variables económicas agregadas pueden separarse en dos partes: la primera es una tendencia determinista y la segunda está formada por fluctuaciones alrededor de dicha tendencia. Este hecho motivó, en principio, al desarrollo de la teoría keynesiana[22] con el fin de principal de analizar, reducir, y hasta eliminar, estas fluctuaciones con base en políticas monetaria y fiscal adecuadas, en coordinación con las expectativas de los agentes económicos, bajo el supuesto de que el gobierno (o la autoridad monetaria, en caso de bancos centrales autónomos) tienen la capacidad de anticipar estas fluctuaciones y deben actuar en consecuencia.

Sin embargo, dado que los datos de las variables económicas se recopilan y archivan para periodos de tiempo uniformemente espaciados, el análisis de variables macroeconómicas sobre conjuntos discretos de valores de tiempo se fue extendiendo desde la aparición de los trabajos simultáneos de Harrod y Samuelson en 1939[23].

El trabajo de Harrod (1939), utiliza la dinámica en tiempo discreto para formular un modelo de análisis del crecimiento del ingreso nacional en una economía en expansión a través del tiempo. Su planteamiento consiste en suponer que tanto el ahorro como la inversión en el tiempo t, dependen, el primero de una fracción positiva del ingreso actual, $S_t = \propto Y_t$, mientras que la segunda de una fracción positiva del incremento último del ingreso, $I_t = \beta(Y_t - Y_{t-1})$, que al igualarse en el equilibrio, genera la siguiente ecuación en diferencias de primer orden:

---

[22] Sobre todo en el marco de los llamados Modelos Neo Keynesianos o modelos de equilibrio temporal fundamentada en una Macroeconomía del Desequilibrio, donde se intenta modelar las expectativas de los agentes, considerando que la toma de decisiones se da en un marco de incertidumbre, producto de limitaciones de información, problemas de coordinación, rigideces de precios y cantidades e interdependencia de mercados, para un análisis in extenso de estos modelos Véase Romer (2002). Sin embargo, esto no implica que las otras corrientes no tuvieran un desarrollo pues, por ejemplo, la corriente post keynesiana, considerando que son las expectativas y la división social los factores que inciden sobre la formación de precios (tasa de interés, salarios y ganancias), ha desarrollado los modelos que explican el problema de la inestabilidad del sistema capitalista, destacando que el mecanismo de ajuste es por medio de la distribución del ingreso.

[23] *"An Essay in Dynamic Theory"*, *The Economic Journal*, Vol. 49, pp. 14-39; y "Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration", *Review of Economics and Statics*, Vol. 21.

$$Y_t = \left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right) Y_{t-1} \quad (2.23.1)$$

Cuya solución es:

$$Y_t^* = (\frac{\beta}{\beta-\alpha})^t Y_0 \quad \Rightarrow \quad I_t = S_t = \alpha(\frac{\beta}{\beta-\alpha})^t Y_0 \quad (2.23.2)$$

Donde $\frac{\beta}{\beta-\alpha} \geq 1$, dado que el ingreso se asume como no negativo, conjuntamente con las fracciones α y β, siendo las sucesiones $\{Y_t\}, \{I_t\}$ y $\{S_t\}$, monótonas crecientes, por lo cual las variables divergen del equilibrio, mostrando una economía inestable, que depende de que las expectativas sean satisfechas y de que se tenga una política económica que fomente el ahorro para la disposición de la inversión que haga posible un crecimiento periodo tras periodo y tener una tasa actual de crecimiento que iguale tanto a la tasa garantizada como a la tasa natural de crecimiento económico.

Por su parte, Samuelson realiza un análisis del ingreso nacional. Se parte planteando un modelo macroeconómico de economía cerrada, donde el ingreso nacional actual es igual al consumo, inversión y gasto público corriente, $Y_t = C_t + I_t + G_t$, siendo el consumo función de la propensión marginal a consumir, que se supone constante, respecto al ingreso anterior, $C_t = \alpha Y_{t-1}$.

La inversión se supone igual a una constante del incremento en el consumo respecto al periodo precedente (este es el llamado principio de aceleración), $I_t = \beta(C_t - C_{t-1})$. Por su parte, el gasto público, G_t, se supone exógeno, lo cual implica que es una constante periodo a periodo, entonces $G_t = 1$. Bajo estas tres relaciones macroeconómicas, se genera la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta(\alpha Y_{t-1} - \alpha Y_{t-2}) + 1 \quad (2.23.3)$$

Cuya solución es:

$$Y_t^* = r^t (C_1 \cos\theta_t + C_2 \operatorname{sen}\theta_t) + \frac{1}{1-\alpha} \quad (2.23.4)$$

Siendo $r = \sqrt{\alpha\beta}$, C_1 y C_2, constantes arbitrarias. Pero, si el límite del primer término tiende a cero, entonces la solución es:

$$Y_t^* = \frac{1}{1-\alpha} \quad (2.23.5)$$

Donde las condiciones necesarias y suficientes para que Y_t^* sea un valor de equilibrio estable son 0<α>1 y αβ<1. Es decir, tanto la propensón marginal al consumo (el consumo de un año con respecto al ingreso del año anterior) como su producto con el parámetro acelerador deben ser menores que uno para que la sucesión de valores de ingreso converja a Y_t^* para todas la posibles condiciones iniciales del ingreso nacional.

La utilización del análisis dinámico discreto y de la conceptualización macroeconómica keynesiana de Harrod y Samuelson, abrió importantes consensos para el análisis macroeconómico en materia del manejo de la política económica que mantuvieran las fluctuaciones del ingreso nacional y de las principales variables económicas.

Dejando la cuestión de la tendencia o crecimiento para mejores ocasiones[24]. Sin embargo, dado que el análisis supone coeficientes constantes, sobre todo en lo que respecta a las propensiones marginales a consumir y a ahorrar, la crítica neoclásica, en un primer momento, señaló al respecto que no existe fundamento microeconómico que justifique por qué los individuos se tienen que comportar de esa manera y, en un segundo momento, retomando la incertidumbre respecto a las decisiones de ahorro e inversión planteadas por Keynes, se empezó a formular el importante papel de las expectativas de los agentes económicos para el diseño y resultados de la política económica, en especial de la política monetaria, ante los problemas crecientes de inflación y desempleo.

Por consiguiente, considerando que tanto el análisis de las burbujas especulativas de la solución de un sistema dinámico como la introducción de variables aleatorias en dicho sistema es de gran utilidad para la formulación y tratamiento de modelos monetarios.

De manera tal que éstos capten las burbujas en el nivel de precios que conllevan a hiperinflaciones o a deflaciones[25], se puso atención en la infinidad de equilibrios múltiples que se podrían encontrar por la deliberada política monetaria para financiar los déficits públicos, generados por la idea aceptada de que la inversión, pública o privada, podía acelerar el crecimiento. Razón por la cual, el gobierno debía financiar el gasto de inversión con emisión monetaria. Sin embargo, ello supone implícitamente que los individuos tienen previsión perfecta acerca del futuro y que no hay respuestas anticipadas a shocks de política económica, por lo que, en contrario sensu, se planteó la hipótesis neoclásica acerca de que la monetización del déficit conduce a una dinámica inflacionaria que genera una mayor incertidumbre entre los agentes, los cuales reaccionarían ante las medidas de política económica para protegerse. Esto dio pie al nacimiento del debate macroeconómico sobre la efectividad de la política monetaria, introduciendo al análisis dinámico un componente aleatorio respecto al comportamiento del conjunto de variables consideradas. Así, por ejemplo, Cagan (1956), formula un modelo de dos ecuaciones: una ecuación dinámica de demanda de dinero y una ecuación que describe la formación de expectativas inflacionarias de los agentes como reacción a las medidas de política de monetización de los déficits[26].

Por consecuencia, la demanda de dinero es una función exponencial de saldos reales, M_t, que responde inversamente a la tasa esperada de inflación que, en equilibrio, es igual al stock monetario real, y puede ser representada en tiempo discreto de la siguiente manera

$$\frac{M_t}{P_t} = exp[-\alpha(\mathbb{E}[P_{t+1} - P_t]) \qquad (2.23.6)$$

Siendo P_t son los precios en el periodo t. Tomando logaritmos a la ecuación, expresados en letras minúsculas:

---

[24] A pesar de ello, es importante mencionar la crítica de Hicks respecto a la hipótesis de proporcionalidad de la inversión al cambio en el ingreso presentes en el análisis macroeconómico convencional keynesiano. La idea es que la relación entre la inversión y el cambio en el ingreso es lineal (proporcional) únicamente para tasas de cambio pequeñas en el ingreso, pero, si el ingreso crece desproporcionadamente, los factores productivos no podrán ajustarse igual, limitando la producción y, por lo tanto, la inversión. Del mismo modo, si el ingreso cae con rapidez, entonces la inversión no necesariamente se reduce en la misma proporción, ya que el capital instalado no puede destruirse y desaparecer. Un modelo basado en esta crítica se presenta en Lomelí y Rumbos (2003), p.199.

[25] Es común que en los mercados financieros existan periodos en los cuales los precios de algunos activos excedan cualquier predicción acerca del valor presente de los rendimientos futuros; en tales casos existen burbujas especulativas. Sólo si el valor final de un activo esta dado, entonces su precio no tiene burbujas especulativas. Este es el caso típico de los bonos gubernamentales.

[26] La formación de expectativas considerada sigue un proceso de ajuste adaptativo, de forma que $\pi_{t+1} = \mathbb{E}(\pi_t - \pi_{t-i})$, con i=0,1,…t, siendo π_{t+1} la inflación esperada, $\mathbb{E}$, el valor esperado, π_t la inflación actual y π_{t-i} la inflación de periodos previos, por lo tanto la expectativa inflacionaria se forma del promedio de la inflación previa.

$$m_t - p_t = -\alpha(\mathbb{E}[P_{t+1} - P_t]) \quad (2.23.7)$$

Despejando los precios:

$$p_t = a(\mathbb{E}[P_{t+1}]) + (1 - a)m_t \quad (2.23.8)$$

Donde $a = \frac{\alpha}{1+\alpha}$.

Esto implica que el nivel de precios depende del nivel de precios esperado para el siguiente periodo y del stock monetario actual. Así, si la autoridad monetaria decide monetizar los déficits, lo hará a costa de una mayor inflación que, en determinado caso, podría desatar un proceso hiperinflacionario, por lo que se concluía que la política monetaria era inefectiva en sus propósitos: sólo los cambios inesperados en la oferta monetaria podrían tener efectos reales junto con los inflacionarios, considerando que las variables económicas son invariables en el tiempo (lo cual significa que las series de tiempo consideradas siguen un proceso estacionario).

Bajo este marco de análisis, en los 1970s, el debate sobre la efectividad de la política monetaria llegó a su clímax, con el advenimiento de las expectativas adaptativas por las racionales como forma de racionalidad de los agentes económicos para anticiparse a shocks imprevistos de la autoridad monetaria. Basándose en los trabajos de Lucas (1972 y 1976), sobre la neutralidad de la política monetaria y sobre la crítica respecto al uso de modelos macroeconómicos a gran escala[27], y utilizando la dinámica estocástica como herramienta para el análisis macroeconómico, se formula el siguiente modelo con expectativas racionales

$$\begin{aligned} y_t^d &= m_t - p_t + v_t \\ y_t^o &= p_t - \mathbb{E}_{t-1}(p_t/I_t) + u_t \end{aligned} \quad (2.23.9)$$

La primera ecuación representa la demanda agregada y la segunda un tipo de curva de oferta agregada de Lucas, que relaciona al producto con sorpresas monetarias, que no es más que una curva de Phillips[28] con expectativas. m_t son los saldos monetarios, p_t el índice de precios y v_t y u_t son shocks estocásticos. $\mathbb{E}_{t-1}(p_t/I_t)$ es el valor esperado del nivel de precios dado un conjunto de información en cada periodo que contiene todos los valores pasados de las variables y los shocks, lo cual implica que los individuos forman sus expectativas de manera racional y pueden anticiparse o responder inmediatamente a shocks estocásticos provocados por la autoridad monetaria respecto a la oferta monetaria. Igualando tanto la oferta como la demanda agregada se tiene:

$$p_t = \frac{1}{2}(\mathbb{E}_{t-1}[P_t/I_t]) + m_t + v_t - u_t \quad (2.23.10)$$

Aplicando $\mathbb{E}_{t-1}$, se tiene $\mathbb{E}_{t-1}[P_t]$, despejándolo y sustituyendo en la anterior ecuación se obtiene la forma reducida para p_t, puesto que m_t es exógena, pues está dada por la política monetaria

[27] Es de resaltar que en el trabajo de Lucas (1976) es de donde resulta la llamada *Critica de Lucas*, la cual radica esencialmente en que dado que para el diseño de las políticas macroeconómicas, se utilizan modelos macroeconómicos que suponen estabilidad en los valores de los parámetros, cuando en realidad no lo son, sobre todo si las políticas cambiaran radicalmente, razón por la cual, las estimaciones econométricas de estos modelos no son confiables en tanto no reflejan la estructura real de la economía, y sobre todo, por que no se estiman correctamente las expectativas de los agentes al suponerlas fijas o adaptables.

[28] La Curva de Phillips originalmente se utilizó para postular una relación de intercambio entre el empleo y el nivel salarial. Posteriormente ha sido utilizada para analizar el trade off entre el nivel de empleo y el nivel de precios.

$$p_t = \frac{1}{2}[\mathbb{E}_{t-1}[m_t] + \mathbb{E}_{t-1}[v_t] - \mathbb{E}_{t-1}[u_t] + m_t + v_t - u_t] \quad (2.23.11)$$

Sustituyendo en la ecuación de oferta, se tiene que:

$$y_t = \frac{1}{2}[m_t - \mathbb{E}_{t-1}[m_t] + v_t - \mathbb{E}_{t-1}[v_t] + u_t + \mathbb{E}_{t-1}[u_t]] \quad (2.23.12)$$

Si los shocks u_t y v_t siguen algún tipo de proceso conocido y se conocen todos los valores pasados de los shocks, entonces la autoridad monetaria puede decidir que su política monetaria estará dada de acuerdo con

$$m_t = Au_{t-1} + Bv_{t-1} \quad (2.23.13)$$

Esto implica que la oferta monetaria se ajusta de acuerdo con los shocks del periodo anterior y A y B definen algún objetivo. Por tanto, aplicando la esperanza $\mathbb{E}_{t-1}$ se obtiene:

$$\mathbb{E}_{t-1}(m_t) = A\mathbb{E}_{t-1}(u_{t-1)} + B\mathbb{E}_{t-1}(v_{t-1}) = m_t \quad (2.23.14)$$

Por lo cual, si sustituimos este resultado en el producto, y_t, se tiene que m_t no influye en lo absoluto y sólo es afectado por los shocks estocásticos; es decir, la política monetaria no tiene ningún efecto real, pero si en el nivel de precios, de manera proporcional.

Esto implica que la sorpresa monetaria es una sorpresa inflacionaria, pero, como los agentes tienen expectativas racionales, entonces conocen todos los parámetros, por lo cual m_t es predecible, excepto si ocurre un error en el diseño o ejecución de la política monetaria del banco central.

Pero dicho error, al ser estocástico, no es sistemático y, por tanto, no constituye una política, pues el producto sólo se afecta por errores de política monetaria, aunque si tendrá efectos sistemáticos sobre el nivel de precios.

Este nuevo planteamiento sobre la efectividad de la política monetaria ha llevado a construir respuestas neo keynesianas, afirmando que aun cuando la política monetaria pueda ser prevista por expectativas racionales, ésta puede ser eficaz, si se considera que los ajustes no son instantáneos a los cambios esperados en las políticas[29].

En este sentido, la existencia de contratos limita la conducta de los agentes privados dado que los salarios quedan predeterminados por un periodo en base a toda la información disponible al momento de la firma del contrato.

Sin embargo, si una vez firmado el contrato las autoridades cambian su política, aunque los agentes prevean los efectos de dicho cambio, no podrán ajustar el salario porque éste ha sido fijado, evitando así la fluctuación de precios, haciendo que la política monetaria sea eficaz en el corto plazo utilizando un ancla nominal[30].

---

[29] Esto implica que si bien el conjunto de información es completo, el conjunto de oportunidades no lo es. Al respecto, véase Shone, R., (1997), Chapter 9.

[30] Para deducir estos resultados, siguiendo el modelo desarrollado en Blanchard and Fischer (1996: chapter 9), se plantea la siguiente ecuación del producto: $y_t = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(m_t - \mathbb{E}_{t-1}[m_t]) + \frac{2}{3}(m_t - \mathbb{E}_{t-2}[m_t])\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(u_t - \mathbb{E}_{t-1}[u_t]) + \frac{2}{3}(v_t - \mathbb{E}_{t-2}[v_t])\right]$, que se obtiene de proponer una función de demanda agregada que depende de los saldos reales y de un shock, u_t, una oferta agregada que

La cual permite que dada una perturbación monetaria no esperada, u_t, una parte de los trabajadores no pueden modificar su salario nominal debido a que esta fijo por dos periodos.Por consecuencia, ante un incremento de la oferta monetaria que provoque un aumento del nivel de precios, aunque los trabajadores conozcan este efecto, no pueden hacer nada, por lo cual los salarios reales disminuyen, provocando un efecto sobre la demanda agregada y sobre el producto, en tanto se retarda el ajuste de los salarios, donde dichos efectos habrán durado dos periodos por la inercia inherente al proceso de ajuste salarial.

Por su parte, el análisis de las fluctuaciones alrededor de la tendencia del producto comúnmente llamados ciclos económicos, después de un letargo de los años 1950s a los 1970s, resurgió con el trabajo de Lucas (1977), mediante el cual se intentó responder a la cuestión del porqué en las economías de mercado, el producto y el empleo oscilan alrededor de una tendencia.

Con las herramientas matemáticas de la dinámica estocástica, Lucas definió a los ciclos económicos como las desviaciones del producto agregado alrededor de su tendencia, basadas en las propiedades estadísticas de los co-movimientos de dichas desviaciones en diferentes series de tiempo agregadas[31].

Esta definición difiere de la que era aceptada hasta ese momento[32], aportándose un avance metodológico en la teoría de los ciclos económicos, donde la razón de la nueva definición se encuentra en la observación de los hechos acerca de que la actividad económica en las economías de mercado se ha caracterizado por un crecimiento sostenido.

Donde también prevalecen las fluctuaciones al igual que en países no industrializados, por lo tanto, la explicación de los ciclos se debe basar en las leyes generales que rigen las economías de mercado en lugar de fundamentarse en las características peculiares de cada país o periodo de tiempo.

Así, en su trabajo, Lucas utiliza las técnicas estocásticas en tiempo discreto para mostrar que los shocks monetarios aleatorios y un efecto acelerador interactúan para generar movimientos cíclicos serialmente correlacionados en el producto real y movimientos pro cíclicos en los precios, en la razón inversión-producto y en la tasa de interés nominal, pero alrededor de su tendencia. Sin embargo, Lucas no define el concepto de tendencia, por lo cual, Kidland and Presscott (1982), proponen que dicho concepto es el conocido estado estacionario de la teoría del crecimiento neoclásica, el cual se caracteriza porque el producto per cápita, el consumo, la inversión, el stock de capital y los salarios reales crecen a una tasa constante determinada por la tecnología.

---

se establece en base a los salarios reales, y una regla salarial, donde los salarios se suponen fijos en dos periodos, revisándose en el tercero, por lo cual una mitad de trabajadores tienen contratos al inicio del periodo t y lo revisan al principio del periodo t+2 y la otra mitad firma al inicio de t+1 y lo revisan en t+3.

[31] Así, la ecuación $y_t = a + by_{t-1} + e$, donde e es una perturbación aleatoria de media cero, es suficiente para generar un movimiento cíclico en y, que será más marcado cuanto menor sea el valor de b. Obviamente este es un fenómeno netamente empírico que depende de la amplitud o volatilidad y de la conformidad o coherencia de los movimientos de la serie y del carácter de la variable, la cual puede ser procíclica o contracíclica y adelantada o rezagada, lo cual implica que no se refleja ninguna uniformidad determinista. Sin embargo, es justo recordar que fue Eugen Slutzky (1937), quién propuso que el ciclo económico podía ser el resultado agregado de una suma de causas aleatorias, es decir, de una ecuación en diferencias estocástica finita de bajo orden con raíz real positiva. Pero para ser estables, se necesitan que los shocks sean de gran tamaño o que las pequeñas perturbaciones estuvieran correlacionadas.

[32] Dicha definición era la propuesta por Mitchell (1927), quién definió a los ciclos como una secuencia de expansiones y contracciones caracterizadas por las fases de prosperidad, crisis, depresión y recuperación.

En consecuencia, basaron su análisis en los fundamentos microeconómicos de la función producción donde se introdujeron shocks de oferta que afectan la producción y otras variables mediante algún mecanismo de propagación.

Lo anterior implica que si tasa de cambio tecnológico fuera constante, entonces la tendencia del producto real debe ser una función del tiempo, aunque la tasa de cambio tecnológico es variante en el tiempo y entre países, por lo cual Kidland y Presscott deducen que esta variación es el problema central del desarrollo económico, debido a que dicha tasa de cambio esta relacionada con los acuerdos institucionales que los individuos esperan utilizar en el futuro.

Pues aun en sociedades estables las instituciones cambian en el tiempo y ello genera cambios en el crecimiento de la productividad que hace que las economías fluctúen alrededor de su tendencia, por lo cual los cambios institucionales deben considerarse como shocks estocásticos que inciden en las desviaciones del producto alrededor de su tendencia[33].

Esto implica suponer, a pesar de la presencia de shocks aleatorios, que las tasas de crecimiento siguen una distribución normal, por lo cual no se generan movimientos inesperados (auges o caídas) en la trayectoria de crecimiento.

En este sentido, considerando lo señalado por el paradigma keynesiano respecto a la concepción del ciclo económico, el cual define como resultado de perturbaciones exógenas, ampliadas y prolongadas por mecanismos internos, donde la naturaleza de las perturbaciones se buscan en la demanda agregada, como la volatilidad de las decisiones de inversión (animal spirits), derivada de la incertidumbre capitalista, y la volatilidad de la fuerza laboral. Ambas fuerzas generan perturbaciones reales constantes, con mecanismos de propagación basadas en las rigideces nominales, sobre todo de los salarios.

Por ello, en los últimos años la conceptualización de la economía ha experimentado una serie de cambios y transformaciones profundas. Esto ha permitido el empleo de herramientas más sofisticadas, cuyo objetivo ha sido el generar una mayor comprensión de los fenómenos estocásticos que supere el marco determinista convencional, de manera tal que sea posible incluir la incertidumbre (y riesgo) en algunos de los modelos fundamentales de la economía que conllevan movimientos inesperados denominados procesos estocásticos. Este es el caso del desarrollo de los modelos de equilibrio general.

Por ejemplo, retomando el análisis de crecimiento económico neoclásico tenemos que el modelo de Solow (1956) se fundamenta en la utilización de la función producción con rendimientos constantes a escala y en la acumulación de capital, cuya combinación se resume en la ecuación fundamental dada por la expresión:

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - (n + \delta)k \tag{2.23.15}$$

[33] En este sentido, Kidland y Presscott supusieron que estos shocks son una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (ruido blanco en el análisis econométrico), por lo tanto los shocks "tecnológicos" se presentan como shocks estocásticos que afectan la función producción y esto explica porque el ciclo económico no sigue una tendencia determinista en una economía de mercado. Sin embargo, aunque los shocks son "ruido blanco" y puede ser estimado mediante una relación econométrica, también es necesario suponer que la información disponible esta siendo utilizada por los agentes económicos, lo cual implica problemas de estimación, pues ello eliminaría la función de distribución de las expectativas. Sobre la modelización de las relaciones intertemporales entre consumo presente y ahorro y consumo futuro, entre trabajo y ocio y algún mecanismo que explique el largo desarrollo temporal en la inversión, como la exigencia de un cierto tiempo para llevar a cabo una inversión (time to build) o costes de ajuste, derivadas de shocks tecnológicos sobre la función producción, véase Romer (2002: capitulo 4).

De esta relación, se obtiene la conclusión de que el crecimiento económico tiene causas exógenas. El crecimiento depende de la evolución del grado de eficiencia técnica de la economía y del cambio en la relación capital-trabajo. Pero, como la acumulación de capital depende de las decisiones de inversión y éstas de las decisiones de ahorro, conforme las preferencias de los individuos, entonces no hay política pública que pueda incidir sobre dichas decisiones. En consecuencia, los países que tienen altas tasas de ahorro, producto de los gustos y preferencias de los individuos, tenderán a ser más prósperos, pues pueden acumular más capital por trabajador y generar una producción mayor. En cambio, si los países pobres se destacan por un alto índice demográfico, esto provoca que buena parte del ahorro se destine a mantener la relación capital-trabajo y se acumule menos.

Por lo anterior, Solow sugiere que el crecimiento cesa a menos que la tecnología de la producción mejore exponencialmente. Esto significa, en términos de política, que los países deben ahorrar e invertir (condición necesaria) parte de su ingreso nacional para sostener un crecimiento de largo plazo que amplíe el capital para después profundizar en su utilización materializada (condición suficiente), hasta el punto en que el producto marginal del capital sea nulo. Así, los cambios de política que afectan la inversión sólo tienen efectos de nivel más no efectos de crecimiento. Entonces la creencia de que aumentando la tasa de ahorro se incrementa el crecimiento económico es errónea, pues la tasa de ahorro no tiene ningún efecto sobre la tasa de crecimiento de estado estacionario: no importa cual sea el valor de la tasa de ahorro, la economía crecerá al ritmo que requiera la ampliación del capital. Lo que si puede afectar la tasa de ahorro es la tasa de crecimiento de corto plazo y el nivel de ingreso per cápita en el largo plazo.

Sin embargo, si incluimos un análisis de riesgo que conllevan a movimientos inesperados en el nivel del producto, generado por la volatilidad de las variables de las cuales depende éste, entonces la trayectoria de crecimiento seguirá un Movimiento Browniano Geométrico. La razón es la siguiente: De la ecuación fundamental de Solow (n), una de las variables exógenas con alta volatilidad que incide sobre la acumulación de capital es la fuerza laboral, la cual varía en forma estocástica y, por ende, dicha volatilidad puede ser descrita bien mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica o mediante la integral estocástica

$$dL = nLdt + \sigma Ldz \equiv L(t) = L_0 + \int_0^t nL(s)ds + \int_0^t \sigma L(s)dz \tag{2.23.16}$$

Donde dt es el diferencial de tiempo, determinístico, dz es el diferencial de un proceso de Wiener, estocástico, σ es una constante que refleja la volatilidad de la fuerza laboral, $nLdt$ es el término de tendencia y σLdz es el término estocástico.

Si dividimos a la ecuación diferencial estocástica (2.23.16) entre la fuerza laboral, L,

$$\frac{dL}{L} = ndt + \sigma dz \tag{2.23.17}$$

Lo cual significa que la proporción del crecimiento de la fuerza laboral tiene una distribución normal con media n y varianza σ^2. Asimismo, dada la condición inicial $L(0) = L_0$, entonces la ecuación diferencial estocástica representa un Movimiento browniano geométrico, lo que implica una solución dada por:

$$L = L_0 e^{\left(n-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma z(t)} \tag{2.23.18}$$

Esto implica que la variabilidad de la fuerza laboral va a determinar la estabilidad de la trayectoria de crecimiento pues éste depende de la acumulación de capital y el capital, además de depender de si mismo, depende de la fuerza laboral, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$dK = sF(K,L)dt \tag{2.23.19}$$

Que al conjuntarse con la ecuación diferencial estocástica de la volatilidad de la fuerza laboral (2.23.19), generamos un proceso bi-dimensional, mismo que podemos resolver aplicando la fórmula de Itô en dos dimensiones, obteniendo

$$dk = \frac{\partial k}{\partial t}dt + \frac{\partial k}{\partial K}dK + \frac{\partial k}{\partial L}dL + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 k}{\partial K^2}(dK)^2 + 2\frac{\partial^2 k}{\partial K \partial L}dKdL + \frac{\partial^2 k}{\partial L^2}(dL)^2\right] \tag{2.23.20}$$

Aplicando:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial k}{\partial L} = -\frac{K}{L^2}, \qquad \frac{\partial k}{\partial K} = \frac{1}{L}, \qquad \frac{\partial^2 k}{\partial K^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 k}{\partial K \partial L} = -\frac{1}{L^2}, \qquad \frac{\partial^2 k}{\partial L^2} = \frac{2K}{L^3}$$

Sustituyendo estos resultados en (2.23.20):

$$dk = 0 - \frac{K}{L^2}dL + \frac{1}{L}dK + \frac{1}{2}\left[0 + 2(-\frac{1}{L^2})dKdL + 2\frac{K}{L^3}(dL)^2\right] \tag{2.23.21}$$

Sustituyendo la ecuación diferencial estocástica de la variabilidad laboral (2.23.20):

$$dk = -\frac{K}{L^2}(nLdt + \sigma Ldz) + \frac{1}{L}dK + \frac{1}{2}\left[-(\frac{2}{L^2})dKdL + \frac{2K}{L^3}(n^2L^2(dt)^2 + 2n\sigma dtdz + \sigma^2L^2(dz)^2)\right] \tag{2.23.22}$$

Aplicando lo conducente en la fórmula de Itô:

$$\begin{aligned} dk &= -\frac{K}{L^2}(nLdt + \sigma Ldz) + \frac{dK}{L} - \frac{dK}{L}\frac{dL}{L} + \frac{1}{2}\left[\frac{2K}{L^3}\sigma^2L^2dt\right] \\ &= \left(-\frac{nK}{L} + \frac{sF(K,L)}{L} + \frac{K\sigma^2}{L}\right)dt - \frac{K\sigma}{L}dz = [sf(k) - k(n - \sigma^2)]dt - k\sigma dz \end{aligned}$$

Esto implica entonces que tanto la parte determinista como la parte estocástica del diferencial del capital están afectadas por la fuerza laboral, por lo cual las variaciones aleatorias del capital dependen de las fluctuaciones aleatorias de la fuerza laboral. Ahora bien, dentro del análisis de la política económica, en los últimos años se han incorporado nuevas herramientas de la dinámica estocástica cuyo fin es el de minimizar el impacto esperado de los choques exógenos de los factores de riesgo que afectan el manejo de los instrumentos de la política económica. En este sentido, si consideramos que uno de los principales problemas macroeconómicos es el de la determinación del nivel general de precios, entonces para determinar la dinámica de éste, pueden combinarse los instrumentos de política monetaria y fiscal tales como la tasa de interés, la tasa de expansión monetaria, el gasto público y los impuestos, de manera tal que permitan reducir la exposición a los diferentes riesgos prevalecientes que conlleven a efectos negativos sobre la economía generados por la varianza del nivel de precios que afectan las expectativas inflacionarias de los agentes económicos, (Venegas-Martínez, (2001)).

Supongase un modelo tal donde la economía produce y consume un solo bien. Así, productores y consumidores, que se suponen idénticos, maximizan sus beneficios y su satisfacción en función del bien en cuestión. Por consecuencia, puede suponerse que los individuos, productores y consumidores, perciben que el nivel general de precios, P, sigue un proceso estocástico de difusión con saltos, de tal forma que se tiene la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dP(t) = \pi P(t)dt + \sigma P(t)dW(t) + vP(t)dQ(t) \tag{2.23.23}$$

Siendo π la tasa de inflación promedio esperada sin presencia de shocks externos, por lo cual representa también el parámetro de tendencia de la ecuación diferencial estocástica. σ, es la volatilidad esperada de la tasa de inflación y v mide los posibles saltos en el nivel general de precios. Mientras, W es un proceso de Wiener con media cero y varianza dt y, Q es un proceso de Poisson con saltos [0,1] y media y varianza igual al parámetro de intensidad de los saltos ocurridos, λdt, definidos por las condiciones dadas por (2.21) para el nivel general de precios, P, siempre que los procesos de Winer y de Poisson no estén correlacionados.

Si consideramos que los individuos poseen solo dos activos: dinero, $M,$ y acciones (o títulos de capital, K, entonces la riqueza esta dada por la totalidad de los activos que poseen los individuos, $a = m + K$, donde $m = \frac{M}{P}$ son los saldos reales. Dado que existe un solo bien en la economía por el cual los individuos intercambian por activos para mantener su riqueza, entonces podemos definir al nivel general de precios en función de la proporción en la tenencia de los activos, de tal manera que los saldos reales y las acciones están ligadas a los movimientos en el nivel general de precios:

$$P = \frac{T_k}{T_m}\frac{M}{K} \tag{2.23.24}$$

Siendo T_k y T_m la proporción de las tenencias de acciones de capital real y de saldos reales en los portafolios de los individuos, y $\frac{M}{K}$ la razón dinero-capital, que puede expresarse como una función de movimientos exógenos promovidos por el Banco Central conforme sus objetivos de política monetaria a través de la expansión monetaria, que afecta directamente a M, o por cambios en la tasa de interés, que afecta directamente a K:

$$f(M,K) = \frac{M}{K} \tag{2.23.25}$$

En consecuencia, para determinar la dinámica del nivel general de precios, aplicamos el Lema de Itô a (2.23.24), tomando a (2.23.25) como un proceso subyacente, y obtenemos la diferencial estocástica que depende de las variables de política monetaria y satisface:

$$dP = \left[\frac{\partial f(M,K)}{\partial M}dM + \frac{\partial f(M,K)}{\partial K}dK + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(M,K)}{\partial M^2}(dM)^2 + \frac{\partial^2 f(M,K)}{\partial M \partial K}dMdK + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(M,K)}{\partial K^2}(dK)^2\right]\left[\frac{T_k}{T_m}\right]$$

(2.23.26)

Dado (2.23.24), entonces aplicando las derivadas correspondientes a (2.23.25) obtenemos:

$$dP = \left[\frac{1}{K}dM - \frac{M}{K^2}dK - \frac{1}{K^2}dMdK + \frac{M}{K^3}dK^2\right]\left[\frac{T_k}{T_m}\right] \tag{2.23.27}$$

Misma que factorizando:

$$dP = \left[\frac{1}{K}\left(dM - M\left(\frac{dK}{K}\right) - dM\frac{dK}{K} + M\left(\frac{dK}{K}\right)^2\right)\right]\left[\frac{T_k}{T_m}\right] \qquad (2.23.27.1)$$

Multiplicando por $\frac{M}{M} = 1$:

$$dP = \left[\frac{dM}{M} - \frac{dK}{K} - \frac{dM}{M}\frac{dK}{K} + \left(\frac{dK}{K}\right)^2\right]\left[\frac{T_k}{T_m}\frac{M}{K}\right] \qquad (2.23.27.2)$$

Por lo tanto, tenemos que el cambio porcentual del nivel general de precios es:

$$\frac{dP}{P} = \frac{dM}{M} - \frac{dK}{K} - \frac{dM}{M}\frac{dK}{K} + \left(\frac{dK}{K}\right)^2 \qquad (2.23.28)$$

De (2.23.28) se desprende que los cambios porcentuales en el nivel general de precios depende de directa e inversamente de los shocks exógenos que pudiera provocar la autoridad monetaria. Esto implica entonces que la inflación del proceso subyacente (2.23.27.2), π, depende positivamente de la tasa de crecimiento de la oferta monetaria y negativamente de la tasa de acumulación del capital.

Por su parte, los componentes de volatilidad y de saltos del nivel general de precios, dependen de los componentes estocásticos del grado de variabilidad y profundidad, directamente, de las tasas de expansión monetaria e, inversamente, de la acumulación de capital. Esto implica en términos de política monetaria, que los riesgos inflacionarios que corre la autoridad monetaria por tratar de sorprender con una expansión monetaria están correlacionados con la tendencia inflacionaria (inflación subyacente).

2.3 Un modelo de crecimiento económico con gasto público e incertidumbre

El análisis de la incertidumbre dentro de los modelos de crecimiento económico es relativamente reciente pues surgió con el trabajo de Brock y Mirman (1972), aunque no ha tenido una veta fecunda de investigación.

El principal dilema a resolver es el análisis de estabilidad estocástica de la distribución estacionaria provocada por la incertidumbre en las decisiones de los agentes económicos. Para ello, Brock y Mirman plantearon un modelo de crecimiento en tiempo discreto con incertidumbre utilizando los métodos de la programación dinámica tanto para encontrar puntos de equilibrio estocásticos y el comportamiento maximizador de los agentes como para el análisis de la dinámica estocástica para la estabilidad del modelo.

En el modelo presentado a continuación se sigue a lo planteado tanto por Brock and Mirman (1972), como por Lomelí y Rumbos (2003: cap. 14) y Sargent (1987: chapter 1). Es un modelo de crecimiento estocástico donde se incluye al gobierno, pues generalmente las decisiones de éste inciden sobre las decisiones de los agentes. Así, suponiendo una economía con un agente representativo, cuyo problema es:

$$máx\ \mathbb{E}_t \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \, \mathrm{u}(c_t) \qquad (2.23.29)$$

Sujeto a la restricción presupuestal:

$$\sum_{i=1}^{N}[f_i(k_{it}, g_t, v_t) - \delta_i k_{it}] = c_t + k_{t+1} \quad con\ k_0, c_t > 0, \quad t = 1,2,\ldots;\ i = 1,2,\ldots,N$$

En donde $\mathbb{E}_t$ denota la esperanza matemática condicionada al conjunto de información disponible en el tiempo t, β el factor de descuento sobre la utilidad futura, u la función de utilidad del consumo, c_t el consumo en el tiempo t, k_{it} el stock de capital del productor i en el tiempo t, f_i la función producción del proceso i, g_{it} el gasto público en infraestructura que es complementario al stock de capital del tiempo t.

Común a todo proceso i, v_t shock estocástico sobre la producción en el tiempo t que es común para todo proceso i e históricamente dado, y δ_i la tasa de depreciación del capital instalado en todo proceso i.

Las sucesiones $\{c_t\}$ y $\{k_t\}$ derivadas del problema de maximización (2.23.29) implican que las decisiones de consumo e inversión en el tiempo t estarán basadas en toda la información disponible en t.

Mientras el ambiente incierto, se representa por la secuencia $\{v_t\}$ que es un vector de valores reales de variables aleatorias que se suponen independientes e idénticamente distribuidas. Por consecuente, la ley estocástica del ambiente es el producto inducido por la probabilidad de ocurrencia de v_t, dado el supuesto de independencia de la variable aleatoria.

Así, la maximización de (2.23.29) se realiza sobre todo el proceso estocástico de las sucesiones $\{c_t\}$ y $\{k_t\}$, siendo un proceso admisible, donde la existencia de un óptimo puede ser establecido sobre el espacio de los N diferentes procesos. En el tiempo t, se decide cuanto se consume y cuanto se mantiene en forma de capital, pues se supone que el capital tiene un proceso de transformación en bienes de consumo paulatino. Después de que la distribución entre consumo presente y futuro se decide, la naturaleza revela los shocks, v_t, y las unidades de nueva producción, $f_i(k_{it}, g_t, v_t)$, que están disponibles para el proceso i a fin del periodo t.

Pero, $\delta_i k_{it}$ unidades de capital se han consumido a fin del periodo t. Entonces, $f_i(k_{it}, g_t, v_t) - \delta_i k_{it}$ representa el producto neto del proceso i. Por consiguiente, el producto total disponible para ser dividido en consumo y stock de capital en el tiempo t+1 esta dado por:

$$\sum_{i=1}^{N}[f_i(k_{it}, g_t, v_t) - \delta_i k_{it}] = \sum_{i=1}^{N}[g_i(k_{it}, g_t, v_t)] = y_{t+1} \equiv Ak_t^{\alpha}$$

Donde α es la productividad del capital, dados los insumos trabajo e infraestructura pública que inciden en el estado de la tecnología y en el grado de eficiencia productiva, A_t, la cual es una medida de la productividad total de los factores[34]. Ello permite que incidan sobre ella shocks productivos, mismos que se verán reflejados en un incremento de la capacidad productiva de la economía en periodos subsiguientes, $k_{t+1} = g(k_t, A_t)$..

Asimismo, como suponemos expectativas racionales en la elección del consumo, c, entonces, el valor esperado de la maximización intertemporal de la función de utilidad es la maximización intertemporal misma, y si suponemos una función de utilidad bien comportada para bienes normales, por lo tanto transformamos a (2.23.29) en una función valor:

$$V_t(t) = máx \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \ln c_t \qquad (2.23.30)$$

[34] Dado que el gasto público en infraestructura se propone como un insumo complementario de la función producción, el valor de α puede ser mayor, menor o igual a 1, dependiendo si dicho insumo es complementario o sustituto, de manera tal que se tengan o no efectos a escala o derramamientos productivos.

Sujeta a la restricción presupuestal:

$$y_{t+1} \equiv Ak_t^{\alpha} = c_t + k_{t+1}$$

Donde c_t es la variable de control y k_t la variable de estado en el proceso dinámico. En consecuencia, el nivel del capital inicial, k_0, esta dado y representa el flujo acumulado de inversión física, pública y privada, en los periodos previos al presente y constituye la infraestructura productiva de una economía utilizada por trabajador.

Asimismo, la restricción implica que la producción en el periodo t, Ak_t^{α}, es igual al consumo en el mismo periodo más la inversión realizada en t+1 (o consumo futuro en t).Dado que la secuencia de funciones valores de problemas de horizonte finito convergen uniformemente a la función valor de un problema de horizonte infinito, entonces podemos proceder a resolver (2.23.30) para j periodos truncados[35]:Sea F_0=0 una función valor, continua y acotada, de tal manera que se tiene la sucesión:

$$F_{n+1}(k_t) = \max_{u_t}\{\ln c_t + \beta F_n(k_{t+1})\}$$

Sujeta a:

$$Ak_t^{\alpha} = c_t + k_{t+1} \quad con\ k_0 > 0 \quad dado.$$

Se tiene entonces que:

$$F_1(k_t) = \max_{u_t}\{\ln c_t\}$$

Sujeta a la restricción presupuestal. Si los agentes decidieran elegir consumir hoy y nada mañana, como una forma de maximizar su utilidad en función del consumo presente y futuro, dado que $ln\ c_t$ es la utilidad proporcionada por el consumo en el periodo t y como la preferencia intertemporal por el presente es muy alta, entonces los individuos obtienen la máxima utilidad cuando c_t es lo más grande posible.

[35] Este tipo de problemas de optimización estocástica se resuelve aplicando el principio de optimalidad de Bellman (1957) a la ecuación 4a, el cual señala que "Una política óptima tiene la propiedad de que, cualesquiera sean el estado y las decisiones iniciales, las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la decisión inicial". Esto implica que el proceso de crecimiento de una economía de mercado con decisiones centralizadas o descentralizadas, es la búsqueda del óptimo que las diferentes fuerzas (variables) de un modelo deben tender para dirigirse hacia una nueva posición de equilibrio, en el sentido de si dicho cambio es permanente, fluctuante u oscilatorio en el equilibrio. En consecuencia, el problema es resolver la ecuación de Bellman: $\max_{u_t}\{f(x_t,u_t) + \beta F_0(x_{t+1})\}$ s.a $x_{t+1} = g_t(x_t,u_t)$, donde si u_t^* es solución, sea interior o no, entonces se define $F_1(x_t) = f(x_t, u_t^*) + \beta F_0(x_{t+1})$, como la función valor para el periodo 1. Ahora, aplicando el operador a F_1 y llamando el resultado F_2, y así sucesivamente, de manera que $F_{n+1}(x_t) = \max_{u_t}\{f(x_t,u_t) + \beta F_n(x_{t+1})\}$, donde la sucesión de funciones valor $\{F_n\}$ tiene como limite: $\lim_{n\to\infty} F_n = V$, lo cual implica que el límite existe y es un punto fijo del operador, el cual además es único. Esto significa reducir el problema de un número infinito de periodos a una sucesión de problemas de dos periodos, donde se inicia con cualquier función inicial F_0, continua y acotada, y se construye la sucesión anterior para obtener como límite la función valor. La utilidad de este método es que nos permite introducir directamente variables estocásticas en el problema de control para encontrar la forma del valor óptimo o función valor más que las trayectorias de las variables de control (Principio del Máximo de Pontriygin) o las de las variables de estado (Cálculo de Variaciones).

Ello implicaría a su vez que la inversión, pública y privada, de mañana sería nula y, por tanto, no habría acumulación de capital[36], de manera que tendríamos que $k_{t+1} = 0 \quad y \quad c_t = \; Ak_t^{\alpha}$ por lo que el producto dependería solo de la acumulación de capital previa y de la productividad, con un deterioro del capital provocada por su propia utilización en las actividades productivas, de manera que tenemos que:

$$F_1(k_t) = \ln Ak_t^{\alpha} = \ln A + \alpha \ln k_t$$

Sin embargo, a pesar de este patrón de comportamiento inicial, donde las condiciones de crecimiento están limitadas a factores exógenos, y dado que influye en el siguiente término de la sucesión para un periodo posterior, entonces se tiene en dicho periodo lo siguiente:

$$F_2(k_t) = \max_{u_t}\{\ln c_t + \beta F_1(k_{t+1})\}$$

Dada la restricción presupuestal. Sustituyendo para F_1

$$F_2(k_t) = \max_{u_t}\{\ln c_t + \beta(\ln A + \alpha \ln k_{t+1}\}$$

Sujeta a la restricción presupuestal. En cuyo caso, resolviendo el problema de maximización por medio de las condiciones de primer orden[37], se llega a:

$$c_t = \frac{1}{1+\alpha\beta} \; Ak_t^{\alpha}$$

$$k_{t+1} = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} \; Ak_t^{\alpha}$$

De manera que se tiene la función valor para el periodo 2:

$$F_2(k_t) = \ln \left(\frac{A}{1+\alpha\beta}\right) + \alpha \ln k_t + \beta \ln A + \alpha\beta \ln\left(\frac{\alpha\beta A}{1+\alpha\beta}\right) + \alpha^2\beta \ln k_t$$

Siguiendo este proceso análogamente y tomando el límite de la función valor F_n cuando $n \to \infty$ se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(k_t) = V(k_t) = \frac{1}{1+\beta}\left\{\ln[A(1-\alpha\beta)] + \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\ln \alpha\beta A\right\} + \frac{\alpha}{1+\alpha\beta}\ln k_t$$

Lo cual implica que el consumo puede ser incrementado en el tiempo t si ocurrieran shocks inesperados sobre la oferta (un cambio tecnológico endógeno generado a través de un shock de política económica en la demanda agregada.

[36] Cabe destacar que esta situación es precisamente la que ha privado en los países emergentes, donde la inversión física ha sido limitada por las necesidades de consumo corriente, tanto público como privado, en detrimento de la formación de capital fijo y de infraestructura pública productiva.

[37] De acuerdo con el principio de optimalidad de Bellman, del problema de optimización $V_t(t) = \text{máx} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \ln c_t$ sujeto a la restricción presupuestal $y_{t+1} \equiv Ak_t^{\alpha} \; = c_t + k_{t+1}$, obtenemos la ecuación de Bellman $V_2(k_t) \equiv F_2(k_t) = \max_{u_t}\{\ln c_t + \beta(\ln A + \alpha \ln k_{t+1}\}$, donde el problema de una sucesión infinita de periodos se reduce a una sucesión de problemas de dos periodos y la ecuación es válida a pesar de que se carezca de soluciones interiores.

Tal que fomentara la inversión en sectores dinámicos e innovadores, Welfens (2008), al grado que se modificara el proceso de producción en i+1, de manera tal que fuera permanente. O bien, que el gasto público en infraestructura tuviera efectos a escala sobre la producción para que los beneficios del capital público se bifurcaran sobre todo el proceso productivo, teniendo así impactos de largo plazo sobre la senda estacionaria del crecimiento económico.Sin embargo, también puede ocurrir lo contrario: un shock negativo sobre la producción (un desastre natural, por ejemplo) destruiría la producción, por lo que tanto el consumo como la inversión tendrían que descender, quedando solo como alternativa el financiamiento público para actividades productivas, como el medio de impulsar la trayectoria de equilibrio hacia mayores niveles.

Asimismo, si el gasto público fuera sustituto de la inversión privada, ello haría descender el nivel de la producción, reduciendo la senda de crecimiento. Sin shocks y sin gasto público, el modelo tiene las mismas características que el convencional: el crecimiento depende de los deseos de consumo actual respecto al futuro y de la productividad de los factores productivos, trabajo y capital.

2.4 Conclusiones

Es un hecho que las grandes perturbaciones del lado de la oferta de los años 1960s y 1970s, obligaron a los economistas a revisar la teoría convencional acerca de los shocks, que hasta ese entonces se atribuían al lado de la demanda (nominal o real) y por tanto las prescripciones de políticas correctoras de desequilibrios estaban dirigidas a ella. Sin embargo, los fallos de los modelos convencionales en la explicación de los problemas económicos, como se vio a lo largo de la sección 2.1, revelaban crisis más profundas de la macroeconomía convencional. Esto propicio que el paradigma keynesiano-monetarista fuera asaltado metodológicamente hablando. De un lado se hizo patente que los modelos macroeconómicos tuvieran una fundamentación microeconómica. Por otro lado, que no se soslayare la posibilidad de utilización de la información disponible de los agentes económicos, por lo cual era imposible dejar de considerar el papel de las expectativas y la incertidumbre respecto a las perturbaciones estocásticas que aquejen a la oferta.Por consecuencia, para incorporar los anteriores elementos dentro de los modelos macroeconómicos fue necesario que el análisis tanto del crecimiento económico como del ciclo económico y de la estabilización macroeconómica, en un ambiente donde la incertidumbre prevalece, recurriera al uso de los métodos y técnicas de la dinámica estocástica en la modelización macroeconómica.

Sin embargo, pese a lo anterior, el principal problema que siguen adoleciendo los modelos macroeconómicos, aún con la utilización de los métodos estocásticos, es que los coeficientes se siguen suponiendo constantes por razones de manejabilidad, pero ello no permite la inclusión de factores exógenos por lo que, aun cuando se acepte que muchos de los parámetros económicos tienden a permanecer relativamente constantes para periodos largos de tiempo. No se debe confiar plenamente sobre la validez de las trayectorias de equilibrio de largo plazo de las variables ya que, al aceptar la hipótesis de coeficientes constantes, se congela el ambiente económico el cual depende solo del ajuste endógeno del modelo sin intrusión de factores exógenos que lo perturben. Por lo tanto, un camino a seguir es estudiar con mayor detenimiento la naturaleza cambiante en el tiempo de las distintas perturbaciones y los mecanismos de propagación, para profundizar en las interrelaciones entre cambio tecnológico, desempleo y recesiones, en un ambiente dinámico, explícitamente estocástico, que reflejen los shocks fundamentales directamente observables, aun cuando no sean controlables, utilizando los métodos del análisis dinámico indispensables para no caer en la construcción de modelos con uso de técnicas sofisticadas pero sin contenido económico en sus planteamientos y resultados o que, en el mejor de los casos, repiten los resultados que ya previamente se obtuvo mediante el análisis económico convencional.

Referencias

Aoki, Masanao, (1998), *New Approaches to Macroeconomic Modeling: Evolutionary Stochastic Dynamics, Multiple Equilibria, and Externalities as Field Effects*, Cambridge University Press, Cambridge.

Azariadis, Costas, (1993), *Intertemporal Macroeconomics*, Blackwell, Cambridge.

Bellman, R., (1957), *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton.

Blanchard, O. J. and S. Fischer, (1996), *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press, Cambridge, 2a edition.

Brock, W. A. and L. J. Mirman, (1972), *"Optimal Economic Growth and Uncertainty"*, *Journal of Economic Theory*, Vol. 4, No. 3.

Chiang, A. C., (1992), *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw-Hill, New York.

Chiang, A. C. y K. Wainwright, (2006), *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*, McGraw-Hill, México, 4ª edición.

Cagan, Phillip, (1956), "The Monetary Dynamics of Hyperinflation", in Milton Friedman (ed.), *Studies in the Quantity Theory of Money*, University of Chicago Press. Chicago.

Diamond, Peter A., (1965), "National Debt in a Neoclasisical Growth Model", *American Economic Review*, Vol. 55.

Flaschel, Peter, Gangolf Groh, Christian Proaño and Willi Semmler, (2008), *Topics in Appied Macrodynamic Theory*, Springer-Verlag, Berlin.

Gandolfo, G., (1976), *Métodos y Modelos de Economía Matemática*, Edit. Tecnos, Madrid.

Giulano, P. y S.J. Turnovsky, (2003), "Intertemporal substitution risk aversion and economic performance in a stochastically growing economy", *Journal of International Money and Finance*, vol. 22, núm. 4, pp. 529-556.

Harrod, R. F., (1939), *"An Essay in Dynamic Theory"*, *The Economic Journal*, Vol. 49, pp. 14-39.

Kidland, F. E. and E. C. Prescott, (1982), *"Time to Build and Aggregate Fluctuations"*, *Econometrica*, Vol. 50, No. 6, pp. 1345-1370.

Lomelí, H. y B. Rumbos, (2003), *Métodos Dinámicos en Economía: otra búsqueda del tiempo perdido*, Thomson, México.

Lucas, Robert E. (1972), "Expectations and the Neutrality of Money", *Journal of Economic Theory*, Vol. 4.

Lucas, Robert E. (1976), "Econometric Policy Evaluation: A Critique", *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, No. 5.

Lucas, Robert E., (1977), "Understanding Bussines Cycles", *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, No. 5, pp. 7-29.

Malliaris, A.G. and W.A. Brock, (1991), *Stochastics Methods in Economics and Finance (Advanced Textbooks in Economics, Vol. 17)*, North-Holland, Amsterdam.

Medio, Alfredo, (1992), *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics,* Cambridge University Press, Cambridge.

Mitchell, Wesley, (1927), *Bussines Cycles: the problem and its setting*, National Bureau of Economic Research, New York.

Nuñez Mora, José Antonio y Alejandro Segundo Valdés, (2012), *Cálculo Estocástico con aplicaciones financieras*, Jit Press, México.

Ramsey, F., (1928), *"A Mathematical Theory of Savings"*, *The Economic Journal*, Vol. 38, pp. 543-559, Reimpreso en español en *Lecturas del Fondo No.* , FCE. México.

Romer, D., (2002), *Macroeconomía Avanzada*, McGraw-Hill, México.

Sargent, T. J., (1987), *Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Shone, R., (1997), *Economic Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Slutzky, E., (1937), "The Summation of Random Causes as the Source of Cyclical Processes", *Econometrica*, Vol. 5, pp. 105-46.

Stokey, N. and R. E. Lucas Jr., (1989), *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press, Cambridge.

Takayama, A., (1985), *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2a edition.

Turnovsky, Stephen, (1993), "Macroeconomic Policies, Growth, and Welfare in a Stochastic Economy", *International Economic Review*, Vol. 34, No. 4, pp. 953-981.
Turnovsky, Stephen. (1995), *Methods of Macroeconomic Dynamics*, MIT Press, Cambridge, MA.

Turnovsky, Stephen. (1999), "On the Role of Government in a Stochastically Growing Economy", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 23, núm. 5-6, pp. 873-908.

Turnovsky, S.J. y W.T. Smith, (2006), "Equilibrium Consumption and Precautionary Savings in a Stochastically Growing Economy", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 30, núm. 2, pp. 243-278.

Venegas-Martínez, Francisco, (2001), "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis", *Journal of Economics Dynamics and Control*, Vol. 25, No. 9, pp. 1429-49.

Welfens, Paul J.J., (2008), *Innovations in Macroeconomics*, Springer-Verlag, Second Edition, Berlin.