Administración de portafolios de inversión

y la aplicación de recocido simulado con restricciones

MUÑOZ-GONZÁLEZ, Sergio,MsC.
SALDAÑA-CARRO, César,PhD.
BECERRA-DÍAZ, Julio César,MsC.

ECORFAN®

ECORFAN-México

Administración de portafolios de inversión y la aplicación de recocido simulado con restricciones

Autores

MUÑOZ-GONZÁLEZ, Sergio, MsC.
SALDAÑA-CARRO, Cesar, PhD.
BECERRA-DÍAZ, Julio César, MsC.

Colaboradores

HUEYOTL-ZAHUANTITLA,Filiberto, PhD.
RODRÍGUEZ-JUÁREZ, Edgard, MsC.
MARTÍNEZ-BENÍTEZ, Dora Elia, MsC.
OJEDA-SÁNCHEZ, Ulises, PhD.
SALDAÑA-CERVANTES, Jhoamy, BsC.
LÓPEZ-MUÑOZ Horacio, MsC.

Diseñador de Edición

ESPINOZA-GÓMEZ, Luis

Producción Tipográfica

TREJO-RAMOS, Iván

Producción WEB

ESCAMILLA-BOUCHAN, Imelda

Producción Digital

LUNA-SOTO, Vladimir

Editor en Jefe

RAMOS-ESCAMILLA, María, PhD.

ISBN 978-607-8324-46-0

Prefacio

Actualmente existen empresas dedicadas a funcionar como intermediarios financieros de manera directa, como es el caso de Kuspit y Accitrade por mencionar a las más reconocidas, entre otras, que permiten a las personas invertir en la Bolsa Mexicana de Valores sin la necesidad de contar con grandes capitales y decidir de manera directa en qué activos financieros quieren invertir, sin la necesidad de contratar inversiones en los bancos comerciales que en el mayor de los casos sólo se alcanza a cubrir la pérdida del valor del dinero debido al tiempo.

Con la necesidad de crear una cultura financiera detonante para la cultura de invertir en las bolsas de valores la CONDUSEF cuenta con algunos consejos prácticos para empezar a invertir, las diferentes casas de bolsa lanzan retos bursátiles que en la mayoría de los casos se incluye una capacitación para tener herramientas y poder invertir de manera adecuada e informada. Incluso se puede invertir de manera virtual sin la necesidad de poner en riesgo el dinero del inversionista, todo esto para motivar a las personas a participar activamente en el mercado de valores.

El objetivo de la administración de portafolios de inversión es acercar a las personas una herramienta clásica como lo es el modelo de Markowitz a la administración de portafolios de inversión, dando una visión general de la estructura del Sistema Financiero Mexicano, los métodos generalmente aceptados para el cálculo de rendimientos, cómo se pueden seleccionar los activos financieros que formaran la cartera, cómo se calcula el riesgo y su relación con la diversificación del portafolio, para todo lo anterior son necesarios conocimientos básicos de estadística y métodos de optimización, como por ejemplo, al final se plantea la aplicación del método de optimización denominado recocido simulado con restricciones, para el cual es necesario saber temas introductorios de programación. Sin embargo, la persona que no esté familiarizada en éste último tema podrá aplicar el modelo de Markowitz utilizando Solver de Excel.

En el capítulo 1, se describe la estructura del mercado financiero mexicano sus componentes y se pone especial interés en el mercado de capitales ya que es de ésta de donde se recopilan los datos para hacer el análisis de la administración de la cartera de inversión de donde se utilizan ocho componentes del índice MMX de la bolsa mexicana de valores, también se da una breve descripción de los organismos que integran e interactúan con la bolsa mexicana de valores como referencia general de cómo funciona el mercado de capitales. Con respecto a la teoría de portafolios de inversión se explica cómo se debe escoger una empresa para integrar el portafolio a partir del rendimiento que ofrece y como el riesgo está relacionado con la diversificación del portafolio, además, se plantea el modelo de Markowitz y la construcción de la frontera eficiente a partir de los resultados de optimización.

Contenido

1. Introducción a la administración de los portafolios de inversión y el modelo de Markowitz

Los portafolios de inversión ofrecen la posibilidad de obtener mayores rendimientos a los logrados invirtiendo en instrumentos financieros de forma individual, por lo que es necesario administrar correctamente el portafolio de inversión para aumentar los beneficios obtenidos en dichas inversiones. La administración del portafolio puede ser un proceso complejo que utiliza variables aleatorias, y una teoría muy amplia sobre estimadores estadísticos y optimización no lineal, en el cual hay que conocer una serie de datos de la inversión que en muchos casos es difícil de estimar.

Se puede decir que un portafolio o cartera de inversión es un conjunto de activos financieros que cotizan en el mercado de valores los cuales en conjunto ofrecen cierto rendimiento a un nivel de riesgo, pero este conjunto no es único ya que diferentes portafolios ofrecen el mismo rendimiento. Lo importante es encontrar aquel portafolio que cubra las necesidades de inversión con el mínimo riesgo, o por el contrario, dado el nivel de riesgo dispuesto a asumir encontrar la cartera que ofrezca el máximo rendimiento.

En una administración sencilla de portafolios de inversión se considera sólo el interés y el riesgo de cada inversión, dando la oportunidad de aplicarlo a personas o empresas que no necesitan invertir en procesos complicados, se puede plantear un problema de optimización con algunas restricciones. Sin embargo cuando se toma en cuenta el mercado de valores donde se tienen históricos de datos es necesario considerar variables estocásticas, sus valores esperados de rendimiento, su varianza y hacer análisis econométricos para estimar algunos parámetros de interés; en este último caso se trata de encontrar la proporción de valores a invertir en cada instrumento.

El manejo correcto de la cartera de inversión de las personas físicas y morales es un proceso complicado, principalmente si suponemos que la mayoría de las personas no saben que pueden optimizar sus elecciones e invertir en diversos activos financieros. Además, los parámetros necesarios para hacer una optimización estadística son difíciles de estimar, ya que involucran series de tiempo para hacer una aproximación correcta del riesgo para cada inversión (Anand Sanwal, 2007 y Prigent, 2007).

En el mercado de inversiones establecido existen mecanismos para estimar el riesgo de cada inversión, aunque no es algo totalmente cierto ya que puede variar de un momento a otro por cuestiones propias de la economía nacional e internacional. Por otro lado, las personas e inclusive las empresas tal vez quieran invertir en una cartera menos complicada (como por ejemplo en transporte público, bienes raíces, incrementar pagos de sus afores, en maquinaria, tecnología, etc.) (Bartholomew-Biggs, 2005). En el último caso es mucho más fácil estimar el interés que se obtendrá, el riesgo y el costo de tales inversiones.

Harry Markowitz en 1950 en su trabajo llamado “mean-variance analysis” (análisis de varianza media), dio inicio a la teoría que ahora se conoce como teoría moderna de portafolios de inversión (Svetlozar T. Rachev, 2008), en la cual se toma en cuenta la diversificación del portafolio como medida del riesgo y el retorno de la inversión, ambos conceptos -como se verá más adelante- derivan en el planteamiento de un problema de optimización no lineal.

Tal problema puede dividirse en dos tipos de análisis de varianza media:

1. De todos los posibles portafolios con una cota inferior en el retorno de la inversión, se encuentra aquel con la mínima varianza (se maximiza la diversificación del portafolio)

2. De todos los posibles portafolios con una cota superior para la varianza (a un nivel de diversificación o riesgo establecido), se encuentra aquel con un retorno de la inversión máximo.

Si se conoce la aversión al riesgo del inversionista, ambos problemas antes planteados pueden unificarse en uno solo, donde se busca los beneficios conjuntos de maximizar el retorno de la inversión y minimizar el riesgo.

Un problema actual se considera estacionario, ya que sólo toma en cuenta la información generada hasta el momento, sin embargo continuamente el mercado está variando proporcionando nueva información del valor de los activos financieros, por ende se debe resolver nuevamente el problema para actualizarlo.

En el contexto del problema de varianza media, la diversificación se utiliza como medida de riesgo del portafolio en sentido inverso, es decir, entre menor es el riesgo el portafolio está más diversificado y viceversa. El riesgo de un portafolio se puede cuantificar por su volatilidad, la cual es dependiente de la covarianza o correlación que existe entre el retorno de la inversión de los activos, si el retorno de la inversión de cada uno de los activos están correlacionados, existe la oportunidad de reducir el riesgo del portafolio al invertir en los diferentes activos financieros los porcentajes apropiados del capital disponible, llamados “pesos de inversión” (Rasmussen, 2003).

Una combinación lineal entre los pesos de inversión y el promedio del retorno de la inversión de cada activo financiero se conoce como el “retorno de la inversión del portafolio”. Por otro lado, una combinación cuadrática entre la matriz de covarianza de los retornos de cada activo financiero y los pesos de inversión nos da el “riesgo o diversificación del portafolio”.

2. Estructura del sistema financiero mexicano

Los instrumentos de inversión son variados dependiendo del mercado y las necesidades de cada región, se puede decir que los instrumentos de inversión son aquellos activos que se comercializan en un mercado financiero con el propósito principal de movilizar dinero a través del tiempo. Están integrados fundamentalmente por los mercados de deuda, los mercados de acciones y el mercado cambiario.

En la figura 2.1 se muestra la estructura general del Sistema Financiero Mexicano (SFM) de manera general, donde se aprecia que el mercado de valores es una parte importante del sistema donde se colocan diferentes activos financieros, para incentivar la inversión en las organizaciones privadas.

Generalmente se busca que un mercado financiero sea eficiente, donde la distribución de bienes y servicios entre compradores y vendedores es ideal, es decir, la colocación de bienes logra satisfacer la demanda en todo momento. Los mercados ideales no existen, sin embargo siempre se busca que por lo menos sean eficientes.

Un mercado de valores es eficiente en el momento en que la disputa entre los diferentes competidores que participan en el mismo, encaminados al principio de la máxima rentabilidad, se canaliza a una postura de armonía en la cual el costo de mercado de cualquier valor establece una buena consideración de su importe teórico o intrínseco.

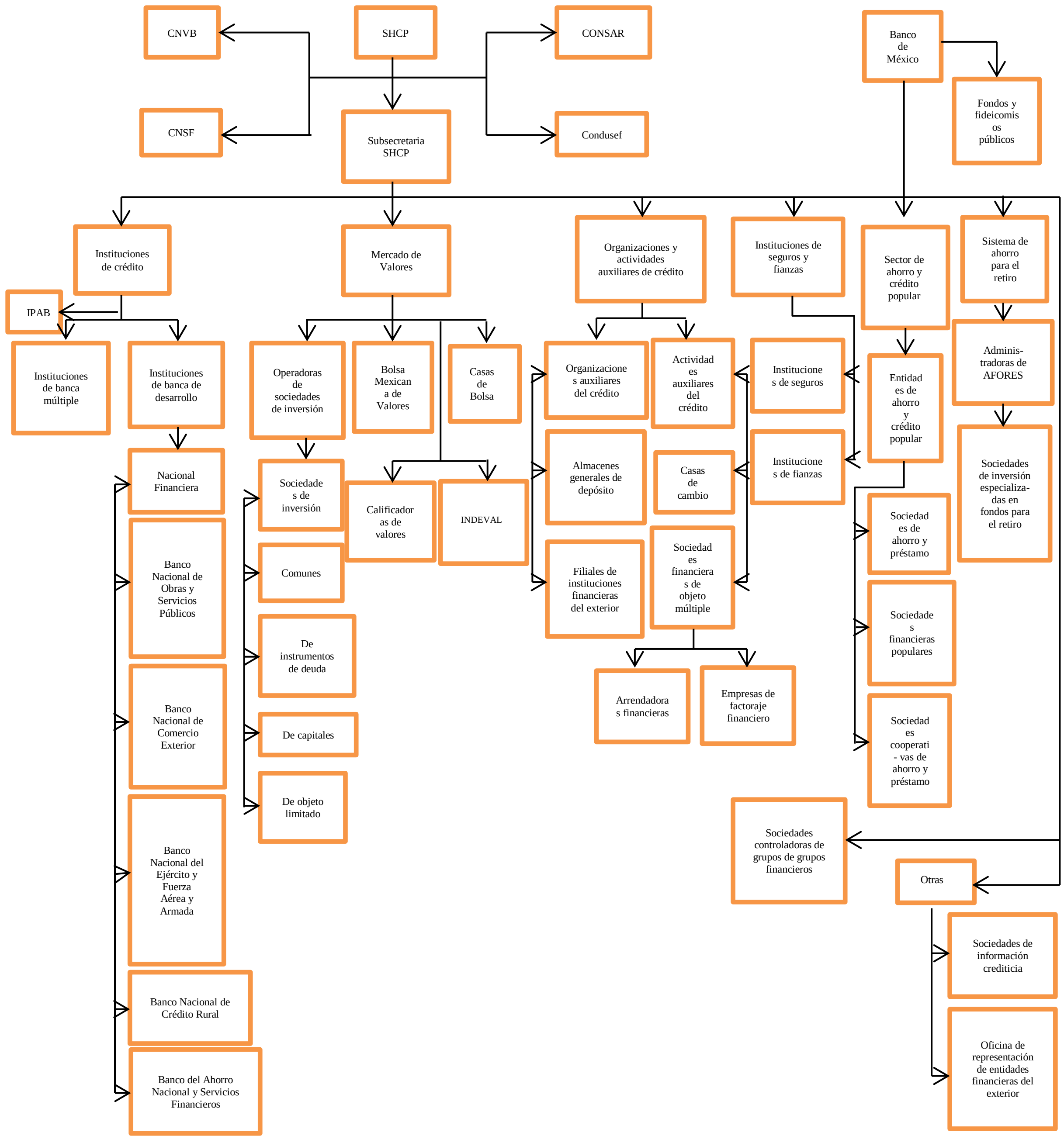


Figura 1 Organigrama del Sistema Financiero Mexicano. Fuente (Alfredo Díaz Mata 2013)

Expresado en otras palabras, el costo de los valores que se comercializan en los mercados financieros eficientes evidencía toda la información que está disponible y se ajusta total y prontamente a la nueva información. Así mismo, se considera que dicha información es de carácter gratuito.

Pero si todas las acciones se valorizan con un excelente equilibrio, los capitales de inversión reflejarán una rentabilidad sobre su inversión, la cual será la apropiada para afrontar el nivel de riesgo contraído, sin importar que títulos se han adquirido. Esto quiere decir que, en un mercado eficiente la totalidad de los títulos se hallarán perfectamente valorados, debido a esto no se encontrarán títulos sobre o subestimados.

Los mercados reales no son eficientes y pasan por diferentes niveles de eficiencia con respecto al tiempo, lo que implica que un inversionista puede perder su capital u obtener ganancias considerables.

El SFM, procura la asignación eficiente de recursos entre ahorradores y demandantes de crédito, en un marco legal que establece los derechos y las obligaciones de las partes, tratando de hacer lo más eficiente posible las transacciones que se llevan a cabo dentro del país. De acuerdo a Alfredo Díaz Mata, 2013 el SFM es el conjunto de personas y organizaciones, tanto públicas como privadas, que captan, administran, regulan y dirigen los recursos financieros que se negocian entre los diversos agentes económicos, dentro del marco de la legislación correspondiente.

El Sistema Financiero Mexicano está integrado por:

- Instituciones reguladoras.
- Instituciones financieras o intermediarios financieros.
- Personas y organizaciones que realizan operaciones con los intermediarios financieros.
- Organizaciones secundarias, como son las asociaciones de bancos o de aseguradoras.

Existen seis instituciones reguladoras del Sistema Financiero Mexicano

1. *Secretaria de Hacienda y Crédito Público* (SHCP), su misión es proponer, dirigir y controlar la política económica del gobierno federal en materia financiera, fiscal, de gasto, de ingreso y deuda pública, así como de estadísticas, geografía e información, con el propósito de consolidar un país con crecimiento económico de calidad, equilibrio, incluyente y sostenido, que fortalezca el bienestar de los mexicanos.

2. *Banco de México* (Banxico), es un organismo autónomo en el ejercicio de sus funciones y en su administración. Tiene el objetivo prioritario de preservar el valor de la moneda nacional a lo largo del tiempo y, de esta forma, contribuir a mejorar el bienestar económico de los mexicanos.

3. *Comisión Nacional Bancaria y de Valores*, su objetivo es supervisar y regular en el ámbito de su competencia, a las entidades integrantes del SFM, con el fin de procurar su estabilidad y correcto funcionamiento, así como mantener y fomentar un equilibrio sano en todo el SFM, para proteger los intereses del público.

4. *Comisión Nacional de Seguros y Fianzas*, es un órgano desconcentrado de la SHCP, encargado de supervisar que la operación de los sectores asegurador y afianzador se apegue al marco normativo, preservando la solvencia y estabilidad financiera de las instituciones de seguros y fianzas, para garantizar los intereses del público usuario, así como promover el sano desarrollo de estos sectores con el propósito de extender la cobertura de sus servicios a la mayor parte posible de la población.

5. *Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro*, fue creado el 27 de marzo de 1992 y las entidades que lo conforman son:

   - La Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro (Consar).
   - Las Administradoras de Fondos para el Retiro (Afores).
   - Las Sociedades de Inversión Especializadas en Fondos para el Retiro (Siefores).
   - Las empresas operadoras de la base de datos nacional.
   - Las entidades receptoras.
   - Las instituciones de crédito liquidadoras.
   - Los institutos de seguridad social.

6. *Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros (Condusef)*, es un organismo público descentralizado con personalidad jurídica y patrimonio propios, encargado de promover, asesorar, proteger y defender los derechos e intereses de los usuarios frente a las instituciones financieras, arbitrar sus diferencias de manera imparcial y proveer la equidad en las relaciones entre éstos, así como supervisar y regular de conformidad con lo previsto en las leyes relativas al SFM, a las instituciones financieras, a fin de procurar la protección de los intereses de los usuarios.

Una parte importante del Sistema Financiero Mexicano es el mercado de valores, en las transacciones donde el crédito bancario no tiene cabida, el mercado bursátil busca al igual que la actividad bancaria proveer de recursos financieros a las instituciones mediante diferentes tipos de capitalización que no necesariamente son créditos.

2.1 Mercado de Valores

El sistema bursátil mexicano es el conjunto de organizaciones, tanto públicas como privadas a través de las cuales se regulan y llevan a cabo las actividades de financiamiento mediante títulos.

Por otro lado el mercado de valores se define como el conjunto de leyes, reglamentos, instituciones, intermediarios y participantes en general tendientes a poner en contacto la oferta y la demanda de títulos de crédito. La intermediación de valores tiene como objetivo, financiar y capitalizar a las empresas, para brindar a los inversionistas una expectativa de ganancia patrimonial.

La actual Ley del Mercado de Valores (LMV) entro en vigor en diciembre del 2005 y establece en su artículo 1, que es de orden público y observancia general en los Estados Unidos Mexicanos y tiene por objetivo desarrollar el mercado de valores en forma equitativa, eficiente y transparente, proteger los intereses del público inversionista, minimizar el riesgo sistémico, fomentar una sana competencia y regular lo siguiente:

1. La inscripción y la actualización, suspensión y cancelación de la inscripción de valores en el Registro Nacional de Valores y la organización de éste.
2. La oferta e intermediación de valores.
3. Las sociedades anónimas que coloquen acciones en el mercado de valores bursátil y extrabursátil a que esta ley se refiere; así como el régimen especial que deberán observar en relación con las personas morales que las citadas sociedades controlen o en las que tengan una influencia significativa o con aquellas que las controlen.
4. Las obligaciones de las personas morales que emitan valores, así como de las personas que celebren operaciones con valores.
5. La organización y funcionamiento de las casas de bolsa, bolsas de valores, instituciones para el depósito de valores, contrapartes centrales de valores, proveedores de precios, instituciones calificadoras de valores y sociedades que administran sistemas para facilitar operaciones con valores.
6. El desarrollo de sistemas de negociación de valores que permitan la realización de operaciones con éstos.
7. La responsabilidad en que incurrirán las personas que realicen u omitan realizar los actos o hechos que esta ley sanciona, y
8. Las facultades de las autoridades en el mercado de valores.

La LMV tiene como objetivo:

- Promover el acceso, principalmente de las medianas empresas, al mercado de valores, entendido éste en su más amplio sentido, para que de manera voluntaria dichas empresas adopten buenas prácticas de gobierno societario y adecuados derechos a accionistas minoritarios.
- Consolidar el régimen aplicable a las sociedades anónimas bursátiles, cuyas acciones se encuentren listadas en la bolsa de valores, para mejorar su organización y funcionamiento, mediante la modernización de sus estructuras societarias y su régimen de responsabilidades, haciéndolos más congruentes con la práctica.
- Actualizar y flexibilizar el marco normativo aplicable a las casas de bolsa y a las entidades financieras participantes en este sector, como bolsas de valores, instituciones para el depósito de valores, contrapartes centrales, sociedades que administran sistemas para facilitar operaciones con valores, proveedores de precios e instituciones calificadoras de valores, entre otras.
- Modernizar el régimen de delitos y sanciones.
- Redefinir las funciones y facultades de las autoridades financieras, con objeto de evitar duplicidad en los procesos de autorización, regulación y supervisión de los participantes del mercado reduciendo los costos regulatorios.

Existen diferentes actores dentro del mercado de valores, entre estos están los demandantes, oferentes o emisores y los fiscalizadores, dentro de los intermediarios están las bolsas de valores. A ellas acuden los inversionistas como una opción para tratar de proteger y acrecentar su ahorro financiero, aportando los recursos que, a su vez, permiten, tanto a las empresas, industria y gobiernos, financiar proyectos productivos y de desarrollo, que generan empleos y riqueza.

2.2 Mercados de Deuda

El Gobierno Federal, los gobiernos estatales o locales y las empresas paraestatales o privadas pueden necesitar financiamiento, ya sea para realizar un proyecto de inversión o para mantener sus propias actividades. Estas entidades pueden conseguir los recursos a través de un préstamo; solicitando un crédito a un banco o a través de la emisión de un instrumento de deuda.

Los instrumentos de deuda son títulos, es decir, documentos necesarios para hacer válidos los derechos de una transacción financiera, que representan el compromiso por parte del emisor (en este caso la entidad) de pagar los recursos prestados, más un interés pactado o establecido previamente, al poseedor del título (o inversionista), en una fecha de vencimiento dada.

2.3 Mercado de Capitales

El mercado de capitales es aquel conformado por documentos que emite una empresa llamados acciones, y ampara como dueño de una parte de dicha empresa al poseedor de la acción. Una empresa puede estar dividida en acciones, las cuales son en cantidad y valor definido por el valor en mercado de dicha empresa, teniendo variaciones conforme el tiempo.

Las acciones se pueden emitir privada o públicamente, en el caso de una emisión privada, se vende parte de las acciones que tienen los dueños originales o se emiten más acciones para su venta, en algunos casos también se llegan a diluir (las acciones representan menos capital social) pero esto es más por cuestión administrativa; las acciones a vender se ofrecen a personas o empresas de forma privada.

La emisión pública se hace a través de bancos de inversión y casas de bolsa, en apego a las regulaciones existentes para la emisión de dichos instrumentos, las cuales van desde años en existencia, ventas anuales, una estructura organizacional sólida, etc., por lo general los mismos bancos de inversión o quien tramita la emisión, se hacen cargo de registrar el instrumento en la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) a través del Registro Nacional de Valores (RNV), se le pone una fecha a la venta inicial u oferta pública inicial (OPI) y dicha emisión se comercia en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

2.4 Mercado de Divisas

Los mercados de divisas son emplazamientos en los que se intercambian las diferentes monedas nacionales y se fijan los precios de cambio. La razón de la existencia de este tipo de mercados son las operaciones de cambio, derivadas del comercio internacional y los movimientos en los mercados financieros internacionales.

El precio fijado en este tipo de mercados es lo que se conoce como tipo de cambio, es decir, la cantidad de moneda de un país que hay que entregar para obtener un determinado monto de monedas de otro país.

El mercado de divisas es el más grande del mundo en volumen de transacciones diarias, tiene un alto grado de liquidez y es muy volátil. Además presenta una herramienta para los bancos nacionales de establecer políticas monetarias que afectan al mercado cambiario y por ende a la economía de un país.

2.5 Mercado Primario y Secundario

El mercado primario se define como aquel en el que los interesados (empresas o bancos) necesitan adquirir financiamiento rápido emitiendo valores de deuda (bonos) o a través de valores de riesgo (acciones), es decir los títulos se emiten por primera vez. Podemos decir que el mercado primario es aquel en el que la empresa trata directamente con los inversionistas.

Dentro del mercado primario, todos los instrumentos tienen un valor de primera emisión, este sólo se puede definir al momento de emitir los documentos y su precio no puede ser alterado por decisiones de la empresa.

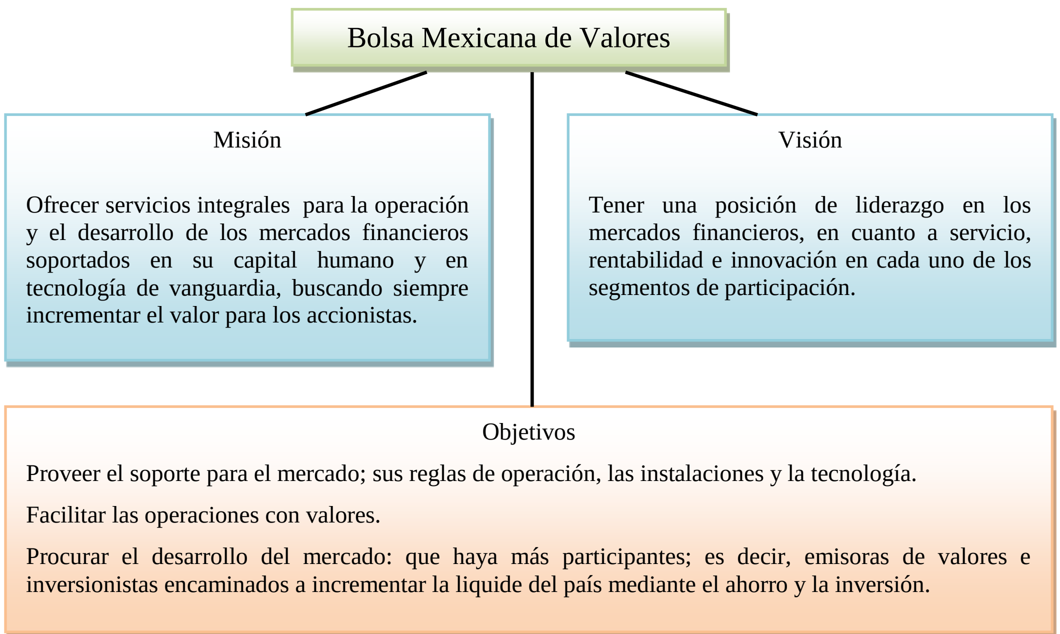
Una de las principales diferencias entre el mercado primario y el mercado secundario, es que en el secundario el flujo de acciones y bonos es mucho mayor, además de proveer una mayor liquidez a los inversionistas, mientras que en el primario se establece el volumen de operaciones.

3. Bolsa Mexicana de Valores

En México, la institución que tiene la concesión para llevar a cabo las operaciones del mercado de valores organizado es la Bolsa Mexicana de Valores, S.A. de C.V. (BMV), donde se reúne a compradores y vendedores, para facilitar el intercambio de activos financieros.

Las principales funciones de la BMV son:

1. Facilitar las transacciones de los valores y títulos de crédito inscritos en el Registro Nacional de Valores.
2. Procurar el desarrollo del mercado respectivo.

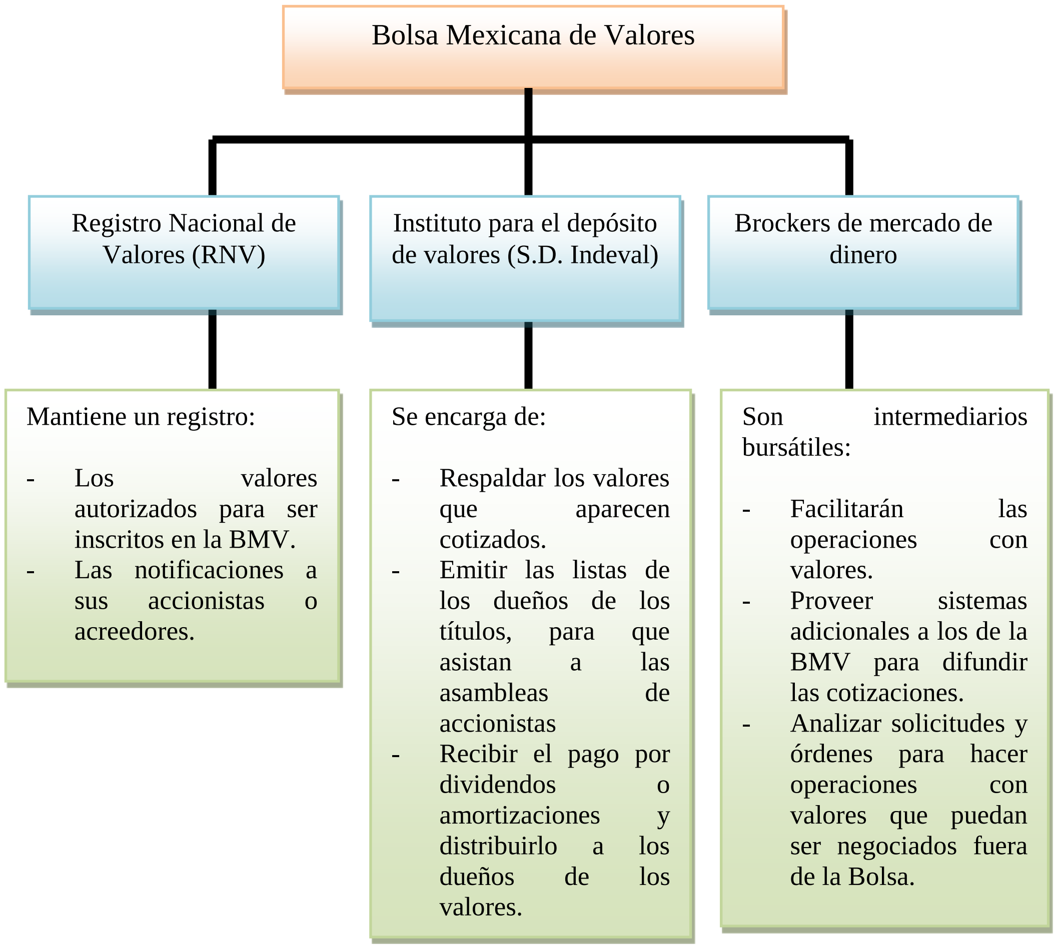


Fuente: Elaboración Propia

Figura 2 Misión, Visión y Objetivos de la Bolsa Mexicana de Valores.

En la Bolsa Mexicana de Valores sólo pueden acceder los operadores de las casas de bolsa para representar a sus clientes, que son:

- Inversionistas: personas físicas o morales que compran los valores a cambio de su dinero.
- Emisoras: personas morales que captan dinero a cambio de la colocación pública de sus valores.



Fuente: Elaboración Propia

Figura 3 Principales actividades que se realizan en BMV.

Los valores que se comercializan en la BMV son de dos tipos básicos:

- *Acciones:* Estos valores representan una parte de una empresa, es decir al poseer una acción se convierte en socio de ella y por ello participa de las ganancias y pérdidas que tenga la compañía. Las ganancias y las perdidas sólo se pueden obtener al vender o cuando la empresa hace pagos de dividendos.

- *Deuda:* Estos valores representan parte de una deuda que gira (emite) la empresa, es decir al adquirir deuda, usted se convierte en uno de los acreedores a los que la empresa debe pagar capital e intereses. Al adquirir la deuda se espera recuperar el dinero invertido al vencimiento de un plazo pactado, entonces no es importante la variación del precio del valor, sin embargo si desea vender antes del vencimiento, hacer liquido su valor, las variaciones del mercado pueden afectar el dinero que se recupera. Las entradas de dinero de estos valores se dan cuando se reciben pagos de intereses o cupones y/o amortización de capital.

A los valores comúnmente se les llama instrumentos ya sea de mercado de capitales (acciones) o mercado de dinero (deuda).

De acuerdo al mercado en que se cotizan, los instrumentos que actualmente se negocian en la BMV son:

1. Mercado de capitales:
    - Acciones.
    - Fibras.
2. Mercado de capital de desarrollo:
    - CKDes, (títulos o valores fiduciarios destinados para el financiamiento de uno o más proyectos, mediante la adquisición de una o varias empresas promovidas).
3. Mercado de deuda:
    - Instrumentos de deuda a corto plazo.
        - Aceptaciones bancarias.
        - Papel comercial.
        - Pagaré con rendimiento liquidable al vencimiento.
        - Certificado bursátil de corto plazo.
    - Instrumentos de deuda a mediano plazo.
        - Pagaré a mediano plazo.
    - Instrumentos de deuda a largo plazo.
        - Obligaciones.
        - Certificados de participación inmobiliaria.
        - Certificados de participación ordinarios.
        - Certificado bursátil.
        - Pagaré con rendimiento liquidable al vencimiento a plazo mayor a un año

En México los inversionistas tienen a su disposición dos tipos de mercado para adquirir instrumentos de inversión, la Bolsa Mexicana de Valores y el Mercado de Derivados (Mexder).

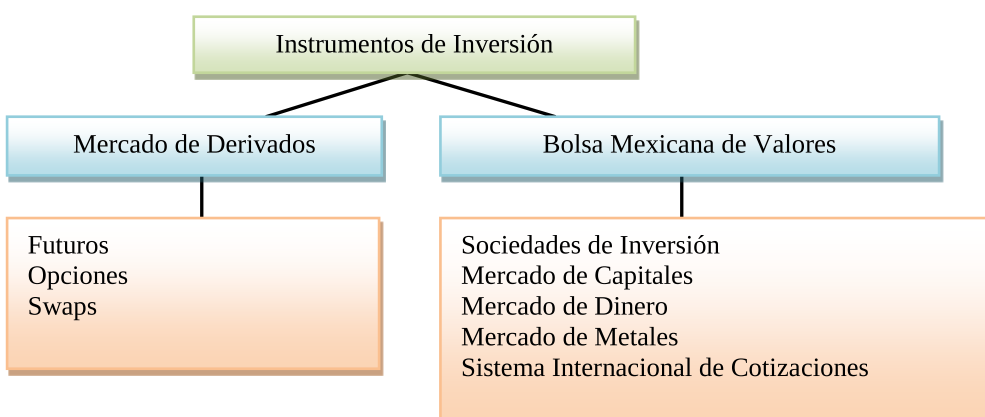


Figura 4 Tipos de instrumentos de inversión por mercado

La BMV es un mercado organizado, porque existen reglas para colocar los valores, comprarlos y venderlos, intercambiarlos y ejercer sus derechos corporativos y patrimoniales. Para esto, la BMV se apoya en otros organismos, como:

Registro Nacional de Valores (RNV): mantiene un registro de los valores autorizados para ser inscritos en la BMV, así como de las diferentes notificaciones a sus accionistas o acreedores. Este registro está a cargo de la CNBV y es único en México.

Instituto para el Depósito de Valores (S.D. Indeval): es la institución que tiene como función principal custodiar y administrar los valores. Si los valores no están registrados en el RNV y depositados en el Indeval, entonces no se está operando con valores autorizados en este mercado.

Brockers de mercado de dinero: son promotores institucionales (operadores, distribuidores y despachos de consultoría) que se dedican a asesorar y armar portafolios de inversión de acuerdo con las perspectivas personales de sus clientes, canalizando los recursos a los intermediarios financieros. Una parte del mercado de valores se negocia a través de estos intermediarios bursátiles.

La intermediación con valores procura la realización habitual y profesional de cualquiera de las actividades que a continuación se indican:

1. Actos para poner en contacto oferta y demanda de valores.

2. Celebración de operaciones con valores por cuenta de terceros como comisionista, mandatario o con cualquier otro carácter, interviniendo en los actos jurídicos que correspondan en nombre propio o en representación de terceros.

3. Negociación de valores por cuenta propia con el público en general o con otros intermediarios que actúen de la misma forma o por cuenta de terceros.

En la Tabla 10 del anexo A, se enlistan las empresas mexicanas que actualmente cotizan en la bolsa mexicana de valores y son emisoras de acciones, según el sector al que pertenecen.

3.1 Organismos intermediarios

Estas instituciones son mercados organizados de intermediarios que representan los intereses de particulares, sociedades mercantiles y del sector público en libre intercambio de valores, mediante reglas establecidas por el estado. Los organismos bursátiles que emiten valores tienen como funciones principales las siguientes:

1. Ofrecer al público valores bursátiles (acciones, títulos, obligaciones y documentos mobiliarios).
2. Actuar como intermediario en este mercado.
3. Emitir y colocar valores y documentos bursátiles.

4. Administrar y guardar valores.
5. Invertir en sociedades que complementen su actividad.

Existen tres tipos de intermediarios bursátiles, Casas de Bolsa, Sociedades de Inversión y Especialistas Bursátiles.

1. Casas de Bolsa

Las funciones que desempeña una Casa de Bolsa son:

1. Actuar como intermediarios en el mercado de valores.
2. Recibir fondos de las operaciones con valores que se les encomienden.
3. Prestar asesoría en materia de valores en forma directa o a través de otras empresas.
4. Recibir préstamos o créditos de instituciones de crédito.
5. Otorgar créditos para la adquisición de valores con garantía.
6. Actuar como fiduciarias.

MULVA	HSBCB	ING	VALME
MS	ACTIN	EMV	SCTIA
BCOMR	INTER	GBM	VAFIN
BXMAS	ICAM	MNXCB	INBUR
CS	CICB	VALUE	PUNTO
MSRI	ABN	BARC	VECTO

BLTK	UBS	IXE	ACCIV
JPM	DBSEC	ECB	INVEX
MERL	SANT		

Figura 5 Casas de Bolsa que operan en México

2. Sociedades de Inversión

Tienen por objeto la recaudación de fondos, bienes o derechos del público para invertirlos en bienes, derechos, valores u otros instrumentos. La Ley de Sociedades de Inversión contempla cuatro tipos de fondos de inversión:

De Deuda. En este pueden invertir personas físicas o morales. Dependiendo el tipo de fondo, operan instrumentos como Cetes, Bonos, Pagarés, Aceptaciones Bancarias entre otros, por lo que ofrecen rendimientos diarios, sin riegos considerables.
De Capitales. Las sociedades de inversión de capitales, operan con valores y documentos emitidos por empresas que requieren recursos a largo plazo. La administración de este tipo de sociedades recae en una asamblea de accionistas, originada por un Consejo de Administración.
De Renta Variable. En los fondos de renta variable pueden invertir personas físicas y morales y pueden tomar posiciones en acciones que coticen en la Bolsa Mexicana de Valores o estén listados en el Sistema Internacional de Cotizaciones.
De Objeto Limitado. Las sociedades de inversión de objeto limitado operarán exclusivamente con los activos objeto de inversión que definan en sus estatutos y prospectos de información al público inversionista.

Las sociedades de inversión en México están obligadas a invertir en valores inscritos en el Registro Nacional de Valores e Intermediarios de la CNBV. En la tabla X del Anexo X, se muestran las sociedades de inversión que actualmente están dadas de alta en México.

3. Especialistas bursátiles

Un especialista bursátil es un miembro del mercado que se compromete a dar liquidez a uno o varios valores cotizados.

La función del especialista tiene dos objetivos:

1. Que los inversores puedan en todo momento comprar o vender acciones y que la cotización de ese valor no tenga una gran volatilidad o riesgo.

2. Debe abstenerse de actuar cuando el valor que deba cuidar tenga un comportamiento que es fruto de la inestabilidad y situación general del mercado.

4. Organismo de Apoyo

Los organismos de apoyo proporcionan los medios y mecanismos para que se realicen las operaciones que solicitan los intermediarios de acuerdo a las órdenes de sus clientes.

- Centro de cómputo bancario.
- Fondo bancario de protección al ahorro.
- Sociedades de información crediticia.
- Asociación mexicana de bancos.
- Asociación mexicana de empresas de factoraje.
- Asociación mexicana de arrendadoras financieras.
- Bolsa mexicana de valores.
- Fondo de apoyo al mercado de valores.
- Empresas calificadoras de valores.
- Sociedades valuadoras de sociedades de inversión.
- Asociación mexicana de intermediarios bursátiles.
- Instituto mexicano del mercado de capitales.
- Academia mexicana de derecho bursátil.

4. Portafolios de inversión

Un portafolio es un conjunto o grupo de activos financieros. La administración de un portafolio se refiere a la construcción de portafolios, buscando alcanzar los objetivos respecto al retorno de la inversión y respetando el riesgo que está dispuesto a correr el inversionista (Noel Amenc, 2003).

La valuación de un portafolio de inversión juega un papel muy importante en la filosofía del inversor, hay quienes en una posición pasiva, dejan de lado el evaluar el portafolio y se fijan objetivos sobre el rendimiento a largo plazo, por el contrario los inversores activos valúan continuamente el portafolio para fijar objetivos a corto y mediano plazo. Se pueden definir a grandes rasgos diferentes tipos de filosofías de inversión (Damodaran, 2012).

El *Análisis Fundamental* se basa en que el valor real de la firma debe estar directamente relacionado con sus características financieras, es decir, las perspectivas de crecimiento, riesgo y flujos de caja. Cualquier discrepancia del valor estimado con los aspectos financieros nos da un indicio de sobre o sub valoración del activo financiero.

Los aspectos más importantes para la estrategia de inversión son:

- La relación entre el valor y los factores financieros medibles más importantes.
- La relación es estable en el tiempo.
- Las desviaciones entre la relación han sido corregidas en un periodo de tiempo razonable.

Los inversionistas utilizan flujos de caja descontados, ratios de precio ganancia y valores en libros. Generalmente se piensa que el portafolio es sub evaluado esperando a largo tiempo un retorno de la inversión.

El análisis fundamental se basa en comparar el valor actual de una acción con el valor presente del flujo de efectivo, que recibirá el poseedor de la acción, si el valor presente es mayor que el valor actual, la recomendación sería comprar y en el caso contrario vender (Xavier Brun, 2008).

El *Análisis Técnico* se enfoca en los procedimientos basados en métodos estadísticos que permiten pronosticar los valores futuros de los diferentes activos, y cuantificar su evolución a lo largo del tiempo, para comprender el comportamiento del mercado bursátil.

El análisis técnico se centra en el estudio de patrones que pueden existir en las cotizaciones de los activos financieros. El analista técnico se basa en que las cotizaciones de las acciones responden lentamente a cambios en los factores fundamentales y lo hacen siguiendo un patrón predefinido (Xavier Brun, 2008).

4.1 Rendimiento

Muchos de los conceptos que a continuación se presentan son comúnmente aceptados, especialmente en el caso de la estadística, sin embargo existen diferentes estándares aceptados para la evaluación y gestión del riesgo en los portafolios de inversión, para el presente aplicaremos los criterios desarrollados por la Asociación para la Inversión, Administración e Investigación (AIMR por sus siglas en inglés), ahora conocido como el Instituto del Analista Financiero Certificado (CFA por sus siglas en inglés).

El estándar AIMR, son normas de desempeño introducidas por primera vez por el Comité de la Federación de Analistas Financieros en septiembre – octubre de 1987. Las normas AIMR-PPS han recibido una gran aceptación en los EE.UU. y la industria de la inversión canadiense, donde países de América del Norte han adoptado las normas AIMR para servir como las normas de funcionamiento local, algunos países optaron por adherirse a sus propias directrices aceptadas a nivel nacional, mientras que otros tenían pocas normas o ninguna para la presentación de resultados de proyectos de inversión.

En 1995 el estándar AIMR es mundialmente aceptado, en particular el conjunto de normas para el cálculo y la presentación de los resultados de las inversiones. AIMR patrocina y financia a The Global Investment Performance Standards (GIPS) un comité dedicado a desarrollar y publicar las normas mundiales disponibles para las empresas, con el fin de que calculen y presenten información completa, y fidedigna del rendimiento obtenido a sus clientes actuales como potenciales. El 19 de febrero de 1999, AIMR aprobó formalmente las normas de GIPS como el estándar mundial, para calcular y presentar los resultados de las empresas con el fin de que el inversionista tenga mejores herramientas de análisis.

De acuerdo al estándar AIMR el flujo de dinero generado durante un periodo de tiempo debe reinvertirse o estar en la posición de comprar acciones adicionales. El cálculo de los rendimientos en un periodo de tiempo largo o con subperiodos se hace mediante dos métodos, el de enlace y el indexado.

Para un solo periodo se puede calcular el rendimiento mediante la siguiente formula

$$r = \frac{V_{n+1} - V_n + I}{V_n} \tag{1}$$

Ecuación 1 Rendimiento en un solo periodo de tiempo.

Donde: V_n es el valor de la acción en el periodo $n-\text{ésimo}$, e I es el pago de dividendos o valor extra generado por las acciones.

Método de enlace. El método de enlace es el rendimiento esperado durante un periodo de tiempo, dividido en subperiodos donde se calcula el rendimiento de estos y el valor de todos los subperiodos utilizando interés compuesto (Haim Levy, 2004).

Para calcular el método de enlace se utiliza la formula:

$$R = \prod_{n=1}^{N} (1 + r_n) - 1 = [(1 + r_1)(1 + r_2) \cdots (1 + r_N)] - 1 \qquad (2)$$

Ecuación 2 Rendimiento por el método de enlace.

En la tabla 1 se ejemplifica los cálculos necesarios para encontrar el retorno de la inversión del primero de enero al 31 de diciembre utilizando la Ecuación 1 y Ecuación 2, donde se encuentra un rendimiento del 8.4%, cabe hacer notar que si las acciones se hubieran liquidado el 15 de noviembre el beneficio por las acciones sería del 30.1%, de acuerdo con el método de enlace.

<table>
<tr><td colspan="4">a) Información de entrada, dividendos y precio de las acciones</td></tr>
<tr><th>Fecha</th><th colspan="2">Dividendos por acción</th><th>Precio de la acción</th></tr>
<tr><td>01-ene</td><td colspan="2"></td><td>$ 100.00</td></tr>
<tr><td>15-feb</td><td colspan="2">$ 2.00</td><td>$ 80.00</td></tr>
<tr><td>15-may</td><td colspan="2">$ 2.00</td><td>$ 95.00</td></tr>
<tr><td>15-ago</td><td colspan="2">$ 2.00</td><td>$ 105.00</td></tr>
<tr><td>15-nov</td><td colspan="2">$ 2.00</td><td>$ 120.00</td></tr>
<tr><td>31-dic</td><td colspan="2"></td><td>$ 100.00</td></tr>
<tr><td colspan="4">b) Calculo del retorno de la inversión por el método de enlace</td></tr>
<tr><th>Fecha</th><th>Periodo</th><th>Retorno por subperiodo</th><th>Retorno
Método de Enlace</th></tr>
<tr><td>01-ene</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>15-feb</td><td>1</td><td>- 0.1800</td><td>- 0.1800</td></tr>
<tr><td>15-may</td><td>2</td><td>0.2125</td><td>- 0.0058</td></tr>
<tr><td>15-ago</td><td>3</td><td>0.1263</td><td>0.1198</td></tr>
<tr><td>15-nov</td><td>4</td><td>0.1619</td><td>0.3011</td></tr>
<tr><td>31-dic</td><td>5</td><td>- 0.1667</td><td>0.0843</td></tr>
</table>

Tabla 1 Cálculo del rendimiento utilizando el método de enlace

Método de Indexado. El método de indexado se enfoca en cuantas acciones se pueden adquirir de acuerdo al flujo de efectivo que generan los rendimientos de los activos financieros.

Para calcular el número de nuevas acciones que se pueden adquirir (AS_n) se utiliza la siguiente ecuación

$$AS_n = \frac{N_{n-1} D_n}{P_n} \qquad (3)$$

Ecuación 3 Número de nuevas acciones por periodo.

Donde: N_{n-1} es el número de acciones en el periodo $n-1$, D_n son los dividendos pagados en el periodo $n-\text{ésimo}$, y P_n es el precio de la acción en el mismo periodo.

Después de cada periodo se vuelve a calcular el número de acciones mediante

$$N_n = N_{n-1} + AS_n \tag{4}$$

Ecuación 4 Número total de acciones al final de cada periodo.

Y al final el retorno de la inversión se obtiene mediante la ecuación [5]

$$R = \frac{P_n N_n}{P_0 N_0} - 1 \tag{5}$$

Ecuación 5 Rendimiento por el método de indexado.

En la tabla 2 se muestra como se calcula el rendimiento de la inversión mediante el método de indexado, donde a partir de una inversión de 100 acciones al final del periodo se logran adquirir 8.4289 nuevas acciones, las cuales teóricamente se obtuvieron por los rendimientos del flujo de efectivo y representan un rendimiento del 8.4289%.

Cálculo del retorno de la inversión, utilizando el método de indexado.				
Fecha	**Dividendos por acción**	**Precio de la acción**	**Acciones adicionales**	**Número de acciones**
01-ene		$ 100.00		100
15-feb	$ 2.00	$ 80.00	2.5000	102.50000
15-may	$ 2.00	$ 95.00	2.1579	104.65789
15-ago	$ 2.00	$ 105.00	1.9935	106.65138
15-nov	$ 2.00	$ 120.00	1.7775	108.42890
31-dic		$ 100.00		108.42890
			Retorno de la inversión	0.0843

Tabla 2 Cálculo del rendimiento utilizando el método de indexado

Rendimiento Promedio. Una vez determinado el tamaño y número de subperiodos de tiempo es importante calcular el rendimiento promedio de cada activo financiero mediante la Ecuación 6, para tener una idea del rendimiento que ha tenido una acción.

$$\overline{R} = \frac{\sum_{n=1}^{N} r_n}{N}. \tag{6}$$

Ecuación 6 Rendimiento promedio.

Varianza del Rendimiento. La varianza del histórico del rendimiento por activo financiero (Ecuación 7), representa la variabilidad o el riesgo que se incurre al invertir en ese activo, cuan mayor sea la varianza, mayor será el riesgo y viceversa. Es cierto que al aceptar un riesgo alto es posible que perdamos una cantidad considerable de dinero, pero también nos da la oportunidad de obtener ganancias al mismo nivel de riesgo. Entonces un activo financiero con históricos de rendimiento de varianza mínima, son menos riesgosos y reducen la posibilidad de tener mayores ganancias.

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(r_n - \overline{R}\right)^2 \qquad (7)$$

Ecuación 7 Varianza de los rendimientos.

Sin embargo, la varianza es un término cuadrático el cual no se puede comparar directamente con su propia media, en el sentido que no se pueden hacer comparaciones de varianzas entre rendimientos de activos financieros diferentes. Para tener un estadístico normalizado que permita hacer comparaciones entre diferentes activos financieros se considera la desviación estándar (Ecuación 8), en general la desviación estándar es una medida del riesgo o volatilidad normalizada de un activo financiero.

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(r_n - \overline{R}\right)^2} \qquad (8)$$

Ecuación 8 Desviación estándar de los rendimientos.

El termino exceso de rendimiento ( ) se utiliza para describir la cantidad de retorno de la inversión que se debe de tener por encima de la tasa libre de riesgo, y se calcula mediante la Ecuación 9.

$$R_E = R - R_f \qquad (9)$$

Ecuación 9 Exceso de rendimiento.

Donde: R_f es el retorno de la inversión libre de riesgo y R el rendimiento del activo.

Fecha	Rendimiento	Cetes 28 dias nominal	INPC (Inflación)	Rendimiento libre de riesgo	Exceso de rendimiento
Dic 2012	13.395	0.011	0.230	0.241	13.153
Nov 2012	4.990	0.012	0.680	0.692	4.298
Oct 2012	7.728	0.012	0.510	0.522	7.206
Sep 2012	2.217	0.012	0.440	0.452	1.765
Ago 2012	-8.118	0.011	0.300	0.311	-8.430
Jul 2012	-3.408	0.012	0.560	0.572	-3.980
Jun 2012	4.609	0.012	0.460	0.472	4.137
May 2012	2.492	0.012	-0.320	-0.308	2.800
Abr 2012	1.468	0.012	-0.310	-0.298	1.766
Mar 2012	3.535	0.012	0.060	0.072	3.463
Feb 2012	0.781	0.012	0.200	0.212	0.569
Ene 2012	-9.091	0.012	0.710	0.722	-9.813
Dic 2011	3.529	0.012	0.820	0.832	2.697
Nov 2011	5.919	0.012	1.080	1.092	4.827
Oct 2011	-2.461	0.012	0.670	0.682	-3.143
Sep 2011	-9.984	0.012	0.250	0.262	-10.245
Ago 2011	2.553	0.011	0.160	0.171	2.381
Jul 2011	-3.414	0.012	0.480	0.492	-3.905
Jun 2011	-2.843	0.012	0.000	0.012	-2.855
May 2011	-1.484	0.012	-0.740	-0.728	-0.756
Abr 2011	1.253	0.012	-0.010	0.002	1.251
Mar 2011	2.929	0.012	0.190	0.202	2.727
Feb 2011	-0.694	0.011	0.380	0.391	-1.085
Promedio	0.691	0.012	0.296	0.307	0.384

Tabla 3 Cálculo del exceso de rendimiento

En la Tabla 3 se muestra el cálculo del exceso de rendimiento, donde el rendimiento libre de riesgo es la suma de la tasa de interés segura (CETES) y la inflación del periodo, para tener en promedio una tasa de exceso de rendimiento durante el año 2011 y 2012 del 0.384%, que es la tasa real que se ganó al invertir en Chedraui, después de la tasa libre de riesgo y descontando la inflación.

El *Rendimiento Residual o Anormal* es el componente de los rendimientos que no se debe a influencias sistemáticas o no están asociados a los movimientos del mercado al que pertenece el activo financiero. Se puede definir como el rendimiento que está por encima del generado por todo el mercado, por eso se llama rendimiento anormal (Rasmussen, 2003).

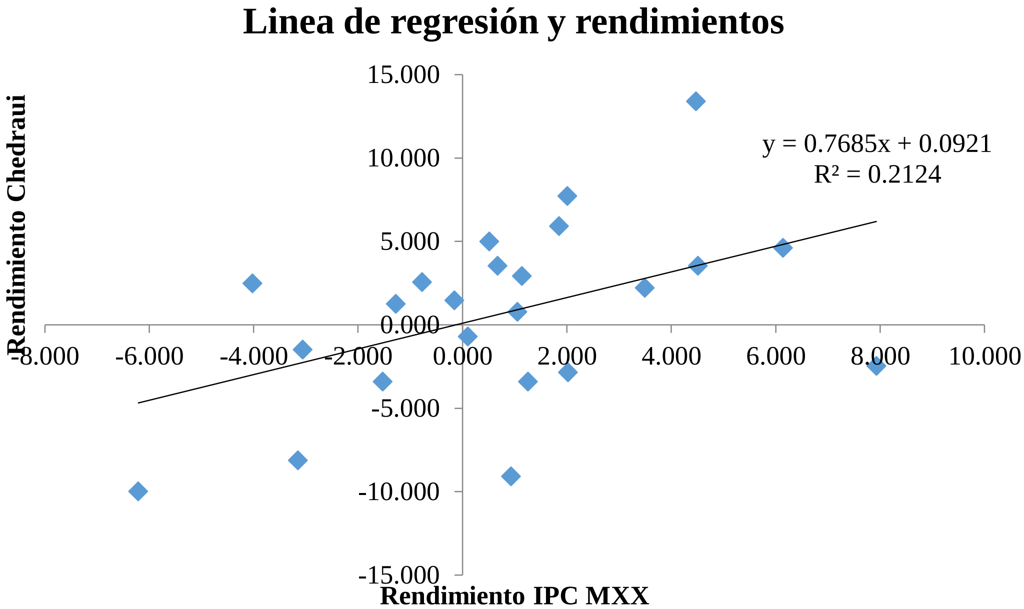


Figura 6 Dispersión de datos entre Chedraui y el mercado al que pertenece IPC MXX.

En la Figura 6 se muestra el modelo de regresión $y = 0.7685x + 0.0921$, donde se aprecia que el rendimiento anormal que guarda Chedraui con el mercado IPC MXX es del 0.0921, es decir aunque el mercado no tuviera rendimientos ($x = 0$), Chedraui tendría un rendimientos positivo por 0.0921.

4.2 Riesgo y Diversificación

La palabra riesgo proviene del latín *risicare*, que significa atreverse a transitar por un sendero peligroso (Haro, 2012). En finanzas el concepto de riesgo se relaciona con las pérdidas potenciales que se pueden incurrir en el portafolio de inversión, por lo anterior, el riesgo debe medirse efectiva y cuantitativamente, para obtener las probabilidades de perdida en contextos de incertidumbre.

El riesgo financiero es comúnmente cuantificado por algunas medidas de variabilidad en los rendimientos del portafolio, en otras palabras el riesgo es la desviación que pudiera tener el resultado con respecto a lo esperado, como los rendimientos tiene variabilidad con el tiempo es necesario tener ventanas de tiempo que permitan tener un punto de referencia con respecto al valor esperado y al comportamiento de los rendimientos sobre el intervalo de tiempo de interés (Rasmussen, 2003).

En la selección de inversiones se incurre en dos tipos de riesgo, el *sistemático* y *especifico.* El riesgo sistemático es también llamado riesgo de mercado o riesgo no diversificable. No depende de la empresa sino de variables muy distintas, como el PIB, inflación, etc. (Xavier Brun, 2008). Debido al riesgo sistemático es que se pueden obtener retornos de la inversión anormales ya sea a favor o en contra, independientes a los movimientos del mercado al que pertenece el activo financiero.

Por otro lado el riesgo específico es el riesgo diversificable o riesgo único. Este riesgo es propio del activo, por lo que podrá ser reducido o eliminado mediante diversificación.

Al igual que la varianza (Ecuación 7) mide la variabilidad de los datos con respecto a la media de forma cuadrática tomando en cuenta un solo activo, para saber cuánto varían dos conjuntos de datos se toma en cuenta la covarianza de ambos ejemplificada en la Ecuación 10.

$$Cov(R_A, R_B) = \sigma_{A,B} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(r_{A,i} - \overline{R}_A\right)\left(r_{B,i} - \overline{R}_B\right) \tag{10}$$

Ecuación 10. Cálculo de la covarianza.

donde $r_{A,i}$ es el rendimiento del activo A al tiempo i, y $\overline{R}_A$ la media del rendimiento en N periodos, para el activo B se utiliza la misma simbología sólo se cambia el subíndice A por B.

La Ecuación 10 muestra que tan cerca o lejos están los rendimientos de cada activo simultáneamente con respecto de su media, si ambos activos son iguales entonces la covarianza se convierte en la varianza (Ecuación 7), sin embargo al calcular la covarianza los resultados pueden tener diferentes magnitudes y es difícil identificar cual es el grado de relación que guardan ambos conjuntos de datos.

El coeficiente de correlación a diferencia de la covarianza permite calcular la relación que existe entre dos conjuntos de datos en un intervalo de $[-1,1]$, considerando a los extremos la relación máxima en la que se puede incurrir ya sea positiva o negativa y tomando el cero como indicador de que no existe alguna relación.

$$Corr(R_A, R_B) = \rho_{A,B} = \frac{\sigma_{A,B}}{\sigma_A \sigma_B} \tag{11}$$

Ecuación 11. Cálculo del coeficiente de correlación.

Los niveles de diversificación dependen de que tan correlacionados están los activos, una correlación de $\rho = -1$ significa que la diversificación tendrá efectos máximos y para $\rho = 1$ se tienen mínimas consecuencias, los valores de ρ entre -1 y 1 ofrecen diferentes grados de diversificación dependiendo de su valor.

Para empezar a formar un portafolio de inversión hay que medir el riesgo del activo con respecto al mercado (Ecuación 12), el cual se calcula dividiendo la varianza entre el activo y el mercado con respecto a la variabilidad del mercado, y se calcula con la siguiente ecuación.

$$\beta_A = \frac{\sigma_{A,M}}{\sigma_M^2} \tag{12}$$

Ecuación 12. Riesgo del activo A con respecto al mercado M.

Donde $\sigma_{A,M}$ es la covarianza del activo A y el mercado al que pertenece denotado por M, y σ_M^2 es la varianza del mercado (Rasmussen, 2003).

Por ejemplo, retomando el caso de Chedraui y el IPC MXX tenemos que $\sigma_{Chedraui,IPCMXX} = 8.2068$ y $\sigma_{IPCMXX}^2 = 10.6791$, entonces $\beta_{Chedraui} = 0.7685$ el mismo valor de la pendiente de la recta de regresión en la Figura 6, lo que significa que cuando el mercado IPC MXX aumente 10%, Chedraui tendrá un aumento aproximado del 7.68%.

Entonces si el retorno de inversión del portafolio está correlacionado existe la posibilidad de reducir el riesgo total del portafolio, seleccionando correctamente los activos y los pesos de inversión o porcentajes a invertir en cada uno de ellos. En la Figura 7 se muestra el comportamiento de dos activos denominados A y B, en los cuales se está invirtiendo 50% y 50% respectivamente del total del capital, se puede observar que el rendimiento del portafolio en gris se comporta exactamente igual a los activos que lo conforman, esto se debe a que existe una correlación igual a uno entre ambos activos, si por ejemplo el activo A tiene perdidas entonces el mismo comportamiento se apreciara en el activo B, aunque el coeficiente de correlación no indica en que magnitudes se modificaran los activos si nos indica la respuesta de uno con respecto al otro y por ende en un caso de pérdida el portafolio completo tendrá el mismo resultado.

Si tuviéramos la oportunidad de cambiar algún activo ya sea A o B de tal modo que reduzca la correlación que existe entre ambos, si uno tiene un comportamiento a la baja por ejemplo A, posiblemente B tenga un comportamiento opuesto o si también se encuentra a la baja, la velocidad con que cae sea menor, lo que reduce la pérdida total del portafolio.

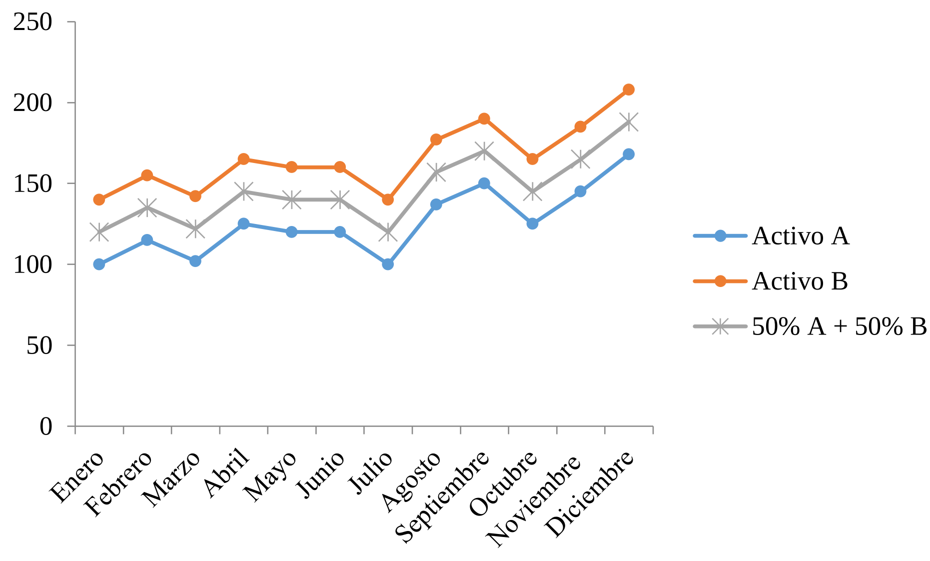


Figura 7 Comportamiento del rendimiento de dos activos A y B con coeficiente de correlación igual a uno.

En el caso de que la correlación sea cero por ejemplo para el activo A y B que se muestran en la Figura 8, se puede apreciar el comportamiento errático del retorno del portafolio (línea gris), el cual está compuesto por los movimientos sin relación entre A y B que influyen en la respuesta del portafolio de acuerdo a la magnitud de los movimientos conjuntos de A y B, sin embargo el portafolio en si tiene riesgo debido a su comportamiento errático de arriba hacia abajo. El riesgo del portafolio se disminuye cuando ambos activos tienen movimientos opuestos, es decir reducen la volatilidad del movimiento del retorno del portafolio, pero sin esta volatilidad no tendríamos utilidades significativas al final del periodo de inversión.

Cuando el coeficiente de correlación es igual a menos uno el movimiento del activo A es totalmente opuesto al de B, lo que nos da un portafolio de inversión sin riesgo alguno ya que no hay variabilidad en el retorno del portafolio, la línea gris se mantiene recta y horizontal (ver Figura 9).

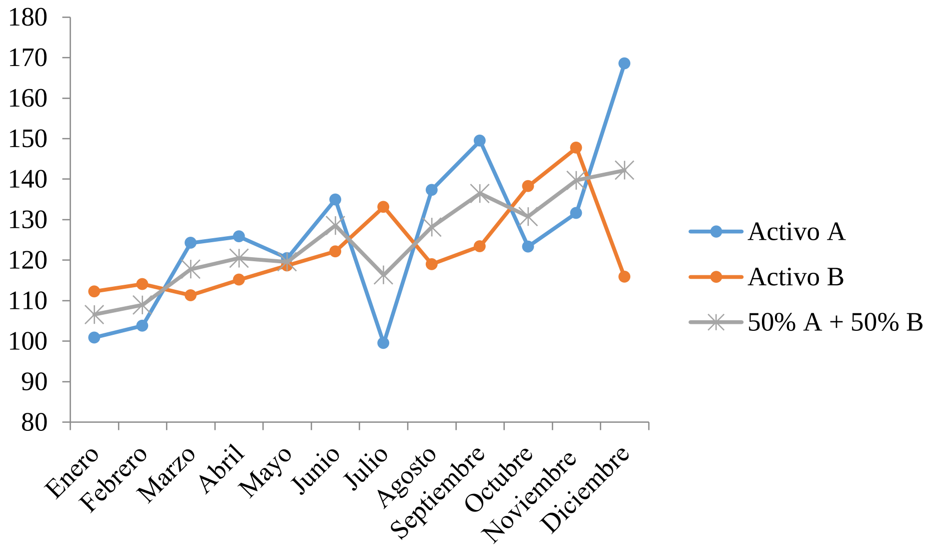


Figura 8 Comportamiento del rendimiento de dos activos A y B con coeficiente de correlación igual a cero.

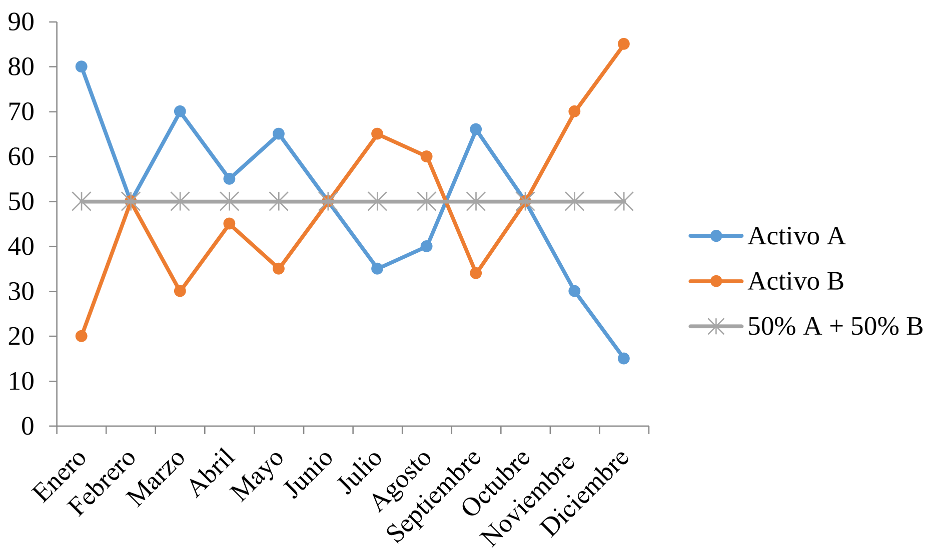


Figura 9 Comportamiento del rendimiento de dos activos A y B con coeficiente de correlación igual a menos uno.

5. Modelo de Markowitz para la administración de portafolios de inversión

Supongamos que tenemos una cantidad M de dinero el cual es repartido para invertir en n activos, donde $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son las proporciones a invertir en cada uno, es decir, Mw_i es la cantidad de dinero que se debe invertir en el $i-$ésimo activo, así

$$(w_1 + w_2 + \cdots + w_n)M = M$$

porque $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$.

Por ejemplo si se tienen tres activos Walmart, Elektra y FEMSA, y se toma la decisión de invertir el 30% en Walmart, 30% en Elektra y el 40% en FEMSA, entonces con 20,000 pesos disponibles las cantidades a invertir serían las que se muestran en la Tabla 4.

Proporciones		Capital	Dinero a invertir	
w1=	30%	$ 20,000.00	Walmart	$ 6,000.00
w2=	30%	$ 20,000.00	Elektra	$ 6,000.00
w3=	40%	$ 20,000.00	FEMSA	$ 8,000.00
			Total	$ 20,000.00

Tabla 4 Ejemplo de distribución del capital en tres diferentes activos, bajo porcentajes establecidos.

En 1952 Markowitz sugirió que la administración de un portafolio de inversión debe hacerse bajo dos criterios: el retorno esperado de la inversión y la varianza del retorno del portafolio, a la luz de este criterio; un portafolio es mejor que otro si tiene un retorno de la inversión más alto con una varianza baja.

Para los fines del presente trabajo se considera el modelo estático, aunque el modelo es inminentemente dinámico. El inversionista escoge un portafolio de inversión al tiempo t_0 y mantiene su decisión hasta el tiempo t_1, sin tomar en cuenta la información generada en ese lapso de tiempo, sin embargo entre más corto sea el tiempo entre t_0 y t_1 la administración del portafolio será más continua y la información generada en éste lapso de tiempo podrá ser integrada al modelo oportunamente, aproximándose al comportamiento del modelo dinámico.

Como ya se mencionó anteriormente, el problema puede dividirse en dos:

1. De todos los posibles portafolios con una cota inferior en el retorno de la inversión, se encuentra aquel con la mínima varianza (se maximiza la diversificación del portafolio).

2. De todos los posibles portafolios con una cota superior para la varianza (a un nivel de diversificación o riesgo establecido), se encuentra aquel con un retorno de la inversión máximo.

Si se conoce la aversión al riesgo del inversionista, ambos problemas antes planteados pueden unificarse en uno sólo, donde se busca los beneficios conjuntos de maximizar el retorno de la inversión y minimizar el riesgo.

El primer problema se plantea como un problema de optimización no lineal con restricciones lineales, y el segundo como un problema de optimización lineal con restricciones no lineales.

Consideremos que $R_1, R_2, \ldots R_n$ son las utilidades obtenidas al final de t_1, para cada uno de los activos que forman el portafolio de inversión, ya sea que se calculen con el método de indexado, enlace o el promedio de los rendimientos en cada subperiodo, R_i es una variable aleatoria con valores esperados

$$E(R_i) = \mu_i \tag{13}$$

Ecuación 13. Valor esperado de los rendimientos por activo financiero.

Para $i = 1,2,\ldots n$.

De acuerdo al cálculo que se hizo en la

Tabla **4** el retorno de la inversión o rendimientos del portafolio se calcula de la siguiente manera

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i \tag{14}$$

Ecuación 14. Rendimiento del portafolio de inversión.

Donde el retorno de inversión de cada activo es simplemente multiplicado por la proporción a invertir en él y sumando todas las partes que conforman el portafolio, para así obtener el rendimiento total del portafolio. De la ecuación anterior se deduce que el valor esperado del rendimiento del portafolio a lo largo del tiempo de inversión es

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i \tag{15}$$

Ecuación 15. Valor esperado del rendimiento del portafolio de inversión.

Cada activo que conforma el portafolio de inversión tiene características propias las cuales pueden diferir significativamente, la naturaleza de cada activo le da sentido a la palabra diversificación del portafolio, por lo que es necesario considerar la variación de los rendimientos de los activos con respecto al tiempo. Al considerar la Ecuación 14, Ecuación 7 y los diferentes resultados del rendimiento del portafolio a través del tiempo se tiene

$$Var(R_P) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(R_{P,i} - \overline{R}_P\right)^2$$

Al expandir la ecuación anterior, encontramos

$$\begin{aligned}
Var(R_P) &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(w_1 R_{1,i} + w_2 R_{2,i} + \cdots + w_n R_{n,i}\right) - \left(w_1 \overline{R}_{1,i} + w_2 \overline{R}_{2,i} + \cdots + w_n \overline{R}_{n,i}\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[w_1\left(R_{1,i} - \overline{R}_{1,i}\right) + w_2\left(R_{2,i} - \overline{R}_2\right) + \cdots + w_n\left(\overline{R}_{n,i} - \overline{R}_{n,i}\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\Big[w_1^2\left(R_{1,i} - \overline{R}_{1,i}\right)^2 + w_2^2\left(R_{2,i} - \overline{R}_2\right)^2 + \cdots + w_n^2\left(\overline{R}_{n,i} - \overline{R}_{n,i}\right)^2 \\
&\qquad + 2w_1 w_2\left(R_{1,i} - \overline{R}_{1,i}\right)\left(R_{2,i} - \overline{R}_2\right) + \cdots + 2w_1 w_n\left(R_{1,i} - \overline{R}_{1,i}\right)\left(R_{n,i} - \overline{R}_n\right) \\
&\qquad + 2w_2 w_3\left(R_{2,i} - \overline{R}_{2,i}\right)\left(R_{3,i} - \overline{R}_3\right) + \cdots + 2w_2 w_n\left(R_{2,i} - \overline{R}_{2,i}\right)\left(R_{n,i} - \overline{R}_n\right) \\
&\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\quad + 2w_{n-2} w_{n-1}\left(R_{n-2,i} - \overline{R}_{n-2,i}\right)\left(R_{n-1,i} - \overline{R}_{n-1}\right) + 2w_{n-2} w_n\left(R_{n-2,i} - \overline{R}_{n-2,i}\right)\left(R_{n,i} - \overline{R}_n\right) \\
&\qquad + 2w_{n-1} w_n\left(R_{n-1,i} - \overline{R}_{n-1,i}\right)\left(R_{n,i} - \overline{R}_n\right)\Big]
\end{aligned}$$

Y al introducir la sumatoria

$$\begin{aligned}
Var(R_P) = \sigma_P^2 = \; & w_1^2 Var(R_1) + w_2^2 Var(R_2) + \cdots + w_n^2 Var(R_n) \\
& + 2w_1 w_2 Cov(R_1, R_2) + \cdots + 2w_1 w_n Cov(R_1, R_n) \\
& + 2w_2 w_3 Cov(R_2, R_3) + \cdots + 2w_2 w_n Cov(R_2, R_n) \\
& \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& + 2w_{n-2} w_{n-1} Cov(R_{n-2}, R_{n-1}) + 2w_{n-2} w_n Cov(R_{n-2}, R_n) \\
& + 2w_{n-1} w_n Cov(R_{n-1}, R_n)
\end{aligned} \qquad (16)$$

Ecuación 16. Variación del portafolio de inversión.

De la Ecuación 16 podemos obtener la volatilidad del portafolio de inversión, al tomar la raíz cuadrada de la varianza del portafolio de inversión (Ecuación 17).

$$StDev(R_P) = \sqrt{Var(R_P)} \qquad (17)$$

Ecuación 17. Volatilidad del portafolio de inversión.

Independientemente de que la desviación estándar del portafolio mida la volatilidad del portafolio (el riesgo), se observa de la Ecuación 16, que las varianzas de los activos financieros son positivas mientras que las covarianzas entre ellos pueden ser cero, positivas o negativas, entonces para reducir el riesgo del portafolio es necesario que las covarianzas sean lo más pequeñas posibles o negativas, así como una combinación de los diferentes valores del producto de los pesos de inversión. Por lo anterior se define el riesgo del portafolio de inversión como:

$$Var(P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov(R_i, R_j) \qquad (18)$$

Ecuación 18. Riesgo del portafolio de inversión.

Y la volatilidad o desviación estándar del portafolio de inversión es la raíz cuadrada del riesgo (Ecuación 19).

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov(R_i, R_j)} \qquad (19)$$

Ecuación 19. Desviación estándar (volatilidad) del portafolio de inversión.

La ecuación del riesgo (Ecuación 18) se puede escribir de manera matricial como se muestra en la Ecuación 20,

$$\begin{aligned} Var(P) &= \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} Var(R_1) & \cdots & Cov(R_i, R_1) & \cdots & Cov(R_n, R_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ Cov(R_1, R_i) & \cdots & Var(R_i) & \cdots & Cov(R_n, R_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ Cov(R_1, R_n) & \cdots & Cov(R_i, R_n) & \cdots & Var(R_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \\ &= \vec{w}^T \cdot \Sigma \cdot \vec{w} \end{aligned} \qquad (20)$$

Ecuación 20. Forma matricial del riesgo del portafolio de inversión.

Donde $\vec{w}^T$ representa el vector transpuesto de $\vec{w}$ y Σ es la matriz de covarianzas.

Al retomar el primer problema planeado: De todos los posibles portafolios con una cota inferior en el retorno de la inversión (R_*), se encuentra aquel con la mínima varianza

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad \vec{w}^T \cdot \Sigma \cdot \vec{w} \\ &\text{Sujeto a:} \\ &\qquad \vec{w} \cdot \vec{\mu} \geq R_* \\ &\qquad \vec{w} \cdot \vec{e} = 1 \\ &\qquad \vec{w} \geq 0 \end{aligned} \qquad (21)$$

Ecuación 21. Primer problema de optimización del portafolio de inversión.

Donde $\vec{\mu}$ es el vector de valores esperados de los rendimientos de cada activo y $\vec{e}$ es un vector formado por unos.

En el caso del segundo problema: De todos los posibles portafolios con una cota superior para la varianza, se encuentra aquel con un retorno de la inversión máximo

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad \vec{w} \cdot \vec{\mu} \\
&\text{Sujeto a :} \\
&\qquad \vec{w}^T \cdot \Sigma \cdot \vec{w} \leq R^* \\
&\qquad \vec{w} \cdot \vec{e} = 1 \\
&\qquad \vec{w} \geq 0
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Ecuación 22. Segundo problema de optimización del portafolio de inversión.

Independientemente de los dos problemas antes propuestos, existe una manera de formular un problema de optimización el cual es equivalente a los problemas antes planteados, al introducir el parámetro de aversión al riesgo λ que en términos estrictos es un multiplicador de Lagrange que integra la restricción del riesgo a la función objetivo del problema de optimización. Así el problema planteado por la Ecuación 22 se puede escribir como:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad \vec{w} \cdot \vec{\mu} - \lambda \vec{w}^T \cdot \Sigma \cdot \vec{w} \\
&\text{Sujeto a :} \\
&\qquad \vec{w} \cdot \vec{e} = 1 \\
&\qquad \vec{w} \geq 0.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Ecuación 23. Problema de optimización del portafolio con aversión al riesgo.

Si $\lambda = 0$, entonces se está obteniendo el máximo rendimiento que el portafolio puede dar y por el contrario si el parámetro de aversión al riesgo es grande, se estará minimizando el riesgo del portafolio, en conclusión la Ecuación 23 representa un problema de optimización donde al variar el valor del parámetro de aversión al riesgo λ, se obtiene los portafolios eficientes de varianza media (Svetlozar T. Rachev, 2008).

Con lo anterior, el problema de un inversor es escoger la proporción de capital w_i que invertirá una vez que ha escogido n activos de inversión, con dos objetivos principales el de maximizar sus ganancias con el mínimo riesgo posible, ambos objetivos como ya se ha visto están en conflicto y es por eso que se utiliza el coeficiente de aversión al riesgo λ, para medir que tanto riesgo está dispuesto a aceptar el inversionista.

5.1 Recopilación de datos

La recopilación de los 165 valores de precios de acción de cada una de las ocho empresas objeto de estudio se hizo utilizando la página de internet yahoo/finance, donde se pueden consultar por periodos diarios, semanales y mensuales los precios promedio, de cierre, apertura y ajustados de los diferentes componentes de la bolsa mexicana de valores.

Del valor de la acción y reparto de utilidades se calculan los rendimientos en periodos mensuales, para así obtener el valor esperado (Ecuación 13) y la matriz de covarianzas Σ (Ecuación 20) que se utilizan en el modelo de Markowitz.

Al considerar los valores de cierre de las acciones de cada una de las empresas y sus rendimientos se calculan los rendimientos en periodos mensuales usando la Ecuación 1, los cuales son utilizados para calcular la matriz de covarianzas (Tabla 6) y el valor promedio de la acción (Tabla 5).

Valor esperado de los rendimientos Enero 2000 a Septiembre 2013							
Bimbo	**Grupo México**	**Banorte**	**Kimberly**	**Elektra**	**Cemex**	**Mexichem**	**Alsea**
0.0328330	0.0343678	0.0393543	0.0207683	0.0224762	0.0088624	0.0527024	0.0282604

Tabla 5 Valor esperado de los rendimientos, utilizados para calcular el rendimiento del portafolio de inversión.

	Bimbo	***Grupo México***	***Banorte***	***Kimberly***	***Elektra***	***Cemex***	***Mexichem***	***Alsea***
Bimbo	0.07304	0.00318	-0.00030	0.00076	0.00230	0.00260	0.00072	0.00064
Grupo México	0.00318	0.05525	0.00725	0.00160	0.00330	0.00299	0.00299	0.00192
Banorte	-0.00030	0.00725	0.06450	0.00151	0.00290	0.00744	0.00659	0.00684
Kimberly	0.00076	0.00160	0.00151	0.02505	-0.00241	0.00139	-0.00048	0.00118
Elektra	0.00230	0.00330	0.00290	-0.00241	0.02631	0.00228	0.00366	0.00074
Cemex	0.00260	0.00299	0.00744	0.00139	0.00228	0.01244	0.00494	0.00571
Mexichem	0.00072	0.00299	0.00659	-0.00048	0.00366	0.00494	0.07484	0.01164
Alsea	0.00064	0.00192	0.00684	0.00118	0.00074	0.00571	0.01164	0.02077

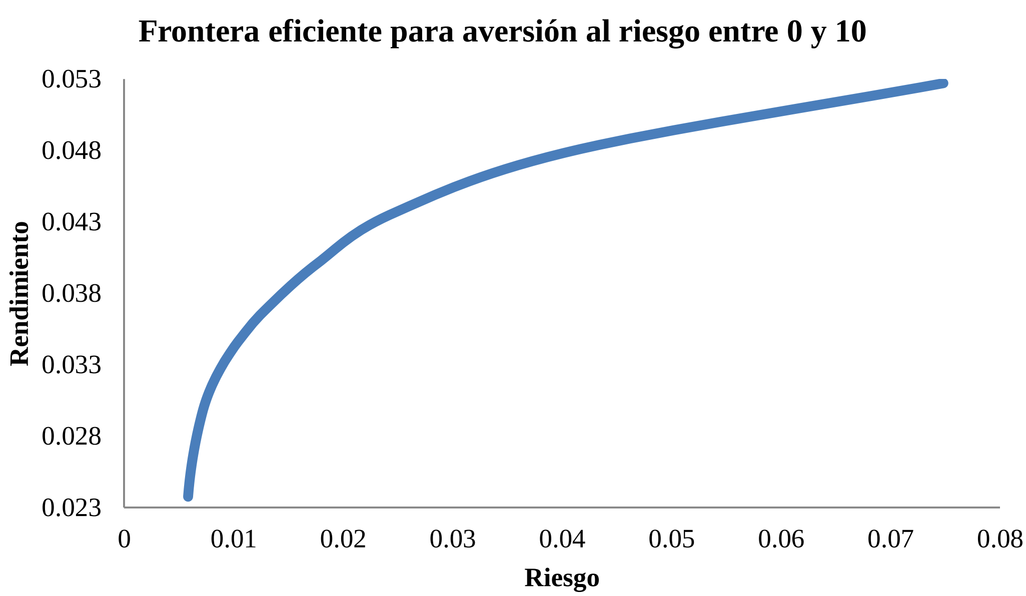
Tabla 6 Matriz de covarianzas utilizado para calcular el riesgo del portafolio de inversión.

6. Frontera eficiente y diversificación del riesgo

Una frontera eficiente se construye al tomar en cuenta la Ecuación 21, donde al tomar diversos valores para la cota inferior de rendimientos (R_*) y resolver los problemas que minimizan el riesgo, se puede hacer una gráfica entre los rendimientos obtenidos contra el riesgo mínimo conocida como frontera eficiente. De igual manera al considerar la Ecuación 22, con diferentes cotas superior para el riesgo (R_*) y al resolver los problemas que maximizan el rendimiento, la gráfica entre rendimientos y riesgo es también una frontera eficiente.

Sin embargo al tomar el problema de minimización de riesgo o el de maximización de rendimiento para generar la frontera eficiente, puede haber diferencias entre ambas fronteras eficientes obtenidas por los problemas anteriores (Svetlozar T. Rachev, 2008). Para reducir al mínimo la varianza entre las fronteras eficientes se utiliza la Ecuación 23, donde al tomar diferentes valores del parámetro de aversión al riesgo se hace una gráfica de rendimiento contra riesgo conocida como frontera eficiente de varianza media, lo cual da una frontera eficiente más confiable.

Si consideramos el rendimiento de ocho empresas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores como son: Alsea, Mexichem, Cemex, Elektra, Kimberly, Banorte, Grupo México y Bimbo, en un periodo de enero del 2003 a septiembre del 2013 con subperiodos mensuales, podemos construir la frontera eficiente de varianza media que se muestra en la Figura 10.



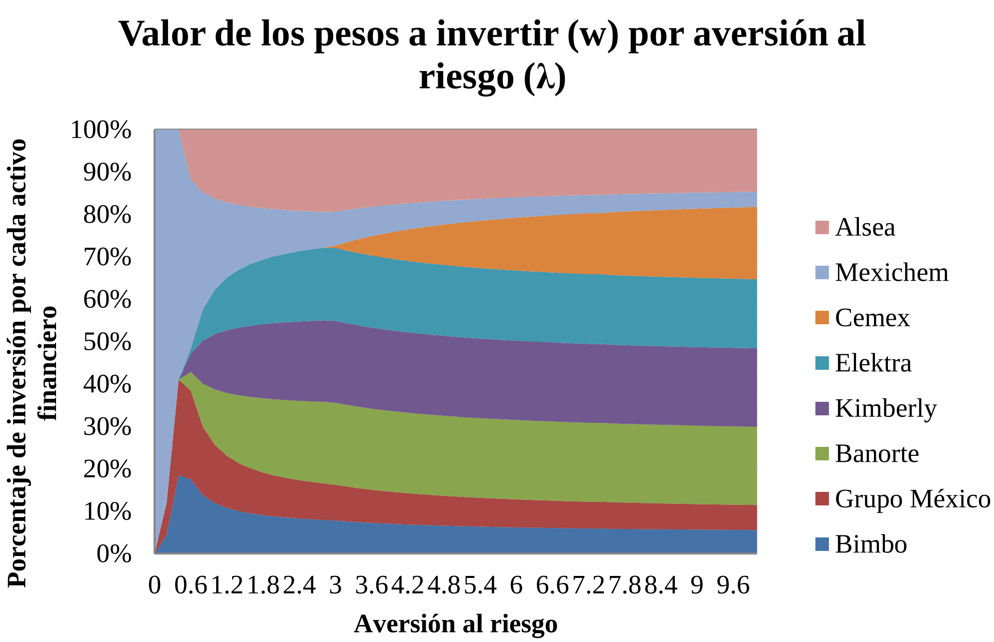
Elaboración propia.

Figura 10 Frontera eficiente de varianza media.

Se puede observar en la Figura 10 que conforme el riesgo aumenta los rendimientos obtenidos en el portafolio de inversión también, sin embargo la frontera eficiente nos permite calcular aproximadamente que a un riesgo de 0.04 se puede tener un rendimiento máximo esperado de 0.048, es decir existen otros valores de los pesos de inversión que bajo el mismo riesgo se obtiene un rendimiento más bajo. Entonces para generar la mayor cantidad de rendimiento a diferentes valores de riesgo, es necesario escoger pesos de inversión adecuados que permiten al rendimiento del portafolio moverse sobre la frontera eficiente.

Como se mencionó la diversificación del portafolio conlleva a un menor riesgo y conforme a la Ecuación 23, cuanto más grande es el valor de la aversión al riesgo el riesgo es más pequeño y de manera inversa cuando la aversión al riesgo es pequeño el riesgo es alto, ya que la parte donde participa la aversión al riesgo y el riesgo mediante una multiplicación de los mismos tiene signo negativo, entonces como el problema es de maximización, entre más pequeño sea el producto de ambos su contribución será mínima, causando el efecto antes descrito.

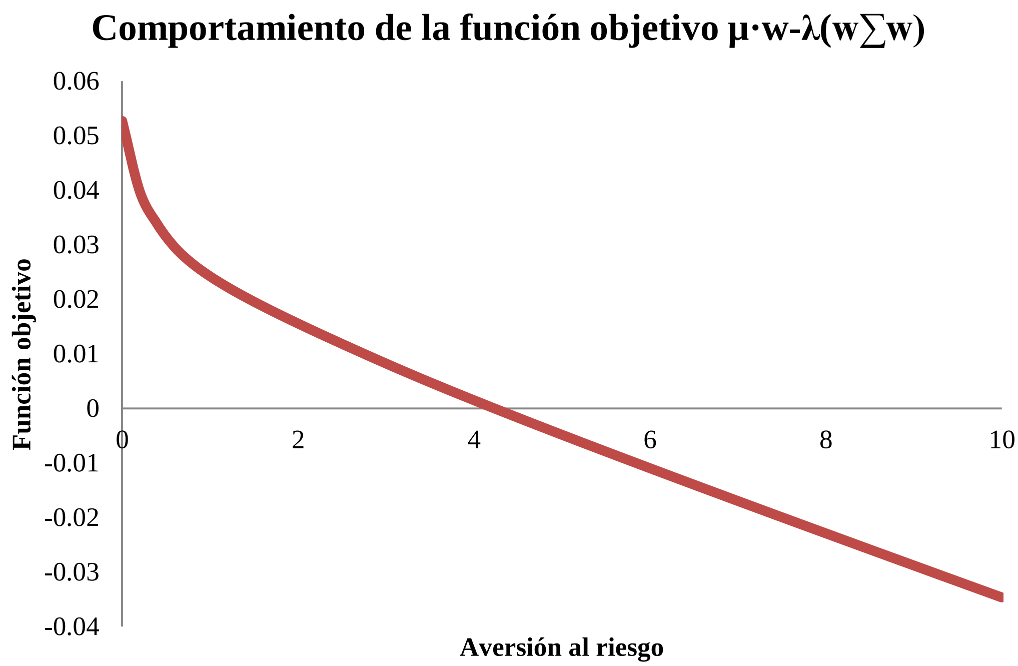
En la Figura 11 se muestra el comportamiento de los pesos de inversión del portafolio de inversión a diferentes valores de aversión al riesgo, donde se observa que aun mayor riesgo (aversión al riesgo pequeño) la diversificación del portafolio es casi nula ya que casi toda la inversión se debe realizar en Mexichem, y conforme la aversión al riesgo se incrementa (menor riesgo) el portafolio se va diversificando cada vez más, de tal modo que al tomar a $\lambda = 10$ el porcentaje de inversión en Mexichem es el más bajo de todo el portafolio.



Elaboración propia.

Figura 11 Comportamiento de los pesos de inversión w, para diferentes valores de aversión al riesgo.

Como ya se mencionó, al disminuir el riesgo los rendimientos son bajos, en la Figura 12 se observa el comportamiento de la función objetivo de la Ecuación 23, donde se aprecia cómo la función tiene un comportamiento a la baja conforme aumenta la aversión al riesgo lo cual confirma que el rendimiento se mueve de acuerdo al riesgo.



Elaboración propia.

Figura 12 Comportamiento de la función objetivo de la Ecuación 23 con aversión al riesgo entre cero y diez.

7. Optimización para los portafolios de inversión

El problema de optimización para portafolios de inversión es no lineal y entre mayor diversificación se tenga se crea una cartera de inversión grande, donde es necesario estimar el vector $\vec{w}$ de los porcentajes de inversión, para resolver este problema existen varios métodos exactos, los cuales están sujetos a ciertas condiciones como la convexidad de la función objetivo, su continuidad y diferenciabilidad (Jorge Nocedal, 1999), o en algunos casos se necesitan imponer restricciones extras y/o un cierto conocimiento del comportamiento de los instrumentos de optimización (Prigent, 2007).

Sin pérdida de generalidad se propone el problema de minimización

$$\text{Minimizar } F(y)$$

Donde $F(y)$ es una función no lineal, $y = (w_1, w_2, ..., w_n, \lambda)$ y λ es el multiplicador de Lagrange asociado a la única restricción que se tiene, imponiendo espacios de búsqueda positivos para todas las variables.

En este sentido se presenta el uso de Solver de Excel para resolver los problemas antes planteados por el método de Markowitz y el algoritmo de Recocido Simulado (SA) de manera general (A. Corona, 1987) y el llamado Recocido Simulado con Restricciones (CSA) (Benjamin W. Wah, 2006 y Wang, 2001), para la solución de la Ecuación 21 y Ecuación 22, los cuales son problemas de optimización no lineal con restricciones.

7.1 Uso de Solver de Excel

Solver de Excel es una herramienta incluida en el paquete office de uso común que viene instalado en todas las computadoras con Windows. Para la solución del problema primero es necesario contar con los rendimientos en un determinado periodo de tiempo y en subperiodos, en este caso los periodos son mensuales.

Rendimientos Enero 2000 a Septiembre 2013							
Bimbo	Grupo México	Banorte	Kimberly	Elektra	Cemex	Mexichem	Alsea
0.0782	0.0469	-0.0066	0.0045	0.0228	-0.0165	0.1241	0.0402
-0.1007	-0.0259	0.0288	-0.0986	-0.0573	0.0306	-0.1099	-0.0318
0.1006	0.0499	0.0601	0.0110	0.0791	0.0698	0.1093	0.1316
0.0375	-0.1142	-0.0615	-0.0417	-0.0902	-0.0784	-0.0812	-0.1320
-0.0425	-0.0145	-0.1071	0.0373	-0.0990	0.0906	-0.0506	-0.0294
0.0047	-0.1289	-0.0703	-0.0153	0.0798	-0.0892	-0.0640	0.0462
0.1390	-0.0058	0.0405	0.0658	-0.0811	0.0955	0.0353	0.1098
0.0544	0.0646	0.0818	0.1366	-0.1069	-0.0108	-0.1103	0.0845
-0.0176	0.0135	0.0528	0.0798	0.0776	0.0921	-0.0010	0.1435

Tabla 7 Muestra de solo nueve datos mensuales, de un total de 164 meses.

Para calcular el valor esperado de los rendimientos se utiliza la función =PROMEDIO() al tomar como argumento la columna de los rendimientos de la empresa, una por una para al final obtener la Tabla 5. En el caso de la matriz de covarianzas es necesario dar de alta la herramienta de análisis de datos, que aparece en el menú principal en la pestaña de datos, si no aparece es necesario seguir la siguiente secuencia en Excel:

- Archivo
- Opciones
- Complementos
- Complementos de Excel
- Ir
- Herramientas de análisis

Una secuencia similar se utiliza para dar de alta Solver solo que al final en lugar de seleccionar herramientas de análisis se selecciona Solver, ambas herramientas se verán en la pestaña de datos en la parte superior derecha de la cinta de funciones. Al seleccionar análisis de datos se considera la opción de covarianzas para calcular de manera fácil la matriz de covarianzas mostrada en la Tabla 6.

Para una rápida inserción de datos se construye la siguiente tabla, donde los únicos valores que cambian son los que están en la parte de en medio en decimales, el rendimiento y el riesgo, de hecho pueden tomar cualquier valor ya que Solver lo que hará es encontrar aquellos que resuelven el problema de optimización, el último valor que está en la parte media es la suma de todos los valores propuestos para los pesos.

	Cota inferior	Valor	Cota superior
w1	0	0.060525296	1
w2	0	0.06482468	1
w3	0	0.026722755	1
w4	0	0.218028487	1
w5	0	0.191850326	1
w6	0	0.238687236	1
w7	0	0.032438736	1
w8	0	0.164924747	1
	Suma w'is	0.998002262	1

Rendimiento	0.022592688
Riesgo	0.005731094

Tabla 8 Tabla de datos para el uso de Solver.

Al igual como se utilizó la función análisis de datos se utiliza Solver y aparece una ventana de dialogo, lo primero es seleccionar la casilla objetivo que dependiendo del problema puede ser el rendimiento para maximizar o el riesgo para minimizar, cambiando los valores de los pesos w seleccionando la columna de valor, y por último las restricciones se van añadiendo una por una, la primera seria que se cumpla con la cota inferior por lo que en el cuadro de dialogo donde se proponen las restricciones, se seleccionan los valores de la columna de cota inferior denotada por ceros, el símbolo de <= y después los valores propuestos para los pesos w que en la Tabla 8 se llama valores.

De la misma forma se introduce una nueva restricción sólo que ahora se considera que los valores propuestos de w son menores o iguales a la cota superior denotada por unos, la última restricción sería que la suma de los pesos w debe ser igual a uno.

El riesgo se puede calcular utilizando la multiplicación de matrices en Excel mediante la función =MMULT(Matriz1,Matriz2), si las dimensiones de los vectores o matrices no coinciden de acuerdo a la estructura que se maneja en la diferentes tablas se puede utilizar la función =TRANPONER(Matriz), para transponer una matriz y hacer que las dimensiones concuerden a la hora de multiplicar las matrices. También es útil la función =SUMAPRODUCTO(Matriz1,Matriz2) para calcular el rendimiento esperado del portafolio.

Para la Ecuación 23 que considera la variable aversión al riesgo, la cual comúnmente se calcula dependiendo de la persona mediante un test, es necesario incluir en la Tabla 8 el valor de la aversión al riesgo como una variable fija y la nueva casilla que se maximiza es donde se realiza la operación de la función objetivo de la Ecuación 23.

Aversión Riesgo	0	1	2	3	4	5	6	7	8
w1	0	0.1183	0.0967	0.0892	0.0808	0.0758	0.0725	0.0701	0.0683
w2	0	0.1360	0.1066	0.0965	0.0869	0.0813	0.0774	0.0746	0.0726
w3	0	0.1385	0.0931	0.0773	0.0623	0.0532	0.0473	0.0431	0.0399
w4	0	0.1292	0.1989	0.2211	0.2202	0.2196	0.2193	0.2190	0.2188
w5	0	0.1038	0.1746	0.1970	0.1955	0.1946	0.1940	0.1936	0.1933
w6	0	0	0	0.0058	0.0758	0.1177	0.1457	0.1657	0.1807
w7	1	0.2133	0.1223	0.0918	0.0742	0.0636	0.0566	0.0515	0.0478
w8	0	0.1609	0.2078	0.2214	0.2042	0.1941	0.1871	0.1823	0.1786

Tabla 9 Valores de pesos de inversión para diferentes valores de aversión al riesgo.

La Tabla 9 muestra los resultados de utilizar Solver para resolver el problema de aversión al riesgo (Ecuación 23), con diferentes valores de aversión al riesgo, una tabla más completa se utiliza para realizar gráficas como la Figura 10 y Figura 12.

7.2 Recocido Simulado

El algoritmo SA surge de la analogía del proceso industrial que lleva este nombre y es utilizado para mejorar las cualidades de un material. El proceso consiste en derretir el material (calentarlo a muy alta temperatura) para que los átomos adquieran una distribución azarosa donde la energía del sistema es grande, luego se hace descender la temperatura muy lentamente por etapas dejando que en cada una de esas etapas los átomos queden en equilibrio y al final tener una estructura cristalina altamente regular, donde la energía es mínima.

De manera general el algoritmo está compuesto por tres loops y cinco partes importantes como se muestra en la Figura 4.1. Sin embargo existen diferentes variaciones de este algoritmo y diferentes maneras de definir las funciones (g,h) que aparecen en el diagrama de flujo.

La función $g(y_k, T)$ es una función que nos permite generar un nuevo parámetro en el dominio de búsqueda, donde para temperaturas altas el radio de búsqueda es grande y conforme la temperatura disminuye gradualmente el radio de búsqueda decrece ya que en esta etapa se espera estar cerca del valor óptimo.

La función $h(T_{i-1}, N)$ nos ayuda a reducir la temperatura de forma gradual, en el caso de SA la función h es lineal (Kirkpatrick S., 1983) y en otros casos como en el SA rápido (L., 1989) se considera que h se comporta de forma exponencial.

El algoritmo está basado en etapas de enfriamiento del sistema donde se espera que un decremento de energía $\Delta E = F' - F$ sea negativo, es decir, que la nueva solución F' sea más pequeña que la anterior F ya que estamos minimizando, en este caso por analogía con el fenómeno físico, la energía está definida como el funcional $F(y)$. Si la energía disminuye $\Delta E \leq 0$ el nuevo modelo se acepta, en otro caso se pasa al criterio de metrópolis para aceptar o generar un nuevo modelo de la $k-\text{ésima}$ variable y_k (loop 1). Una vez que se acepta un modelo, se perturba la siguiente variable y así sucesivamente se repite el proceso hasta perturbar todo el vector y (loop 2). Por último ya que todas las variables han sido perturbadas y se ha generado un nuevo vector de variables y, el sistema es enfriado (la temperatura disminuye) y este modelo es reintroducido al algoritmo hasta que se cumpla algún criterio de paro, para terminar el proceso (loop 3).

Para el caso de maximización de funciones lo que comúnmente se hace es multiplicar la función objetivo por menos uno y de esta forma transformar un problema de maximización a uno de minimización.

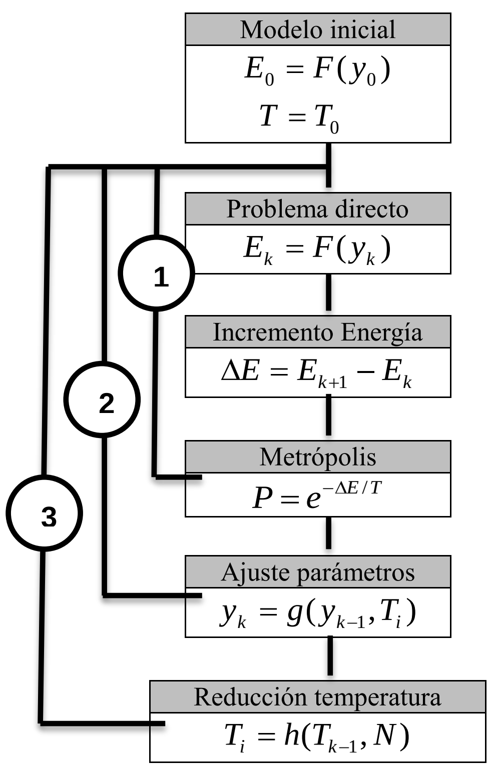


Figura 13 Diagrama de flujo del algoritmo de Recocido Simulado. Elaboración propia.

El proceso completo del algoritmo de SA sería como sigue:

Procedimiento de SA
Inicializa un punto inicial $y = y_0$.
Inicializa una temperatura inicial $T = T_0$ y un rango de enfriamiento $0 < \alpha < 1$.
Escoger N_T (número de evaluaciones antes del cambio de temperatura)
while la condición de paro no es satisfecha **do**
    for $k = 1$ **to** N_T **do**
        generar un nuevo punto y' usando $g(y_k, T)$
        aceptar y' con probabilidad $A_T(y, y')$
    end for
    reducir la temperatura $T = \alpha \times T$
end while
fin procedimiento

La probabilidad de aceptación se define como:

$$A_T(y, y') = \exp\left(- \frac{(F(y') - F(y))^+}{T} \right) \tag{24}$$

Ecuación 24. Probabilidad de aceptación.

Donde $a^+ = a$ si $a > 0$, y $a^+ = 0$ en otro caso.

Para generar un nuevo punto se utiliza $g(y_k, T)$ de la siguiente manera,

$$y' = y + \theta_k \cdot e_k \tag{25}$$

Ecuación 25. Perturbación de las variables en SA.

Donde e_k es el vector unitario con entrada uno en la $k-$ésima posición y cero en sus demás componentes, en este caso θ_k es generado uniformemente en $[-\sigma_k, \sigma_k]$ conforme a la función (A. Corona, 1987)

$$\sigma_k = \begin{cases} \sigma_k [1 + \beta_0 (P_i - P_u)/(1 - P_u)] & \text{si } P_i > P_u \\ \sigma_k / [1 + \beta_1 (P_v - P_i)/P_v] & \text{si } P_i < P_v \end{cases} \tag{26}$$

Ecuación 26. Ajuste de la cotas para la perturbación de variables, de manera dinámica.

Con los siguientes valores $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 2$, $P_u = 0.6$ y $P_v = 0.4$.

En este caso P_i es la razón entre los puntos rechazados y los aceptados, es por eso que si $P_i > P_u$ los puntos generados están cerca de y, pero si $P_i > P_v$ los puntos generados son rechazados frecuentemente y σ_k expande el espacio de búsqueda.

7.3 Recocido Simulado con Restricciones

El método de recocido simulado ha sido extendido no solo para optimizar funciones solamente, si no también se puede incluir la optimización no lineal con restricciones no lineales. De este modo aunque se tengan restricciones estas pueden ser incluidas en la función objetivo y hablar de la optimización de una sola función sin restricciones.

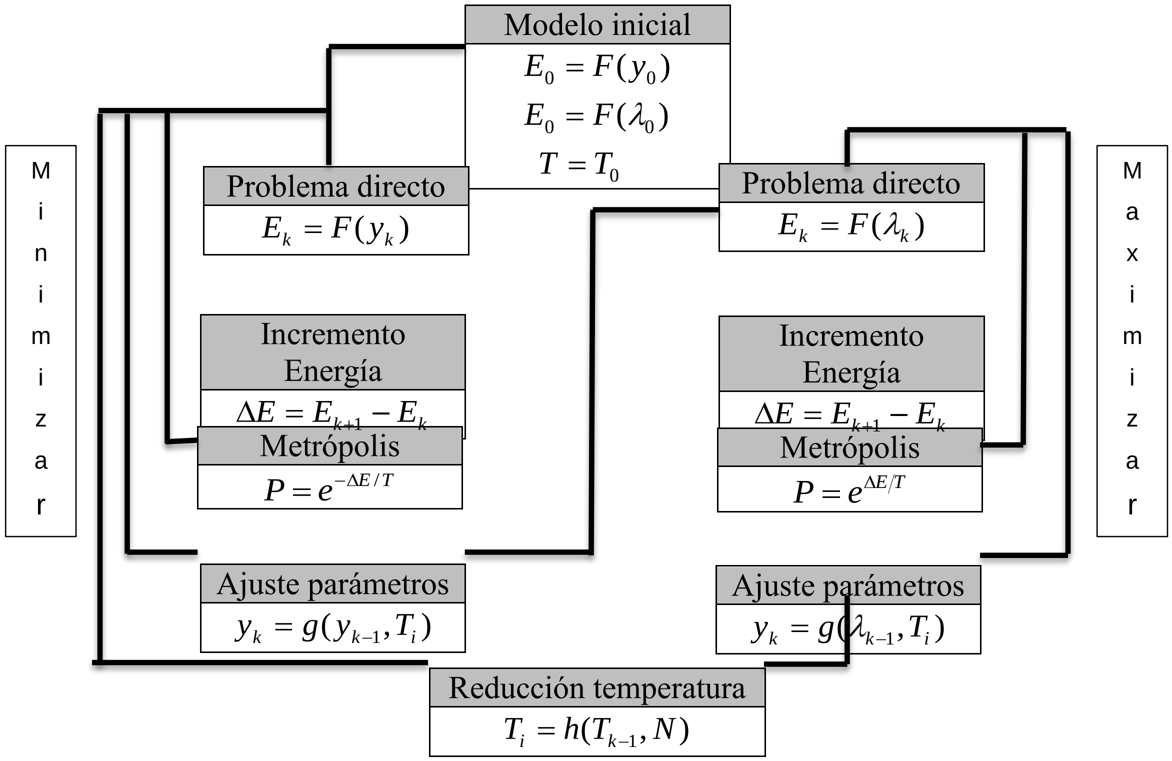
Para resolver el problema de optimización con restricciones utilizaremos recocido simulado con restricciones CSA, del cual se muestra su diagrama de flujo en la Figura 4.2.

De manera general el algoritmo está compuesto por dos procesos de optimización, en el primero se minimiza la función objetivo en función del vector de variables $\vec{w}$ y en el segundo se maximiza la función objetivo con respecto a la aversión al riesgo y los multiplicadores de Lagrange λ, se hace una diferencia entre ambos procesos debido a que estos se perturban una vez por diez que se perturba $\vec{w}$.

Una vez que todos los parámetros y multiplicadores de Lagrange han sido perturbados y se ha generado un nuevo vector solución, el sistema es enfriado (la temperatura disminuye) y este modelo es re introducido al algoritmo hasta que se cumpla algún criterio para terminar el proceso.

El proceso completo del algoritmo de CSA sería como sigue:

Procedimiento de CSA
    Inicializa un punto inicial $y = (y_0, \lambda_0)$.
    Inicializa una temperatura inicial $T = T_0$ y un rango de enfriamiento $0 < \alpha < 1$.
    Escoger N_T (número de evaluaciones antes del cambio de temperatura)
    while la condición de paro no es satisfecha **do**
        for $k = 1$ **to** N_T **do**
            por diez veces generar un nuevo punto y' usando $g(y_k, T)$
            aceptar y' con probabilidad $A_T(y, y')$
            generar un nuevo punto λ' usando $g(\lambda_k, T)$
            aceptar λ' con probabilidad $A_T(\lambda, \lambda')$
        end for
        reducir la temperatura $T = \alpha \times T$
    end while
fin procedimiento



Elaboración Propia.

Figura 3 Diagrama de flujo del algoritmo de Recocido Simulado con Restricciones.

De manera general el algoritmo de CSA está dividido en dos procesos uno de minimización en las variables -que para el problema del portafolio de inversión son los pesos- el cual se realiza exactamente igual al algoritmo de SA sin ninguna modificación, sólo recordando que las variables son perturbadas diez veces más que los multiplicadores de Lagrange, en el segundo proceso cuando se modifican los parámetros el criterio de aceptación es similar, pero con signo opuesto del argumento del exponencial en la probabilidad de aceptación ya que se trata de maximización y la dinámica de las cotas para los parámetros cambia.

7.4 Estrategias para recocido simulado con restricciones

El algoritmo de CSA es similar al propuesto por Everett (A. Ravindran, 2006) el cual trabaja de forma intuitiva sobre los multiplicadores de Lagrange los cuales son inicializados en un punto donde no se violen las restricciones (generalmente en cero) y se van incrementando gradualmente, por cada incremento en los parámetros se debe resolver el problema no lineal, lo que supone un proceso sistemático pero más costoso. La diferencia entre el método de Everett y CSA radica en que cada cambio de parámetro sólo se hace la búsqueda de soluciones en las variables diez veces y se proponen diferentes estrategias que se explican más adelante.

7.4.1 Función objetivo

El problema de optimización no lineal general es:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } F(y) \\ &\text{Sujeto a :} \\ &q_j(y) \le 0 \quad \text{para } j = 1,2,\ldots,J \\ &h_k(y) = 0 \quad \text{para } k = 1,2,\ldots,K \\ &lb \le y \le ub \end{aligned} \tag{27}$$

Ecuación 27. Problema de optimización no lineal general.

La Ecuación 27 sin pérdida de generalidad puede convertirse a la Ecuación 28, si consideramos que las desigualdades del tipo $q(y) \le 0$ pueden transformarse a igualdades con la función $\max(0, q(y)) = 0$. Es decir, las desigualdades se añaden al conjunto de restricciones de igualdad.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } F(y) \\ &\text{Sujeto a :} \\ &h_k(y) = 0 \quad \text{para } k = 1,2,\ldots,K+J \\ &lb \le y \le ub \end{aligned} \tag{28}$$

Ecuación 28. Problema de optimización no lineal sin desigualdades.

La inclusión de las restricciones de igualdad de la Ecuación 28 se hará mediante los multiplicadores de Lagrange de tal forma que se utilizará la función objetivo propuesta en la Ecuación 29 (Wang, 2001)

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \quad L(y,\lambda) = F(y) + \lambda^T \cdot |h(x)| + \frac{1}{2}\|h(x)\|^2 \\ &lb \le y \le ub \\ &0 \le \lambda \le ubp \end{aligned} \tag{29}$$

Ecuación 29. Problema de optimización sin restricciones para CSA.

Donde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{K+J})$, $h(y) = (h_1, h_2, \ldots, h_{K+J})$, el símbolo $(\cdot)$ representa el producto escalar entre vectores, $|\ |$ es el valor absoluto de cada componente de $h(y)$ y $\|\ \|$ es la norma euclidiana de vectores. Entonces el problema tiene n variables y $K+J$ restricciones.

Las restricciones en forma de cota inferior y superior constante que se imponen a y y λ, no se consideran como verdaderas restricciones, ya que CSA en su implementación considera que las variables están acotadas en el espacio de búsqueda de soluciones.

7.4.2 Perturbación y aceptación de soluciones

En el proceso del algoritmo de CSA se debe perturbar la solución para generar una nueva la cual puede ser aceptada o rechazada, se podría generar una solución de forma aleatoria en todo el espacio de búsqueda, pero eso no sería del todo eficiente por lo que se propone cotas dinámicas que expanden o contraen el espacio donde se genera una nueva solución dentro del espacio de búsqueda general.

$$\begin{aligned} y' &= y + \theta_i e_i \quad \text{para} \quad i = 1,2,\ldots,n \\ \lambda' &= \lambda + \eta_j e_j \quad \text{para} \quad j = 1,2,\ldots,K+J \end{aligned} \tag{30}$$

Ecuación 30. Generación de una nueva solución.

Mediante la Ecuación 30 se genera un nuevo punto al variar cada uno de los componentes del vector de variables y el de parámetros, donde se distribuye uniformemente en el intervalo $\left[-\sigma_i, \sigma_i\right]$ y η_j en $\left[-\phi_j, \phi_j\right]$, los cuales se modifican dinámicamente antes de cada cambio de temperatura mediante la

Ecuación 31.

$$\sigma_i = \begin{cases} \sigma_i [1 + \beta_0 (P_i - P_u)/(1 - P_u)] & \text{si } P_i > P_u \\ \sigma_i / [1 + \beta_1 (P_v - P_i)/P_v] & \text{si } P_i > P_u \end{cases} \tag{31}$$

$$\phi = \left[w_1 h_1(y), w_2 h_2(y), \ldots, w_{K+J} h_{K+J}(y)\right]$$

Ecuación 31. Dinámica de las cotas para σ y ϕ.

Para la primera parte de la Ecuación 31 se consideran los siguientes valores:

$\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 2$, $P_u = 0.6$, y P_i es la razón entre los rechazados y los aceptados en cada cambio de temperatura. En el caso de ϕ, w_j se calcula mediante la Ecuación 32, donde ϕ_j se ajusta al modificar w_j de acuerdo a que tan rápido cambia $h(y)_j$ con respecto a T.

$$w_j = \begin{cases} \eta_0 w_j & \text{si}\, h_j(y) > \tau_0 T \\ \eta_1 w_j & \text{si}\, h_j(y) < \tau_1 T \end{cases} \tag{32}$$

Ecuación 32. Cálculo de los pesos w_j de ϕ.

Los parámetros que se consideran en la

Ecuación 32 son:

$\eta_0 = 1.25$, $\eta_1 = 0.8$, $\tau_0 = 1.0$, y $\tau_1 = 0.01$ (Wang, 2001).

$$A_T = \begin{cases} e^{-\frac{\delta L(y)}{T}} & \text{para } y \\ e^{\frac{\delta L(\lambda)}{T}} & \text{para } \lambda \end{cases} \tag{33}$$

Ecuación 33. Criterio de metrópolis para aceptar nuevas soluciones.

Si definimos $\delta L(y) = L(y',\lambda) - L(y,\lambda)$ y $\delta L(\lambda) = L(y,\lambda') - L(y,\lambda)$, cualquier nuevo punto que no minimice o maximice la función objetivo según sea el caso, deberá aceptarse de acuerdo a la probabilidad que se muestra en la Ecuación 33 que se conoce como regla clásica o criterio de metrópolis, en otro caso puede utilizarse la regla logística definida en la Ecuación 34, para aceptar una nueva solución.

$$A_T = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{\delta L(y)}{T}}} & \text{para } y \\ \dfrac{1}{1+e^{-\frac{\delta L(\lambda)}{T}}} & \text{para } \lambda \end{cases} \tag{34}$$

Ecuación 34. Regla logística para aceptar nuevas soluciones.

Por último para definir el número de iteraciones antes de cada cambio de temperatura se utiliza la regla $N_T = \max(100{,}5*(10*n+m))$ debido a que se perturban las variables diez veces más que los parámetros (A. Corona, 1987).

7.5 Aplicación de Recocido Simulado con Restricciones

Para mostrar la aplicación de CSA a los problemas de optimización con restricciones, en primer lugar se utiliza para optimizar un problema cuadrático común y después se aplica a los portafolios de inversión.

7.5.1 Aplicación de CSA a un problema en particular

Para mostrar el comportamiento del algoritmo de CSA se resolvió un problema particular (Ecuación 35), el cual es no lineal y sólo tiene una restricción, la solución exacta al problema propuesto es:. $y_1 = 0.8$, $y_2 = 0.4$ y $f(y) = 0.8$.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad f(y) = y_1^2 + y_2^2 \\ &\text{Sujeto a :} \quad h(y) = 2y_1 + y_2 - 2 = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Ecuación 35. Problema de prueba para validar CSA.

De acuerdo a lo explicado en la sección anterior la Ecuación 35 se puede convertir en el funcional

Minimizar $L(y,\lambda) = F(y) + \lambda|h(y)| + 0.5\|h(y)\|^2$ (36)

Ecuación 36. Función a resolver después de incorporar las restricciones (caso particular).

Como ya se había explicado, las restricciones sobre el rango de las variables y parámetros uno los escoge de manera intuitiva o en la región donde la solución a encontrar tenga un sentido para la aplicación de interés. En el presente caso se consideró $y_1 \in [-10,10]$, $y_2 \in [-5,8]$ y $\lambda \in [0,4]$, con solución inicial, $y = (-8,3)$ y $\lambda = 0$, se debe tener en cuenta que la solución inicial para los parámetros siempre es cero. Con respecto al número de iteraciones se tomó $N_T = 100$ y se perturbaron las variables junto con los parámetros veinte veces ($N_S = 20$) antes de modificar las cotas de las variables.

Resultados CSA General				
Iteraciones	**y1**	**y2**	**Lamba**	**F(y)**
26	0.800620917037	0.398415394127	1.601719084543	0.800277761952
17	0.793893956661	0.412079745748	1.773388250973	0.800312031887
33	0.806013428947	0.387814840320	3.345746938524	0.800587648263
25	0.809234544525	0.381704341713	2.179937957119	0.800936835878
20	0.799246628913	0.401798076703	3.153961940951	0.801155768728
16	0.781262910656	0.438306190138	3.815923787845	0.805659290284

Tabla 10 Resultados de CSA para el problema planteado en la Ecuación 36.

En los resultados que se muestran en la Tabla 10, se puede observar la variabilidad del método ya que el mejor resultado se obtuvo en veintiséis iteraciones, mientras que para el segundo mejor sólo fueron necesarios diecisiete iteraciones. Sin embargo CSA alcanza valores aceptables para las seis corridas mostradas en comparación con la solución exacta.

Solver de Excel -modelo evolutionary			
y1	**y2**	**h(y)**	**F(y)**
0.7985921909	0.3988118999	-0.0040037183	0.7968004189
0.8001519493	0.3987153040	-0.0009807974	0.7992170356
0.8001645872	0.3976691907	-0.0020016349	0.7984041519
0.7918200671	0.3973469538	-0.0190129120	0.7848636204
0.8015614878	0.3809666394	-0.0159103851	0.7876363990
0.7937565462	0.3959753999	-0.0165115077	0.7868459719

Tabla 11 Resultados de Solver de Excel utilizando el método evolutivo.

El mismo problema (Ecuación 35) se le dio solución en Excel utilizando solver encontrando los resultados de la Tabla 11, donde se observa que los valores son al igual que CSA muy aproximados a las soluciones exactas.

Solver tiene tres métodos de solución uno basado en gradientes (GRG no lineal) para el cual las funciones deben ser suaves, el segundo es el método simplex que funciona bien para funciones lineales de restricciones lineales, estos dos primeros métodos no se utilizan para compararlos con CSA, ya que el primero converge sin errores al valor exacto debido al tipo de funciones utilizadas y el segundo no aplica, la función a minimizar de la Ecuación 35 es no lineal.

El método GRG no lineal no se puede comparar con CSA debido a la naturaleza de ambos, GRG no lineal está basado en gradientes y siempre que se escoja el mismo punto inicial el algoritmo convergerá a la misma solución, además de que las soluciones obtenidas por este método estarán localizadas en mínimos o máximos locales, en la mayoría de los casos (A. Ravindran, 2006), mientras que CSA está basado en reglas probabilísticas que para un número infinito de iteraciones convergerá al mínimo o máximo global (Wang, 2001).

Por lo anterior, el método evolutivo de Excel es la mejor opción para compararlo con CSA, el algoritmo evolutivo de Solver está basado en algoritmos genéticos, el cual es el más famoso entre la optimización heurística con restricciones por la facilidad de tratar las restricciones en el proceso de optimización. Para hacer la comparación entre CSA y el método evolutivo de Excel se calculó el error relativo (valor aproximado menos valor exacto entre el valor exacto) de la solución (y_1, y_2) y la función a maximizar (Tabla 12 y Tabla 13).

Resultados CSA General					
y1	**Error Relativo y1**	**y2**	**Error Relativo y2**	**F(y)**	**Error Relativo F(y)**
0.8006209170	0.00077615	0.3984153941	-0.00396151	0.8002777620	0.00034720
0.7938939567	-0.00763255	0.4120797457	0.03019936	0.8003120319	0.00039004
0.8060134289	0.00751679	0.3878148403	-0.03046290	0.8005876483	0.00073456
0.8092345445	0.01154318	0.3817043417	-0.04573915	0.8009368359	0.00117104
0.7992466289	-0.00094171	0.4017980767	0.00449519	0.8011557687	0.00144471
0.7812629107	-0.02342136	0.4383061901	0.09576548	0.8056592903	0.00707411
Promedio	-0.00202659		0.00838275		0.00186028

Tabla 12 Error relativo entre la solución exacta y los resultados de CSA.

Al considerar seis corridas para cada algoritmo el promedio del error relativo de y_1, y_2 y $F(y)$ para CSA se muestra en la Tabla 12, mientras que la Tabla 13 también muestra los mismos resultados pero para Solver. En estas dos tablas se puede ver que en promedio el algoritmo de CSA tiene un error relativo promedio menor que el método evolutivo, por lo que CSA tiene mayor exactitud que el método evolutivo basado en algoritmos genéticos de Solver.

Solver de Excel -modelo evolutionary					
y1	**Error Relativo y1**	**y2**	**Error Relativo y2**	**F(y)**	**Error Relativo F(y)**
0.7985921909	-0.00175976	0.3988118999	-0.00297025	0.7968004189	-0.00399948
0.8001519493	0.00018994	0.3987153040	-0.00321174	0.7992170356	-0.00097871
0.8001645872	0.00020573	0.3976691907	-0.00582702	0.7984041519	-0.00199481
0.7918200671	-0.01022492	0.3973469538	-0.00663262	0.7848636204	-0.01892047
0.8015614878	0.00195186	0.3809666394	-0.04758340	0.7876363990	-0.01545450
0.7937565462	-0.00780432	0.3959753999	-0.01006150	0.7868459719	-0.01644254
Promedio	-0.00290691		-0.01271442		-0.00963175

Tabla 13 Error relativo entre la solución exacta y los resultados de Solver.

7.5.2 Aplicación de CSA al portafolio de inversión

Para la aplicación de recocido simulado con restricciones a los diferentes problemas propuestos en el capítulo 5 es necesario seguir la metodología de la sección 7.4, para incluir las restricciones a la función objetivo según sea el caso.

Considerando en primer lugar la ecuación de minimización del riesgo dado una cota inferior para el rendimiento. (Ecuación 21)

$$
\begin{aligned}
&\text{Min} \quad \vec{w}^T \cdot \Sigma \cdot \vec{w} \\
&\text{Sujeto a :} \\
&\qquad \vec{w} \cdot \vec{\mu} \geq R_* \\
&\qquad \vec{w} \cdot \vec{e} = 1 \\
&\qquad \vec{w} \geq 0
\end{aligned}
$$

Se puede plantear la siguiente ecuación al utilizar el procedimiento de la sección 4.3.1

$$
\begin{aligned}
&\text{Min} \quad \vec{w}^T \cdot \Sigma \cdot \vec{w} \\
&\text{Sujeto a :} \\
&\qquad \max(R_* - \vec{w} \cdot \vec{\mu}, 0) = 0 \\
&\qquad \vec{w} \cdot \vec{e} - 1 = 0 \\
&\qquad \vec{w} \geq 0
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Ecuación 37. Forma reducida de la ecuación 21 a restricciones con igualdades.

Después la Ecuación 37 al incluir las restricciones mediante el procedimiento planteado en la sección 4.3.1 se puede ver como:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \vec{w}^T \cdot \Sigma \cdot \vec{w} + \lambda_1 \max(R_* - \vec{w} \cdot \vec{\mu}, 0) + \lambda_2 (\vec{w} \cdot \vec{e} - 1) \\ & + \frac{1}{2} (\max^2 (R_* - \vec{w} \cdot \vec{\mu}, 0) + (\vec{w} \cdot \vec{e} - 1)^2) \\ \text{con} \quad & \vec{w}, \vec{\lambda} \geq 0 \end{aligned} \tag{38}$$

Ecuación 38. Problema de optimización de minimización del riesgo, para CSA.

En el segundo caso donde se pretende maximizar los rendimientos, dada una cota superior para el riesgo (Ecuación 22), que se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \vec{w} \cdot \vec{\mu} \\ \text{Sujeto a:} & \\ & \vec{w}^T \cdot \Sigma \cdot \vec{w} \leq R^* \\ & \vec{w} \cdot \vec{e} = 1 \\ & \vec{w} \geq 0 \end{aligned}$$

Se puede convertir a un problema con restricciones de igualdad y después plantearlo como un problema de optimización si restricciones (Ecuación 39), utilizando el procedimiento de la sección 4.3.1.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \vec{w} \cdot \vec{\mu} + \lambda_1 \max(\vec{w}^T \cdot \Sigma \cdot \vec{w} - R^*, 0) + \lambda_2 (\vec{w} \cdot \vec{e} - 1) \\ & + \frac{1}{2} (\max^2 (\vec{w}^T \cdot \Sigma \cdot \vec{w} - R^*, 0) + (\vec{w} \cdot \vec{e} - 1)^2) \\ \text{con} \quad & \vec{w}, \vec{\lambda} \geq 0 \end{aligned} \tag{39}$$

Ecuación 39. Problema de optimización de maximización del rendimiento, para CSA.

Por último al considerar la Ecuación 23 que es el problema de optimización incluyendo el riesgo mediante el parámetro de aversión al riesgo (λ)

$$\text{Max} \quad \vec{w}\cdot\vec{\mu} - \lambda \vec{w}^T \cdot \Sigma \cdot \vec{w}$$

Sujeto a :

$$\vec{w}\cdot\vec{e} = 1$$

$$\vec{w} \geq 0.$$

y al aplicar la metodología antes mencionada de incluir las restricciones a la función objetivo, se obtiene la Ecuación 40.

$$\text{Max} \quad \vec{w}\cdot\vec{\mu} + \lambda(\vec{w}^T \cdot \Sigma \cdot \vec{w}) + \lambda_1(\vec{w}\cdot\vec{e} - 1) + \frac{1}{2}(\vec{w}\cdot\vec{e} - 1)^2 \qquad (40)$$

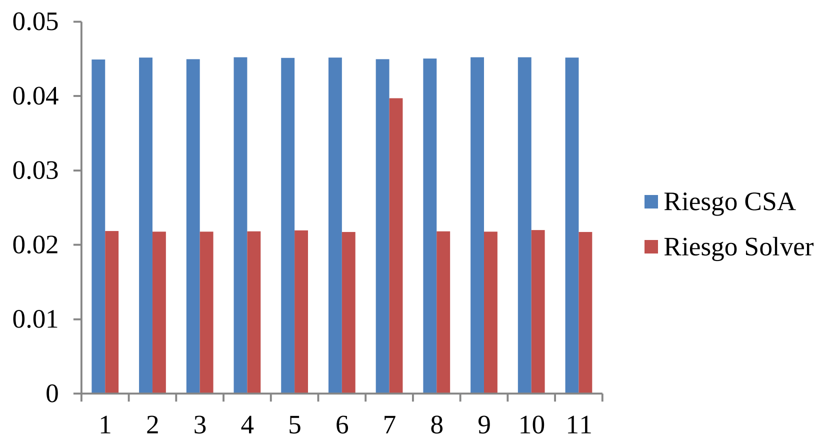
$$\text{con} \ \vec{w}, \vec{\lambda} \geq 0$$

Ecuación 40. Problema de optimización de maximización del rendimiento y minimización del riesgo, para CSA.

7.5.3 Resultados de Recocido Simulado con Restricciones

Se aplica CSA a los precios históricos de trece años de las acciones de ocho empresas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores tomando los rendimientos mensuales como el incremento de sus precios con respecto al precio anterior, se calcula la media de los rendimientos y la matriz de covarianzas de los mismos como datos de entrada del algoritmo, cabe señalar que se restringe el monto máximo a invertir en cada empresa al 70% por lo que los pesos se consideran en el intervalo de [0,0.7] y de esta manera propiciar una mayor diversificación. El algoritmo de CSA es comparado con el método llamado evolutivo que se incluye en Solver de Excel.

Para el problema de optimización donde se maximiza el retorno de la inversión dado un riesgo fijo, el valor mínimo de riesgo de acuerdo a los históricos de los rendimientos para el cual se puede tener una solución factible es del 1.7%. En este caso se hicieron diferentes corridas considerando un riesgo fijo del 8%.



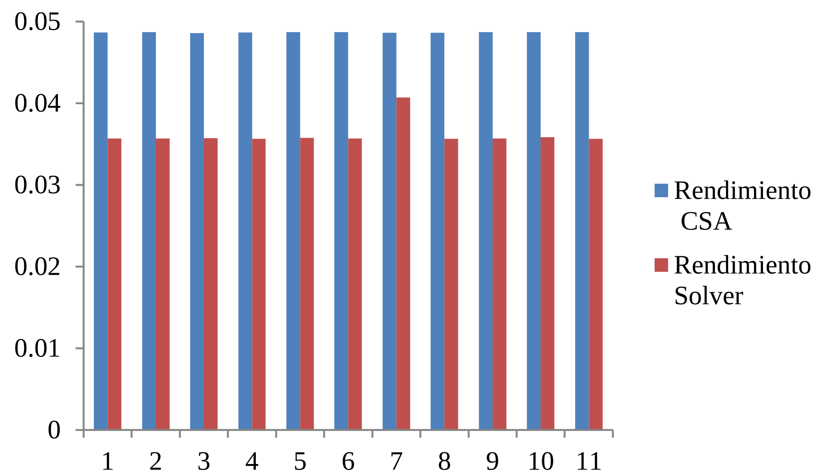
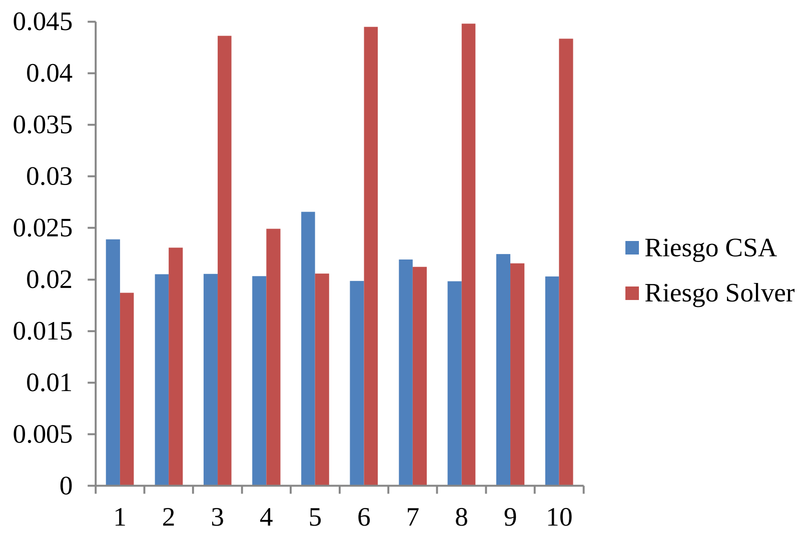


Figura 15 Comparación del rendimiento vs riesgo de los resultados obtenido por CSA y Solver, para el problema de maximizar el rendimiento dado un nivel de riesgo fijo.

La Figura 15 muestra los resultados en el nivel de riesgo y rendimiento utilizando diferentes soluciones iniciales. El rendimiento que estima CSA como se puede ver es mayor que el estimado por Solver, puesto que el promedio del rendimiento para CSA es de 0.0486 mientras que para Solver 0.0361, sin embargo, el riesgo como es de esperar es más alto el calculado por CSA, el incremento porcentual del rendimiento de CSA con respecto a Solver es del 34.6% mientras que en riesgo es de 92.4%, lo anterior muestra que Solver en este caso es mejor que CSA pues el nivel de rendimientos más altos de CSA no se comparan con el aumento del riesgo, es decir, no son directamete proporcionales.

Si se considera el problema de minimizar el riesgo dado un rendimiento fijo, el problema tiene solución para rendimientos menores al 4% mensual de acuerdo a los rendimientos de las empresas, es decir, el portafolio puede a lo más brindar el 4% de rendimiento a diferentes valores de riesgo.



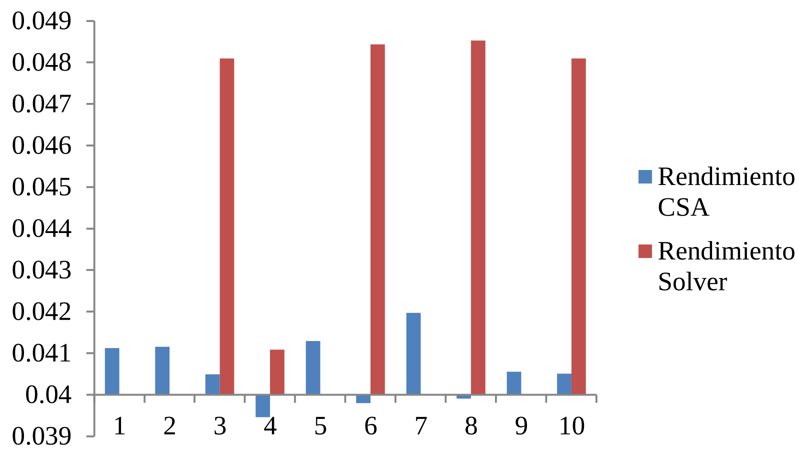


Figura 16 Comparación del rendimiento vs riesgo de los resultados obtenido por CSA y Solver, para el problema de minimizar el riesgo a un nivel de rendimiento dado.

Considerando diferentes soluciones iniciales, la Figura 16 muestra el rendimiento y el riesgo dado por CSA versus Solver para diferentes corridas al 4% de rendimiento fijo. Se observa que CSA es un método más estable en sus soluciones puesto que en rendimiento se tiene un coeficiente de variación del 1.81% y en riesgo del 9.55%, mientras que Solver presenta un coeficiente de variación en rendimiento y riesgo del 9.18% y 36.15% respectivamente. Ambos algoritmos presentan promedios de rendimientos similares, pero el incremento porcentual del riesgo en Solver con respecto a CSA es del 41.68%, entonces CSA en este caso da mejores resultados ya que el nivel de incremento en rendimientos promedio de Solver no compensa el aumento del riesgo.

8. Referencias

A. Corona, M. M. (1987). Minimizing Multimodal Functions of Continuous Variables with the "Simulated Annealing" Algorithm. *ACM Transactions on Mathematical Software., 13*(3), 262-280.

A. Ravindran, K. M. (2006). *Engineering Optimization, Methods and Applications.* New Jersey, USA: John Wiley & Sons.

Alfredo Díaz Mata, V. M. (2013). *Introducción al mercado bursátil* (Segunda ed.). Mexico DF: Mc Graw Hill.

Anand Sanwal, G. C. (2007). *Optimizing Corporate Portfolio Management: Aligning Investment Proposals with Organizational Strategy.* Wiley.

Baba Yamakawa, K. (2015). Implementación de un algoritmo búsqueda tabú para el problema de selección de portafolio aplicado a inversiones en bolsas de valores.

Barrios, M., & de Jesús, F. (2015). Evaluación de factores de riesgo en portafolios de inversión del Régimen de Pensión de Ahorro Individual en Colombia.

Bartholomew-Biggs, M. (2005). *Nonlinear Optimization with Financial Applications.* Springer.

Benjamin W. Wah, Y. C. (2006). Simulated annealing with asymptotic convergence for nonlinear constrained optimization. *Journal of Global Optimization*.

Chipoco, V., & Manuel, A. (2015). Portafolios óptimos bajo estimadores robustos clásicos y bayesianos con aplicaciones al mercado peruano de acciones.

Damodaran, A. (2012). *Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset.* Wiley Finance.

Escobar, J. W. (2015). Metodología para la toma de decisiones de inversión en portafolio de acciones utilizando la técnica multicriterio AHP. *Contaduría y Administración*, *60*(2), 346-366.

Forero Acosta, C. M. *Medición y análisis del desempeño de los fondos de inversión colectiva en Colombia* (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia).

Gálvez, P., Salgado, M., & Gutiérrez, M. (2015). Optimización de carteras de inversión modelo de Markowitz y estimación de volatilidad con Garch. *Horizontes Empresariales*, *9*(2), 39-50.

García Mejía, R. E., & Silva Contreras, F. A. (2015). *Alternativa de inversión para Pymes a través de los fondos de inversión en El Salvador* (Doctoral dissertation, Universidad de El Salvador).

García, M. D. P. R., Alejandro, K. A. C., Sáenz, A. B. M., & Sánchez, H. H. G. (2015). Análisis de portafolio por sectores mediante el uso de algoritmos genéticos: caso aplicado a la Bolsa Mexicana de Valores. *Contaduría y administración*, *60*(1), 87-112.

Gómez, L. M. J., Giraldo, F. R., & Prins, N. M. A. (2015). Diversificación internacional de portafolios con índices bursátiles: caso colombiano. *EN-CONTEXTO*, *3*(3), 79-104.

González Bueno, J. A., & Chacón Arias, O. P. (2015). COMPARACIÓN DE DOS PORTAFOLIOS ÓPTIMOS DE RENTA VARIABLE: CASO COLOMBIA Y LATINOAMERICA. *Revista PUENTE Científica*, *8*(2).

Haim Levy, T. P. (2004). *Investments.* Prentice Hall.

Haro, A. d. (2012). *Medición y control del Riesgos Financieros.* México DF: Limusa.

Jorge Nocedal, S. W. (1999). *Numerical Optimization.* Springer Verlag.

Kirkpatrick S., G. C. (1983). Optimization by Simulated Annealing. *Science*, *220*(4598), 671-680.

L., I. (1989). Very fast simulated re-annealing. *Journal of mathematical and computer modelling, 8*, 967-973.

Lara, L., Rigoberto, C., & Morán Martínez, M. M. (2015). *Multifondos de inversión aplicado al fondo de pensiones en El Salvador* (Doctoral dissertation, Universidad de El Salvador).

Lemus de Rivera, S. J., & López, R. B. (2015). *Los fondos de inversión en El Salvador* (Doctoral dissertation, Universidad de El Salvador).

León-Herrera, A., Martínez-Damián, M. Á., & Garza-Bueno, L. E. (2015). Comparación de los enfoques media-varianza y media-semivarianza para elegir un portafolio agrícola. *Revista Chapingo. Serie horticultura*, *21*(1), 71-80.

Molina, I. G. (2015). Notas sobre la evolución histórica, la naturaleza jurídica y el rol de los fondos de inversión en el mercado de capitales peruano: un análisis comparativo de esta industria. *Ius et Veritas*, *21*(42), 150-170.

Noel Amenc, V. L. (2003). *Portfolio Theory and Performance Analysis.* Wiley.

Prigent, J.-L. (2007). *Portfolio Optimization and Performance Analysis.* Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.

Rasmussen, M. (2003). *Quantitative Portfolio Optimization, Asset Allocation and Risk Managenment.* New York, United States of America: Palgrave Macmillan.

RIVERA MENDOZA, J. R. (2015). Portafolio potencial de acciones cotizadas en el mercado de valores ecuatoriano.

Saporito, M. L. (2015). Modelo de asignación de capitales de inversión para la gestión de portafolio de proyectos.

Saporito, M. L. (2015). Modelo de asignación de capitales de inversión para la gestión de portafolio de proyectos.

Solís, G. V., Montes, T. E. C., & Vega, E. G. C. (2015). Análisis de riesgo vs. rendimiento de las acciones más volátiles que han cotizado en la BMV de 2003 a 2011. *Nova Rua*, *3*(5).

Svetlozar T. Rachev, S. V. (2008). *Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization.* New Jersey, United States of America: John Wiley & Sons.

Tsuzuki, M. d. (2012). *Simulated Annealing Advances, Applications and Hybridizations.* Rijeka, Croatia: InTech.

Vera, F. A. C., & LXI, M. G. La inversión focalizada como una alternativa a la gestión de portafolios basada en la diversificación.

Villacreses Amat, M. E. (2015). Estudio de Portafolios de Inversiòn Manejados por Administradoras de Fondos Locales para Pequeños y Medianos Inversionistas.

Wang, T. (2001). *Global Optimization for Constrained Nonlinear Programing.* Illinois, United States of America: Urbana Illinois Thesis.

Xavier Brun, M. M. (2008). *Análisis y Selección de Inversiones en Mercados Financieros.* Barcelona: Bresca Editorial.

Dedicatoria

Dedicado especialmente a:

Nuestros padres por su incondicional amor y apoyo que siempre nos han brindado y por habernos enseñado a luchar por lo que queremos.

A nuestras familias.
Por todo el amor, la confianza y el apoyo que nos han brindado para seguir superándonos.

A Dios.
Gracias Señor por habernos permitido lograr otra meta en nuestra vida profesional.

A nuestros hijos.
Por el tiempo que les hemos quitado, por no estar a su lado.

A nuestros maestros y amigos.

A nuestra Directora del Programa Educativo de Ingeniería Financiera MET. Celic Teotetl Cárdenas Osorio por todo su apoyo y confianza.

9 786078 324460
ISBN 978-607-8324-46-0

www.ecorfan.org