Cálculo Integral y Series Infinitas

RUIZ-LEDESMA, Elena Fabiola

GUTIÉRREZ-GARCÍA, Juan Jesús

ECORFAN®

ECORFAN-México

Coordinadores
RUIZ-LEDESMA, Elena Fabiola. PhD
GUTIÉRREZ-GARCÍA, Juan Jesús. PhD

Editor en Jefe
VARGAS-DELGADO, Oscar. PhD

Directora Ejecutiva
RAMOS-ESCAMILLA, María. PhD

Director Editorial
PERALTA-CASTRO, Enrique. MsC

Diseñador Web
ESCAMILLA-BOUCHAN, Imelda. PhD

Diagramador Web
LUNA-SOTO, Vladimir. PhD

Asistente Editorial
SORIANO-VELASCO, Jesus. BsC

Traductor
DÍAZ-OCAMPO, Javier. BsC

Filóloga
RAMOS-ARANCIBIA, Alejandra. BsC

Cálculo Integral y Series Infinitas

Primera Edición
ISBN: 978-607-8695-80-5
Sello Editorial ECORFAN: 607-8695
Número de Control B: 2022-04
Clasificación B (2022):280922-0004

Books

Definición de Books

Objetivos Científicos

Apoyar a la Comunidad Científica Internacional en su producción escrita de Ciencia, Tecnología en Innovación en las Áreas de investigación CONACYT y PRODEP.

ECORFAN-Mexico S.C es una Empresa Científica y Tecnológica en aporte a la formación del Recurso Humano enfocado a la continuidad en el análisis crítico de Investigación Internacional y está adscrita al RENIECYT de CONACYT con número 1702902, su compromiso es difundir las investigaciones y aportaciones de la Comunidad Científica Internacional, de instituciones académicas, organismos y entidades de los sectores público y privado y contribuir a la vinculación de los investigadores que realizan actividades científicas, desarrollos tecnológicos y de formación de recursos humanos especializados con los gobiernos, empresas y organizaciones sociales.

Alentar la interlocución de la Comunidad Científica Internacional con otros centros de estudio de México y del exterior y promover una amplia incorporación de académicos, especialistas e investigadores a la publicación Seriada en Nichos de Ciencia de Universidades Autónomas - Universidades Públicas Estatales - IES Federales - Universidades Politécnicas - Universidades Tecnológicas - Institutos Tecnológicos Federales - Escuelas Normales - Institutos Tecnológicos Descentralizados - Universidades Interculturales - Consejos de CyT - Centros de Investigación CONACYT.

Alcances, Cobertura y Audiencia

Books es un Producto editado por ECORFAN-Mexico S.C en su Holding con repositorio en México, es una publicación científica arbitrada e indizada. Admite una amplia gama de contenidos que son evaluados por pares académicos por el método de Doble-Ciego, en torno a temas relacionados con la teoría y práctica de las Área de investigación CONACYT y PRODEP respectivamente con enfoques y perspectivas diversos, que contribuyan a la difusión del desarrollo de la Ciencia la Tecnología e Innovación que permitan las argumentaciones relacionadas con la toma de decisiones e incidir en la formulación de las políticas internacionales en el Campo de las Ciencias. El horizonte editorial de ECORFAN-Mexico® se extiende más allá de la academia e integra otros segmentos de investigación y análisis ajenos a ese ámbito, siempre y cuando cumplan con los requisitos de rigor argumentativo y científico, además de abordar temas de interés general y actual de la Sociedad Científica Internacional.

Consejo Editorial

Comité Arbitral

Cesión de Derechos

El envío de una Obra Científica a ECORFAN Books emana el compromiso del autor de no someterlo de manera simultánea a la consideración de otras publicaciones científicas para ello deberá complementar el Formato de Originalidad para su Obra Científica.

Los autores firman el Formato de Autorización para que su Obra Científica se difunda por los medios que ECORFAN-México, S.C. en su Holding México considere pertinentes para divulgación y difusión de su Obra Científica cediendo sus Derechos de Obra Científica.

Declaración de Autoría

Indicar el Nombre de 1 Autor y 3 Coautores como máximo en la participación de la Obra Científica y señalar en extenso la Afiliación Institucional indicando la Dependencia.

Identificar el Nombre de 1 Autor y 3 Coautores como máximo con el Número de CVU Becario-PNPC o SNI-CONACYT- Indicando el Nivel de Investigador y su Perfil de Google Scholar para verificar su nivel de Citación e índice H.

Identificar el Nombre de 1 Autor y 3 Coautores como máximo en los Perfiles de Ciencia y Tecnología ampliamente aceptados por la Comunidad Científica Internacional ORC ID - Researcher ID Thomson - arXiv Author ID - PubMed Author ID - Open ID respectivamente

Indicar el contacto para correspondencia al Autor (Correo y Teléfono) e indicar al Investigador que contribuye como primer Autor de la Obra Científica.

Detección de Plagio

Todas las Obras Científicas serán testeadas por el software de plagio PLAGSCAN si se detecta un nivel de plagio Positivo no se mandará a arbitraje y se rescindirá de la recepción de la Obra Científica notificando a los Autores responsables, reivindicando que el plagio académico está tipificado como delito en el Código Penal.

Proceso de Arbitraje

Todas las Obras Científicas se evaluarán por pares académicos por el método de Doble Ciego, el arbitraje Aprobatorio es un requisito para que el Consejo Editorial tome una decisión final que será inapelable en todos los casos. MARVID® es una Marca de derivada de ECORFAN® especializada en proveer a los expertos evaluadores todos ellos con grado de Doctorado y distinción de Investigadores Internacionales en los respectivos Consejos de Ciencia y Tecnología el homologo de CONACYT para los capítulos de America-Europa-Asia-Africa y Oceania. La identificación de la autoría deberá aparecer únicamente en una primera página eliminable, con el objeto de asegurar que el proceso de Arbitraje sea anónimo y cubra las siguientes etapas: Identificación del ECORFAN Books con su tasa de ocupamiento autoral - Identificación del Autores y Coautores- Detección de Plagio PLAGSCAN - Revisión de Formatos de Autorización y Originalidad-Asignación al Consejo Editorial- Asignación del par de Árbitros Expertos-Notificación de Dictamen-Declaratoria de Observaciones al Autor-Cotejo de la Obra Científica Modificado para Edición-Publicación.

Cálculo Integral y Series Infinitas

Integral Calculus and Infinite Series

RUIZ-LEDESMA, Elena Fabiola & GUTIÉRREZ-GARCÍA, Juan Jesús

Instituto Politécnico Nacional. Escuela Superior de Cómputo

ID 1er Autor: *Elena Fabiola, Ruiz-Ledesma* / **ORC ID:** 0000-0002-1513-8243, **Researcher ID Thomson**: A -9014-2019, **CVU CONACYT ID:** 122004

ID 1er Coautor: *Juan Jesús, Gutiérrez-García* / **ORC ID:** 0000-0002-0656-9922, **CVU CONACYT ID:** 432284

DOI: 10.35429/B.2022.4.1.253

Cálculo Integral y Series Infinitas

El Book ofrecerá contribuciones seleccionadas de investigadores que contribuyan a la actividad de difusión científica del Instituto Politécnico Nacional para su área de investigación en la función de la Universidad ante los retos de la Sociedad del Conocimiento. Además de tener una evaluación total, en las manos de los directores del Instituto Politécnico Nacional, se colabora con calidad y puntualidad en sus capítulos, cada contribución individual fue arbitrada a estándares internacionales (RESEARCH GATE, MENDELEY, GOOGLE SCHOLAR y REDIB), el Book propone así a la comunidad académica, los informes recientes sobre los nuevos progresos en las áreas más interesantes y prometedoras de investigación en la función de la Universidad ante los retos de la Sociedad del Conocimiento.

Contenido

Prefacio

El presente *libro-cuaderno de trabajo* lo hemos denominado *Cálculo Integral y Series infinitas*, debido a que su contenido abarca distintas aplicaciones que requieren del empleo de la integral definida, como el caso de la obtención de áreas de regiones, volúmenes de sólidos, cálculo de longitudes de arco; también se muestran las propiedades de la integral definida, el teorema fundamental del cálculo, e integración numérica. Así también, se aborda el estudio inicial de sucesiones y series infinitas. De éstas se hace un recorrido por algunas series especiales, los criterios para determinar cuándo una serie de términos positivos es convergente o divergente, así como las series alternantes, se revisa la convergencia absoluta y condicional, hasta llegar a trabajar con series de potencias, finalizando con la serie de Taylor y de McLauren. Los temas que se incluyen son los que aparecen en el programa de estudios de la Unidad de Aprendizaje de Cálculo Aplicado, que se imparte en la Escuela Superior de Cómputo del Instituto Politécnico Nacional (Instituto Politécnico Nacional, 2022).

El material que compone al libro ha sido construido con ejercicios y problemas obtenidos de diferentes libros, y se han creado algunos contextos diferentes a los de los libros, las actividades son propias de los autores ya que hemos impartido la Unidad de Aprendizaje en los últimos semestres.

Acercar el conocimiento al estudiante que tenemos en nuestras aulas virtuales implica emplear estrategias muy distintas a las que usábamos con el estudiante que teníamos en nuestras aulas físicas. Es por ello por lo que este libro ha sido construido pensando en captar la atención del estudiante que se encuentra a varios kilómetros de distancia de nosotros, cuando toma sus clases en línea de forma síncrona o asíncrona, teniendo múltiples distractores a su alrededor. De ahí que éste no solo es un libro, sino un cuaderno de trabajo de apoyo, en el que nuestro estudiante podrá resolver sus dudas porque aparece información muy concreta y clara, practicará resolviendo ejercicios y analizará situaciones presentadas en los problemas, podrá revisar su avance al resolver el examen en cada unidad. Los ejercicios y problemas contenidos tienen diferente grado de dificultad, por lo que el estudiante podrá ir a su propio ritmo.

Está dividido en 4 capítulos, correspondiendo a cada una de las unidades temáticas del programa de estudios (Instituto Politécnico Nacional, 2022). A su vez cada capítulo está conformado por lecciones y éstas por temas y subtemas. La estructura que se presenta es: Teoría, teoremas demostrados, ejemplos resueltos, ejercicios para completar o actividades y listas de ejercicios. Al final de cada unidad aparece un examen de opción múltiple y un enlace que redirecciona al estudiante a exámenes también de opción múltiples que puede resolver, de tal forma que terminando se te indicará las respuestas correctas y las erróneas.

Los autores estamos convencidos que te será útil este libro-cuaderno de trabajo.

RUIZ-LEDESMA, Elena Fabiola. PhD
GUTIÉRREZ-GARCÍA, Juan Jesús. PhD

Cómo está organizado mi libro de Cálculo Aplicado

Está organizado en 4 Unidades, en cada una aparecen lecciones, las cuales inician con teoría y ejemplos resueltos paso a paso y actividades para completar. También hay una lista de ejercicios propuestos para que resuelvas en casa.

Debido a que es importante hacer un breve recorrido por la historia del desarrollo del objeto matemático que se estudia en este libro-cuaderno de trabajo, que es la integral. Mateus-Nieves (2015) hace una división en tres periodos, al primero lo denomina “Infancia del cálculo integral”, el segundo: “El cálculo infinitesimal en la edad media”, y por último: “la Fundamentación del cálculo integral”. Es por ello por lo que en cada unidad temática se muestran breves aspectos históricos que hacen alusión a los orígenes de los conceptos abordados en dicha unidad.

Cada sección del libro aparece con los siguientes títulos:

- Teoría y ejemplos
- Ejercicios y problemas para completar
- Lista de ejercicios y Actividades
- Exámenes

Unidad 1 La Integral Definida y sus aplicaciones

¿Por qué es importante esta Unidad?

Porque se trabaja con la integral definida, que es el concepto básico del Cálculo Integral. Además de revisar el teorema fundamental del cálculo que relaciona la integral con la derivada el cual simplifica en gran medida la resolución de muchos problemas (Stewart, 2015).

En este capítulo utilizaremos a la integral definida para calcular áreas de regiones, volúmenes de sólidos de revolución, volúmenes de secciones transversales, también la emplearemos para obtener longitud de curvas y áreas de superficies.

Lección 1.1 Área bajo la curva

Investiga y Analiza

1. Menciona ejemplos de figuras de las cuales puedes obtener el área y ¿qué empleas para ello?

2. De los ejemplos que mencionaste ¿cómo es el contorno de esas figuras?

3. En el caso del círculo ¿cómo se obtiene su fórmula?

4. ¿Cómo obtendrías el área de figuras curvilíneas?

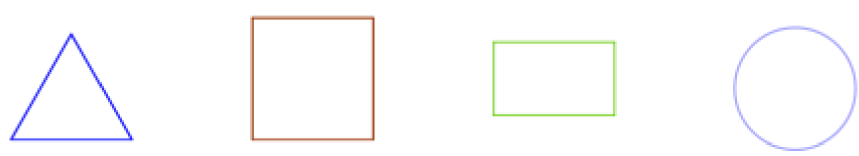
Introducción

Los inicios del Cálculo Integral se dan en Grecia, en la escuela de Atenas, siendo los más destacados: Hipócrates, Platón, Eudoxo, Menecmo, Arquitas el pitagórico, Euclides, Arquímedes. La integral surge como un operador que da solución a tres problemas: i) La duplicación del cubo o el intento de encontrar una arista de un cubo cuyo volumen sea el doble de un cubo dado. ii) La trisección de un ángulo dado iii). La cuadratura del círculo, o intento de encontrar un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado, todos en un contexto intramatemático. Eudoxo, resuelve el problema de cuadratura creando el método de exhausción. Euclides, usó el método propuesto por Eudoxo, y comparó magnitudes respetando el principio de homogeneidad. Arquímedes considera a Demócrito como el primero que, siguiendo estos parámetros, estableció correctamente la fórmula del volumen de un cono o de una pirámide considerando a estos sólidos como si estuvieran formados por innumerables capas paralelas (Matheus-Nieves, 2015; Newman, 1994)

1.1.1 Teoría y ejemplos

Sabemos determinar áreas de figuras geométricas regulares, como son: Triángulo, cuadrado, rectángulo o círculo (Figura 1.1).

Figura 1.1 Figuras geométricas regulares



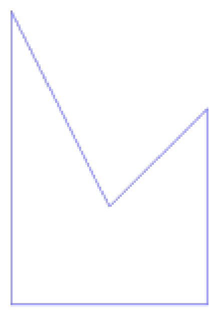
Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Cuyas áreas las determinamos, como:

$A_T = \dfrac{(base)(altura)}{2}$	$A_{Cu} = (lado)(lado)$	$A_R = (base)(altura)$	$A_{Ci} = \pi(radio)^2$

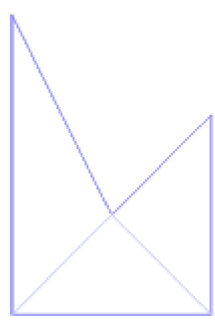
También es posible determinar áreas de figuras irregulares, con lados rectilíneos, como en la Figura 1.2 cuya área se calcula triangulando (Figura 1.3) y obteniendo la suma de las áreas de los triángulos obtenidos.

Figura 1.2 Figura con lados rectos



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

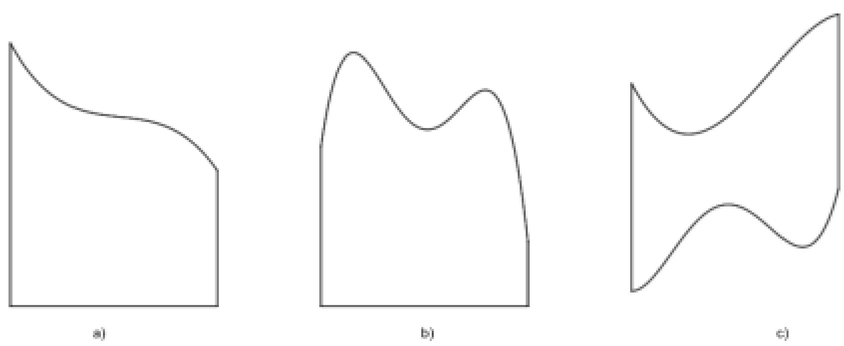
Figura 1.3 Triangulación de la figura



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

¿Cómo determinamos el área de figuras irregulares? como las mostradas en la Figura 1.4?

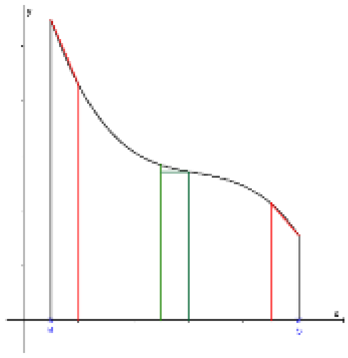
Figura 1.4 Figura Curvilínea



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

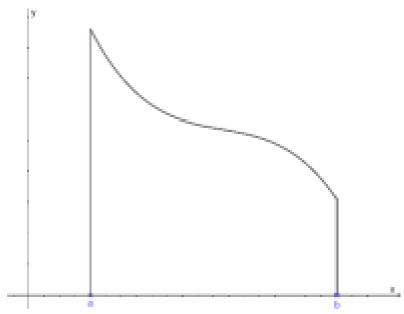
Para determinar el área de estas figuras (1.4a, 1.4b o 1.4c), ya no podemos separar en triángulos, por tener lados curvos. Así que, para determinar su área, empecemos considerando que es una función, que está definida en el intervalo [a, b], como se muestra en el Gráfico 1.2. Al tratar de dividir la región con alguna figura geométrica, observamos que ninguna de las figuras regulares que conocemos se ajusta de manera exacta, la más cercana a ella es el trapecio y de ahí es el rectángulo (Gráfico 1.1), sin embargo, al usar cualquiera de éstas todavía queda área por cubrir o sobra área.

Gráfico 1.1 Trapecio en rojo y rectángulo en verde, es mayor el área que falta



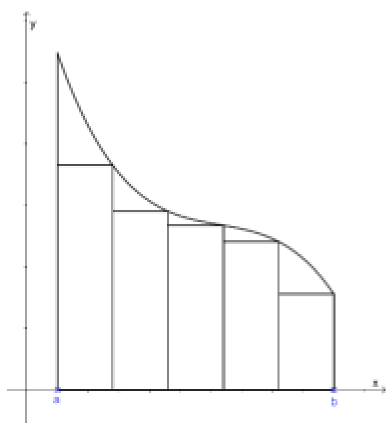
Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Gráfico 1.2 Figura en el plano cartesiano



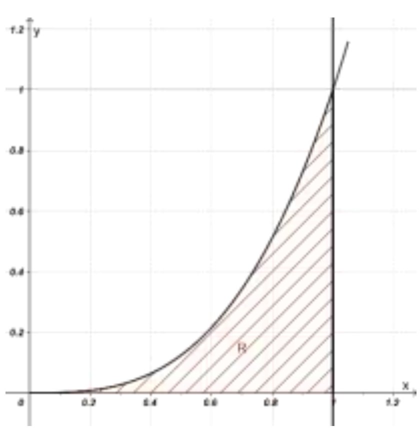
Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Gráfico 1.3 Figura con divisiones rectangulares



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Gráfico 1.4 Representación gráfica de la región R delimitada por f(x)=x^3, la recta x=1 y el eje x



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Para determinar su área, empecemos considerando que la curva es una función, que está definida en el intervalo [a, b], y dividámosla en rectángulos, como se observa en el Gráfico 1.3.

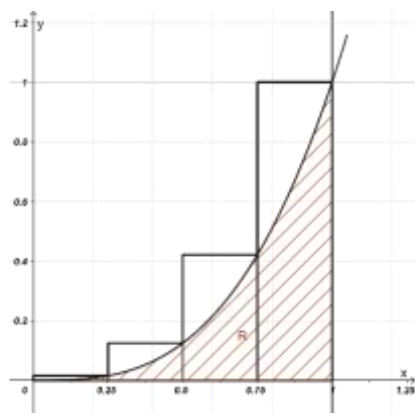
Si determinamos el área de cada rectángulo y las sumamos nos aproximaremos al área de la figura.

Ejemplo 1.1.1 Estimemos el área de una región R en particular, que se encuentra delimitada por $\boldsymbol{f(x) = x^3}$, la recta $\boldsymbol{x = 1}$ y el eje $\boldsymbol{x}$ (Larson & Edwars, 2018), como se muestra en el Gráfico 1.4.

Primero tenemos que el área es un valor entre 0 y 1 por que R está contenida en un cuadrado de longitud 1.

Para dar una aproximación dividamos la región en 4 rectángulos de igual longitud, obtengamos el área de los rectángulos y sumémoslas, como se muestra en el Gráfico 1.5. La base de cada rectángulo tiene el mismo valor porque las divisiones son iguales, es decir $\frac{1}{4}$ y para la altura de los rectángulos tomemos el lado derecho del rectángulo, nos damos cuenta de que está representada por la función $f(x) = x^3$,evaluada en el valor de la abscisa (Gráfico 1.5).

Gráfico 1.5 Figura con divisiones rectangulares considerando extremos derechos (área por exceso o rectángulos circunscritos)



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

$$A_{R_1} = \frac{1}{4}f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{4})^3 = \frac{1}{4}(\frac{1}{64}) = \frac{1}{256}$$

$$A_{R_2} = \frac{1}{4}f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{4}(\frac{1}{8}) = \frac{1}{32}$$

$$A_{R_3} = \frac{1}{4}f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}(\frac{3}{4})^3 = \frac{1}{4}(\frac{27}{64}) = \frac{27}{256}$$

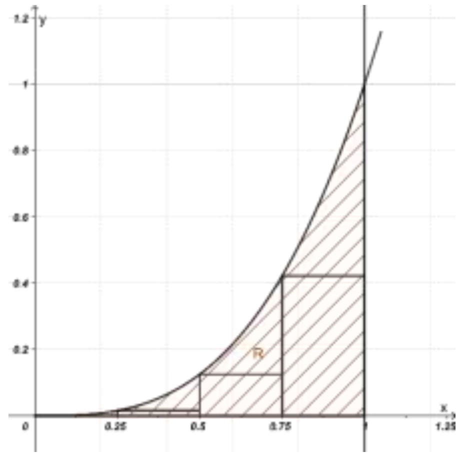
$$A_{R_4} = \frac{1}{4}f(1) = \frac{1}{4}(1)^3 = \frac{1}{4}(1) = \frac{1}{4}$$

$$A_{R_c} = \frac{1}{256} + \frac{1}{32} + \frac{27}{256} + \frac{1}{4} = \frac{1}{256} + \frac{27}{256} + \frac{8}{256} + \frac{64}{256} = \frac{100}{256} = \frac{50}{128} = \frac{25}{64} \approx 0.3906$$

Por tanto $R < A_{R_c}$

Si en lugar de considerar a la altura como el punto extremo derecho, se considera el punto extremo de la izquierda del rectángulo, se tendrían rectángulos inscritos, como se muestra en el Gráfico 1.6.

Gráfico 1.6 Divisiones rectangulares considerando puntos extremos de la izquierda (área de los rectángulos por defecto) o rectángulos inscritos



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

$A_{R_1} = \frac{1}{4}(0)^3 = 0$

$A_{R_2} = \frac{1}{4}(\frac{1}{4})^3 = \frac{1}{256}$

$A_{R_3} = \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{32} = \frac{8}{256}$

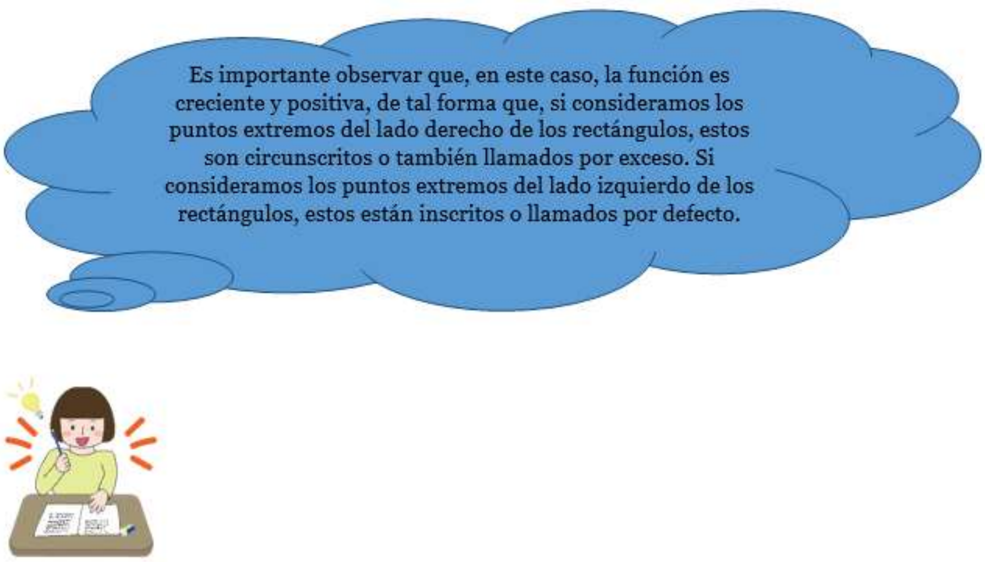
$A_{R_4} = (\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{256}$

$A_{RI} = 0 + \frac{1}{256} + \frac{8}{256} + \frac{27}{256} = \frac{36}{256} = \frac{18}{128} = \frac{9}{64} \approx 0.1406$

Por tanto: $R > A_{R_i}$

Entonces

$A_{RI} < R < A_{RC}$



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

El área de la región R se encuentra entre los dos siguientes valores:

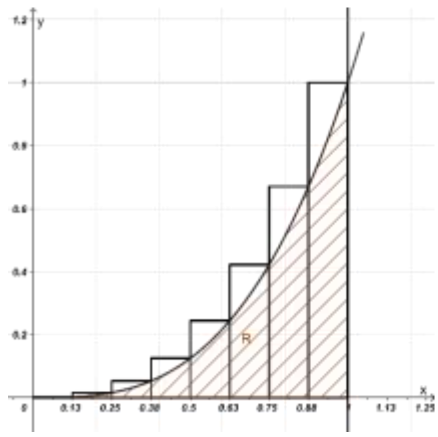
$0.1406 < R < 0.3906$

Podemos repetir este procedimiento con un número mayor de rectángulos, por ejemplo, con 8 (Gráfico 1.7 y 1.8).

Se obtendría una mejor estimación del área empleando 8 rectángulos. Al realizar el mismo proceso que hicimos para cuatro rectángulos, pero ahora para 8, obtenemos los siguientes valores.

Para el caso de los rectángulos circunscritos (Gráfico 1.7), en donde se toma como la altura de los rectángulos el lado derecho, obtenemos:

Gráfico 1.7 Rectángulos circunscritos



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

$$A_{R1} = \frac{1}{8} f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{512}\right) = \frac{1}{4096}$$

$$A_{R2} = \frac{1}{8} f\left(\frac{2}{8}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{2}{8}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{8}{512}\right) = \frac{8}{4096}$$

$$A_{R3} = \frac{1}{8} f\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{27}{512}\right) = \frac{27}{4096}$$

$$A_{R4} = \frac{1}{8} f\left(\frac{4}{8}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{8}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{64}{512}\right) = \frac{64}{4096}$$

$$A_{R5} = \frac{1}{8} f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{125}{512}\right) = \frac{125}{4096}$$

$$A_{R6} = \frac{1}{8} f\left(\frac{6}{8}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{6}{8}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{2161}{512}\right) = \frac{216}{4096}$$

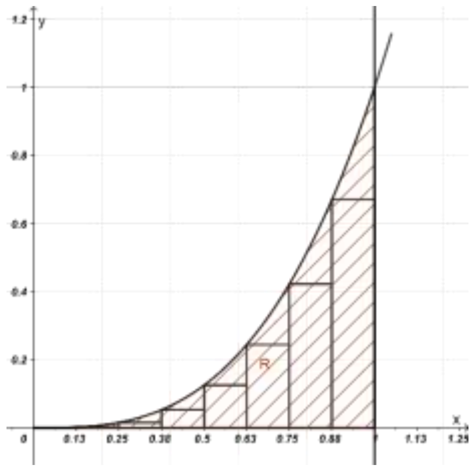
$$A_{R7} = \frac{1}{8} f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{343}{512}\right) = \frac{343}{4096}$$

$$A_{R8} = \frac{1}{8} f\left(\frac{8}{8}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{8}{8}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{512}{512}\right) = \frac{512}{4096}$$

$$A_{RC} = \frac{1}{4096} + \frac{8}{4096} + \frac{27}{4096} + \frac{64}{4096} + \frac{125}{4096} + \frac{216}{4096} + \frac{343}{4096} + \frac{512}{4096} = \frac{1296}{4096} \approx 0.3164$$

Si tomamos como la altura de los rectángulos el lado izquierdo (Gráfico 1.8), obtenemos rectángulos inscritos y el proceso es el siguiente:

Gráfico 1.8 Rectángulos inscritos



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

$$A_{R1} = \frac{1}{8} f(0) = \frac{1}{8}(0)^3 = \frac{1}{8}(0) = 0$$

$$A_{R2} = \frac{1}{8} f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}(\frac{1}{8})^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{512}\right) = \frac{1}{4096}$$

$$A_{R3} = \frac{1}{8} f\left(\frac{2}{8}\right) = \frac{1}{8}(\frac{2}{8})^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{8}{512}\right) = \frac{8}{4096}$$

$$A_{R4} = \frac{1}{8} f\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{8}(\frac{3}{8})^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{27}{512}\right) = \frac{27}{4096}$$

$$A_{R5} = \frac{1}{8} f\left(\frac{4}{8}\right) = \frac{1}{8}(\frac{4}{8})^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{64}{512}\right) = \frac{64}{4096}$$

$$A_{R6} = \frac{1}{8} f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{1}{8}(\frac{5}{8})^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{125}{512}\right) = \frac{125}{4096}$$

$$A_{R7} = \frac{1}{8} f\left(\frac{6}{8}\right) = \frac{1}{8}(\frac{6}{8})^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{2161}{512}\right) = \frac{216}{4096}$$

$$A_{R8} = \frac{1}{8} f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{1}{8}(\frac{7}{8})^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{343}{512}\right) = \frac{343}{4096}$$

$$A_{RI} = \frac{1}{4096} + \frac{8}{4096} + \frac{27}{4096} + \frac{64}{4096} + \frac{125}{4096} + \frac{216}{4096} + \frac{343}{4096} = \frac{784}{4096} \approx 0.1914$$

El área de la región R se encuentra entre los dos siguientes valores: $0.1914 < R < 0.3164$

Cuanto más grande sea n (número de divisiones) mejor es la aproximación del área. Completa la Tabla 1.1 calculando el área para el número de rectángulos en que se divide a la región R, tanto para rectángulos por defecto (puntos extremos por la izquierda) como por exceso (puntos extremos por le derecha).

Tabla 1.1 Estimaciones del área con un número diferente de rectángulos

Número de rectángulos (n)	**Área empleando rectángulos inscritos (valores extremos por la izquierda) I_n**	**Área empleando rectángulos circunscritos (valores extremos por la derecha) D_n**
10		
30		
50		
100		
1000		

Fuente de Consulta: Elaboración Propia

¿A qué valor se aproxima el área bajo la curva $f(x) = x^3$?

1.1.1.2 Notación de sumatoria

Es importante hacer un breve recorrido por las propiedades de las sumatorias y revisar algunas de ellas, ya que serán empleadas como parte del proceso de la obtención de áreas bajo la curva.

Teorema (Linealidad de $\sum$)
Sea n un entero positivo y sean $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ y $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ dos conjuntos de números reales. Entonces:

I $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

i. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_k + \sum_{i=1}^{n} b_i$.

ii. $\sum_{i=1}^{n} Ca_i = C\sum_{i=1}^{n} a_i$ $\quad\forall$ número real C

iii. $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

Sumas especiales

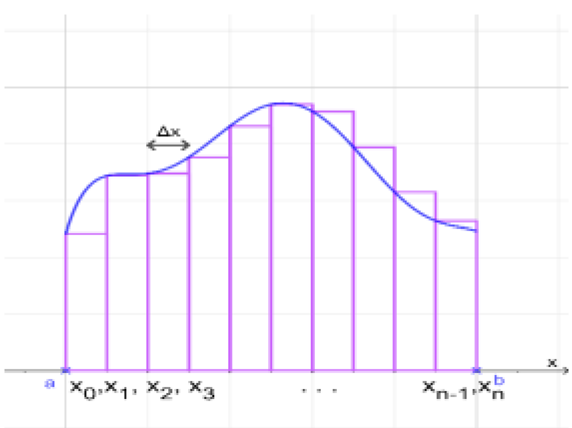
1) $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2) $\sum_{i=1}^{i} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
4) $\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$
5) $\sum_{i=1}^{n} i^5 = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$

1.1.2 Sumas de Riemman

Anteriormente revisamos un caso para estimar el área de una región acotada por la función $f(x) = x^3$ en [0,1], empleando la suma de las áreas de los rectángulos en que se dividió dicha región. Ahora generalicemos.

Consideremos una función $f(x)$ definida en un intervalo [a, b] y dividamos este intervalo en n subintervalos de longitud Δx, los subintervalos van desde x_0 hasta x_n, siendo $a = x_0$ y $b = x_n$, como se muestra en el Gráfico 1.9.

Gráfico 1.9 Gráfica con n subintervalos



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Así se tiene:

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$
$a = x_0$
$x_1 = a + \Delta x$
$x_2 = x_1 + \Delta x = a + 2\Delta x$
$x_3 = a + 3\Delta x$
$\vdots$
$x_i = a + i\Delta x$
$\vdots$
$b = x_n$

Si nos situamos en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y calculemos el área del rectángulo que forma, $A = b \times h$, donde la base b es la longitud del intervalo, esto es $b = \Delta x$ y la altura h es el valor de la función en cualquier punto del intervalo, consideremos un punto arbitrario x_i^*, así $h = f(x_i^*)$.

Luego, $A_i = f(x_i^*)\Delta x$ con $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

Calculando el área de todos los rectángulos, tenemos:

$A_1 = f(x_1^*)\Delta x$
$A_2 = f(x_2^*)\Delta x$
$A_3 = f(x_3^*)\Delta x$
$\vdots$
$A_i = f(x_i^*)\Delta x$
$\vdots$
$A_n = f(x_n^*)\Delta x$

Sumando todas las áreas de los rectángulos, nos aproximamos al área de la región.

$A \approx f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \cdots f(x_i^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$
$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$.

Mientras mayor sea el número de rectángulos se tiene una mejor aproximación al área de la región, así si $n \to \infty$ entonces $\Delta x \to 0$, por lo cual la longitud del intervalo tiende a cero y si tomamos un punto de él será x_i. Luego, $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

Definición: Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a,b]$ y sea P una partición de $[a,b]$. Una Suma de Riemann de $f(x)$ para P es una expresión de la forma

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Donde x_i^* es un número del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1,2,3,\cdots,n$ (Stewart, 2015)

Definición: El área de la región S que se encuentra bajo la gráfica de la función continua f definida en el intervalo $[a,b]$ es el límite de las Sumas de Riemann, esto es

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

si el límite existe (Stewart, 2015).

Nota: No es necesario que $f(x_i^*)$ sea el máximo o el mínimo. El rectángulo puede no estar inscrito ni circunscrito, $f(x)$ puede ser negativo para algún x, algunos términos de la suma de Riemann R_p pueden ser negativos.

Ejemplo 1.1.2 Hallar el área de la región entre la función $y = x^3$ y el eje x en el intervalo $[0,1]$ (Larson & Edwars, 2018).

Expresando el área como una suma de Riemann, tenemos lo siguiente:

La fórmula del área se expresa en (1.1)
Área $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ (1.1)

La fórmula de Δx se expresa en (1.2)
$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (1.2)

La fórmula para x_i se expresa en (1.3)
$x_i = 0 + i\Delta x$ (1.3)

La función está dada en (1.4)
$f(x) = x^3$ (1.4)

Los valores de a y b se expresan en (1.5)
$a = 0$ y $b = 1$ (1.5)

Se obtienen los valores de Δx y de x_i al sustituir (1.5) en (1.12) y (1.3)
$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ y $x_i = 0 + i\Delta x = i\Delta x = i\frac{1}{n}$ esto es $x_i = \frac{1}{n}i$ (1.6)

Se obtiene $f(x_i)$ al sustituir (1.6) en (1.4)
$f(x_i) = f\left(\frac{1}{n}i\right) = \left(\frac{1}{n}i\right)^3 = \frac{1}{n^3}i^3$ (1.7)

Por lo que el área está dada al sustituir (1.7) y (1.6) en (1.1)
$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3} i^3 \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^4} i^3,$

Como la variable de la sumatoria es i, *n* es constante. Así
$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3$

Usando la suma de los primeros *n* términos de i^3 obtenemos (1.8)
$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} (\frac{n(n+1)}{2})^2$ (1.8)

Podemos tener una sola fracción al multiplicar y aplicar la regla de L´Hospital pero no siempre es el proceso más directo, si tomamos en cuenta que

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ y en general que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ con k entero y $k \geq 0$

Es más recomendable el buscar estas formas en el límite, así, reduciendo términos semejantes tenemos

$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} (\frac{n(n+1)}{2})^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n^2}{n^2}\right)\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)(\frac{n+1}{n})^2$ (1.9)

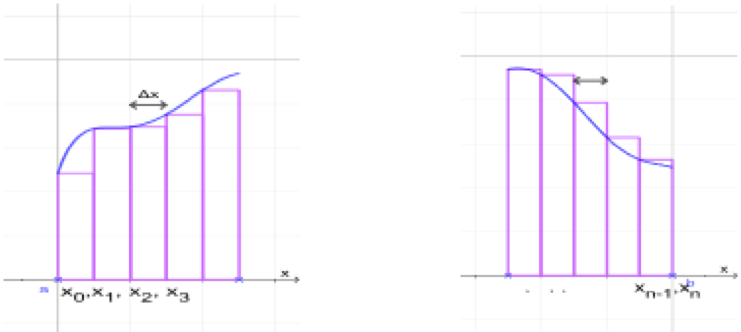
$A = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)(1 + \frac{1}{n})^2 = \left(\frac{1}{4}\right)(1) = \frac{1}{4}$ (1.10)

Luego,
el área de la región es $\frac{1}{4}$

Área por defecto y por exceso

Cuando determinamos el área de una región limitada por una curva representada por la función $y = f(x)$, podemos tomar los rectángulos inscritos o circunscritos. Si los rectángulos son inscritos tenemos que éstos quedan dentro de la región y nos aproximamos al área con un valor menor ya que falta área por cubrir, a la que se le llama área por defecto y si los rectángulos son circunscritos tenemos que éstos quedan fuera de la región y nos aproximamos al área con un valor mayor ya que sobra área, está sería el área por exceso (Gráfico 1.10).

Gráfico 1.10 Área por defecto a la izquierda y área por exceso a la derecha



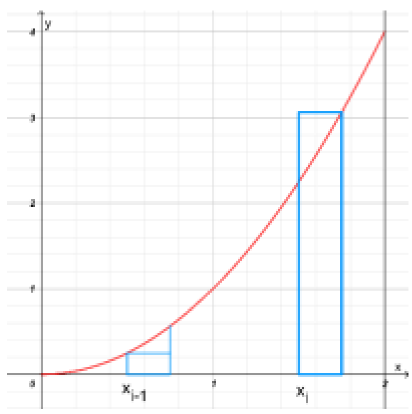
Fuente de consulta: Elaboración Propia

La función de la parte izquierda es creciente y para tener rectángulos inscritos se toma la parte izquierda de cada intervalo y la función de la parte derecha es decreciente por lo que para tener los rectángulos circunscritos se toma el extremo izquierdo del intervalo. Por lo cual no se puede generalizar que uno de los extremos de los intervalos nos genera rectángulos inscritos o circunscritos, luego cuando nos piden área por defecto es necesario graficar la función y en base a ésta, determinar qué extremo del intervalo produce el área por exceso o defecto.

En general el extremo izquierdo del intervalo se representa por x_{i-1} y varía desde $i = 0$ hasta $i = n - 1$ y la parte derecha por x_i y varía desde $i = 1$ hasta $i = n$

Ejemplo 1.1.3 Hallar el área de la región entre la parábola $y = x^2$ y el eje x en el intervalo $[0,2]$, por exceso y por defecto (Larson & Edwars, 2018).

Gráfico 1.11 Rectángulos representativos



Fuente de consulta: Elaboración Propia

A partir del Gráfico 1.11, observamos que el área por defecto se tiene en el extremo izquierdo del intervalo, esto es cuando la variable es x_{i-1} y varía desde $i = 0$ hasta $i = n - 1$ y el área por exceso en el extremo derecho del intervalo, esto es cuando la variable es x_i y varía desde $i = 1$ hasta $i = n$

Área por defecto: Hallar el área de la región entre la parábola $y = x^2$ y el eje x en el intervalo$[0,2]$.

La fórmula del límite de la suma de Riemann para área por defecto se expresa en (1.11).

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i-1})\Delta x \tag{1.11}$$

La fórmula de Δx se expresa en (1.12)

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \tag{1.12}$$

x_{i-1} está representado en (1.13)

$$x_{i-1} = 0 + (i-1)\Delta x \tag{1.13}$$

La función se expresa en (1.14) y los valores de a y b se expresan en (1.15)

$$f(x) = x^2 \tag{1.14}$$

$$a = 0 \text{ y } b=2 \tag{1.15}$$

Luego sustituyendo (1.15) en (1.12) y (1.13)

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n} \text{ y } x_{i-1} = 0 + (i-1)\Delta x = (i-1)\Delta x = (i-1)\frac{2}{n} \text{ esto es } x_{i-1} = \frac{2}{n}(i-1) \tag{1.16}$$

Así sustituyendo (1.16) en (1.14)

$$f(x_{i-1}) = f\left(\frac{2}{n}(i-1)\right) = \left(\frac{2}{n}(i-1)\right)^2 = \frac{4}{n^2}(i-1)^2 \tag{1.17}$$

Por lo que el área se obtiene al sustituir (1.16) y (1.17) en (1.11)

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{4}{n^2}(i-1)^2\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{8}{n^3}(i-1)^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{8}{n^3}(i^2 - 2i + 1)$$

La variable de la sumatoria es i, por lo que n es constante y por propiedades de la sumatoria se puede dejar fuera de ella.

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 - \frac{16}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{8}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} 1 \tag{1.18}$$

Se requiere emplear la suma de los primeros n términos de i^2 para i desde 0 hasta $n-1$.

Anteriormente se definió la sumatoria de enteros, de cuadrados y cubos desde $i = 1$ hasta n, pero ahora requerimos

Desde $i = 0$ hasta $n-1$,

Los primeros n términos de i^2 para $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, se convierte en

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \tag{1.19}$$

Los primeros n términos de i para $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ se convierte en

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2} \tag{1.20}$$

Y finalmente la sumatoria de la constante $\sum_{k=1}^{n} c = nc$ se convierte en $\sum_{k=0}^{n-1} c = (n-1)c$. (1.21)

Sustituyendo (1.19), (1.2.20) y (1.21) en (1.18)

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) - \lim_{n\to\infty} \frac{16}{n^3}\left(\frac{(n-1)n}{2}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3}(n-1)$$

Tomando en cuenta que

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ y en general que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ con k entero y $k \geq 0$

Se tiene

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{6}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{n^3}\right) - \lim_{n\to\infty} \frac{16}{2}\left(\frac{(n-1)n}{n^3}\right) + \lim_{n\to\infty} 8\left(\frac{n-1}{n^3}\right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \lim_{n\to\infty} 8\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n}{n^2}\right) + \lim_{n\to\infty} 8\left(\frac{n-1}{n^3}\right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) - \lim_{n\to\infty} 8\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} 8\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)$$

$$A = \frac{4}{3}(1-0)(2-0) - 8(1-0)(0) + 8(0-0) = \frac{4}{3}(1)(2) - 8(1)(0) + 8(0) = \frac{8}{3}$$

Luego el área de la región es $\frac{8}{3}$

El área de la región ya sea por exceso o por defecto debe de ser la misma.

Área por exceso: Como ya se dijo el área por exceso se tiene en el extremo derecho del intervalo, esto es cuando la variable es x_i y varía desde $i=1$ hasta $i=n$.

Así, tenemos que el área la podemos expresar como: $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, $f(x) = x^2$, $a=0$ y $b = 2$, $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ y $x_i = 0 + i\Delta x = i\Delta x = i\frac{2}{n}$ esto es $x_i = \frac{2}{n}i$, de donde $f(x_i) = f\left(\frac{2}{n}i\right) = \left(\frac{2}{n}i\right)^2 = \frac{4}{n^2}i^2$, que son las mismas condiciones que se tienen en el ejemplo 1.1.1, luego este inciso es igual al ejemplo 1.1.1.

Por lo que el área es

$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n^2} i^2 \left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8}{n^3} i^2$, con respecto a la variable de la sumatoria, *n* es constante.

$A = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$, usando la suma de los primeros *n* términos de $\boldsymbol{i}^2$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n}{6n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{3n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

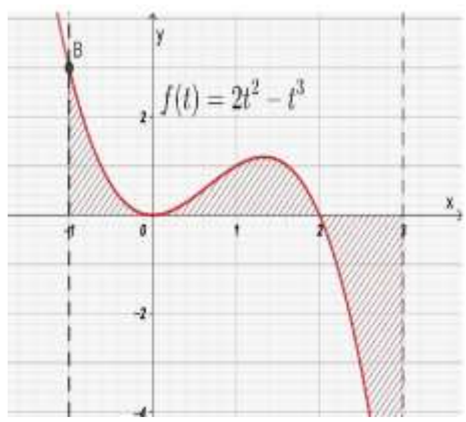
$$A = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)(1)(2) = \frac{8}{3}$$

Luego el área de la región es $\frac{8}{3}$

Cuando nos piden determinar el área entre una función y el eje x en un intervalo dado, usamos la definición y tomamos la variable que varía desde i=1 hasta n , si nos piden el área por exceso y por defecto a partir de la gráfica se determina cual es la variable, pero una de ellas se calcula igual que solo el área y la otra se calculará con la variable x_{i-1} y varía desde i=0 hasta i=n-1 cuando calculamos el área de una región es importante determinar donde la función es positiva y donde es negativa, al calcular el área de la parte negativa debemos de multiplicar por el signo negativo.

Ejemplo 1.1.4 Un automóvil recorre la carretera del sol (CDMX – Guerrero) y se quiere determinar la distancia que recorrió el automóvil en un cierto periodo de tiempo y con una velocidad variable, la función que describe su velocidad está dada en función de tiempo y es la siguiente:

Gráfico 1.12 Función f(t)=2t^2-t^3



Fuente de consulta: Elaboración Propia

$f(t) = 2t^2 - t^3$ en el intervalo de [-1 , 3]

a) Grafica la función y sombrea la distancia recorrida (área bajo la curva).

b) Determina la distancia recorrida (área bajo la curva).

Intersecciones $si\ y = 0$

$2x^2 - x^3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2(2 - x) = 0 \quad \therefore \quad x^2 = 0 \ \ y \ \ 2 - x = 0$

intersecciones en $x_1 = 0 \quad y \quad x_2 = 2$

Primer intervalo $[-1 , 2\,]$ $\quad a = -1 \ \ y \ \ b = 2$

Para obtener la primera área (que representa la primera distancia), calculemos el límite de la suma de Riemann.

$$d_1 = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta x\right) \tag{1.22}$$

Obtengamos Δx y $f(x_i)$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2+1}{n} = \frac{3}{n} \tag{1.23}$$

$$x_i = a + i\Delta x = -1 + i\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{3}{n}i - 1 \tag{1.24}$$

$$f(x_i{}^*) = f\left(\frac{3}{n}i - 1\right) = 2\left(\frac{3}{n}i - 1\right)^2 - \left(\frac{3}{n}i - 1\right)^3 = \left(\frac{3}{n}i - 1\right)^2\left(2 - \left(\frac{3}{n}i - 1\right)\right)$$

$$f(x_i{}^*) = \left(\frac{3}{n}i - 1\right)^2\left(3 - \frac{3}{n}i\right) = \left(\frac{9}{n^2}i^2 - \frac{6}{n}i + 1\right)\left(3 - \frac{3}{n}i\right)$$

$$f(x_i{}^*) = 3\left(\frac{9}{n^2}i^2 - \frac{6}{n}i + 1\right)\left(1 - \frac{1}{n}i\right) = 3\left(-\frac{9}{n^3}i^3 + \frac{15}{n^2}i^2 - \frac{7}{n}i + 1\right) \tag{1.25}$$

Obtengamos la primera área sustituyendo (1.2) y (1.24) en (1.22)

$$d_1 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta x\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} 3\left(-\frac{9}{n^3}i^3 + \frac{15}{n^2}i^2 - \frac{7}{n}i + 1\right)\left(\frac{3}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[9\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{9}{n^4}i^3 + \frac{15}{n^3}i^2 - \frac{7}{n^2}i + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$d_1 = \lim_{n\to\infty}\left[9\left(-\frac{9}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{15}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{7}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$d_1 = 9\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{9}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{15}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] - \frac{7}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + \frac{1}{n}(n)\right\}$$

$$d_1 = 9\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{9}{4}\left[\frac{n(n+1)}{n^2}\right]^2 + \frac{15}{3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{2n^3}\right] - \frac{7}{2}\left[\frac{n(n+1)}{n^2}\right] + 1\right\}$$

$$d_1 = 9\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{9}{4}\left[\frac{n+1}{n}\right]^2 + \frac{15}{3}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\right] - \frac{7}{2}\left[\frac{n+1}{n}\right] + 1\right\}$$

$$d_1 = 9\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{9}{4}\left[1 + \frac{1}{n}\right]^2 + \frac{15}{3}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right] - \frac{7}{2}\left[1 + \frac{1}{n}\right] + 1\right\}$$

$$d_1 = 9\left[-\frac{9}{4}(1+0)^2 + \frac{15}{3}(1+0)(1+0) - \frac{7}{2}(1+0) + 1\right] = 9\left[-\frac{9}{4}(1)^2 + \frac{15}{3}(1)(1) - \frac{7}{2}(1) + 1\right]$$

$$d_1 = 9\left(-\frac{9}{4} + \frac{15}{3} - \frac{7}{2} + 1\right) = 9\left(6 - \frac{23}{4}\right) = 9\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$d_1 = \boldsymbol{\frac{9}{4}\ m} \tag{1.26}$$

Para obtener el área de la región comprendida en el segundo intervalo $[2\ ,3\ ]$, se observa en el Gráfico 1.12 que la región se encuentra arriba de la curva por lo que el valor que se obtendrá será negativo y se debe multiplicar por el signo -.

Expresión del cálculo del límite de la suma de Riemann

$$d_2 = -\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta x\right) \tag{1.27}$$

Valores de a y b
$a = 2$ y $b = 3$

Sustitución de los valores de a y b en Δx

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{n} = \frac{1}{n} \tag{1.28}$$

Obtención de x_i

$$x_i = 2 + i\Delta x = 2 + i\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}i + 2 \tag{1.29}$$

Obtención de $f(x_i{}^*)$ mediante la sustitución de (7) en la función

$$f(x_i{}^*) = f\left(\frac{1}{n}i + 2\right) = 2\left(\frac{1}{n}i + 2\right)^2 - \left(\frac{1}{n}i + 2\right)^3 = \left(\frac{1}{n}i + 2\right)^2\left(2 - \left(\frac{1}{n}i + 2\right)\right) = \left(\frac{1}{n}i + 2\right)^2\left(-\frac{1}{n}i\right)$$

$$f(x_i^*) = \left(\frac{1}{n^2}i^2 - \frac{4}{n}i + 4\right)\left(-\frac{1}{n}i\right) = -\frac{1}{n^3}i^3 - \frac{4}{n^2}i^2 - \frac{4}{n}i \quad (1.30)$$

Determinación de la segunda área d_2, sustituyendo (1.28) y (1.30) en (1.27)

$$d_2 = -\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x) = -\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{n^3}i^3 - \frac{4}{n^2}i^2 - \frac{4}{n}i\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right] = -\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{n^4}i^3 - \frac{4}{n^3}i^2 - \frac{4}{n^2}i\right)\right]$$

$$d_2 = -\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{4}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right] = -\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{4}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] - \frac{4}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\right\}$$

$$d_2 = -\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{4}\left[\frac{n(n+1)}{n^2}\right]^2 - \frac{4}{3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{2n^3}\right] - 2\left[\frac{n(n+1)}{n^2}\right]\right\},$$

$$d_2 = -\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{4}\left[\frac{n+1}{n}\right]^2 - \frac{4}{3}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\right] - 2\left[\frac{n+1}{n}\right]\right\}$$

$$d_2 = -\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{n}\right]^2 - \frac{4}{3}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right] - 2\left[1+\frac{1}{n}\right]\right\},$$

$$d_2 = -\left[-\frac{1}{4}(1+0)^2 - \frac{4}{3}(1+0)(1+0) - 2(1+0)\right] = -\left[-\frac{1}{4}(1)^2 - \frac{4}{3}(1)(1) - 2(1)\right] = -\left(-\frac{1}{4} - \frac{4}{3} - 2\right)$$

Cómo se está obtenido área, al encontrarse arriba de la curva se obtiene un valor negativo, tendemos que multiplicar por el signo -.

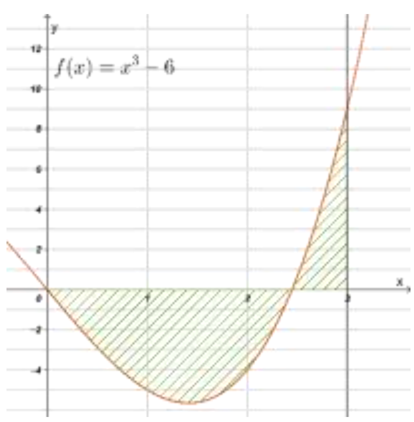
$$d_2 = -\left(-\frac{43}{12}\right) = \boldsymbol{\frac{43}{12}\ m} \quad (1.31)$$

Obtención del área total, en este caso representa la distancia total recorrida, para ello sumamos (1.26) y (1.31), $d_T = d_1 + d_2 = \frac{9}{4}\ m + \frac{43}{12}\ m$

$$\boldsymbol{d_T = \frac{35}{6}\ m}$$

Ejemplo 1.1.5 Hallar el área de la región entre la función $f(x) = x^3 - 6x$ y el eje, en el intervalo $[0,3]$.

Gráfico 1.13 Gráfica de la función f(x)=x^3-6x.

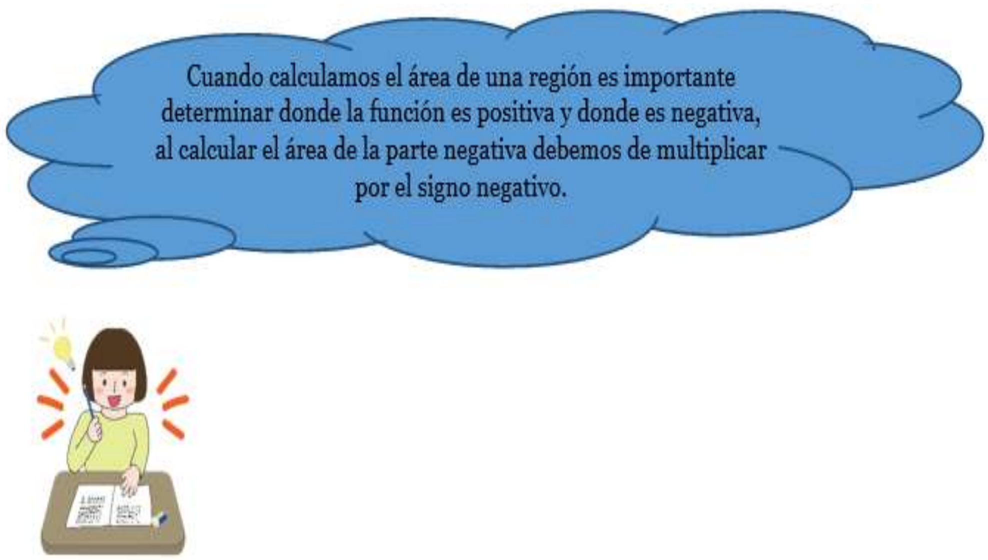


Fuente de consulta: Elaboración Propia

La función $f(x) = x^3 - 6x$ está definida en el intervalo $[0,3]$.

La región sobre la cual hay que determinar el área, marcada con verde, queda dividida en dos partes. La primera queda bajo el eje x y la segunda sobre el eje x. Recordemos que en un inicio el tema a desarrollar es **área bajo la curva** y la primera parte de la región no cumple con eso.

¿Qué sucede si calculamos el área “sobre la curva” y no bajo la curva? Si aplicamos el proceso que se llevó a cabo con la determinación del área, la diferencia se tiene en que la altura del rectángulo es un número negativo y no un número positivo y nos indica la distancia desde el eje x a la función y no de la función al eje x como sucede con el área de una función positiva, si la vemos como distancia esta debe de ser un número positivo así que podemos anteponer un signo negativo para que esta altura sea positiva y obtener ya un área positiva.



En la gráfica del Gráfico 1.13 observamos que hay una parte negativa y una parte positiva, se aprecia que la parte negativa es mayor que la positiva.

¿Esto habrá producido que el área que calculamos sea negativa?

Cuando la función es negativa en un intervalo, para calcular el área cambiamos el signo a positivo (ya que la función se refleja para que sea positiva y obtenemos el área de la función $-f(x)$.

Si tenemos una función en un intervalo que es tanto positiva como negativa es necesario dividir la parte positiva de la negativa y calcular cada una de ellas.

Así, dada $f(x) = x^3 - 6x$, debemos de dividir al intervalo [0,3] en dos, uno donde la función es negativa y el otro donde es positiva.

Trabajemos el primer intervalo $[0, \sqrt{6}]$, en donde la función es negativa.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 - 6x_i)\Delta x \qquad (1.32)$$

Determinemos el valor de Δx

$$\Delta x = \frac{\sqrt{6}-0}{n} = \frac{\sqrt{6}}{n} \qquad (1.33)$$

Así, $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\sqrt{6}}{n}, x_3 = \frac{2\sqrt{6}}{n}, x_3 = \frac{3\sqrt{6}}{n}$ y, en general $x_i = \frac{\sqrt{6}i}{n}$. (1.34)

Sustituyendo $x_i = \frac{\sqrt{6}i}{n}$ y $\Delta x = \frac{\sqrt{6}}{n}$ en la sumatoria (1.32), tenemos.

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{\sqrt{6}i}{n}\right)\frac{\sqrt{6}}{n} \ . \qquad (1.35)$$

Así como $A_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{6}}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\sqrt{6}i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{\sqrt{6}i}{n}\right) \right]$, elevando al cubo el término correspondiente (1.36)

$A_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{6}}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{6\sqrt{6}}{n^3} i^3 - \frac{6\sqrt{6}}{n} i \right]$, multiplicando por $\frac{\sqrt{6}}{n}$ tenemos

$A_1 = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{36}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{36}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right],$ (1.37)

Empleando la sumatoria de cuadrados y la sumatoria de enteros

$A_1 = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{36}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{36}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}\right\}.$ (1.38)

Finalmente, simplificando llegamos a la obtención del área correspondiente a la parte negativa de la función. $A_1 = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{36}{4}(1+\frac{1}{n})^2 - \frac{36}{2}(1+\frac{1}{n})\right]$, $A_1 = 9 - 18 = -9$ (1.39)

Como la función es negativa, entonces $A_1 = -(-9) = 9$

Trabajemos el segundo intervalo $[\sqrt{6}, 3]$, donde la función es positiva.

$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(x_i^3 - 6x_i)\Delta x$ (1.40)

Determinemos el valor de Δx

$\Delta x = \frac{3-\sqrt{6}}{n}$ (1.41)

Así, $x_0 = \sqrt{6},\ x_1 = \sqrt{6} + \frac{3-\sqrt{6}}{n}, x_3 = \sqrt{6} + \frac{2(3-\sqrt{6})}{n}, x_3 = \sqrt{6} + \frac{3(3-\sqrt{6})}{n}$ y,

en general $x_i\ \sqrt{6} + \frac{(3-\sqrt{6})i}{n}$. (1.42)

Sustituyendo en la función el valor de Δx, tenemos

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\sqrt{6} + \frac{(3-\sqrt{6})i}{n})\,\frac{3-\sqrt{6}}{n}$ (1.43)

Para no estar cargando con toda la operación, solo trabajemos con $f(x_i)$

$f(x_i) = (\sqrt{6} + \frac{(3-\sqrt{6})i}{n})^3 - 6(\sqrt{6} + \frac{(3-\sqrt{6})i}{n}$

Elevando al cubo

$f(x_i) = 6\sqrt{6} + 3(6)\left(\frac{3-\sqrt{6}}{n}\right)i + 3\sqrt{6}\,(\frac{3-\sqrt{6}}{n})^2 i^2 + (\frac{3-\sqrt{6}}{n})^3 i^3 - 6\sqrt{6} - 6\left(\frac{3-\sqrt{6}}{n}\right)i$ (1.44)

Cancelando términos semejantes.

$f(x_i) = 18\left(\frac{3-\sqrt{6}}{n}\right)i + 3\sqrt{6}(\frac{3-\sqrt{6}}{n})^2 i^2 + (\frac{3-\sqrt{6}}{n})^3 i^3 - 6\left(\frac{3-\sqrt{6}}{n}\right)i$

Reduciendo términos semejantes

$f(x_i) = 12\left(\frac{3-\sqrt{6}}{n}\right)i + 3\sqrt{6}(\frac{3-\sqrt{6}}{n})^2 i^2 + (\frac{3-\sqrt{6}}{n})^3 i^3$ (1.45)

Trabajamos ahora con la obtención de la segunda área, determinando el límite y multiplicando lo obtenido de $f(x_i)$ por lo que equivale Δx, es decir sustituyamos (1.45) en (1.44).

$A_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\left[12\left(\frac{3-\sqrt{6}}{n}\right)i + 3\sqrt{6}(\frac{3-\sqrt{6}}{n})^2 i^2 + (\frac{3-\sqrt{6}}{n})^3 i^3\right](\frac{3-\sqrt{6}}{n})$

$A_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\left[12(\frac{3-\sqrt{6}}{n})^2 i + 3\sqrt{6}(\frac{3-\sqrt{6}}{n})^3 i^2 + (\frac{3-\sqrt{6}}{n})^4 i^3\right]$

$A_2 = \lim_{n\to\infty} 12(\frac{3-\sqrt{6}}{n})^2 \sum_{i=1}^{n} i + 3\sqrt{6}(\frac{3-\sqrt{6}}{n})^3 \sum_{i=1}^{n} i^2 + (\frac{3-\sqrt{6}}{n})^4 \sum_{i=1}^{n} i^3$ (1.46)

Sustituimos las sumatorias de cuadrados, cubos y enteros, según corresponda.

$$A_2 = \lim_{n\to\infty} 12\left(\frac{3-\sqrt{6}}{n}\right)^2 \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 3\sqrt{6}\left(\frac{3-\sqrt{6}}{n}\right)^3 \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \left(\frac{3-\sqrt{6}}{n}\right)^4 \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \tag{1.47}$$

Efectuamos operaciones entre polinomios.

$$A_2 = \lim_{n\to\infty} 6(3-\sqrt{6})^2 \left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{6}(3-\sqrt{6})^3 \left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) + \frac{1}{4}(3-\sqrt{6})^4\left(\frac{n^2}{n^2}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$
$$A_2 = \lim_{n\to\infty} 6(3-\sqrt{6})^2 \left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{6}(3-\sqrt{6})^3 \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4}(3-\sqrt{6})^4\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right.$$
$$A_2 = 6(3-\sqrt{6})^2 + \frac{1}{2}\sqrt{6}(3-\sqrt{6})^3(2) + \frac{1}{4}(3-\sqrt{6})^4$$
$$A_2 = (3-\sqrt{6})^2\left[6+\sqrt{6}(3-\sqrt{6}) + (3-\sqrt{6})^2\right]$$
$$A_2 = \left(9+6\sqrt{6}+6\right)\left[6+3\sqrt{6}-6+\frac{1}{4}\left(9-6\sqrt{6}+6\right)\right]$$
$$A_2 = \left(15-6\sqrt{6}\right)\left(\frac{15}{4}+3\sqrt{6}-\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)$$
$$A_2 = \left(15-6\sqrt{6}\right)\left(\frac{15}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)$$
$$A_2 = \frac{225}{4}+\frac{45}{2}\sqrt{6}-\frac{90}{4}\sqrt{6}-9(6) = \frac{225}{4}-54+\frac{45}{2}\sqrt{6}-\frac{45}{2}\sqrt{6}$$
$$A_2 = \frac{225}{4}-54 = A_2 = \frac{225}{4}-\frac{216}{4} = \frac{9}{4} \tag{1.48}$$

Sumando las dos áreas obtenidas (1.39) y (1.48)

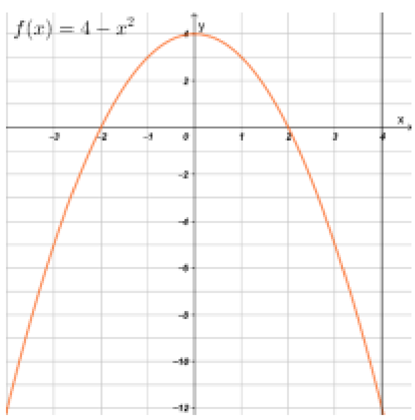
$$A = A_1 + A_2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4} \approx 11.25 \tag{1.50}$$

El área debajo de la curva $f(x) = x^3 - 6x$ es
$\mathbf{\frac{45}{4} \approx 11.25}$

Ejercicios para completar de la Lección 1.1

1. Determinemos el área debajo de la curva generada por $f(x) = 4 - x^2$ en el intervalo $[0,4]$ y el eje x, empleando la definición de sumas de Riemann, usando rectángulos inscritos

Gráfico 1.14 Representación con rectángulos inscritos



Fuente de consulta: Elaboración Propia

Determinemos el área usando **rectángulos inscritos.** En el Gráfico 1.14 Dibuja los rectángulos inscritos.

Observa que en la gráfica hay una parte negativa y una positiva.

Recuerda que debes obtener por separado las dos áreas.

La parte positiva ¿en qué intervalo se encuentra?

La parte negativa ¿en qué intervalo se encuentra?

Obtén la primera área A_1.

Como debes usar rectángulos inscritos, entonces en esta parte que la función es positiva y decreciente, ¿cuáles extremos de los rectángulos se consideran, es decir el extremo derecho o el izquierdo?

¿Qué valor tiene Δx?

Anota los valores que $x_0 =$, $x_1 =$ $x_2 =$, $x_3 =$ y $x_i =$

Al ser rectángulos inscritos y la función es decreciente y positiva, señala cuál de las dos siguientes expresiones considerarás para estimar el área. Revisa tu gráfica.

$a)$ $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

$b)$ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i-1})\Delta x$

Con base en lo anterior ¿requieres obtener $f(x_i)$ o $f(x_{i-1})$? _______.

Determina su valor

En el espacio siguiente expresa el área A_1 como el límite de la sumatoria del área de los rectángulos inscritos, empleando los valores obtenidos.

Realiza las operaciones necesarias para encontrar la primera área.

Obtén la segunda área A_2.

Como debes usar rectángulos inscritos, entonces en esta parte que la función es negativa y decreciente, ¿cuáles son los extremos de los rectángulos, los del lado derecho o izquierdo? Revisa la gráfica.

¿Qué valor tiene Δx?

Anota los valores que $x_0 =$, $x_1 =$ $x_2 =$, $x_3 =$ y $x_{i-1} =$

Al ser rectángulos inscritos y la función es decreciente y positiva, señala cuál de las dos siguientes expresiones considerarás para estimar el área. Revisa tu gráfica.

$a)$ $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

b) $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i-1})\Delta x$

Con base en lo anterior ¿requieres obtener $f(x_i)$ o $f(x_{i-1})$?

Determina su valor

En el espacio siguiente, expresa el área A_2 como el límite de la sumatoria del área de los rectángulos inscritos, empleando los valores obtenidos.

Realiza las operaciones necesarias para encontrar la segunda área A_2. Recuerda que debes multiplicar por el signo (–) para que el área sea positiva.

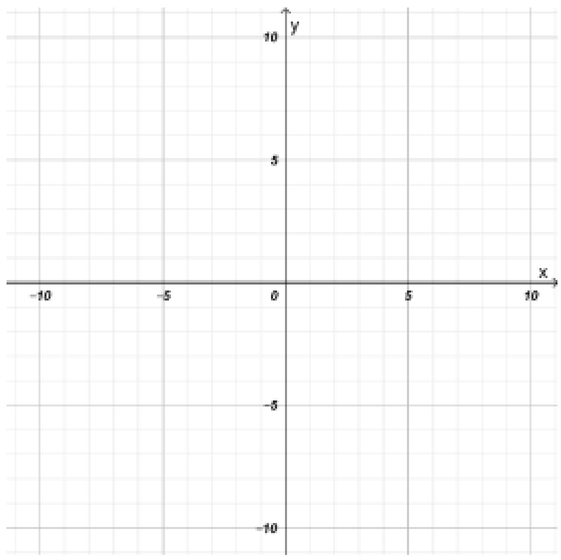
Suma ambas áreas para determinar el área total.

Actividad de la Lección 1.1

1. Una empresa de autos a escala desea realizar una calcomanía para su siguiente producto, le piden al ingeniero saber el área que ocupará la calcomanía en los modelos, si la integral es $\int_1^4 x^3\,dx$

Le solicitan que les muestre el proceso empleando sumas de Riemann, por lo que primero hace la gráfica para saber cómo procederá.

Haz la gráfica en el plano cartesiano.



¿Cuál es la fórmula que vas a emplear?

Primero se define a, b y Δx, recuerda que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

En el recuadro escribe el valor de Δx

Obtén $f(x_i)$ y escríbelo en el recuadro siguiente.

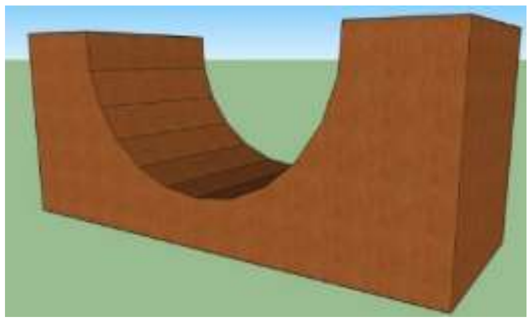
Sustituye los valores obtenidos en la fórmula $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

En el siguiente recuadro efectúa el desarrollo de la sumatoria aplicando propiedades y las fórmulas correspondientes según se requiera.

Calcula el límite de la expresión final obtenida.

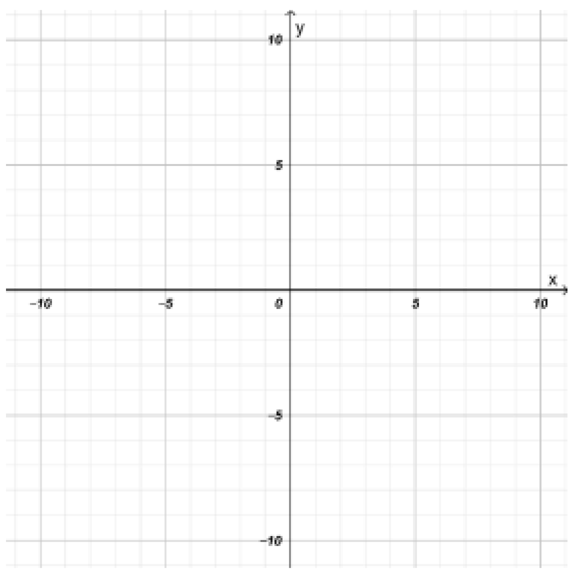
Anota la respuesta a la que llegaste.

2. En un evento de skate, Pedro quien recientemente estudió el tema de área bajo la curva en su materia de Cálculo, le interesó calcular el área bajo la mitad de una de las rampas, la cual concluyó que tiene una función f(x)= x^2-2x+3 en el intervalo [1,3].



$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(xi)\Delta x$

Haz la gráfica en el plano cartesiano.



¿Cuál es la fórmula que vas a emplear?

Primero se define a, b y Δx

Recuerda que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

En el recuadro escribe el valor de Δx

Obtén $f(x_i)$ y escríbelo en el recuadro siguiente.

Sustituye los valores obtenidos en la fórmula $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

En el siguiente recuadro efectúa el desarrollo de la sumatoria aplicando propiedades y las fórmulas correspondientes según se requiera.

Calcula el límite de la expresión final obtenida.

Anota la respuesta a la que llegaste.

Lista de ejercicios de la lección 1.1

Tabla 0.1 Lista de ejercicios de la lección 1.1

I. Calcular el área bajo la gráfica de *f* entre a y b usando: a) Rectángulos inscritos. (Área por defecto) b) Rectángulos circunscritos. (Área por exceso) c) Trace la gráfica y un rectángulo típico. 2. $f(x) = 2x - 1$ $[-1,1]$ 3. $f(x) = 4 - x^2$ $[1,3]$ 4. $f(x) = x^3 - 1$ $[0,2]$ 5. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, $[1,2]$ 6. $f(x) = x^5 + 1$ $[0,2]$ 7. $f(x) = 1 + 3x$, $[-1,5]$ 8. $f(x) = 2 + 3x - x^2$, $[1,5]$	9. $f(x) = 2 - x^2$, $[0,2]$ 10. $f(x) = 1 + 2x^3$, $[0,5]$ 11. $f(x) = x^3$, $[1,2]$ 12. $f(x) = 16 - x^2$, $[0, 2]$ 13. $f(x) = 2x + 3$, $[0,4]$ 14. $f(x) = 8 - 3x$, $[0,2]$ 15. $f(x) = x^2$, $[0,5]$ 16. $f(x) = x^2 + 2$, $[1,3]$ 17. $f(x) = 3x^2 + 5$, $[1,4]$ 18. $f(x) = 7$, $[-2,6]$ 19. $f(x) = 9 - x^2$, $[0,3]$ 20. $f(x) = 2 + 3x + 4x^2$, $[1,5]$ 21. $f(x) = x^3 + 1$, $[1,2]$ 22. $f(x) = 4x + x^3$, $[0,2]$

Fuente de Consulta: (Larson & Edwars, 2018; Stewart, 2015)

Lección 1.2 Integral definida

Investiga y Analiza

1. ¿En qué casos se usa la integral definida?

2. ¿Qué diferencia hay entre la integral indefinida y la integral definida?

1.2.1. Introducción

Continuando con los aspectos históricos del Cálculo Integral, se tiene que, en el siglo XVI, hubo un avance significativo, debido a los trabajos de dos geómetras franceses, a saber: Descartes y Pascal. El primero dio a la geometría una universalidad no alcanzada hasta entonces y consolidó una posición que permitió el descubrimiento del Cálculo a Newton y Leibniz (Mateus-Nieves, 2022).

Descartes distinguió entre dos clases de curvas, geométricas y mecánicas, las que posteriormente Leibniz denomina algebraicas y trascedentes.

Fermat, Wallis, Pascal y Barrow, durante el siglo XVI, usan cantidades infinitesimales, originando una progresiva aritmetización que condujo al uso implícito del límite. De las cuadraturas de Fermat, subyacen, tres aspectos esenciales de la integral definida: a) la división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños, b) aproximación de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales de altura dada por la ecuación analítica de la curva y c) un intento de expresar algo parecido a un límite de dicha suma cuando el número de elementos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeños (Ib.).

Mientras el cálculo de Newton es más próximo a la geometría, el de Leibniz se desarrolla hacia el análisis, con manipulación de fórmulas y poca utilización de figuras o interpretaciones geométricas (Zuin, 2001). El desarrollo del cálculo tuvo continuidad con la familia Bernoulli, Euler y Lagrange. Aspectos que son de interés para los matemáticos del siglo XVIII, que marcarían una nueva etapa en la historia del cálculo y consecuentemente en el desarrollo del concepto de integral definida.

A partir del siglo XVIII el concepto de integral pasó por un amplio proceso de fundamentación teórica, basado en el rigor, precisión de los conceptos en la búsqueda de su generalización a una clase cada vez más amplia de funciones. Cabe recordar que fue Jacques Bernoulli (1654-1705), quien usó por primera vez la expresión “integral” en su obra la isócrona en el Acta Eruditorum de 1690. Él ya había sugerido dicha expresión a Leibniz, que utilizó la expresión calculus integralis (en sustitución a calculus summatorius) para referirse al proceso inverso del calculus differentialis (Boyer, 1986).

1.2.2. Teoría y ejemplos. Propiedades de la integral definida

En el tema 1.1 se calculó el área de una región usando aproximaciones con rectángulos inscritos y circunscritos de igual anchura.

El área de una región y el eje x y la integral definida se calculan de la misma forma, esto es con Sumas de Riemann. Luego, ¿es posible determinar el área bajo la curva con una integral definida?

Definición: Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. La integral definida de f entre a y b se denota por $\int_a^b f(x)dx$ y está definida como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

si el límite existe.

Así, si deseamos determinar el valor de una integral definida, se deben determinar el límite de las Sumas de Riemann.

Ejemplo 1.2.1 Determinar $\int_{-1}^{3}(2+x^2)dx$ usando Sumas de Riemann.

De acuerdo con la definición, para determinar el valor de la integral necesitamos calcular $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ para ello, sea $f(x)=2+x^2$, $a=-1$ y $b=3$

Luego, $\Delta x=\frac{3-(-1)}{n}=\frac{4}{n}$ y $x_i=-1+i\Delta x=-1+\frac{4}{n}i$

Así, $f(x_i)=f\left(-1+\frac{4}{n}i\right)=2+\left(-1+\frac{4}{n}i\right)^2=2+1-\frac{8}{n}i+\frac{16}{n^2}i^2=3-\frac{8}{n}i+\frac{16}{n^2}i^2$

Determinemos el valor de la integral.

$$\int_{-1}^{3}(2+x^2)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(3-\frac{8}{n}i+\frac{16}{n^2}i^2\right)\left(\frac{4}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{12}{n}-\frac{32}{n^2}i+\frac{64}{n^3}i^2\right)$$

$$\int_{-1}^{3}(2+x^2)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{n}\sum_{i=1}^{n}1-\frac{32}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{64}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$\int_{-1}^{3}(2+x^2)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{n}(n)-\frac{32}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+\frac{64}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$\int_{-1}^{3}(2+x^2)dx=\lim_{n\to\infty}12-16\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)+\frac{64}{6}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$\int_{-1}^{3}(2+x^2)dx=\lim_{n\to\infty}12-16\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{32}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=12-16(1)+\frac{32}{3}(1)(2)$$

$$\boldsymbol{\int_{-1}^{3}(2+x^2)dx=12-16+\frac{64}{3}=\frac{52}{3}}$$

Ejemplo 1.2.2 Calcular el valor de la integral $\int_{0}^{3}(x^3-6x)\,dx$ usando la definición.

La definición de integral definida nos dice $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$, $f(x)=x^3-6x$, $a=0$ y $b=3$

Luego, $\Delta x=\frac{3-0}{n}=\frac{3}{n}$ y $x_i=0+i\Delta x=i\Delta x=i\frac{3}{n}$ esto es $x_i=\frac{3}{n}i$
Así, $f(x_i)=f\left(\frac{3}{n}i\right)=\left(\frac{3}{n}i\right)^3-6\left(\frac{3}{n}i\right)=\frac{27}{n^3}i^3-\frac{18}{n}i$

Por lo que la integral es.

$$\int_{0}^{3}(x^3-6x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27}{n^3}i^3-\frac{18}{n}i\right)\left(\frac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{81}{n^4}i^3-\frac{54}{n^2}i\right)$$

$$\int_{0}^{3}(x^3-6x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{81}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3-\frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{81}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{54}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$\int_{0}^{3}(x^3-6x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{81}{4}\left(\frac{n(n+1)}{n^2}\right)^2-\lim_{n\to\infty}\frac{54}{2}\left(\frac{n(n+1)}{n^2}\right)$$

$$\int_{0}^{3}(x^3-6x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{81}{4}\left(\frac{n}{n}\right)^2\left(\frac{n+1}{n}\right)^2-\lim_{n\to\infty}27\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\int_{0}^{3}(x^3-6x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\lim_{n\to\infty}27\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\int_{0}^{3}(x^3-6x)\,dx=\frac{81}{4}(1)^2-27(1)=\frac{81}{4}-27=-\frac{27}{4}$$

Luego $\boldsymbol{\int_{0}^{3}(x^3-6x)\,dx=-\frac{27}{4}}$

Cuando se trata de área y al calcular su valor obtenemos un número negativo o cero, se tiene un error ya que no puede ser que el área sea un número negativo o cero, por lo que se debe analizar la región y buscar la razón que nos lleva a ese resultado y corregirlo para obtener un valor positivo; pero con una integral definida no se tiene alguna limitante, si calculamos y es un valor positivo, negativo o cero es correcto porque es el valor de la integral.

Por lo que el ejemplo 1.1.17 en el que se requirió dividir el proceso para obtener el área bajo la curva (por ser una positiva y otra negativa), ahora como solo se pide evaluar la integral, no se necesita hacer esa división.

Ahora, notamos que el determinar el área de una región limitada por una función y el eje x en un intervalo $[a,b]$ y la integral definida desde $x = a$ hasta $x = b$ se calculan de la misma forma, esto es con el límite de las Sumas de Riemann.

Teorema: Si f es una función integrable y $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a,b]$, entonces el área bajo la gráfica de f entre a y b es $\int_a^b f(x)dx$, esto es $A = \int_a^b f(x)dx$

Veamos cuales son las propiedades de la integral definida y más adelante tratemos el problema del área bajo la curva.

Pero antes, es importante continuar con los aspectos históricos.

Cauchy redefine la integral de una función continua por medio de sumas de Riemann sobre un segmento (rompiendo así con la tradición de contemplar la integral como antiderivación y retomando entonces el punto de vista geométrico, ya iniciado por Euler y Poisson.
En la obra Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal (1823), Cauchy da la primera definición precisa de integral. En particular, propone la notación actual para una integral definida, sustituyendo la notación $\int f(x)dx\left[\begin{smallmatrix} x=b \\ x=a \end{smallmatrix}\right]$ por $\int_a^b f(x)dx,$ ya utilizada por Fourier en su Théorie analytique de la chaleur, de 1822. Vemos que Cauchy vuelve al método de exhausción, que posteriormente se denominará de "sumas de Riemann". En sus trabajos de fundamento del cálculo integral Cauchy formaliza muchas de las propiedades actualmente conocidas y las expresa con la nueva notación (Mateus-Nieves, 2022).

Los teoremas que a continuación se muestran son las propiedades de la integral definida, formalizadas por Cauchy.

Teorema 1. Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ o si f tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades de salto, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe y $f(x)$ es integrable en $[a,b]$ (Larson & Edwars, 2018).

Teorema 2. Si f es una función integrable en un intervalo $[a,b]$, entonces $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ (Larson & Edwars, 2018).

Teorema 3. Si f es una función integrable en un intervalo $[a,b]$, entonces $\int_a^a f(x)dx = 0$ (Larson & Edwars, 2018).

Teorema 4. $\int_a^b Cdx = C(b-a)$, para cualquier constante C.

Teorema 5. Si f y g son funciones integrables en un intervalo $[a,b]$, entonces $f + g$ y Cf son integrables para cualquier constante C y

$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$

Con este teorema se obtiene en particular que $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Teorema 6. Sea $a \leq b \leq c$ y supongamos que $f(x)$ es integrable. Entonces:

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Demostraremos dos de estos teoremas.

Teorema 3. Si f es una función integrable en un intervalo $[a, b]$, entonces $\int_a^a f(x)dx = 0$

Demostración. Como la función f es integrable en el intervalo $[a,b]$, por definición $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$.

Determinemos el valor de la integral $\int_a^a f(x)dx$, en este caso se tiene que $\Delta x = \frac{a-a}{n} = 0$. Luego, $\int_a^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 0 = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

Y con esto el teorema se cumple.

Teorema 5. Si f y g son funciones integrables en un intervalo $[a,b]$, entonces $f + g$ y Cf son integrables, para cualquier constante C y

$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$

Demostración. Como la función f y g son integrables en el intervalo $[a,b]$, por definición $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ y $\int_a^b g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x$

Determinemos el valor de la integral $\int_a^b (f(x) + g(x))dx$
$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) + g(x_i)\big)\Delta x$

Por propiedades de la sumatoria
$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i)\Delta x + g(x_i)\Delta x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x$

Debido a que las funciones f y g son integrables
$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx$

Determinemos ahora, el valor de $\int_a^b Cf(x)dx$
$\int_a^b Cf(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Cf(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} C \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = C\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = C\int_a^b f(x)dx$

Con lo que queda demostrado el teorema.

Ejemplo 1.2.1 Sabiendo que $\int_0^5 f(x)dx = 5$ y que $\int_0^5 g(x)dx = 12$, y usando las propiedades de la integral calcular el valor de las integrales siguientes.

a)$\int_0^5 \big(f(x) + g(x)\big)dx$, b)$\int_5^0 g(x)dx$ y c)$\int_0^5 \left(2f(x) - \frac{1}{3}g(x)\right)dx$

a)$\int_0^5 \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_0^5 f(x)dx + \int_0^5 g(x)dx = 5 + 12 = 17$

b)$\int_5^0 g(x)dx = -\int_0^5 g(x)dx = -12$

c)$\int_0^5 \left(2f(x) - \frac{1}{3}g(x)\right)dx = \int_0^5 2f(x)dx + \int_0^5 -\frac{1}{3}g(x)dx = 2\int_0^5 f(x)dx - \frac{1}{3}\int_0^5 g(x)dx = 2(5) - \frac{1}{3}(12) = 10 - 4 = 6$

Ejemplo 1.2.2 Expresa la diferencia $\int_c^{c+h} f(x)dx - \int_c^h f(x)dx$ como una sola integral.

Tenemos una propiedad que nos dice que, si tenemos una suma de integrales con la característica que el límite superior de una de ellas es igual al límite inferior de la otra, esta es igual a una integral, ésta es: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)dx$

Así que busquemos esta característica en la expresión que nos dan $\int_c^h f(x)dx = -\int_h^c f(x)dx$
Luego,
$\int_c^{c+h} f(x)dx - \int_c^h f(x)dx = \int_c^{c+h} f(x)dx - \left(-\int_h^c f(x)dx\right) = \int_c^{c+h} f(x)dx + \int_h^c f(x)dx = \int_h^c f(x)dx + \int_c^{c+h} f(x)dx = \int_h^{c+h} f(x)dx$

Por lo tanto $\int_c^{c+h} f(x)dx - \int_c^h f(x)dx = \int_h^{c+h} f(x)dx$

Hasta este momento es posible calcular integrales indefinidas, por medio de las antiderivadas y una integral definida por sumas de Riemann, pero se debe de tener el modo de calcular el valor de una integral definida usando lo conocido en integrales indefinidas y no solo con sumas de Riemann, el uso de sumas de Riemann además es limitante para el tipo de función. Esto nos lo permite el Teorema Fundamental del Cálculo.

1.2.3. Teorema Fundamental del Cálculo

En el libro de Stewart, se plantea lo referente al Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) como sigue:

El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del Cálculo: el Cálculo diferencial y el Cálculo integral. El Cálculo diferencial surgió del problema de la recta tangente, mientras que el Cálculo integral lo hizo de un problema en apariencia no relacionado, el problema del área. El profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descubrió que en realidad estos dos problemas estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dio cuenta de que la derivación y la integración son procesos inversos. El teorema fundamental del cálculo precisa la relación inversa entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz explotaron esta relación y la usaron para desarrollar el cálculo como un método matemático sistemático. En particular, observaron que el teorema fundamental les permitía calcular con gran facilidad áreas e integrales, sin tener que calcularlas como límites de sumas (Stewart, 2015, pág. 386).

El Teorema Fundamental del Cálculo establece que si derivamos la integral de una función obtenemos la misma función (que está representada por el integrando. Esto es, “Sea f una función continua en el intervalo [a,b],

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces $g'(x) = f(x)$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$ donde F es una antiderivada de f, es decir $F'^{(x)} = f(x)$ (Stewart, 2015).

La primera parte de este teorema se puede denominar como la parte dinámica o acumulativa, la segunda, como la parte evaluativa. En los trabajos de Newton, se evidencia la forma en la que emergió este teorema, además de su cambio de notación y cómo se robustecía con el pasar de los años. Entre todas las versiones de Newton, la que se encuentra en los manuscritos de octubre de 1666, es la versión más completa de su TFC.

De acuerdo con Muñoz (2022):

"*En el cálculo de Newton, el movimiento de un punto genera una recta, y el movimiento de una recta genera una superficie. Para Newton, las cantidades generadas por un flujo son llamadas fuentes y sus velocidades instantáneas son las fluxiones. Para él, lo que hoy conocemos como el TFC, emergió cuando el algoritmo inverso que resuelve el problema de las tangentes resolvió el problema de las áreas. En 1665 Newton ya tenía el argumento de relacionar los movimientos que describen dos segmentos, es así como usó la notación* $\frac{q}{p}$ *para dicha relación descrita por los segmentos y , que en notación moderna podría entenderse como* $\frac{dy}{dx}$ *. Luego el TFC podría verse desde la igualdad* $\frac{q}{p} = f(x)$ *si f (x) describe una relación entre x y y".* (Ib. p.32)

"*Newton supo en 1665, utilizando la notación moderna, que para calcular el área bajo una curva* y *debía buscar una curva z tal que:* $\int y dx = \int \frac{3x^2}{a} dx = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{a}\right) dx = z$*. La parte evaluativa del TFC dice que basta un conocimiento de la curva z (la antiderivada de y) para hallar la cuadratura del área bajo la curva y, porque el área es proporcional a la diferencia de las ordenadas de z, es decir,* $\int_a^b y dx = z(b) - z(a)$ *".* (Ib. p. 33)

En el siguiente recuadro presentamos el TFC.

Teorema Fundamental del Cálculo

Parte I
Si la función f está definida como
$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para toda x en [a, b], entonces F es una antiderivada de f en [a,b].

Parte II
Si F es cualquier antiderivada de f en [a ,b], entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

En resumen, tenemos lo siguiente: La primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la derivada y la integral son operaciones inversas, lo cual podemos aplicar del modo siguiente.

La derivada de la integral es igual a la función del integrando, evaluada en la variable *x* $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$ y, la integral de la derivada de la función es igual a la función $\int_a^x f'(t)dt = f(x)$

La segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo nos permite calcular las integrales definidas usando las antiderivadas, ya que nos asegura que si F es una antiderivada de la función que se integra *f* entonces, la integral de a hasta b es igual a la antiderivada evaluada en el límite superior de la integral menos la antiderivada de la función evaluada en el límite inferior, esto es $F(b) - F(a)$.

Ejemplo 1.2.3 Dada $f(x) = \cos(x)$, continua en el intervalo $[0,2\pi]$, si x es un punto dentro del intervalo, se puede definir: $F(x) = \int_0^x \cos(t)\, dt$ (1.51)

Entonces: $F'(x) = \frac{d}{dx}(\int_0^x cos(t)\, dt) = \frac{d}{dx}\left(sen(x) - sen(0)\right) = \cos(x)$ (1.52)

Como puede observarse, se cumple que: $f(x) = F'(x)$ (segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo).

Ejemplo 1.2.4 Sea $g(x) = \int_1^x (t^2 - 2)dt$. (1.53)

Calcular $g(1), g'(1)$ y $g'(2)$. Determinar una fórmula para $g(x)$.

$g(1) = \int_1^1 (t^2 - 2)dt = 0$, por propiedad de integral definida, (1.54)

Luego,

$\boldsymbol{g(1) = 0}$

Para determinar $g'(1)$ y $g'(2)$ primero calculemos cual es la derivada de la función g, esto es $g'(x)$

$g'(x) = \frac{d}{dx}g = \frac{d}{dx}\int_1^x (t^2 - 2)dt = x^2 - 2$, por el Teorema Fundamental del Cálculo primera parte, así

$g'(x) = x^2 - 2$ (1.55)

Luego,
$g'(1) = (1)^2 - 2 = -1$ y $g'(2) = (2)^2 - 2 = 2$ (1.56)

Para determinar $g(x)$
$g(x) = \int_1^x (t^2 - 2)dt \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}t^3 - 2t|_1^x = \frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{3}(1)^3 + 2(1) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + \frac{5}{3}$, aplicando la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo. (1.57)

$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + \frac{5}{3}}$,

Ejemplo 1.2.5 Hallar una fórmula para la función representada por la integral $g(x) = \int_{3\sqrt{x}}^{x^{\frac{3}{2}}} t^3 dt$.

Determinemos la función $g(x)$ aplicando la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo.

$g(x) = \int_{3\sqrt{x}}^{x^{\frac{3}{2}}} t^3 dt = \frac{1}{4}t^4|_{3\sqrt{x}}^{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^4 - \frac{1}{4}\left(3\sqrt{x}\right)^4 = \frac{1}{4}\left(x^{\frac{12}{2}}\right) - \frac{1}{4}(3)^4\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4 = \frac{1}{4}x^6 - \frac{81}{4}x^2$ (1.58)

$\boldsymbol{g(x) = \int_{3\sqrt{x}}^{x^{\frac{3}{2}}} t^3 dt = \frac{1}{4}x^6 - \frac{81}{4}x^2}$

Ejemplo 1.2.6 Sea $G(x) = \int_0^x \left[s\int_0^s f(t)\ dt\right]\ ds$, donde *f* es continua para todo *t* real. (1.59)

Determinar a) $G(0)$, b) $G'(0)$, c) $G''(x)$ y d) $G''(0)$

a) $G(0) = \int_0^0 \left[s\int_0^s f(t)\ dt\right]\ ds = 0$, por la propiedad de la integral definida. (1.60)

$\boldsymbol{G(0) = 0}$

b) $G'(0)$, primero calculemos $G'(x)$, a partir de la expresión de G, tenemos.

$G'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \left[s\int_0^s f(t)\ dt\right]\ ds = x\int_0^x f(t)\,dt,$ (1.61)

debido al Teorema Fundamental del Cálculo la derivada de la integral es igual al integrando evaluado en la variable que es límite superior.

Luego, $G'(0) = 0\left(\int_0^0 f(t)\,dtdt\right)$ =0 (1.62)

$\boldsymbol{G'(0) = 0}$

c) $G''(x)$

En el inciso (b) calculamos la derivada de G, así para determinar la segunda derivada de G, usemos el resultado obtenido en (b).

$G''(x) = \frac{d}{dx}G'(x) = \frac{d}{dx}\left[x\int_0^x f(t)\,dt\right] = x\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt\frac{d}{dx}x = xf(x) + \int_0^x f(t)\,dt$

$G''(x) = xf(x) + \int_0^x f(t)\,dt$ (1.63)

d) $G''(0)$, usando el resultado del inciso (c)

$G''(0) = 0\big(f(0)\big) + \int_0^0 f(t)\,dt = 0 + 0 = 0$ (1.64)

$\boldsymbol{G''(0) = 0}$

Ejercicios para completar de la Lección 1.2

3. Calcular la derivada $\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} tan\, t\, dt.$

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice

En donde F es cualquier antiderivada de *f*, esto es, una función tal que F'=*f*

Luego, $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = \frac{d}{dx}\big(F(b) - F(a)\big) = \frac{d}{dx}F(b) - \frac{d}{dx}F(a) = F'(b) - F'(a) = f(b) - f(a)$

Como la expresión que nos piden determinar los límites de la integral no son constantes, entonces al calcular la derivada usamos la regla de la cadena, así

$\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} tan\, t\, dt =$

En este espacio desarrolla el proceso de acuerdo con el principio fundamental del Cálculo.

Entonces se obtiene $\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} tan\, t\, dt = 2x\, tan(x^2) - \frac{1}{2\sqrt{x}}tan\big(\sqrt{x}\big)$

4. Calcular la derivada $\frac{d}{dt}\int_{100}^{t} sec(8x - 3)\,dx.$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo obtén lo que se solicita. Recuerda que la derivada de la integral es la función del integrando evaluada en la variable del límite superior de la integral.

Resuelve en el siguiente recuadro.

5. Sea $g(x) = \int_2^x (t^3 - 6)\, dt$ Calcular $g(2),\ g'(2)\ y\ g'(3)$ $g(2) = \int_2^2 (t^3 - 6)\, dt$

Recordando la propiedad que dice $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

entonces $g(2) = \int_2^2 (t^3 - 6)\, dt =$

$g'(x) = \frac{d}{dx} g = \frac{d}{dx} \int_2^x (t^3 - 6)\, dt =$

$g'(2) =$

$g'(3) =$

Actividad de la Lección 1.2

1. Dada la función $f(x) \int_1^{x^2} e^{t^2}\, dt$ encontrar F'(x) empleanado el teorema Fundamental del Cálculo

$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_1^{x^2} e^{t^2}\, dt =$

2. Calcule la derivada de $\frac{d}{dx} \int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2} dt$ empleando el teorema Fundamental del Cálculo

$\frac{d}{dx} \int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{d}{du} \int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2} dt \cdot \frac{du}{dx}$

Regla de la cadena

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dx}$

Teniendo que

$u = \operatorname{sen} u \rightarrow \frac{du}{dx} = \cos u$

Lista de Ejercicios de la Lección 1.2

Instrucciones: Evalué las integrales definidas utilizando la definición.

1.$\int_{-10}^{10}(x^2+x)dx$

2.$\int_0^5 f(x)dx$ si $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$

3.$\int_{-2}^{1}(2x+\pi)dx$

4.$\int_{-2}^{1}(3x^2+2)dx$

5.$\int_{-1}^{5} f(x)dx$si $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si -1} < x \leq 1 \\ 4 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -2(x-5) & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$

6. Sea c un número real y $f(x)$ = c para todo x. Sea P una partición arbitraria de [a, b]. Demostrar que cualquier suma de Riemann de f es igual a c(b – a). Usando este hecho demostrar que $\int_a^b cdx = c(b-a)$. Interpretar geométricamente para c>0.

7. Demuestre que $\int_a^b xdx = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$ completando el argumento siguiente para la partición: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Elíjase $w_k = \frac{1}{2}(x_{k-1}+x_k) \Rightarrow R_p = \sum_{k=1}^{n} w_k \Delta x_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k + x_{x-1})(x_k - x_{x-1})$. Simplifique R_p (suma telescópica) y tómese el límite.

8. Demuestre que $\int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$ utilizando un argumento parecido al problema anterior con $w_k = \left[\frac{1}{3}({x_k}^2 + x_k x_{k-1} + {x^2}_{k-1})\right]^{\frac{1}{2}}$

9. Demuestre que, si f es continua y par en [-a, a] entonces$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

10. Demuestre que, si f es continua e impar en [-a, a] entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

11. Sea f una función impar y g una función par, y suponga que $\int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 g(x)dx = 3$. Determinar: a)$\int_{-1}^{1} g(x)dx$ b)$\int_{-1}^{1} |f(x)|dx$ c)$\int_{-1}^{1} -g(x)dx$ d)$\int_{-1}^{1} g(-x)dx$ e)$\int_{-1}^{1} f(-x)dx$ f)$\int_{-1}^{1} f(x)dx$

Lección 1.3 Integración Numérica

Investiga y Analiza

¿Qué otras formas conoces para resolver integrales definidas?

1.3.1. Teoría y ejemplos

Hay ocasiones en las cuales no es posible calcular el valor exacto de una integral definida, esto ocurre cuando no podemos encontrar una antiderivada. Lo que podemos hacer es aproximar el valor de la integral, recordemos que la integral definida se define como el límite de la suma de Riemann, así que de este modo se tendrá una aproximación.

Mathews y Kurtis (2000) señalan que s*e llaman Métodos de Newton-Cotes a los que se basan en integrar, en lugar de la función dada $f(x)$, un polinomio de interpolación que aproxime a $f(x)$ en [a, b]. Se trata por tanto de toda una familia general de métodos, según el polinomio de interpolación que se considere (puede elegirse diferente grado, diferentes puntos para interpolar, etc.). Para el caso de las interpolaciones lineal y cuadrática, estos métodos se denominan Método de los Trapecios y Método de Simpson, respectivamente.*

1.3.2. Regla del Trapecio

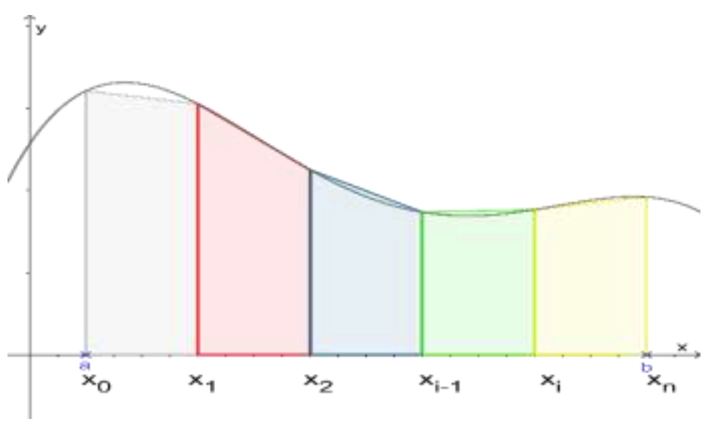
El Método de los trapecios es un Método de Newton-Cótes basado en la interpolación lineal. Es uno de los métodos más utilizados para calcular aproximaciones numéricas de integrales definidas.

Para el polinomio interpolante de primer grado se tiene:

Consideremos una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y consideremos una partición del intervalo $[a, b]$ con intervalos de longitud Δx, donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Para obtener una mejor aproximación consideremos sobre cada uno de los subintervalos de la partición un trapecio (Gráfico 1.15).

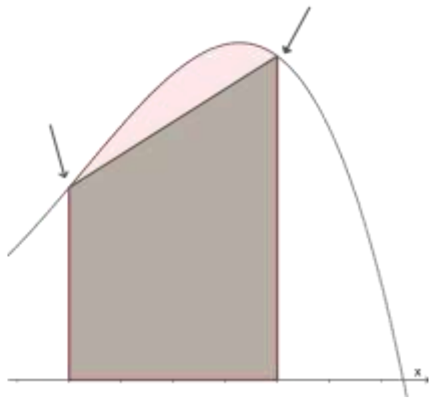
Gráfico 1.15 Representación con trapecios



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Consideremos el trapecio en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$

Gráfico 1.16 Representación con un trapecio



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

El área del trapecio es $A = \left(\frac{b+B}{2}\right) h$ (1.65)

$b = f(x_{i-1})$, $B = f(x_i)$ y $h = \Delta x$, luego

$$A_i = \left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right)\Delta x \quad (1.66)$$

Calculando el área de todos los trapecios y sumándolas tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_i + \cdots + A_n \quad (1.67)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right)\Delta x + \left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)\Delta x + \left(\frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}\right)\Delta x + \cdots + \left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right)\Delta x + \cdots + \left(\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)\Delta x \quad (1.68)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_i) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) \quad (1.69)$$

Regla del Trapecio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_i) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i\Delta x$

Ejemplo 1.3.1 Calcular el valor aproximado de la integral $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)(x+2)}$ Utilizando la regla de los trapecios compuestos con n=8 subintervalos.

Dividimos el intervalo [0,1] en 8 subintervalos y calculamos los valores correspondientes del integrado:

x_0 0	x_1 0.125	x_2 0.25	x_3 0.375	x_4 0.5	x_5 0.625	x_6 0.75	x_7 0.875	x_8 1.0
$f(x_0)$ 0	$f(x_1)$ 0.05228	$f(x_2)$ 0.08888	$f(x_3)$ 0.11483	$f(x_4)$ 0.13333	$f(x_5)$ 0.1452	$f(x_6)$ 0.15584	$f(x_7)$ 0.162319	$f(x_8)$ 0.16666

Finalmente, aplicamos la fórmula antes deducida:

$$I \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7)) + f(x_8)\right]$$

$\approx \frac{0.125}{2}$ $[0 + 2(0.05228 + 0.0888 + 0.11483 + 0.1333 + 0.14652 + 0.15584 + 0.162319) + 0.1666]$ (1.70)

$\approx$ **0.117166**

Evaluar exactamente el valor de la integral y compárese con el valor aproximado obtenido.

De forma exacta:

$$I = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx = \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\rightarrow x = A(x+2) + B(x+1) \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow A = -1 \\ x = -2 \rightarrow B = 2 \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2}\right) dx = -\log(x+1) + 2\log(x+2)\,|_0^1 = log\frac{(x+2)^2}{(x+1)}\Big|_0^1 \log\frac{9}{2} - \log 4 \quad (1.71)$$

$\boldsymbol{I \approx 0.1177830}$

Ejemplo 1.3.2 Resuelva la siguiente integral $\int_0^1 e^x dx$. Usando la regla del trapecio con n=5.

$$\triangle\, x = \frac{b-a}{n}, \quad \triangle\, x = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} \quad (1.72)$$

$$x_1 = a + i(\triangle\, x)$$
$$x_0 = (0) + (0) * 0.2 = 0$$
$$x_1 = (0) + 1 * 0.2 = 0.2$$
$$x_2 = 2 * 0.2 = .4$$
$$x_3 = (3)0.2 = 0.6$$
$$x_4 = 4(0.2) = 0.8$$
$$x_5 = 5(0.2) = 1.0$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \frac{0.2}{2}(f(0) + 2f(0.2) + 2f(0.4 + 2f(0.6) + 2f(0.8 + f(1.0)) \quad (1.73)$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \frac{0.2}{2}\left(e^{0^2} + 2e^{0.2^2} + 2e^{(0.4)^2} + 2e^{(0.6)^2} + 2e^{(0.8)^2} + e^{1^2}\right) \quad (1.74)$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 e^{x^2} dx = \frac{0.2}{2}(14\ \ .80654) = 1.4806}$$

1.3.3. Regla de Simpson

“El Método de Simpson es un método de Newton-Cótes de segundo orden, es decir basado en integrar un polinomio de interpolación de segundo grado, de la forma siguiente:

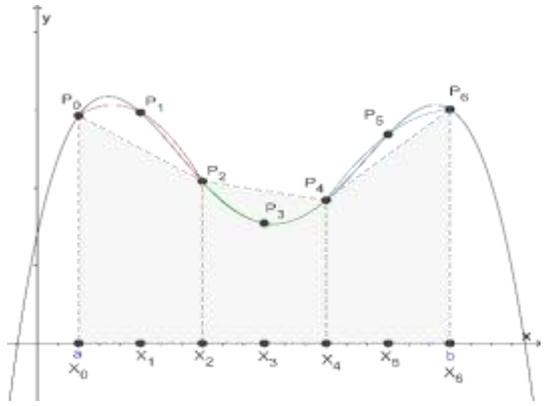
Dada la función $f(x)$ en [a, b], tomaremos como tercer punto para la interpolación el punto medio de dicho intervalo, es decir $x_m = \frac{a+b}{2}$, y denominaremos $h = \frac{b-a}{2}$ a la semianchura del intervalo” (Mathews & Kurtis, 2000). De esta forma el polinomio de interpolación de grado 2 que pasa por $(a, f(a))$, $(x_m, f(x_m))$, y $(b, f(b))$ será:

$$P_2(x) = f(a) + \frac{f(x_m) - f(a)}{h}(x - a) + \frac{f(a) - f(b) - 2f(x_m)}{2h^2}(x - a)(x - x_m) \quad (1.75)$$

Calculando la integral de $P_2(x)$ entre a y b, de manera que se obtiene

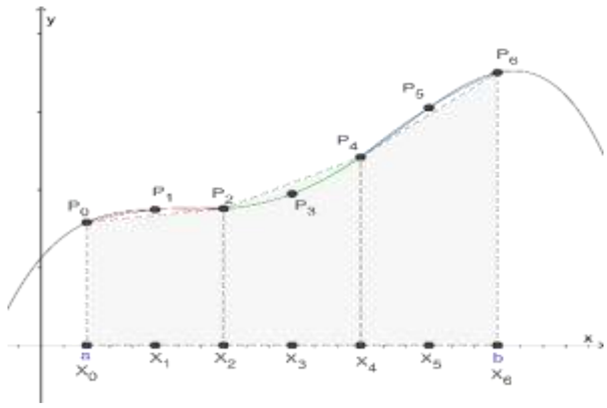
$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \int_a^b P_2(x)\, dx = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(x_m) + f(b) \quad (1.76)$$

Gráfico 1.16 Representación de puntos



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Gráfico 1.17 Representación con puntos



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Es posible generalizar (mejorando la precisión) el Método de Simpson por medio de la subdivisión del intervalo dado en otros más reducidos. De esta forma si partimos el intervalo [a, b] en n subintervalos de anchura $h = \frac{b-a}{n}$ tendremos la partición: $\{x_0, \ x_1, \dots, x_n\}$ (Mathews & Kurtis, 2000).

Tendremos entonces: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x2} f(x)\,dx + \int_{x2}^{x4} f(x)\,dx + \cdots \int_{xn-2}^{xn} f(x)\,dx$ (1.77) y los puntos $x_1, \ x_3, \dots, x_{n-1}$ representarán el papel de "puntos medios" en cada una de las aplicaciones sucesivas del método simple.

De forma explícita se obtiene: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,(f(a) + 4I + 2P + f(b))$ (1.78)

Donde I y P representan las sumas:

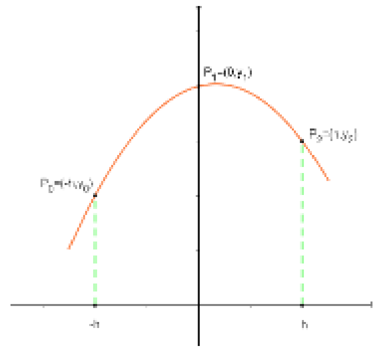
$$I = \sum_{i=2,\ impares}^{n-1} f(x_i) = f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) \quad (1.79)$$

$$P = \sum_{i=2,\ pares}^{n-2} f(x_i) = f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{n-2}) \quad (1.80)$$

Concluimos por tanto en la expresión:

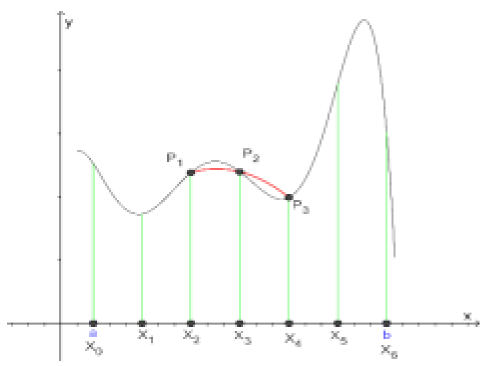
$$E \leq \left|\frac{b-a}{180} h^4 M_4\right| \quad (1.81)$$

Gráfico 1.18 Representación con 3 puntos



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Gráfico 1.19 Representación con puntos medios



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Ejemplo 1.3.3 Calcular el valor aproximado de la integral $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)(x+2)}$ utilizando la regla de Simpson compuesta con n = 8 (Mathews & Kurtis, 2000).

x_0 0	x_1 0.125	x_2 0.25	x_3 0.375	x_4 0.5	x_5 0.625	x_6 0.75	x_7 0.875	x_8 1.0
$f(x_0)$ 0	$f(x_1)$ 0.05228	$f(x_2)$ 0.08888	$f(x_3)$ 0.11483	$f(x_4)$ 0.13333	$f(x_5)$ 0.1452	$f(x_6)$ 0.15584	$f(x_7)$ 0.162319	$f(x_8)$ 0.16666

De manera que:

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7)) + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6)) + f(x_8)\right] \tag{1.82}$$

$$I \approx \frac{0.125}{3}[4(0.05228 + 0.11482 + 0.14652 + 0.162319) + 2(0.888 + 0.1333 + 0.15584) + 0.1666] \tag{1.83}$$

$\boldsymbol{I \approx 0.117773}$

Ejercicios para completar de la Lección 1.3

1. Utilizar la regla del trapecio para obtener una aproximación de la integral definida siguiente en el intervalo [0, 1] con n=5.

$\int_0^1 e^{x^3}\,dx \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} \qquad x_i = a + i\Delta x$

Completa la tabla colocando los valores correspondientes en los espacios en blanco.

x_i	$f(x_i)$	Sumando de la RT
$x_0 = (0) + (0)\left(\frac{1}{5}\right) = 0$	$f(x_0) = f(0) = e^{0^3} = 1$	$f(x_0) = 1$
$x_1 = (0) + (1)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$	$f(x_1) = f\left(\frac{1}{5}\right) = e^{\left(\frac{1}{5}\right)^3} =$ $\boxed{}$	$2f(x_1) = 2e^{\frac{1}{125}}$
$x_2 = (0) + (2)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$	$f(x_2) = f\left(\frac{2}{5}\right) = e^{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = e^{\frac{8}{125}}$	$2f(x_2) =$ $\boxed{}$
$x_3 = (0) + (3)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$	$f(x_3) = f\left(\frac{3}{5}\right) = e^{\left(\frac{3}{5}\right)^3} = e^{\frac{27}{125}}$	$2f(x_3) = 2e^{\frac{27}{125}}$
$x_4 = (0) + (4)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}$	$f(x_4) = f\left(\frac{4}{5}\right) = e^{\left(\frac{4}{5}\right)^3} =$ $\boxed{}$	$2f(x_4) = 2$
$x_5 = (0) + (5)\left(\frac{1}{5}\right) = 1$	$f(x_5) = f(1) = e^{1^3} = e$	$f(x_5) = e$

$I = f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + f(x_5)$

Sustituye los valores obtenidos para cada $f(x_i)$

$$\int_0^1 e^{x^3}\,dx \approx \frac{\frac{1}{5}}{2}\left(1 + 2e^{\frac{1}{125}} + 2e^{\frac{8}{125}} + 2e^{\frac{27}{125}} + 2e^{\frac{64}{125}} + e\right) = \frac{1}{10}(13.68599) = 1.368599$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 e^{x^3}\,dx \approx 1.368599}$$

2. Usar la regla del trapecio para aproximar el valor de la integral $\int_0^3 2x^2 + \frac{1}{x}\,dx$ con $n = 5$

$\Delta x = \frac{3-0}{5} = \frac{3}{5}$

$x_0 = 0$	$f(x_0) = f(0) = 2(0)^2 + \frac{1}{0} = 0$	$f(x_0) = 0$
$x_1 = \frac{3}{5}$	$f(x_1) = f\left(\frac{3}{5}\right) = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{\frac{3}{5}}$ $= 2\left(\frac{9}{25}\right) + \frac{5}{3}$ $= \frac{18}{25} + \frac{5}{3} = \frac{179}{75}$	$2f(x_1) = \frac{358}{75}$
$x_2 = \frac{6}{5}$	$f(x_2) = f\left(\frac{6}{5}\right) = 2\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{1}{\frac{6}{5}}$ $= 2\left(\frac{36}{25}\right) + \frac{5}{6}$ $= \frac{72}{25} + \frac{5}{6} = \frac{557}{150}$	$2f(x_2) =$ $\boxed{}$
$x_3 = \frac{9}{5}$	$f(x_3) = f\left(\frac{9}{5}\right) = 2\left(\frac{9}{5}\right)^2 + \frac{1}{\frac{9}{5}}$ $= 2\left(\frac{18}{25}\right) + \frac{5}{9}$ $= \frac{36}{25} + \frac{5}{9} = \frac{449}{225}$	$2f(x_3) = \frac{898}{225}$

$x_4 = \frac{12}{5}$	$f(x_4) = f\left(\frac{12}{5}\right) = 2\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \frac{1}{\frac{12}{5}}$ $= 2\left(\frac{144}{25}\right) + \frac{5}{12}$ $= \frac{288}{25} + \frac{5}{12} = \frac{3581}{300}$	$2f(x_4) =$
$x_5 = \frac{15}{5} = 3$	$f(x_5) = f(3) = 2(3)^2 + \frac{1}{3}$ $= 2(9) + \frac{1}{3}$ $= 18 + \frac{1}{3} = \frac{55}{3}$	$f(x_5) = \frac{55}{3}$

$I = f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) =$

Sustituye los valores obtenidos en la tabla

$I = \frac{26279}{450} \approx 58.397$

$\boldsymbol{\int_0^3 2x^2 + \frac{1}{x}\, dx \approx 58.97}$

Actividad de la Lección 1.3

1. Determinar el valor aproximado de la integral usando:

a) Regla del trapecio
b) Regla de Simpson

$\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx, \quad n = 10$

a) Empleando la Regla del trapecio

b) Empleando la Regla de Simpson

2. Determinar el valor aproximado de la integral $\int_1^4 \frac{1}{x} dx$ usando:

a) Regla del trapecio para $n = 6$
b) Regla de Simpson $n = 6$

a) Empleando la Regla del trapecio

b) Empleando la Regla de Simpson

Lista de ejercicios de la Lección 1.3

Tabla 1.3 Lista de ejercicios de la lección 1.3

Instrucciones: Determinar el valor aproximado de la integral usando: a) Regla del trapecio b) egla de Simpson 1. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx\,, \quad n = 6$ 2.$\int_0^{\frac{1}{2}} sen(e^{\frac{t}{2}})dt\,, \quad n = 8$ 3.$\int_2^3 \frac{1}{ln\,x} dx, \quad n = 10$ 4.$\int_0^1 ln(1 + e^x)dx, \quad n = 8$ 5.$\int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx \quad n = 5$ 6.$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx\,, \quad n = 4$ 7.$\int_1^3 \frac{x}{x^4+1} dx$ n=4	8.$\int_0^1 e^{x^2}\, dx \qquad n = 10$ 9.$\int_0^1 x^5 e^x dx, \quad n = 10$ 10. $\int_0^4 \sqrt{x} senx dx, \quad n = 8$ 11. $\int_0^3 \frac{1}{1+y^5} dy, \quad n = 6$ 12. $\int_0^3 \frac{1}{1+x} dx, \quad n = 8$ 13. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad n = 4$ 14. $\int_2^3 \sqrt{1 + x^3} dx, \quad n = 4$ 15. $\int_0^{0.6} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx, \quad n = 6$ 16. $\int_1^{\frac{5}{2}} \sqrt[3]{x^2 + 8} dx, \quad n = 6$ 17. $\int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx \quad n = 5$

Fuente de Consulta: (Stewart, 2015; Larson & Edwars, 2018)

Lección 1.4 Aplicaciones de la integral definida

Investiga y Analiza

1. Menciona algunas situaciones donde se aplique la integral definida.

1.4.1. Teoría y ejemplos

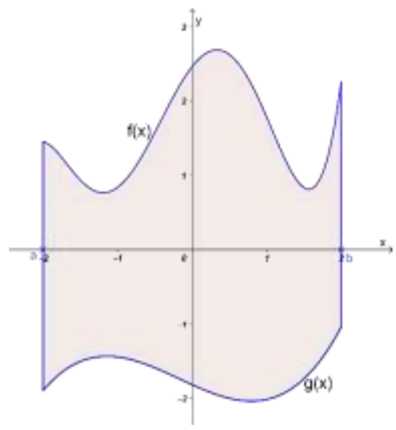
Las aplicaciones de la integral definida son muchas como es el caso de la obtención de áreas, de volúmenes, para determinar la longitud de arco, entre otras.

Anteriormente vimos que el problema de determinar el área de una región plana está ligado con el cálculo de una integral definida, a partir del análisis de una región ubicada en el plano cartesiano. Otra de las opciones es el decir que determinamos el área limitada por una función dada y el eje x en un intervalo dado.

El área bajo la curva se definió para una función positiva $f(x)$ y se calcula con la integral $\int_a^b f(x)$ y si la función es negativa en el intervalo [a, b] se determina el área como $-\int_a^b f(x)$, con lo cual se puede determinar el área de la región para una función tanto positiva como negativa.

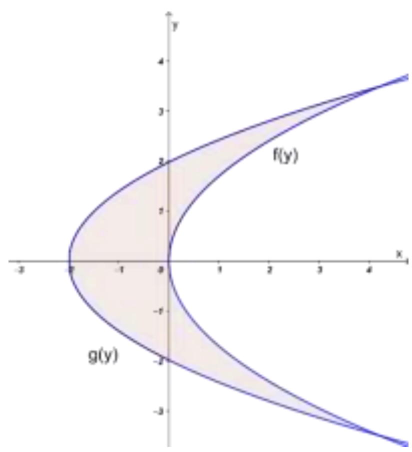
Otras regiones cuya área se puede determinar usando este hecho son como las que se muestran en los Gráficos 1.21 y 1.22.

Gráfico 1.21 ∫f(x) dx-∫g(x)dx



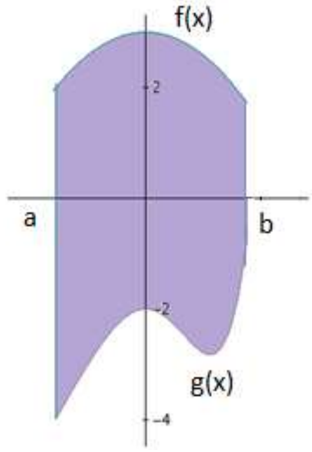
Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Gráfico 1.22 ∫f(y) dx-∫g(y)dx



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Gráfico 1.23 [∫f(x)-∫g(x)]dx



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Si usamos el concepto de área bajo la curva para determinar el área de la región tendríamos que dividir el área en dos regiones, siendo estas definidas por cada función.

Área 1, para $y \geq 0$ en el intervalo [a, b], con la función f positiva

Área 2, para $y < 0$ en el intervalo [a, b], con la función g negativa

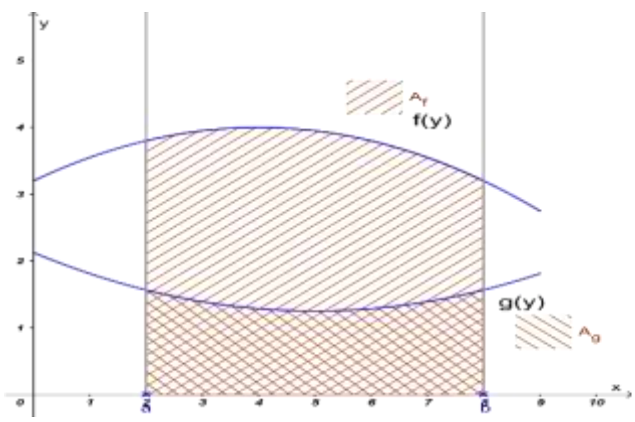
De este modo es posible determinar el área de la región, pero se tiene que dividir en regiones.

Podemos determinar el área de la región sin necesidad de dividir en varias regiones, esto es posible con el área entre curvas.

1.4.2. Área entre curvas

1.4.2.1. Teoría y ejemplos

Gráfico 1.24 f(x)≥0 y f(x)≥0



Fuente de *Consulta: Elaboración Propia*

Para determinar el área entre estas dos curvas, notamos que es igual al área bajo la curva de la función $f(x)$ (denotémosla porA_f), menos el área bajo la curva de la función $g(x)$ (dentémosla por A_g), y sabemos que:

$$A_f = \int_a^b f(x)dx \text{ y } A_g = \int_a^b g(x)dx \tag{1.84}$$

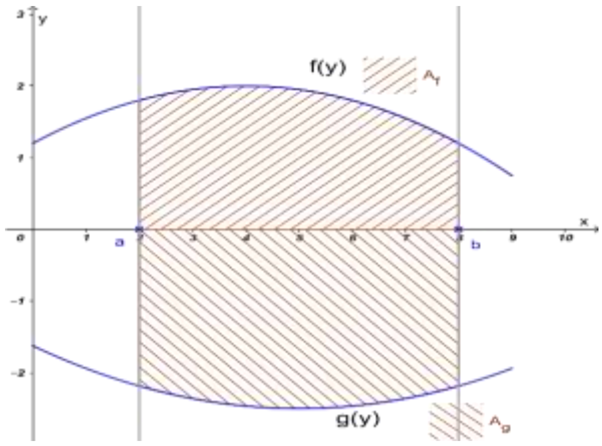
Luego,

$A = A_f - A_g = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ (1.85)

Así $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ (1.86)

Caso 2. $f(x) \geq 0$ y $g(x) \leq 0$

Gráfico 1.25 f(x)≥0 y g(x)≤0



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Para determinar el área entre estas dos curvas, notamos que es igual al área bajo la curva de la función $f(x)$ (denotémosla por A_f), menos el área bajo la curva de la función $g(x)$ (dentémosla por A_g), y sabemos que:

$A_f = \int_a^b f(x)dx$ y $A_g = -\int_a^b g(x)dx$
y por ser $g(x) \leq$ una función negativa (1.87)

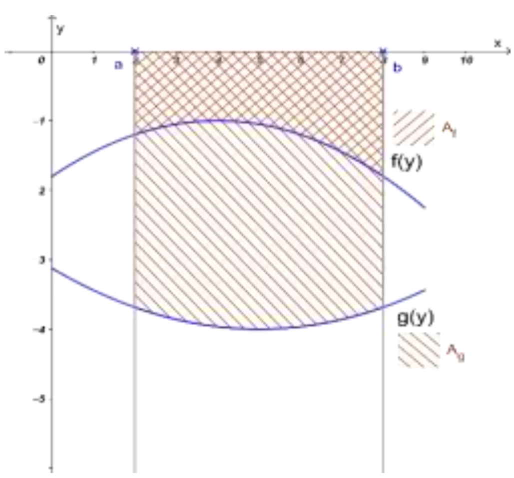
Luego,

$A = A_f - +_g = \int_a^b f(x)dx + \left(-\int_a^b g(x)dx\right) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ (1.88)

Así llegamos a la misma expresión (1.86) $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Caso 3. $f(x) \leq 0$ y $g(x) \leq 0$ y

Gráfico 1.26 f(x)≤0 y g(x)≤0



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Para determinar el área entre estas dos curvas, notamos que es igual al área bajo la curva de la función $f(x)$ (denotémosla por A_f), menos el área bajo la curva de la función $g(x)$ (dentémosla por A_g), y sabemos que:

$$A_f = -\int_a^b f(x)dx \text{ y } A_g = -\int_a^b g(x)dx \tag{1.89}$$

por ser $f(x)$ y $g(x)$ funciones negativas.

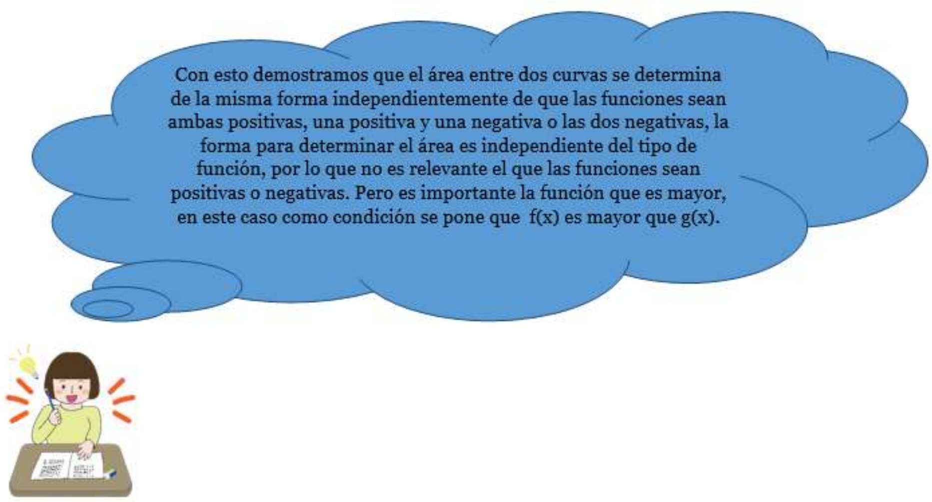
Luego,

$$A = A_g - A_f = -\int_a^b g(x)dx - \left(-\int_a^b f(x)dx\right) = -\int_a^b g(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \tag{1.90}$$

Así, también llegamos a la expresión correspondiente a (1.86).

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Definición: El área de la región limitada por las curvas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, donde f y g son continuas y $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo $[a, b]$ es:
$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ (Stewart, 2015).



Ejemplo 1.4.1: Encuentre el área de la región comprendida entre las curvas de las funciones $f(x) = 6 - 3x^2$ y $g(x) = 3x$ en el intervalo $[0.2]$.

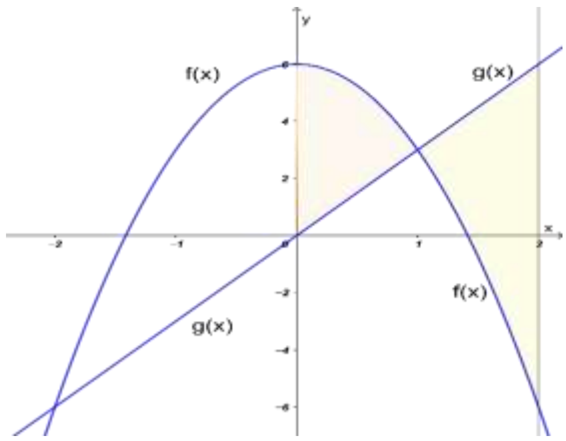
Calculando el área tenemos

$$A = \int_0^2 (6 - 3x^2 - 3x)dx = (6 - 3x^2 - 3x)|_0^2 = \left(12 - 8 - \frac{3}{2}(4)\right) - 0 = 4 - 6 = -2 \tag{1.91}$$

Nuevamente nos encontramos con un área negativa, lo cual nos indica que hay un error, anteriormente vimos que no importaba si las funciones eran positivas o negativas, al restarle al área mayor, la menor, nos da un valor positivo. Pero aquí estamos obteniendo un signo negativo, para encontrar el error grafiquemos las funciones y analicemos la situación.

El Gráfico 1.27 nos muestra que el área que se encuentra entre las dos curvas f y g y entre los dos puntos donde se intersecan, la función $f(x)$ es mayor que la función $g(x)$.

Gráfico 1.27 Área comprendida entre f(x) y g(x), en el intervalo [0,2]



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Observamos que $f(x)$ está arriba y la función $g(x)$ está abajo, por lo que al cumplir esta condición el área que se obtenga es positiva. Sin embargo, no nos piden esta área, que es la que se tiene entre los puntos de intersección de las dos funciones, sino el área entre las funciones en un intervalo dado en $[0,2]$, lo cual cambia la región como se muestra en el mismo Gráfico 1.27.

El área que solicitan es la que se encuentra sombreada y va de 0 al punto de intersección de las funciones y del punto de intersección a 2.

En el primer intervalo la función mayor es $f(x)$ (la parábola) y la función menor es $g(x)$ (la recta) tal y como indica el problema; y en el segundo intervalo se intercambian, la mayor es $g(x)$ y la menor $f(x)$, si no se invierten las funciones el signo cambia. Esta es la razón de que en el cálculo que se hizo y que se muestra en la expresión (1.91), se obtuviera un número negativo.

Así que empecemos por determinar los puntos de intersección, la gráfica ya la hicimos y se vio que se tiene que dividir en dos regiones. Las funciones se expresan en (1.92) y (1.93).

$$f(x) = 6 - 3x^2 \tag{1.92}$$

$$g(x) = 3x \tag{1.93}$$

Obtener los puntos de intersección igualando (1.92) y (1.93) y resolviendo para x.

$$6 - 3x^2 - 3x \Rightarrow 3x^2 + 3x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -2\; y\; x = 1$$

De los dos puntos de intersección $= -2\; y\; x = 1$, el primero que es $x = -2$ queda fuera del intervalo por lo que no lo tomaremos en cuenta, y el otro, que es $x = 1$ está dentro del intervalo $[0,2]$, por lo que determinaremos dos áreas.

A_1 en $[0,1]$y 2 en $[1,2]$. Resolviendo tenemos.

$$A_1 = \int_0^1 \left(6 - 3x^2 - 3x\right)dx = 6x - x^3 - \frac{3}{2}x^2\Big|_0^1 = 6 - 1 - \frac{3}{2} - 0 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \tag{1.93}$$

$$A_2 = \int_1^2 3x - \left(6 - 3x^2\right)dx = \int_1^2 \left(3x - 6 + 3x^2\right)dx = \frac{3}{2}x^2 - 6x + x^3\Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{3}{2}(4) - 12 + 8\right) - \left(\frac{3}{2} - 6 + 1\right) = 6 - 4 - \frac{3}{2} + 5 = 7 - \frac{3}{2} = \frac{11}{2} \tag{1.94}$$

Sumando (1.93) y (1.94), obtenemos el área solicitada.

$$A = A_1 + A_2 = \frac{7}{2} + \frac{11}{2} = \frac{18}{2} = 9 \tag{1.95}$$
$$A = 9u^2$$

Si en vez de sumar restamos, obtenemos $A_1 - A_2 = \frac{7}{2} - \frac{11}{2} = -\frac{4}{2} = -2$ esto es equivalente al resultado que obtuvimos al inicio y es lo que sucede cuando no se analiza la gráfica de la función.

Hay libros de texto que indican que si se pone el valor absoluto es suficiente y no necesitamos verificar que función es la mayor, esto solo se cumple en el intervalo donde una función es mayor que otra, pero si este comportamiento cambia ya no es válido, por lo que primero se tiene que verificar que se cumplan las condiciones si se quiere emplear este procedimiento o podemos como se indicó, graficar y analizar.

Cuando se quiere determinar el área entre curvas se deben de graficar las funciones, analizar la región que se pide se calcule el área, determinar los puntos de intersección y calcular el área de las regiones que se obtengan, si es que se debe de dividir.

Puede suceder que las funciones que nos dan no sean funciones de *x* sino de *y* y también es posible aplicar este método, el área entre curvas para funciones de variable *y*, se define como

Definición: El área de la región limitada por las curvas de las funciones $f(y)$ y $g(y)$ y las rectas $y = c$ y $y = d$, donde f y g son continuas y $f(y) \geq g(y)$ para toda y en el intervalo $[c,d]$ es:

$$A = \int_c^d \left[f(y) - g(y) \right] dy$$

En este caso la función mayor es la que se tiene a la derecha ya que las *x* son positivas y mayores hacia la derecha, como funciones son $x = f(y)$ y $x = g(y)$.

Ejemplo 1.4.2 Encuentre el área de la región comprendida entre las curvas de las funciones $y^2 = 1 - x$ y $2y = x + 2$.

Se pide el área entre las dos funciones, pero no se da un intervalo, cuando no se da un intervalo la idea es que se determine el área limitada por los puntos de intersección de las dos funciones.

Puntos de intersección

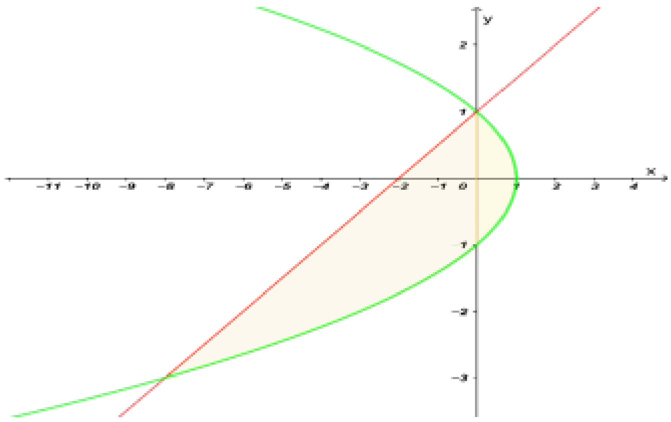
$$y^2 = 1 - x \text{ y } 2y = x + 2 \;\Rightarrow\; x = 1 - y^2 \text{ y } x = 2y - 2$$
$$1 - y^2 = 2y - 2 \;\Rightarrow\; y^2 + 2y - 3 = 0 \;\Rightarrow\; (y-1)(y+3) = 0$$
$$\Rightarrow\; y = 1 \text{ y } y = -3$$

Para estos valores de *y*, los puntos son

$y = 1 \;\Rightarrow\; x = 1 - (1)^2 = 0 \;\Rightarrow$ punto de intersección $(0,1)$ $y = -3 \;\Rightarrow\; x = 1 - (-3)^2 = 1 - 9 = -8 \;\Rightarrow$ punto de intersección $(-8,-3)$

La gráfica de la región se encuentra a la derecha (Gráfico 1.28).

Gráfico 1.28 Área comprendida entre f(y) y g(y) y los puntos de intersección



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

En este caso desde el inicio no dieron una expresión para las funciones de la forma $y = f(x)$ lo que indica que las funciones no necesariamente son de la variable *x*, y al graficar la función vemos que la parábola está a la derecha de la recta, por lo cual estamos comparando las funciones de variable *y*. Así la región es en *y* o de variable *y*.

$$A = \int_{-3}^{1} \left[\left(1-y^2\right) - \left(2y-2\right) \right] dy = \int_{-3}^{1} \left(-y^2 - 2y + 3dy\right) = -\frac{1}{3}y^3 - y^2 + 3y \Big|_{-3}^{1}$$

$$= -\frac{1}{3} - 1 + 3 - \left(-\frac{1}{3}(-27) - (9) - 9 \right) = -\frac{1}{3} + 2 - (9 - 9 - 9) = -\frac{1}{3} + 2 + 9 = -\frac{1}{3} + 11 = \frac{32}{3} \qquad (1.96)$$

$$A = \frac{32}{3} u^2$$

Pero también podemos calcular el área si se toman las funciones de variable *x* o la región en *x*, las funciones que se tienen a partir de las ecuaciones son (1.97), (1.98) y (1.99).

Como $y^2 = 1 - x$ entonces $y = \pm\sqrt{1-x}$. Considerando el signo negativo tenemos a la primera función, expresada en (1.97).

$$y = -\sqrt{1-x} \qquad (1.97)$$

Considerando el signo positivo tenemos a la segunda función expresada en (1.98).

$$y = \sqrt{1-x} \qquad (1.98)$$

y como $2y = x + 2$, se tiene $y = \frac{1}{2}(x+2)$ (1.99)

Obtengamos los puntos de intersección. Si igualamos (1.97) y (1.98) obtenemos el primer valor de x.

1) $y = -\sqrt{1-x}$ y $y = \sqrt{1-x}$

Veamos qué ocurre si elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad.

$\sqrt{1-x} = -\sqrt{1-x} \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = \left(-\sqrt{1-x}\right)^2 \;\Rightarrow\; 1-x = 1-x \;\Rightarrow\; x - x = 1 - 1$, no lleva al resultado.

Retomando la igualdad, empleemos otra estrategia

$$\sqrt{1-x} = -\sqrt{1-x} \;\Rightarrow\; \sqrt{1-x} + \sqrt{1-x} = 0 \;\Rightarrow\; 2\sqrt{1-x} = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{1-x} = 0 \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = 0 \;\Rightarrow\; 1 - x = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$$

Con este segundo camino encontramos el punto de intersección entre las dos raíces, es decir entre (1.97) y (1.98), que es $x = 1$.

Determinemos otro punto de intersección, ahora consideremos (1.98) y (1.99).

2) $y=-\sqrt{1-x}$ y $y=\frac{1}{2}(x+2)$.

Igualando y resolviendo para x tenemos

$$-\sqrt{1-x}=\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow -2\sqrt{1-x}=(x+2) \Rightarrow \left(-2\sqrt{1-x}\right)^2=(x+2)^2$$
$$\Rightarrow 4(1-x)=x^2+4x+4 \Rightarrow 4-4x=x^2+4x+4 \Rightarrow x^2+8x=0 \Rightarrow x(x+8)=0$$
$$\Rightarrow x=0 \text{ y } x=-8$$

Sin embargo, notamos en el gráfico 1.28, que la rama negativa de la parábola no se interseca en $x=0$.

Obtengamos el tercer punto de intersección igualando (1.98) y (1.99).

3) $y=\sqrt{1-x}$ y $y=\frac{1}{2}(x+2)$

$$\sqrt{1-x}=\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow 2\sqrt{1-x}=(x+2) \Rightarrow \left(2\sqrt{1-x}\right)^2=(x+2)^2$$
$$\Rightarrow 4(1-x)=x^2+4x+4 \Rightarrow 4-4x=x^2+4x+4 \Rightarrow x^2+8x=0 \Rightarrow x(x+8)=0$$
$$\Rightarrow x=0 \text{ y } x=-8$$

Sin embargo, notamos en el gráfico 1.28, que la rama positiva de la parábola no se interseca en $x=-8$. Cuando tomamos la parte negativa y positiva de la parábola y la intersecamos con la recta ambas llevan al mismo resultado, pero solo nos debería de dar un solo valor, esto sucede porque al elevar al cuadrado la raíz tanto positiva como negativa nos lleva a la misma expresión, así que la gráfica nos sirve de apoyo para la conclusión.

Así, encontramos en la región tres puntos de intersección $x=-8$, $x=0$ y $x=1$, por lo cual hay que determinar dos áreas, una primera área, A_1 en $[-8,0]$ siendo la función mayor la recta $y=\frac{1}{2}(x+2)$ y la función menor la parábola negativa $y=-\sqrt{1-x}$ y el área 2, A_2 en $[0,1]$ siendo la función mayor la parábola positiva $y=\sqrt{1-x}$y la función menor la parábola negativa $y=-\sqrt{1-x}$. Procedamos a calcular estas áreas.

Para calcular la primera área empleemos las funciones (1.97) y (1.99).

$$A_1=\int_{-8}^{0}\left[\frac{1}{2}(x+2)-\left(-\sqrt{1-x}\right)\right]dx=\int_{-8}^{0}\left(\frac{1}{2}x+1+\sqrt{1-x}\right)dx=\frac{1}{4}x^2+x-\frac{2(1-x)^{3/2}}{3}\Bigg|_{-8}^{0}$$

Ya que $\int\sqrt{1-x}dx=\int(1-x)^{1/2}dx=-\int u^{1/2}du=-\frac{2}{3}u^{3/2}=-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}$ (1.200)

Evaluando (1.200).

$$A_1=\frac{1}{4}(0)^2+0-\frac{2(1-0)^{3/2}}{3}-\left(\frac{1}{4}(-8)^2+(-8)-\frac{2(1+8)^{3/2}}{3}\right)=-\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{4}(64)-8-\frac{2(9)^{3/2}}{3}\right)$$

$$A_1=-\frac{2}{3}-(8-18)=-\frac{2}{3}-(-10)=-\frac{2}{3}+10=\frac{28}{3}$$

$$\boldsymbol{A_1=\frac{28}{3}}$$

Obtengamos la segunda área empleando las funciones (1.97) y (1.98).

$$A_2 = \int_0^1 \left[\sqrt{1-x} - \left(-\sqrt{1-x}\right)\right]dx = \int_0^1 \left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}\right)dx = \int_0^1 2\sqrt{1-x}\,dx = 2\int_0^1 (1-x)^{1/2}dx \qquad (1.201)$$

$$A_2 = -2\int u^{1/2}du = -\frac{4}{3}u^{3/2} = -\frac{4}{3}(1-x)^{3/2} = -\frac{4(1-x)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^1 = -\frac{4}{3}(1-1)^{3/2} + \frac{4}{3}(1-0)^{3/2} = \frac{4}{3}$$

$$\boldsymbol{A_2 = \frac{4}{3}}$$

Sumemos lo obtenido de (1.200) con lo determinado en (1.201).

$$A = A_1 + A_2 = \frac{28}{3} + \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$$

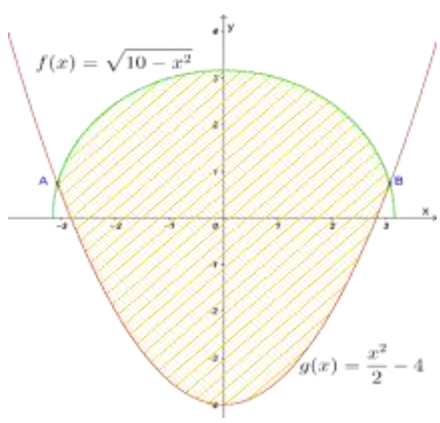
$$A = \frac{32}{3}u^2$$

Tomando la región de variable *y* o de variable *x* llegamos al mismo resultado, la diferencia está en el hecho de que un procedimiento es más directo, la idea es usar Región *x* o Región *y*, procurando el menor número de subregiones.

Ejemplo 1.4.3 Un guitarrista desea conocer el área de la imagen que representa la plumilla con la que toca su guitarra.

Las funciones que determinan su área son: $f(x) = \sqrt{10 - x^2}$ $\quad y \quad$ $g(x) = \frac{x^2}{2} - 4$

Gráfico 1.29 Área comprendida entre f(x) = y g(x)



a) Grafique la función y sombre la plumilla (área entre las curvas).
b) Encuentre los puntos de intersección entre las dos funciones.
c) Determine el área de la plumilla (área entre las curvas).

Sean

$$f(x) = \sqrt{10 - x^2} \qquad (1.202)$$

$$g(x) = \frac{x^2}{2} - 4 \qquad (1.203)$$

Encontremos los puntos de intersección igualando (1.202) y (1.203).

$$\sqrt{10 - x^2} = \frac{x^2}{2} - 4$$

$$\left(\sqrt{10-x^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{2}-4\right)^2$$

$$10-x^2 = \frac{x^4}{4}-4x^2+16 \quad\rightarrow\quad 10-16 = \frac{x^4}{4}-4x^2+x^2$$

Continuando con la obtención de los puntos de intersección, resolvamos la ecuación de cuarto grado obtenida

$$\frac{x^4}{4}-3x^2+6=0 \quad\rightarrow\quad x^4-12x^2+24=0$$

$$x^4-12x^2+36-36+24=0$$

$$(x^2-6)^2-12=0 \quad\rightarrow\quad (x^2-6)^2=12$$

$$x^2-6=\sqrt{12} \quad\rightarrow\quad x^2-6=\sqrt{(4)(3)} \quad\rightarrow\quad x^2-6=2\sqrt{3} \quad\rightarrow\quad x^2=2\sqrt{3}+6$$

$$x^2=2\left(\sqrt{3}+3\right) \quad\rightarrow\quad \sqrt{x^2}=\pm\sqrt{2\left(\sqrt{3}+3\right)} \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{2\left(\sqrt{3}+3\right)} \quad\therefore$$

Las abscisas de los puntos de intersección aparecen en la ecuación 1.204.

$$x_1=\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3} \qquad\qquad x_2=-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3} \tag{1.204}$$

Determinemos el área de la región que se encuentra entre (1.202) y (1.203) evaluando las integrales en los límites superior e inferior que corresponden a los valores que aparecen en (1.204).

$$A_p=\int_{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}[f(x)-g(x)]dx=\int_{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}\left[\sqrt{10-x^2}-\frac{x^2}{2}+4\right]dx=\int_{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}(4+\sqrt{10-x^2}-\frac{x^2}{2})dx$$

$$A_p=\int_{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}4dx+\int_{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}\sqrt{10-x^2}dx-\int_{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}\frac{x^2}{2}dx$$

Resolviendo cada una de las integrales:

$$\int_{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}\sqrt{10-x^2}dx=\int_{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2-x^2}dx=\left(\frac{x}{2}\sqrt{10-x^2}+5Arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)\right)_{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}} \tag{1.205}$$

$$\int_{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}4dx=(4x)_{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}} \tag{1.206}$$

$$\int_{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}\frac{x^2}{2}dx=\left(\frac{x^3}{6}\right)_{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}} \tag{1.207}$$

Sumemos (1.205), (1.206) y (1.207) y simplifiquemos.

$$A_p=\left(4x-\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}\sqrt{10-x^2}+5Arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)\right)_{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}$$

$$A_p=\left[4\left(\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}\right)-\frac{\left(\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}\right)^3}{6}+\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}{2}\sqrt{10-\left(\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}\right)^2}+5Arcsen\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}{\sqrt{10}}\right)\right]$$
$$-\left[4\left(-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}\right)-\frac{\left(-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}\right)^3}{6}-\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}{2}\sqrt{10-\left(-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}\right)^2}+5Arcsen\left(\frac{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}{\sqrt{10}}\right)\right]$$

$$A_p = 4\left(\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}\right) - \frac{\left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}\right)}{3} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}{2}\sqrt{10-(2)\left(\sqrt{3}+3\right)} + 5Arcsen\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}{\sqrt{10}}\right)$$
$$+4\left(\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}\right) - \frac{\left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}\right)}{3} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}{2}\sqrt{10-(2)\left(\sqrt{3}+3\right)} - 5Arcsen\left(\frac{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}{\sqrt{10}}\right)$$

$$A_p = 8\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{\sqrt{3}+3}\right) - \frac{2\left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{\sqrt{3}+3}\right)}{3} + \left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{\sqrt{3}+3}\right)\left(\sqrt{10-2\sqrt{3}-6}\right) +$$
$$5Arcsen\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}{\sqrt{10}}\right) + 5Arcsen\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}{\sqrt{10}}\right)$$

$$A_p = \left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{\sqrt{3}+3}\right)\left[8 - \frac{2\left(\sqrt{3}+3\right)}{3} + \left(\sqrt{10-2\sqrt{3}-6}\right)\right] + 10Arcsen\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+3}}{\sqrt{10}}\right)$$

$$A_p = \left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{4.7}\right)\left[8 - \frac{2(4.7)}{3} + \sqrt{10-9.5}\right] + 10(76.6°) = 3(8-3+0.7) + 10\left(\frac{383\pi}{900}\right) = 3(5.7) +$$
$$13.2 = 17.1 + 13.3$$

El área de la imagen de la plumilla es:

$$\boldsymbol{A_p = 30.4\ u^2}$$

Ejercicio para completar de la lección 1.4.2

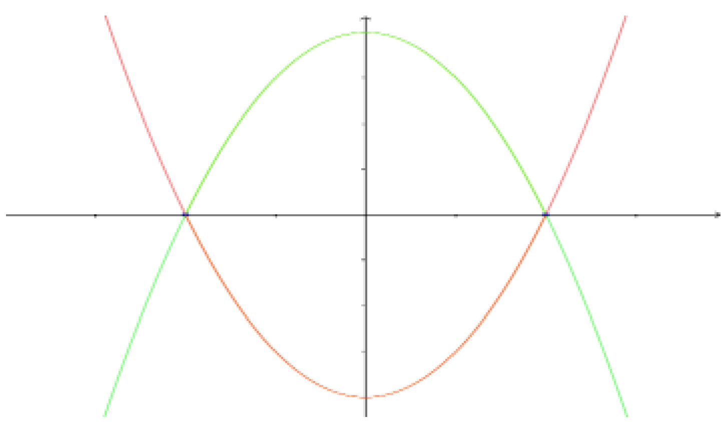
1. Encontrar el área comprendida por la función $f(x) = -x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 - 4$

Determinemos los puntos donde se intersecan las gráficas, para ello igualemos las funciones:

$$-x^2 + 4 = x^2 - 4$$
$$-x^2 - x^2 + 4 + 4 = 0$$
$$-2x^2 + 8 = 0$$
$$2x^2 - 8 = 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$x_1 = 2 \ y \ x_2 = -2$$

Enseguida graficamos (Gráfico 1.30).

Gráfico 1.30 Representación del rectángulo muestra



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Como nos podemos dar cuenta también nos conviene usar rectángulos verticales ya que de esa manera se tocan ambas funciones.

Planteamos la integral con base en la fórmula que aparece en (1.86).

$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Sustituyendo en (1.86) f(x) y g(x) obtenemos (1.208).

$$A = \int_{-2}^{2} [(-x^2 + 4) - (x^2 - 4)]dx \qquad (1.208)$$

Finalmente resolvemos la integral que aparece en (1.208).

Resuélvela en el recuadro de abajo:

Verifica que el área solicitada sea:

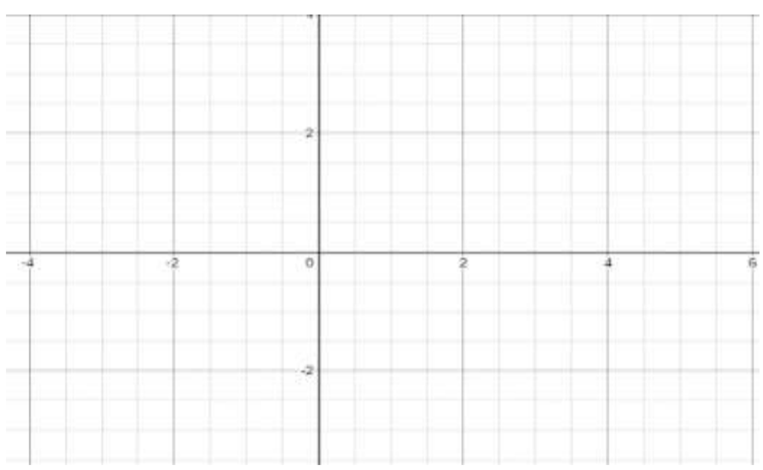
A= $\boldsymbol{\frac{64}{3} u^2}$

Actividad de la Lección 1.4.2

1. Encontrar el área comprendida por la función $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = \frac{x^2}{2}$ en el intervalo de 0 a

En este caso ya nos dan los valores de a y b por lo tanto es más sencillo y nos ahorramos este paso. Graficamos las dos funciones.

En la cuadrícula grafica las funciones.



Con qué conviene trabajar. ¿Con rectángulos verticales u horizontales?

Donde dibujaste las gráficas, dibuja un rectángulo muestra.

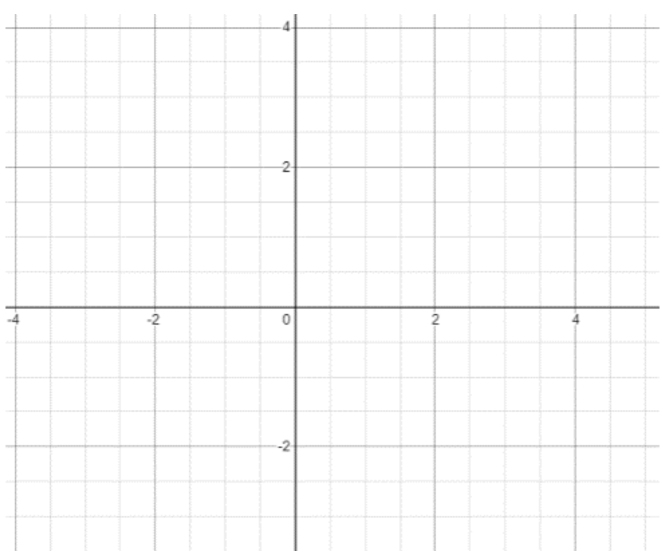
En el espacio siguiente plantea la integral y resuélvela.

Anota la respuesta.

2. Hallar el área comprendida entre las dos funciones siguientes:

$y = x^2 - 4x + 3$
$y = -x^2 + 2x + 3$

Haz la gráfica de las dos funciones y dibuja un rectángulo muestra



En el espacio siguiente plantea la integral y resuélvela.

Anota la respuesta.

Lista de Ejercicios de la Lección 1.4.2

Tabla 1.4 Lista de ejercicios de la lección 1.4.2

1. Calcular el área de la región comprendida entre las curvas $y = x+2$, $y=\sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$. 2. Calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ y $y=\sqrt{x}$ Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 1$, el eje x y las rectas $x = 1$y $x=3$ 3. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = 4 - x^2$, el eje x y las rectas $x = -4$ y $x=0$. 4. Calcular el área de la región comprendida entre las curvas $y = x+2$, $y=\sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$. 5. Calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ y $y=\sqrt{x}$. 6. Calcular el área de la región acotada por las gráficas de $y + x^2 = 6$ y $y + 2x - 3 =$ 7. Encontrar el área de la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2x - x^2$. 8. Calcular el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2x$, $y = -x + 4$, $-2 \le x \le 3$ Calcular el área de la región acotada por las gráficas de las curvas de la siguiente sección 9. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = -x^2$, $x = 1$ y $x = 2$.	10. $y = sen\ x$, $y = \cos x$, $x = 0$ y $x = \pi$. 11. $y = x^2$ y $y = 4x$ 12. $y = x^2 + 1$ y $y = 5$ 13. $y = x^{-2}$ y $y = x$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 3$. 14. $y = x\sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$. 15. Calcular el área de la región acotada por las gráficas de las funciones dadas. $y = x^2 + 2x$ y $y = -x + 4$ en $[-4,2]$ 16. $y = x^3 - 4x + 2$ y $y = 2$ en $[-1, 3]$ 17. $y = 6 - 3x^2$ y $y = 3x$ en $[0, 2]$ 18. $y^2 = 1 - x$ y $2y = x + 2$ 19. $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ y $2y + x = 0$ 20. $3y + x^2 = 6$ y $y + 2x - 3 = 0$ 21. y = sen x y y = cos x en $[0,2\pi]$. 22. $y = \ln x$, $y = 2\ln x$, $x = 1$ y $x = 5$. 23. $x = y^2$, $x = y + 2$ 24. $xy = 1, y = 0, x = 1, x = e$ 25. $y = 3^{-x}$, $x = 1, x = 2$ 26. $y = sen\left(\frac{1}{2}x\right), x = 0, x = 2$ 27. $y = senh(3x)$,y $= 0$, $x = 1$

Fuente de Consulta: (Larson & Edwars, 2018; Stewart, 2015; Zill & Wright, 2011)

Tabla 1.5 Segunda parte de la lista de ejercicios de la lección 1.4

28. $y = sen\ x$, $y = \cos\ x$, $x = 0$ y $x = \pi$.
29. $y = x^2$ y $y = 4x$
30. $y = x^2 + 1$ y $y = 5$
31. $y = x^{-2}$ y $y = x$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 3$.
32. $y = x\sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$.
33. Calcular el área de la región acotada por las gráficas de las funciones dadas. $y = x^2 + 2x$ y $y = -x + 4$ en $[-4,2]$
34. $y = x^3 - 4x + 2$ y $y = 2$ en $[-1, 3]$
35. $y = 6 - 3x^2$ y $y = 3x$ en $[0, 2]$
36. $y^2 = 1 - x$ y $2y = x + 2$
37. $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ y $2y + x = 0$
38. $3y + x^2 = 6$ y $y + 2x - 3 = 0$
39. $y = \text{sen}\, x$ y $y = \cos x$ en $[0,2\pi]$.
40. $y = \ln x$, $y = 2 \ln x$, $x = 1$ y $x = 5$.
41. $x = y^2$, $x = y + 2$
42. $xy = 1, y = 0, x = 1, x = e$
43. $y = 3^{-x}, x = 1, x = 2$
44. $y = sen\left(\frac{1}{2}x\right), x = 0, x = 2$
45. $y = senh(3x)$,y = 0, $x = 1$
46. $x = y^{\frac{2}{3}}$, $x = y^2$
47. $y = x^3$, $y = 0$
48. $y = x$, $y = 3x, x + y = 4$
49. $x - 2y = 0, x - 2y - 4 = 0, y = 3\ y = 0$
50. $y = e^{-x}, xy = 1, x = 1, x = 2$
51. $y = e^{-2x}, y = -e^x, x = 0, x = 2$
52. $y = 2^x, x + y = 1, x = 1$
53. $y = x^3 - 4x + 2$ $y = 2$, $x = -1$, $x = 3$
54. $y = x^2$, $y = x^3$, $x = -1$, $x = 2$
55. $x + 4y^2 = 4$ y $x + y^4 = 1$ para $x \leq 0$
56. $y^2 = -x$, $x - y = 4$, para $y = -1$ y $y = 2$
57. $y = 1 - x^2$, $y = x - 1$
58. $y^2 = 4 + x$, $y^2 + x = 2$
59. $y = x$, $y = 3x$, $x + y = 4$
60. $x = 4y - y^3$, $x = 0$
61. $y = -x + 2, y = 4 - x^2$ en $[-2, 3]$
62. $y = x^2 - 4, y = -x^2 - 2x$ en $[-3, 1]$
63. $y = -x^2 + 3x, y = 2x^3 - x^2 - 5x$ en $[-2, 2]$
64. $y = \frac{x^3}{3} - x, y = \frac{x}{3}$ en $[-2, 3]$
65. $y = \text{sen}\, x$, $y = \cos x$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$
66. $y = senx, y = e^x$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$
67. $y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x^2}$, $x = 2$
68. $y = x - 1, y^2 = 2x + 6$
69. $x = y^3 - y, x = 1 - y^4$
70. $y = x + 5, y^2 = x$ en $[-1, 2]$
71. $y = 1 + \sqrt{x}, y = \frac{3+x}{3}$
72. $y = cos\, x, y = sec^2\, x$ en $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
75. $y = |x|, y = x^2 - 2$
76. $y = sen\pi x$, $y = x^2 - x$, $x = 2$
77. $y = cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), y = 1 - x^2$
78. $y = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right), y = x$
79. $y = sec^2\, x, y = tan^2\, x$ en $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
80. $x = tan^2\, y, x = -tan^2\, y$ para y en $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
81. $x = 4, x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0$
82. $y = 3seny\sqrt{cos\, y}$, $x = 0$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
83. Calcular el área de la región acotada por la curva $y = \frac{x}{(2x^2+4)}$, el eje x, el eje y y la recta $x = 4$.
84. Las graficas de $f(x) = -x^2 + 10$ y $g(x) = \frac{9}{x^2}$ se cortan 4 veces, limitando 2 regiones de la misma área. Calcular el área de estas regiones.
85. Calcular el área de la región limitada por la curva $y = e^x$, los ejes coordenados y la recta $x = 2$.
86. Calcular el área de la región limitada por la curva $y = e^x$, y la recta que pasa por los puntos (0, 1) y (1, e).
87. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de $y = 5^x$ y las rectas $x = 1$ y $y = 1$.
88. Calcular el área de la región acotada por las gráficas de curva $y = e^x$ y $y = 2^x$, y la recta $x = 2$.
89. Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $y = log_{10}\, x$, $y = ln\, x$ y la recta $x = 3$
90. Determinar el área de la región acotada por la curva $y = \frac{8}{x^2-4}$, el eje x, el eje y y la recta $x = 2$.
91. Calcular el área de la región determinada por la catenaria $y = 6\, cosh\frac{x}{6}$, el eje x, el eje y y la recta $x = 6\ln 6$.
92. Determinar el área del triángulo con los vértices (a) (0, 0), (2, 1), (–1,6); (b) (0, 5), (2,–2), (5, 1).
93. Hallar el área de la región limitada por la parábola $y = x^2$, la recta tangente a esta parábola en el punto (1, 1) y el eje x.
94. Determinar el área de la región acotada por la curva $y = \frac{8}{x^2-4}$, el eje x, el eje y y la recta $x = 2$.
95. Calcular el área de la región determinada por la catenaria $y = 6\, cosh\frac{x}{6}$, el eje x, el eje y y la recta $x = 6\ln 6$.
96. Determinar el área del triángulo con los vértices (a) (0, 0), (2, 1), (–1,6); (b) (0, 5), (2,–2), (5, 1)

73. $y = cos\,x,\ y = sen2x$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

74. $y = cos\,x,\ y = 1 - \frac{2x}{\pi}$

97. Hallar el área de la región limitada por la parábola $y = x^2$, la recta tangente a esta parábola en el punto (1, 1) y el eje x.

98. Encontrar el número b tal que la recta $y = b$ divida la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones de áreas iguales.

99. (a)Hallar el número a tal que la recta $x = a$ biseque el área bajo de la curva $y = \frac{1}{x^2}$ en [1,4].

    (b) Encontrar el número b tal que la recta $y = b$ biseque el área mencionada en (a).

100. los valores de c tales que el área de la región encerrada por las parábolas $y = x^2 - c^2$ y $y = c^2 - x^2$ sea 576.

101. Suponga que $0 < c < \frac{\pi}{2}$. ¿Para qué valores de c, el área de la región encerrada por las curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$ y $x = 0$ es igual al área de la región encerrada por las curvas $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$ y $y = 0$?

102. Calcular el área de la región en el 1er, cuadrante que está acotada por la izquierda por el eje y, abajo por la curva $x = 2\sqrt{y}$, por arriba a la izquierda por la curva $x = (y - 1)^2$y por arriba a la derecha por la recta $x = 3 - y$.

103. Hallar el área de la región en el 1er. cuadrante que está acotada por la izquierda por el eje y, por abajo por la recta $y = \frac{x}{4}$, por arriba a la izquierda por la curva $y = 1 + \sqrt{x}$ y por arriba a la derecha por la curva $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$

104. Hallar el área de la región entre la curva $y = 3 - x^2$ y la recta $y = -1$ integrando con respecto a (a) variable x, (b) variable y.

105. Sea R la región acotada por las graficas de $x - 2y = 0$, $x - 2y - 4 = 0$, $y = 3$, $y = 0$. Calcule su área usando (a) integración, y (b) una fórmula de geometría.

Fuente de Consulta: (Larson & Edwars, 2018; Stewart, 2015; Zill & Wright, 2011; Ruiz, 2021)

1.4.3. Volúmenes de sólidos de revolución: discos, arandelas y capas cilíndricas

1.4.3.1 Teoría y ejemplos

Ya habíamos visto que una de las muchas aplicaciones de la integral definida es el cálculo de áreas. Otra aplicación importante es el cálculo del volumen de un sólido tridimensional cuyas secciones cónicas son similares, como, por ejemplo: embudos, ejes, píldoras, botellas, etc.

Figura 1.5 Ejemplos de sólidos tridimensionales con secciones cónicas similares

Fuente de Consulta: Elaboración Propia

La pregunta que nos surge inmediatamente es, y ahora, ¿cómo calculo este volumen?

Si una región "R" en el plano se hace girar en torno a una recta "L", generará un sólido llamado sólido de revolución, y la recta se llama eje de revolución.

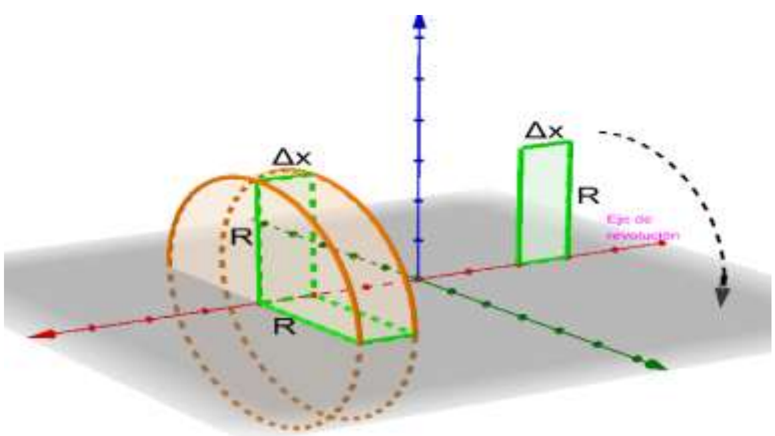
Figura 1.6 Embudo

Fuente de Consulta: Elaboración Propia

1.4.3.2. Método de Discos

El sólido de revolución más sencillo es un cilindro circular recto o disco que se forma al girar un rectángulo en torno a uno de sus lados como se muestra en el Gráfico 1.31.

Gráfico 1.31 Generación de un disco al girar el área de un rectángulo alrededor del eje x

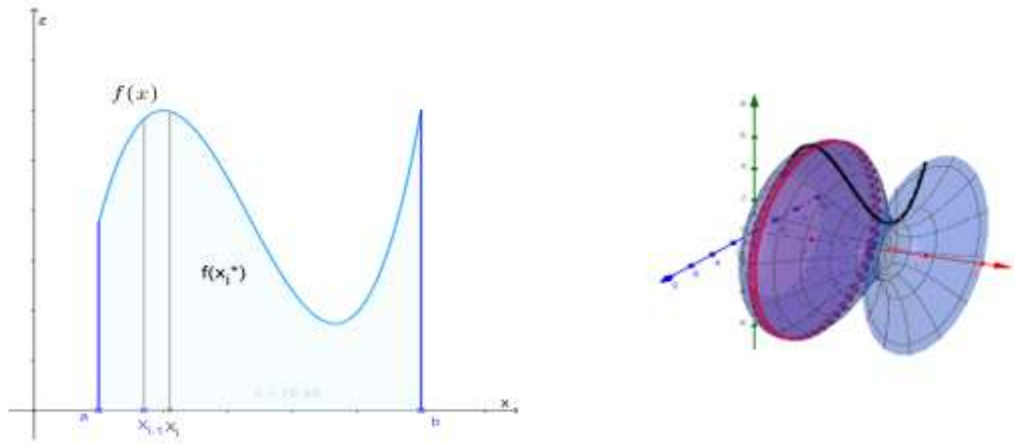


Fuente de *Consulta: Elaboración Propia*

Determinemos la expresión por la cual se calcula el volumen de un sólido con el método de los discos, para ello consideremos una región R limitada por la función continua y positiva $f(x)$, el eje x y las recta $x = a$ y $x = b$ y gira con respecto al eje *x*.

Haciendo una partición del intervalo $[a, b]$ de n subintervalos de longitud Δx, y tomando el rectángulo que se forma en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, de base Δx y altura $f(x_i^*)$ hacemos girar el rectángulo con respecto al eje *x*, generándose un disco.

Gráfico 1.32 De izquierda a derecha se muestra el rectángulo representativo, al hacer girar alrededor del eje x la región plana de dicho rectángulo se determina un disco.

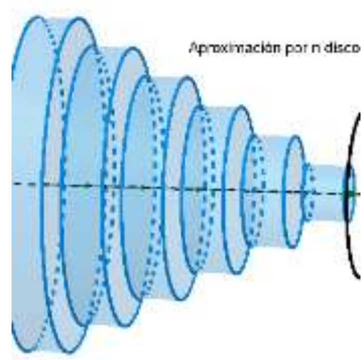


Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Tomando el disco que se obtiene al girar el rectángulo, calculemos su volumen.

Calculando el volumen del disco, este es el volumen de un cilindro de radio $f(x_i^*)$ y altura Δx. La fórmula del volumen del cilindro está representada en (1.209).

Gráfico 1.33 Generación de n discos al girar n áreas alrededor de un eje



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

$$V = \pi r^2 h \tag{1.209}$$

Sustituyendo en (1.209) las variables del disco tenemos (1.210).

$$V_i = \pi \left(f\left(x_i *\right)\right)^2 \Delta x. \tag{1.210}$$

Calculando el volumen de todos los discos, tenemos:

$$V_1 = \pi\left(f\left(x_1^*\right)\right)^2 \Delta x$$
$$V_2 = \pi\left(f\left(x_2^*\right)\right)^2 \Delta x$$
$$\vdots$$
$$V_i = \pi\left(f\left(x_i^*\right)\right)^2 \Delta x$$
$$\vdots$$
$$V_n = \pi\left(f\left(x_n^*\right)\right)^2 \Delta x$$

Sumando todos los volúmenes de los discos, nos aproximamos al volumen de la región, obteniendo (1.211).

$$V \approx \pi\left(f\left(x_1^*\right)\right)^2 \Delta x + \pi\left(f\left(x_2^*\right)\right)^2 \Delta x + \cdots + \pi\left(f\left(x_i^*\right)\right)^2 \Delta x + \cdots + \pi\left(f\left(x_n^*\right)\right)^2 \Delta x$$

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi\left(f\left(x_i^*\right)\right)^2 \Delta x \qquad (1.211)$$

Tomando el límite cuando *n* tiende a infinito, se tiene (1.212).

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\left(f\left(x_i^*\right)\right)^2 \Delta x \qquad (1.212)$$

Definición: Sea R la región delimitada por la función continua *f*, el eje *x* y las rectas $x = a$ y $x = b$. El volumen del sólido que se obtiene al girar la región R con respecto al eje *x* es

$$V = \int_a^b \pi\left(f\left(x\right)\right)^2 dx$$

donde $f\left(x\right)$ es el radio del disco.

Si R es una región de *y*, se tiene como definición

Definición: Sea R la región delimitada por la función continua f, el eje *y* y las rectas $y = c$ y $y = d$. El volumen del sólido que se obtiene al girar la región R con respecto al eje *y* es

$$V = \int_c^d \pi\left(f\left(y\right)\right)^2 dy$$

donde $f\left(y\right)$ es el radio del disco (Larson & Edwars, 2018).

En general se puede determinar el volumen de un sólido de revolución usando el radio del disco que se forma al girar un rectángulo de la región, como aparece en (1.213) y en (1.214).

$V = \int_a^b \pi\left(radio\right)^2 dx$ para una región *x*. (1.213)

Y, $V = \int_c^d \pi\left(radio\right)^2 dy$ para una región *y*. (1.214)

Ejemplo 1.4.4 Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar la región limitada por $f(x) = x^3 - 6x$ y el eje x en el intervalo $[0,3]$, alrededor del eje *x*.

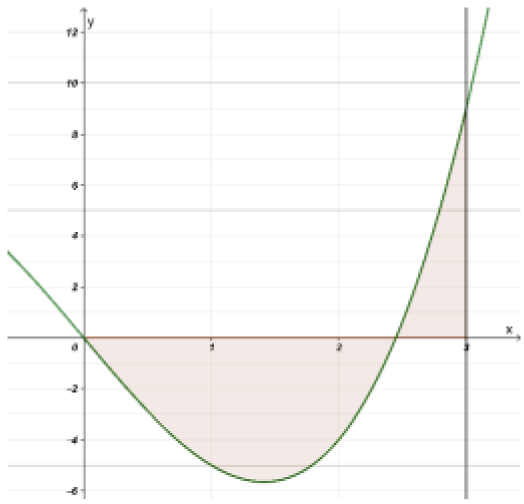
Determinemos los puntos de intersección entre la función y el eje x.

$$x^3 - 6x = 0 \;\Rightarrow\; x\left(x^2 - 6\right) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ y } x^2 - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ y } x = \pm\sqrt{6} \qquad (1.215)$$

Luego en el intervalo donde necesitamos determinar el volumen, hay dos ceros de la función uno que coincide con el extremo del intervalo y otro que queda dentro del intervalo, luego tenemos $[0,3]=\left[0,\sqrt{6}\right]\cup\left[\sqrt{6},3\right]$.

Grafiquemos la función (Gráfico 1.34)

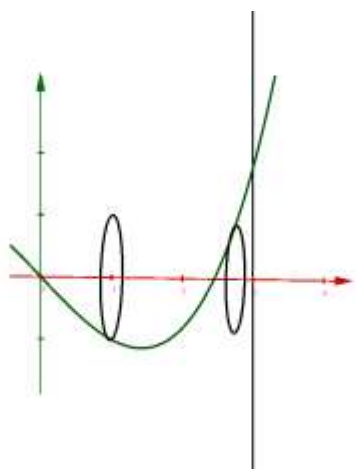
Gráfico 1.34 Gráfica del área bajo la función f(x)=x^3-6x dx en el intervalo de 0 a 3



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Se tienen que calcular el volumen del sólido de revolución para cada uno de los intervalos, tomemos un rectángulo en cada uno de los intervalos y veamos el disco que se forma sobre cada uno de ellos. En cada uno de los intervalos el radio coincide con la función. Así calculemos el volumen del sólido en cada uno de los intervalos mediante la definición.

Gráfico 1.35 Giro del área en torno al eje x.



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Empecemos por calcular el volumen en $\left[0,\sqrt{6}\right]$.

$$V_1=\int_0^{\sqrt{6}}\pi\left(x^3-6x\right)^2dx=\int_0^{\sqrt{6}}\pi\left(x^6-12x^4+36x^2\right)dx=\pi\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{12}{5}x^5+12x^3\right)_0^{\sqrt{6}}$$

$$=\pi\left[\left(\frac{1}{7}\left(\sqrt{6}\right)^7-\frac{12}{5}\left(\sqrt{6}\right)^5+12\left(\sqrt{6}\right)^3\right)-0\right]=\pi\left(\frac{1}{7}\left(\sqrt{6}\right)^6\sqrt{6}-\frac{12}{5}\left(\sqrt{6}\right)^4\sqrt{6}+12\left(\sqrt{6}\right)^2\sqrt{6}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{1}{7}(6)^3\sqrt{6}-\frac{12}{5}(6)^2\sqrt{6}+12(6)\sqrt{6}\right)=\pi\left(\frac{1}{7}(216)\sqrt{6}-\frac{12}{5}(36)\sqrt{6}+12(6)\sqrt{6}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{216}{7}\sqrt{6} - \frac{432}{5}\sqrt{6} + 72\sqrt{6}\right) = \frac{576}{35}\sqrt{6}\pi \qquad (1.216)$$

$\boldsymbol{V_1 = \frac{576}{35}\sqrt{6}\pi}$

Ahora, calculemos el volumen en $\left[\sqrt{6}, 3\right]$.

$$V_2 = \int_{\sqrt{6}}^{3} \pi\left(x^3 - 6x\right)^2 dx = \int_{\sqrt{6}}^{3} \pi\left(x^6 - 12x^4 + 36x^2\right) dx = \pi\left(\frac{1}{7}x^7 - \frac{12}{5}x^5 + 12x^3\right)_{\sqrt{6}}^{3} \qquad (1.217)$$

$$= \pi\left[\left(\frac{1}{7}(3)^7 - \frac{12}{5}(3)^5 + 12(3)^3\right) - \left(\frac{1}{7}\left(\sqrt{6}\right)^7 - \frac{12}{5}\left(\sqrt{6}\right)^5 + 12\left(\sqrt{6}\right)^3\right)\right]$$

$$= \pi\left[\left(\frac{2187}{7} - \frac{2916}{5} + 324\right) - \left(\frac{216}{7}\sqrt{6} - \frac{432}{5}\sqrt{6} + 72\sqrt{6}\right)\right] = \pi\left(\frac{1863}{35} - \frac{576}{35}\sqrt{6}\right)$$

$\boldsymbol{V_2 = \pi\left(\frac{1863}{35} - \frac{576}{35}\sqrt{6}\right)}$

Luego, sumando los dos volúmenes (1.216) y (1.217) y obtenemos el volumen requerido (1.218).

$$V = V_1 + V_2 = \frac{576}{35}\sqrt{6}\pi + \pi\left(\frac{1863}{35} - \frac{576}{35}\sqrt{6}\right) = \frac{1863}{35}\pi \qquad (1.218)$$

$\boldsymbol{V = \frac{1863}{35}\pi}$

Sucede que, al tener dos integrales, podemos emplear las propiedades de la integral y calcular el volumen mediante una sola integral definida. Esto es debido a que, aunque se divide el intervalo, en ambos, el radio es el mismo, representado por la función y aunque en uno de los intervalos la función es negativa, como se eleva al cuadrado no genera una diferencia.

En este caso, tenemos

$V = V_1 + V_2 = \int_{0}^{\sqrt{6}} \pi\left(x^3 - 6x\right)^2 dx + \int_{\sqrt{6}}^{3} \pi\left(x^3 - 6x\right)^2 dx = \int_{0}^{3} \pi\left(x^3 - 6x\right)^2 dx$ por las propiedades de la integral, luego es posible calcular el volumen como

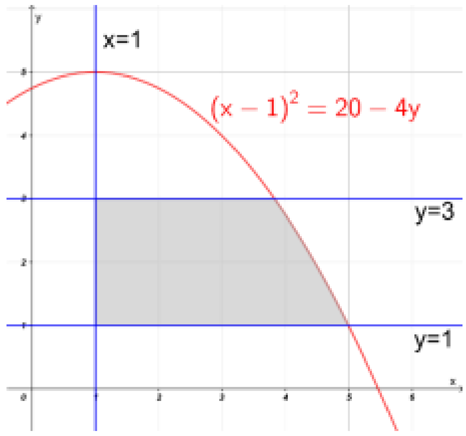
$$V = \int_{0}^{3} \pi\left(x^3 - 6x\right)^2 dx = \int_{0}^{3} \pi\left(x^6 - 12x^4 + 36x^2\right) dx = \pi\left(\frac{1}{7}x^7 - \frac{12}{5}x^5 + 12x^3\right)_{0}^{3} = \pi\left[\left(\frac{1}{7}(3)^7 - \frac{12}{5}(3)^5 + 12(3)^3\right) - 0\right] = \frac{1863}{35}\pi$$

$$V = \frac{1863}{35}\pi\ u^3$$

Ejemplo 1.4.5 Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor de la recta $X = 1$, la región limitada por la curva $(x-1)^2 = 20-4y$ y las rectas $x=1$, $y=1$, $y=3$.

En el gráfico 1.36 se muestra la región en cuestión.

Gráfico 1.36 Área limitada por la curva $(x-1)^2 = 20-4y$ y las rectas $x=1$, $y=1$, $y=3$



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Analizando la región, podemos tomarla como región *y*, así las funciones son la parábola y la recta $x=1$ y los límites se tendrán con las rectas $y=1$, $y=3$.

Despejando *x* de la ecuación de la parábola se tiene que $x=\sqrt{20-4y}+1$

Representando un rectángulo, en este caso horizontal porque la región es de variable *y*. Para determinar el radio, tenemos $1+r=x \Rightarrow r=x-1 \Rightarrow r=\left(\sqrt{20-4y}+1\right)-1=\sqrt{20-4y}=\sqrt{4(5-y)}=2\sqrt{5-y}$

El volumen del sólido de revolución estará dado por (1.219).

$$V=\int_1^3 \pi\left(2\sqrt{5-y}\right)^2 dy=\pi\int_1^3 4(5-y)\,dy=4\pi\int_1^3(5-y)\,dy=4\pi\left(5y-\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_1^3$$
$$=4\pi\left[\left(5(3)-\frac{1}{2}(3)^2\right)-\left(5-\frac{1}{2}\right)\right]=4\pi\left(15-\frac{9}{2}-5+\frac{1}{2}\right)=4\pi(6)=24\pi \tag{1.219}$$

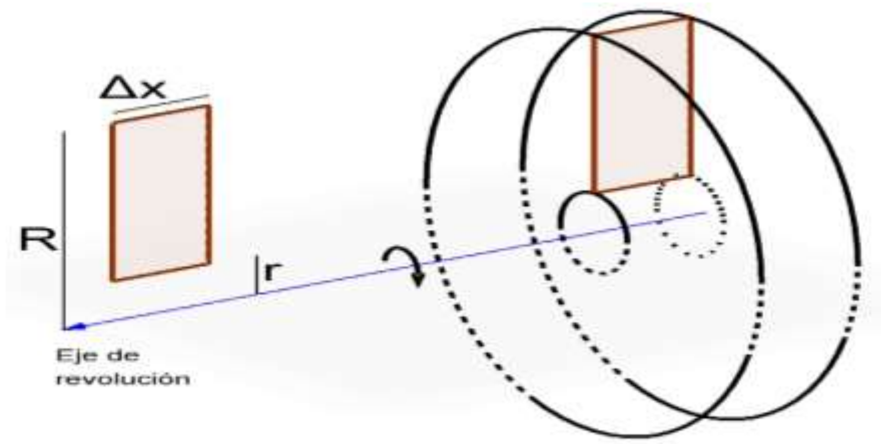
$V=24\pi\ u^3$

Cuando aplicamos el método de los discos, se pueden tener regiones *x* y *y*, la característica es que el eje de giro limita a la región, y puede suceder que el radio sea igual a la función que nos dan, o puede ocurrir que el radio cambie de acuerdo con la región que se indica. Es decir, cuando la región gira con respecto al eje *x* o una recta paralela al eje x, el rectángulo es vertical y la variable que se usa es *x* y si la región gira con respecto al eje *y* o a una recta paralela al eje *y*, el rectángulo es horizontal y la variable que se usa es *y*. El radio es la distancia que se tiene entre el rectángulo y el eje de giro.

1.4.3.3 Método de Arandelas

Otro de los métodos para la determinación del volumen de un sólido de revolución es el método de las arandelas, en este caso se tiene un rectángulo que gira con respecto a un eje que está fuera de la región, se tiene un rectángulo como el que se muestra en el Gráfico 1.37, y al girar este rectángulo con respecto al eje, tenemos una arandela como la que aparece en el Gráfico 1.37.

Gráfico 1.37 Generación de una arandela al girar el área de un rectángulo alrededor del eje x

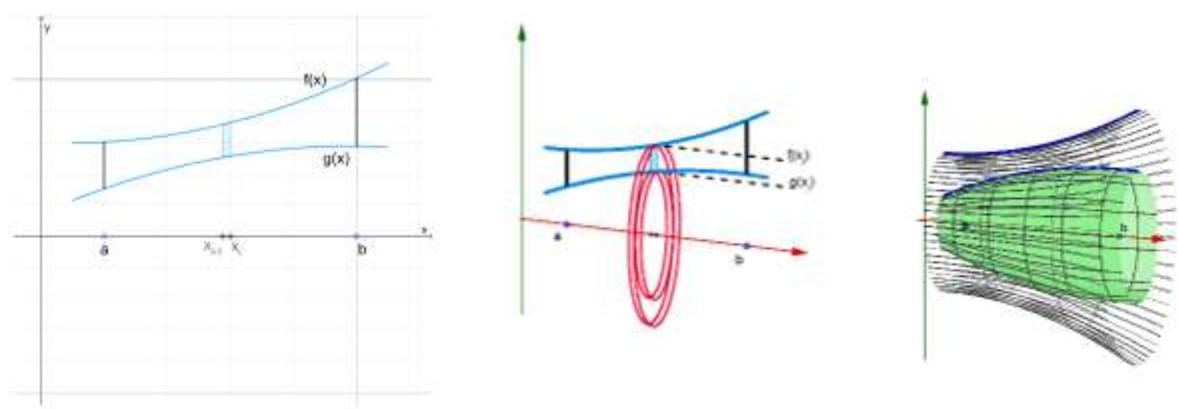


Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Para poder determinar la arandela se tienen dos discos uno de ellos con radio R, el más grande y el otro con radio r, al hacer la diferencia obtenemos la arandela que es el volumen que se encuentras entre amos discos.

En el Gráfico 1.38, se muestra la región limitada por funciones $f(x)$, $g(x)$ con $f(x) \geq g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$; la arandela que se obtiene sobre el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, y en general el sólido que se obtiene al girar la región con respecto al eje *x*.

Gráfico 1.38 Método de arandelas para el cálculo de volúmenes



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Determinemos el volumen del sólido de revolución con este método, para ello sea R la región limitada por las funciones continuas y positivas $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a,b]$, esto es por $f(x)$ y $g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, que gira con respecto al eje *x*. Podemos determinar el volumen del sólido haciendo una partición del intervalo $[a,b]$, pero como el volumen mediante este método se basa en el uso del método de los discos, usemos éste como base.

El volumen de la arandela se obtiene si determinamos los volúmenes del sólido de revolución que se forma al girar la función $f(x)$ y $g(x)$ con respecto al eje *x* con el método de los discos, y los restamos, esto es $V = V_f - V_g$

Calculemos los volúmenes

$$V_f = \int_a^b \pi \left(f(x) \right)^2 dx \tag{1.220}$$

$$V_g = \int_a^b \pi \left(g(x) \right)^2 dx \tag{1.221}$$

Así, restando (1.221) de (1.220) tenemos el volumen requerido.

$$V = V_f - V_g = \int_a^b \pi \left(f(x) \right)^2 dx - \int_a^b \pi \left(g(x) \right)^2 dx = \int_a^b \pi \left[\left(f(x) \right)^2 - \left(g(x) \right)^2 \right] dx$$

Con lo cual

$$V = \int_a^b \pi \left[\left(f(x) \right)^2 - \left(g(x) \right)^2 \right] dx$$

Definición: Sea R la región delimitada por las funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ con $f(x) \geq g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$. El volumen del sólido que se obtiene al girar la región R con respecto al eje *x* es $V = \int_a^b \pi \left[\left(f(x) \right)^2 - \left(g(x) \right)^2 \right] dx$, donde $f(x)$ es el radio mayor de la arandela y $g(x)$ el radio menor de la arandela.
Si R es una región de *y*, se tiene como definición (Larson & Edwars, 2018; Stewart, 2015)

Definición: Sea R la región delimitada por las funciones continuas $f(y)$ y $g(y)$ con $f(y) \geq g(y)$ y las rectas $y = c$ y $y = d$. El volumen del sólido que se obtiene al girar la región R con respecto al eje *y* es $V = \int_c^d \pi \left[\left(f(y) \right)^2 - \left(g(y) \right)^2 \right] dy$, donde $f(y)$ es el radio mayor de la arandela y $g(y)$ el radio menor de la arandela (Larson & Edwars, 2018; Stewart, 2015).

En general se puede determinar el volumen de un sólido de revolución usando el radio del disco que se forma al girar un rectángulo de la región, como se representa en (1.67) para región x y en (1.68) para región y.

$V = \int_a^b \pi \left[R^2 - r^2 \right] dx$ para una región *x*. $\quad$ (1.222)

Y, $V = \int_c^d \pi \left[R^2 - r^2 \right] dy$ para una región *y*. $\quad$ (1.223)

Con R radio mayor de la arandela y r radio menor de la arandela.

El método de las arandelas es muy semejante al método de los discos, la diferencia está en que en el método de los discos la región R gira con respecto a un eje que es parte de la región y en el método de las arandelas la región R gira con respecto a un eje que es ajeno a la región.

Ejemplo 1.4.6 Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar la región limitada por $y = x^2$ y $y = x$, alrededor del eje *x*.

Primero determinemos los puntos de intersección.

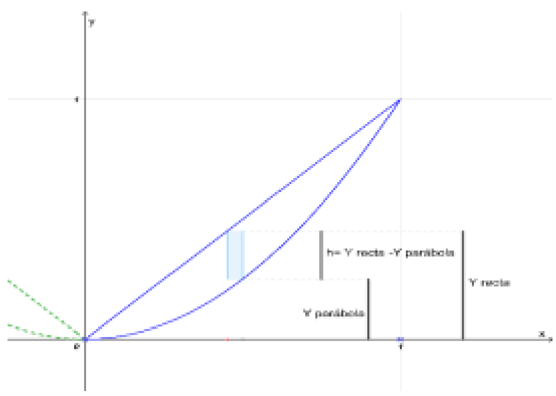
$y = x^2$ y $y = x$

$x^2 = x \;\Rightarrow\; x^2 - x = 0 \;\Rightarrow\; x(x-1) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ y $x = 1$

Como no se da un intervalo entonces hay que determinar el volumen del sólido de revolución al girar el área limitada por las curvas, esto es de *x* = 0 a *x* = 1.

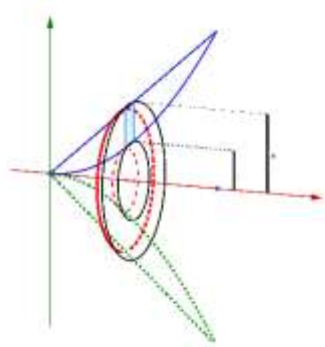
El Gráfico 1.39 muestra la región que se va a girar alrededor del eje x y el disco generado se muestra en el Gráfico 1.40

Gráfico 1.39 Rectángulo formado por la recta y la parábola



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Gráfico 1.40 Generación de un disco al girar el rectángulo alrededor del eje x



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

La región cumple con todas las condiciones de la definición: está limitada por las funciones $y = x^2$ y $y = x$ de *x* = 0 a *x* = 1 que son los puntos de intersección, donde la función mayor es $f(x) = x$ y la función menor es $g(x) = x^2$ podemos decir que $R = x$ y $r = x^2$

Luego el volumen está expresado en (1.69).

$$V = \int_0^1 \pi\left((x)^2 - (x^2)^2\right)dx = \pi\int_0^1 \left(x^2 - x^4\right)dx = \pi\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - 0 = \frac{2}{15}\pi \tag{1.224}$$

$$V = \frac{2}{15}\pi\ u^3$$

Ejemplo 1.4.7 Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar la región limitada por $y = x^2$ y $y = x$, alrededor del eje *y*.

Esta es la misma región que el ejemplo 1.4.6, pero ahora gira con respecto al eje *y*, para aplicar el método de arandelas necesitamos que la región sea de variable *y* (Gráfico 1.41).
Se requiere despejar x obteniendo (1.225).

$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$, como es en el primer cuadrante se toma $x = \sqrt{y}$ y de $y = x \Rightarrow x = y$ (1.225)

Determinando los puntos de intersección.

$x = \sqrt{y}$ y $x = y$

$$\sqrt{y} = y \Rightarrow y = y^2 \Rightarrow y - y^2 = 0 \Rightarrow y(1-y) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ y } y = 1 \tag{1.226}$$

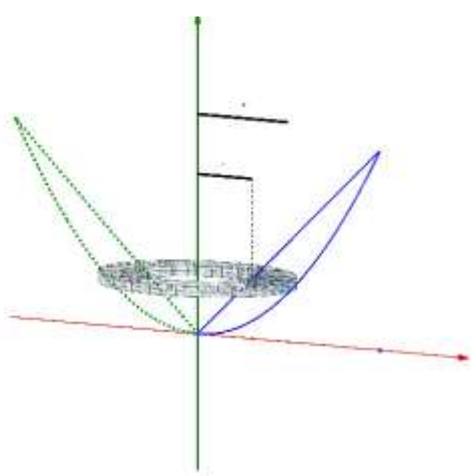
Como no se da un intervalo entonces hay que determinar el volumen del sólido de revolución al girar el área limitada por las curvas, esto es de *y* = 0 a *y* = 1.

La gráfica de la región se presenta en el Gráfico 1.41. La región cumple con todas las condiciones de la definición está limitada por las funciones $x = \sqrt{y}$ y $x = y$ de *y* = 0 a *y* = 1 que son los puntos de intersección, donde la función mayor es $f(y) = \sqrt{y}$ y la función menor $g(y) = y$, podemos decir que $R = \sqrt{y}$ y $r = y$

Luego el volumen es

$$V = \frac{1}{6}\pi\ u^3 \tag{1.227}$$

Gráfico 1.41 Ejemplo de generación de un disco al girar alrededor del eje y el área de un rectángulo.

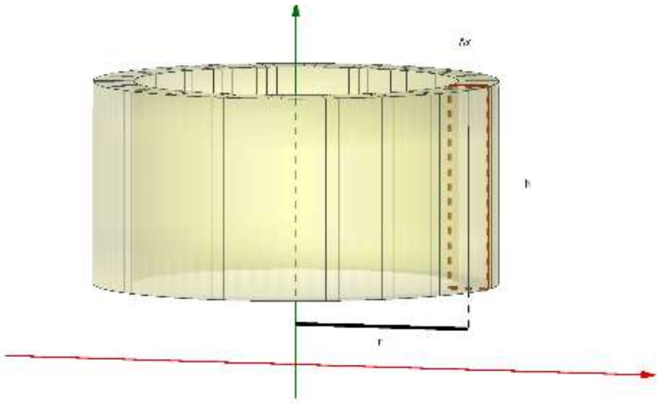


Fuente de Consulta: Elaboración Propia

1.4.3.4 Método de capas o envolventes cilíndricas

En el método de las envolventes cilíndricas tenemos un rectángulo como se muestra en el Gráfico 1.42, a continuación se gira con respecto al eje *y*, al girar este rectángulo se genera una envolvente o capa cilíndrica, como se muestra en el mismo Gráfico 1.42.

Gráfico 1.42 Generación de una envolvente cilíndrica

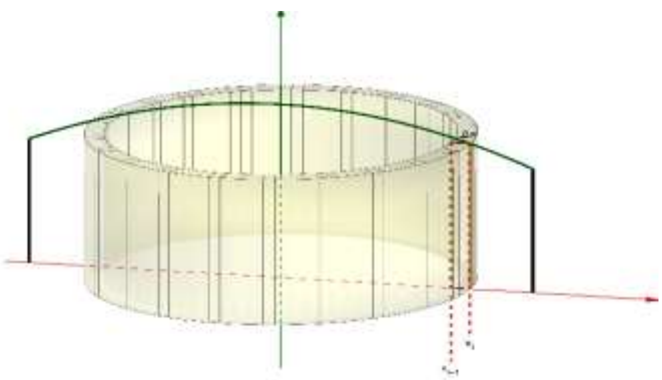


Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Determinemos el volumen del sólido de revolución por el método de envolventes cilíndricas, para ello consideremos una región R limitada por la función continua y positiva $f(x)$, el eje x y las recta $x=a$ y $x=b$ y gira con respecto al eje y.

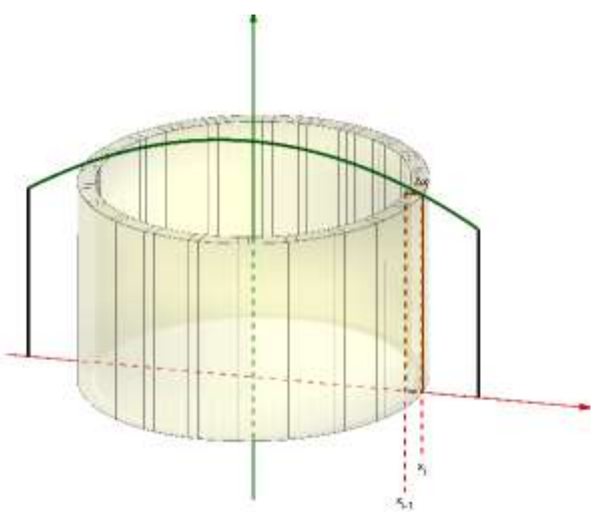
Haciendo una partición del intervalo $[a,b]$ de n subintervalos de longitud Δx, y tomando el rectángulo que se forma en el intervalo $[x_{i-1},x_i]$, de base Δx y altura $f(x_i*)$ hacemos girar el rectángulo con respecto al eje y se genera una envolvente como se muestra en el Gráfico 1.43.

Gráfico 1.43 Generación de una envolvente cilíndrica



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Gráfico 1.44 Generación de una envolvente cilíndrica



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Considerando la envolvente generada en 1.44, para determinar el volumen de la envolvente, notemos que es la diferencia del volumen de dos cilindros el exterior de radio x_i y el interior de radio x_{i-1}.

Luego el volumen V_i de la envolvente se expresa en(1.228).

$$V_i = V_{ext} - V_{\text{int}} = \pi x_i^2 f\left(x_i^*\right) - \pi x_{i-1}^2 f\left(x_i^*\right) = \pi f\left(x_i^*\right)\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) = \pi f\left(x_i^*\right)\left(x_i + x_{i-1}\right)\Delta x = 2\pi f\left(x_i^*\right)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x \quad (1.229)$$

Calculando el volumen para cada uno de los rectángulos que pueden formarse se tiene (1.230), (1.231, (1.232) y (1.233).

$$V_1 = 2\pi f\left(x_1^*\right)\left(\frac{x_1 + x_0}{2}\right)\Delta x \quad (1.230)$$

$$V_2 = 2\pi f\left(x_2^*\right)\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)\Delta x \quad (1.231)$$

$$\vdots$$

$$V_i = 2\pi f\left(x_i^*\right)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x \quad (1.232)$$

$$\vdots$$

$$V_n = 2\pi f\left(x_n^*\right)\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right)\Delta x \quad (1.233)$$

Sumando los volúmenes (1.230), (1.231), (1.232) y (1.233), tenemos (1.234).

$$V \approx 2\pi f\left(x_1^*\right)\left(\frac{x_1 + x_0}{2}\right)\Delta x + 2\pi f\left(x_2^*\right)\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)\Delta x + \cdots + 2\pi f\left(x_i^*\right)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x + \cdots + 2\pi f\left(x_n^*\right)\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right)\Delta x$$

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi f\left(x_i^*\right)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x \quad (1.234)$$

Tomando el límite de (1.234) cuando *n* tiende a infinito obtenemos (1.235).

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f\left(x_i^*\right)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x \quad (1.235)$$

Luego, expresando (1.235) como la integral definida obtenemos (1.236).

$$V = \int_a^b 2\pi f\left(x\right)\left(\frac{x + x}{2}\right)dx = \int_a^b 2\pi f\left(x\right)x dx = \int_a^b 2\pi x f\left(x\right)dx \quad (1.236)$$

Con lo que se tiene la definición siguiente.

Definición: Sea R la región delimitada por la función continua *f* para $0 \le a < b$, el eje *x* y las rectas $x = a$ y $x = b$. El volumen del sólido que se obtiene al girar la región R con respecto al eje *y*, es $V = \int_a^b 2\pi x f\left(x\right)dx$, donde *x* es el radio de la envolvente y $f\left(x\right)$ es la altura de la misma.
Si R es una región de *y*, se tiene como definición (Larson & Edwars, 2018)

Definición: Sea R la región delimitada por la función continua f para $0 \le c < d$, el eje y y las rectas $y = c$ y $y = d$. El volumen del sólido que se obtiene al girar la región R con respecto al eje x, es

$$V = \int_c^d 2\pi y f(y)\,dy$$

donde y es el radio de la envolvente y $f(y)$ es la altura de la misma (Larson & Edwars, 2018).

En general se puede determinar el volumen de un sólido de revolución por el método de envolventes cilíndricas usando el radio y la altura de la envolvente que se forma al girar un rectángulo de la región, como sigue:

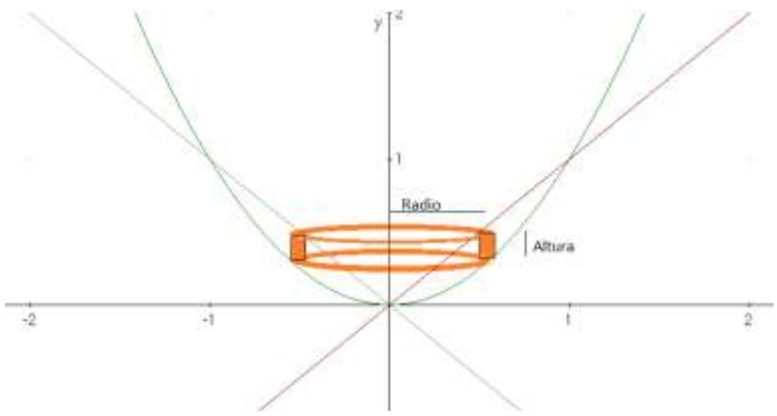
$$V = \int_a^b 2\pi(radio)(altura)\,dx \text{ para una región } x. \tag{1.237}$$

$$V = \int_c^d 2\pi(radio)(altura)\,dy \text{ para una región } y. \tag{1.238}$$

Ejemplo 1.4.8 Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar la región limitada por $y = x^2$ y $y = x$, alrededor del eje *y*. Usar el método de envolventes cilíndricas.

Este es el mismo ejemplo 1.4.7, pero en vez de usar arandelas se usarán envolventes cilíndricas, por lo cual se debe de usar Región *x* y giro eje *y* Gráfico 1.45.

Gráfico 1.45 Ejemplo de generación de una capa cilíndrica al girar alrededor del eje x el área de un rectángulo



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Determinemos los puntos de intersección de las dos funciones.

$y = x^2$ y $y = x$

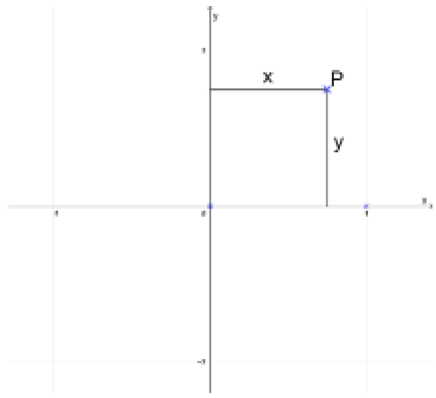
$$\underset{x^2 = x}{} \quad \Rightarrow\ x^2 - x = 0 \ \Rightarrow\ x(x-1) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0 \text{ y } x = 1$$

Como no se da un intervalo entonces hay que determinar el volumen del sólido de revolución al girar el área limitada por las curvas, esto es de *x* = 0 a *x* = 1.

En este caso no podemos usar de manera directa la definición ya que se tienen dos funciones, por lo cual es necesario el determinar el radio y la altura.

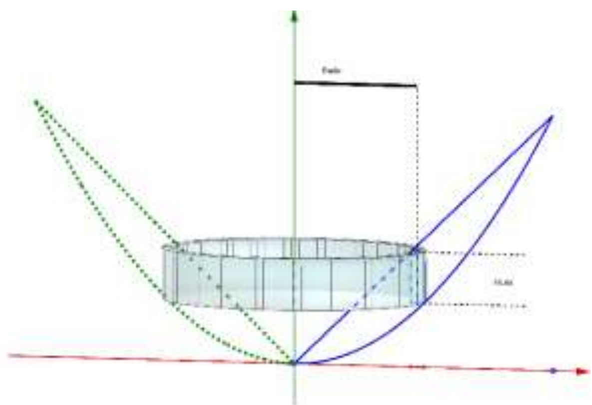
Recordemos que cuando se tiene un punto $P(x, y)$, *x* es la distancia horizontal desde el eje *y* hasta el punto y *y* es la distancia vertical desde el eje *x* hasta el punto, tal y como se indica en el Gráfico 1.46.

Gráfico 1.46 Representación de un punto en el plano



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Gráfico 1.47 Ejemplo de generación de una capa cilíndrica al girar alrededor del eje y el área de un rectángulo



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Para nuestro problema se tiene que el radio coincide con *x*, $r = x$ y para la altura usemos y_p para la parábola y y_r para la recta. Las distancias conocidas son las que se tienen hacia el eje *x*, estas son y_p y y_r y la altura h se determina viendo la relación que se cumple, esta es $y_p + h = y_r$ de donde $h = y_r - y_p$, como la región es en *x*, la altura debe ser en variable *x*. así

$h = y_r - y_p = x - x^2$

Calculemos su volumen.

$$V = \int_0^1 2\pi x\left(x - x^2\right)dx = 2\pi\int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)dx = 2\pi\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - 0 = 2\pi\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{6}\pi$$

$$V = \frac{1}{6}\pi\ u^3$$

Ejemplo 1.4.9 Determinar el volumen del sólido que se obtiene al girar la región determinada por $2y = x + 4$, $y = x$ y $x = 0$ alrededor de la recta $x = 4$.

La región está acotada por tres rectas, si tomamos la región de variable *x*, entonces $x = 0$ es un límite y no una función de *x*, determinemos la intersección de ellas.

$2y = x + 4$ y $y = x$ $\quad 2y = x + 4 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}x + 2$

Con lo cual $y = \frac{1}{2}x + 2$ y $y = x$ Así $\frac{1}{2}x + 2 = x \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}x - x = -2 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2}x = -2$

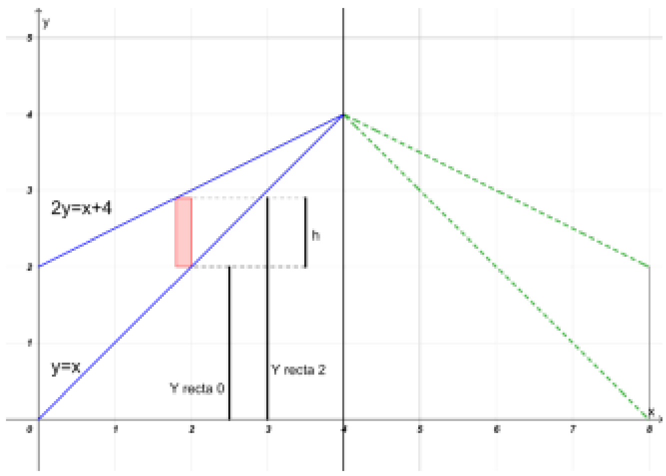
Entonces $x=-2(-2)=4$

El punto de intersección es $(4,4)$.

Determinemos el radio y la altura de la envolvente.

La altura está determinada por la diferencia de las dos rectas, si $y_{R0}=x$ y $y_{R2}=\frac{1}{2}x+2$ se tiene $y_{R0}+h=y_{R2}$ de donde $h=y_{R2}-y_{R0}=\frac{1}{2}x+2-x=-\frac{1}{2}x+2$ (Gráfico 1.48).

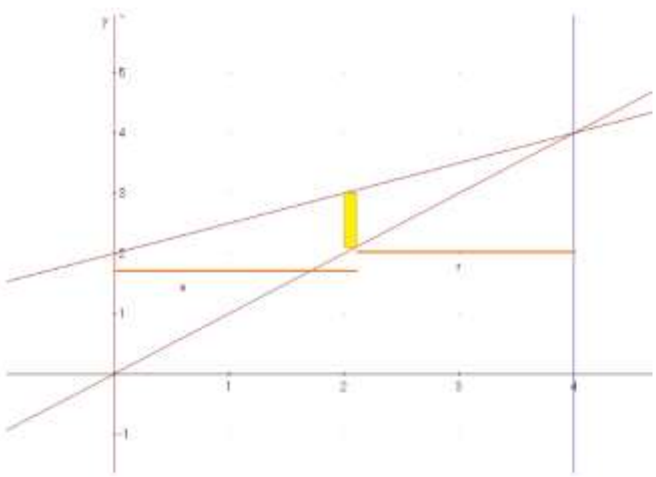
Gráfico 1.48 Ejemplo de generación de una capa cilíndrica al girar alrededor de una recta paralela al eje y



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

El radio no se obtiene de manera directa con la variable, en este caso tenemos $x+r=4$, por lo que $r=4-x$ (Gráfico 1.49).

Gráfico 1.49 Representación del radio y la altura



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Determinando el volumen

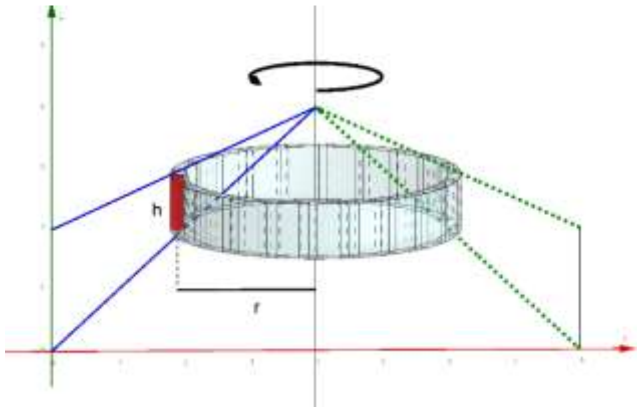
$$V=\int_0^4 2\pi(radio)(altura)dx=\int_0^4 2\pi(4-x)\left(-\frac{1}{2}x+2\right)dx=2\pi\int_0^4\left(-2x+8+\frac{1}{2}x^2-2x\right)dx$$

$$V=2\pi\int_0^4\left(\frac{1}{2}x^2-4x+8\right)dx=2\pi\left(\frac{1}{6}x^3-2x^2+8x\right)_0^4=2\pi\left(\frac{1}{6}(4)^3-2(4)^2+8(4)\right)-0$$

$V = 2\pi\left(\frac{1}{6}(64) - 2(16) + 8(4)\right) = 2\pi\left(\frac{32}{3} - 32 + 32\right) = \frac{64}{3}\pi$ (Gráfico1.50).

$V = \frac{64}{3}\pi\ u^3$

Gráfico 1.50 Ejemplo de generación de una capa cilíndrica al girar el área de un rectángulo alrededor de una recta paralela al eje y



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Cuando tenemos las condiciones de las definiciones dadas es posible solo sustituir en la expresión del volumen para determinarlo, si no se cumplen todas las condiciones entonces analizamos la región y definimos el método que se empleará para determinar el volumen del sólido de revolución, para ello se usa el radio del disco, el radio exterior e interior de la arandela o el radio y la altura de la envolvente según corresponda.

Cuando se modifica la región o el eje de giro es cuando cambian las condiciones y no se puede usar directamente la definición.

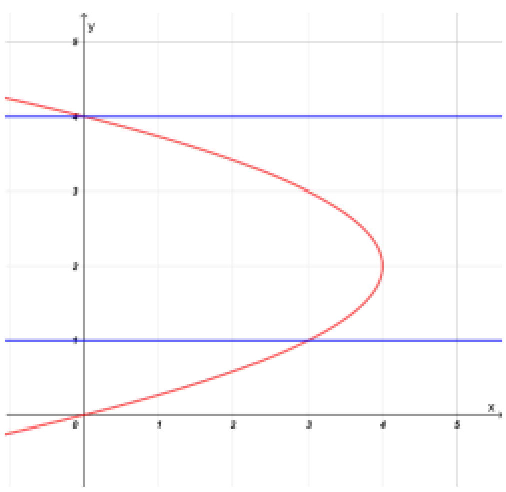
Para determinar el volumen de un sólido de revolución se puede usar el método de los discos y el de envolventes o el de arandelas y el de envolventes.

Ejercicios para completar de la Lección 1.4.3

1. Sean las funciones $x = -y^2 + 4y$ y $y = 1$ & $y = 4$. Formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje y

Lo primero que se tiene que hacer es graficar la función (Gráfico 1.51)

Gráfico 1.51 Representación gráfica de las funciones



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Una vez hecha la gráfica, podemos ver más fácil los intervalos de la función, por lo que procedemos a sustituir los datos en la función más conveniente. En la misma gráfica determine el rectángulo representativo que hará girar.

¿Cómo son los rectángulos, verticales u horizontales?

¿Va a integrar con respecto a x o a y?

Determine la integral.

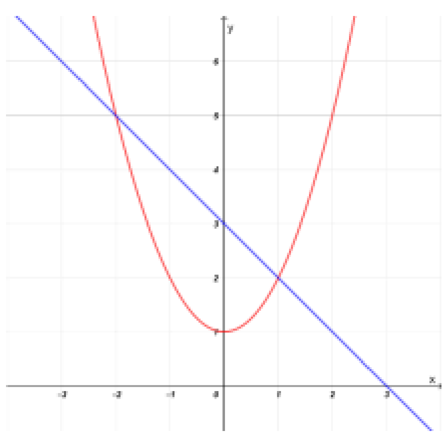
Procede a integrar y evaluar.

De la respuesta

2. Encontrar el volumen del sólido que se genera al girar la región acotada por la curva $y = x^2 + 1$ y la recta $y = -\text{x} + 3$ que gira alrededor del eje x (Ruiz, 2021).

En el Gráfico 1.52, dibuja el rectángulo representativo y al hacerlo girar alrededor del eje x se genera una arandela

Gráfico 1.52 Representación gráfica de las funciones



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Para este caso utilizaremos la fórmula para rectángulos verticales.

$V = \int_b^a \pi[(f(x))^2 - \left(g(x)\right)^2]dx$

Por lo que procederemos a definir el radio externo y el radio interno pero esta vez en función de y.

Por lo que procederemos a definir el radio externo y el radio interno pero esta vez en función de x.

$R_E =$; ${R_E}^2 =$ $r_I =$; ${r_I}^2 =$

Sustituimos en la Integral y reducimos términos.

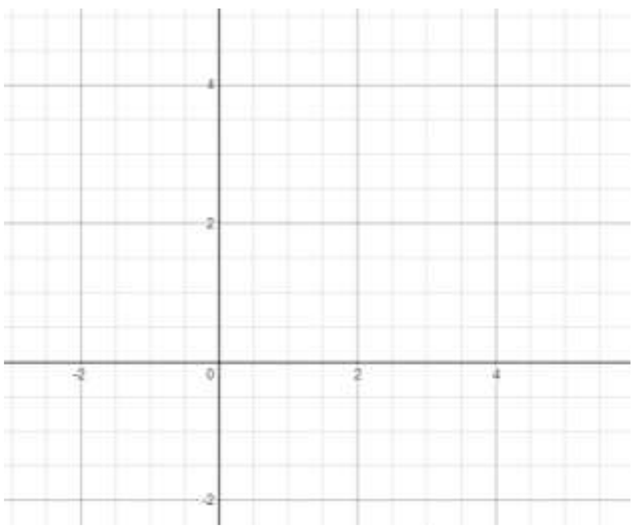
$V = \int$

Procedemos a resolver la Integral Definida y nos da como resultado:

El volumen obtenido es $V =$

3. Hallar el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar sobre el eje "y" y la región que está comprendida en el primer cuadrante, entre la curva $y = -x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ y la vertical x = 3**.**

Grafica las funciones y decide cómo es el rectángulo que va a girar.



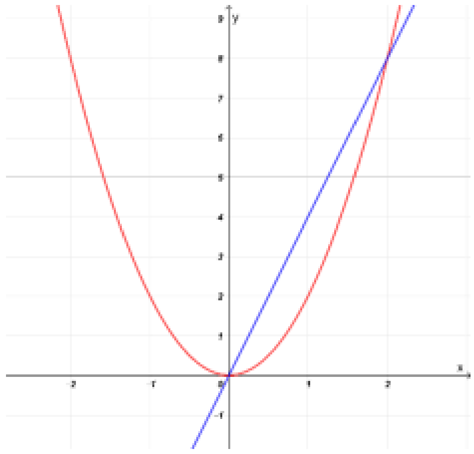
Decide qué método emplearás para determinar el volumen del sólido.

Desarrolla el procedimiento para determinar el volumen del sólido.

Actividad de la lección 1.4.3

1. Miguel desea calcular el volumen de una ventosa para vidrio, el cual está dado por la región $y = 4x$, $y = 2x^2$ con el eje x como eje de giro.

En la gráfica dibuja un rectángulo muestra y haz girar la región alrededor del eje x.



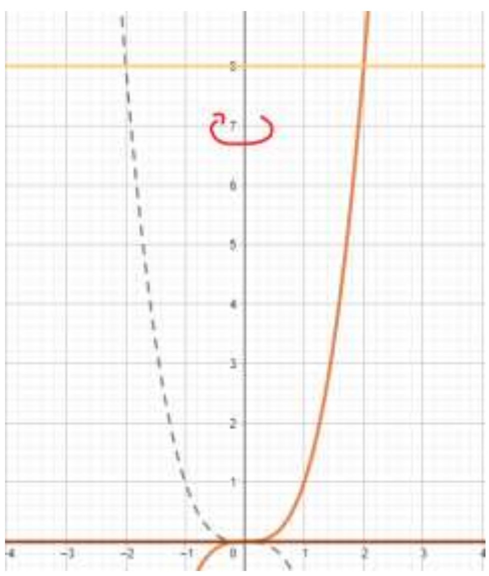
En el recuadro efectúa las operaciones

2. Laura tiene una lámpara en su mesa de noche, desea saber cuál es el valor del volumen de una parte de su estructura por medio del método de discos.

Determinó que la estructura de la lámpara es una región limitada por $y=x^3$, $y=8$ y $y=0$

Al estar en una posición vertical, la región gira alrededor del eje y.

En la gráfica dibuja un rectángulo representativo y gíralo alrededor del eje y.



En el recuadro realiza las operaciones

Listas de Ejercicios de la lección 1.4.3

Tabla 1.6 Ejercicios de la lección 1.4.3

Hallar el volumen del sólido generado al rotar la región acotada por las rectas y las curvas dadas alrededor del eje indicado (discos) 1. $y = 9 - x^2$, $y = 0$; eje x 2. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; eje x 3. $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$; eje x 4. $y = -\sqrt{x}$, $y = -2$, $x = 0$; eje y 5. $y = cos\, x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$; eje y 6. $x = \frac{2}{y+1}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$; eje y Hallar el volumen del sólido generado al rotar la región acotada por las rectas y las curvas dadas alrededor del eje indicado (arandelas) $y = x$, $y = 1$, $x = 0$; eje x 7. $y = 2x$, $y = x$, $x = 1$; eje x 8. $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$; eje x 9. $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$; eje x 10. $y = sec\, x$, $y = tan\, x$, $x = 0$, $x = 1$; eje x 11. $y = \sec(x)$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = 0$; eje y 12. 1er cuadrante $x^2 + y^2 = 3$, $y = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$; eje y 13. 1er cuadrante $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$; eje y Representar la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones para calcular el volumen del sólido generado al girar R alrededor del eje indicado. Trace un rectángulo típico junto con la envolvente cilíndrica que genera. 14. $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, eje y 15. $y = x^2 - 5x$, $y = 0$, eje y 16. $y = x^3 + 1$, $x + 2y = 2$, $x = 1$, eje y 17. $y^3 = x$, $y = 3$, $x = 0$, eje x 18. $y = 9 - x^2$, y = 0, eje x.	19. $y = \sqrt{cos\, x}$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 20. $2y = x$, $y = 4$, $x = 1$, eje x Hallar los volúmenes de los sólidos generados al girar las regiones acotadas por las curvas y las rectas dadas alrededor del eje x. 21. $x + y = 3$, $x^2 + y = 3$ 22. $x = 2y - y^2$, $x = y$ 23. $y = x$, y = $2x$, $y = 2$ 24. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 2$ 25. $x = 1 + y^2$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$ 26. $x + y = 3$, $x = 4 - (y - 1)^2$ 27. $y = \sec x$, $y = \sqrt{2}$ en $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ Hallar el volumen del sólido generado al girar cada región alrededor del eje y.$y = x^2$, $x = 2$ y el eje x. 28. $y = \sqrt{x}$, $y = x$ 29. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$. 30. $x = y^2$, $y = x - 6$ 31. $y = x^3 + 1$, $x = 0$, $y = 9$ Obtener el volumen del sólido de revolución que se forma haciendo rotar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas, en torno del eje indicado.$y = x^2 + 1$, $x = 0$, $y = 5$, eje y 32. $y = (x - 2)^2$, $x = 0$, $y = 0$; eje x 33. $2x - y - 12 = 0$, $x - 2y - 3 = 0$, $x = 4$; eje y. 34. $x^2 = 4y$, $y = 4$; eje x. 35. $y = 4 - x^2$, $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$, eje x 36. $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$, eje y 37. $y = x^3$, $x = -2$, $y = 0$, eje x 38. $y = 2x$, $y = 4x^2$, eje y 39. $x = y^3$, $x^2 + y = 0$, eje x 40. $x = y^2$, $y - x + 2 = 0$, eje y 41. $x + y = 1$, $y = x + 1$, x = 2, eje y. 42. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$, eje y

Fuentes de Consulta: (Ayres & Mendelson, 2010; Larson & Edwars, 2018; Ruiz, 2021; Stewart, 2015; Zill & Wright, 2011)

Tabla 1.7 Segunda parte de la lista de ejercicios de la lección 1.4.3

43. $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $y = 2$, $y = 0$, $x = 0$; eje y.
44. $y = x^4$, $y = 1$, gira alrededor de $x = 2$, $y = 1$.
45. 1er cuadrante $y = \sqrt{2}$; $y = \sec x \tan x$, $x = 0$; recta $y = \sqrt{2}$
46. 1er cuadrante $y = 2, y = 2 sen x, x = 0$; recta $y = 2$
47. 1er cuadrante, $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$; recta $x = -1$
48. 2do cuadrante $y = -x^3$, $y = 0$, $x = -1$; recta $x = -2$
49. $y = x^2$, $y = 4$; recta $y = 4$
50. $y = x^2$, $y = 4$; recta $y = 5$
51. $y = x^2$, $y = 4$; recta $x = 2$.
52. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$; recta $x = 4$
53. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$; recta$x = 6$
54. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$; recta $y = 2$
55. $y = 4x^2$, $4x + y - 8 = 0$; recta $x = 1$
56. $y = 4x^2$, $4x + y - 8 = 0$; recta $y = 0$
57. $y = 4x^2$, $4x + y - 8 = 0$; recta $y = 16$.
58. $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$; recta $x = 2$
59. $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$; recta $x = 3$
60. $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$; recta $y = -1$
61. $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 2$ y $y = 0$; recta $x = -1$.
62. $x = y - y^3$ y el eje y; recta y = 1.
63. $y = 2x - x^2$ y $y = x$; recta $x = 1$.
64. $x = 4+6y - 2y^2$ y $x = -4$; recta $x = -4$.
65. $2y = x + 4$, $y = x$ y $x = 0$; eje x
66. $2y = x + 4$, $y = x$ y $x = 0$; el eje y
67. $2y = x + 4$, $y = x$ y $x = 0$; recta $x = 4$;

$2y = x + 4$, $y = x$ y $x = 0$; recta $y = 8$.

68. Al girar alrededor del eje x la región limitada por la curva $y = \sqrt{2x + 4}$, el eje x, el eje y y la recta x = c (c>0), se generó un sólido de revolución. ¿Para qué valor de c el volumen del sólido será de 12π unidades cúbicas?
69. Obtener el volumen del sólido de revolución generado cuando la región acotada por la curva $y = 1 - \frac{3}{x}$, el eje x y la recta $x = 1$se gira alrededor del eje x.
70. Calcular el volumen del sólido de revolución generado cuando la región limitada por el eje x, la curva $y = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}}$ y las rectas $x = 1$ y $x = 4$se gira alrededor del eje x.
71. Calcular el volumen del sólido generado al girar la región limitada por
74. Obtener el volumen del sólido de revolución generado cuando la región limitada por la curva $y = \sqrt{senhx}$, el eje x, y las rectas $x = 0$ y $x = \ln 2$, se gira alrededor del eje x.
75. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por $yx^2 = 1$, $y = 1$ y $y = 4$ alrededor de la recta $y = 5$.
76. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y^2 = x$, $x = 0$, $y = -1$ y $y = 1$ gira alrededor de la recta $y = 2$.
77. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la región limitada por $y = 4x - x^2$, $y = 8x - 2x^2$; en torno de $x = -2$
78. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la región limitada por $y = x^2$, $x = y^2$; en torno de $y = -1$
79. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 2$ y $y=0$;
    a. alrededor de la recta $x = 3$;
    b. alrededor de la recta $x = -1$.
80. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por $y = 4 - x^2$ y $y=0$;
    a. alrededor de la recta $x = 2$,
    b. alrededor de la recta $x = -2$
81. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por $y = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 2$, y $x = 0$ alrededor de:
    a) La recta $y = 2$ b) La recta $x = 4$
82. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las rectas $y = 2x$, $y = 0$ y $x = 1$ alrededor de:
    a) $x = 1$ b) $x = 2$
83. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por x = y^3, x = 8 y $y = 0$ alrededor de la recta $x = 8$.
84. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por $x = y - y^3$ y el eje y alrededor de la recta $y = 1$.
85. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por $y = 2x - x^2$ y $y= x$, alrededor de la recta $x = 1$.
86. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región $y = x^4$ y $y = 1$ alrededor $y=1$
87. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región $y = x^2$ y $y = 4$ alrededor de:
    (a) $y = 4$, (b) $y = 5$, (c) $x = 2$
88. Obtener el volumen del sólido obtenido al girar la región triangular acotada por las rectas $2y = x + 4$, $y = x$ y $x = 0$ alrededor de:
    a. el eje x; (b) el eje y; (c) la recta $x = 4$; (d) la recta $y = 8$.

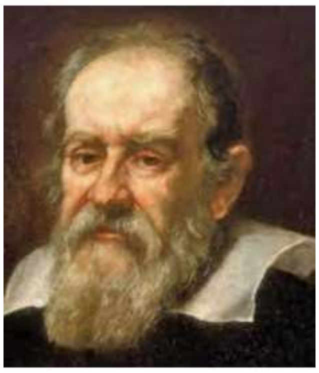
las gráficas de las curvas $y = e^x$ y $y = 2^x$, y la recta $x = 2$, alrededor del eje x. 72. Calcular el volumen del sólido generado al girar la región limitada por las gráficas de $y = log_{10} x$, $y = ln\, x$ y la recta $x = 3$. 73. Calcular el volumen del sólido de revolución generado si la región determinada por la catenaria $y = 6\,cosh\frac{x}{6}$, el eje x, el eje y y la recta $x = 6ln6$, gira alrededor del eje x.	
89. Obtener el volumen del sólido obtenido al girar la región en el primer cuadrante acotada por $y = x^3$ y $y = 4x$ alrededor de: (a) el eje x; (b) la recta $x = 8$. Obtener una fórmula para el volumen del sólido inclinado usando una integral definida. 90. Un cono circular recto de altura h y radio de la base r. 91. Una esfera de radio r. 92. Un cono circular recto truncado de altura h, radio de la base inferior R y radio de la base superior r. Un segmento esférico de altura h y radio de la esfera r.	Representar la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y luego plantee la integral o las integrales que se necesitan para calcular el volumen del sólido que se obtienen al girar R alrededor de la recta indicada. Use todos los métodos posibles en cada ejercicio. $y = x^3, y = 4x$, recta $y = 8$ 22. $y = x^3, y = 4x$, recta $x = 4$ 23. $x + y = 3$, $y + x^2 = 3$, recta $x = 2$ 24. $y = 1 - x^2$, $x - y = 1$, recta $y = 3$ 25. $x^2 + y^2 = 1$, recta $x = 5$ 26. $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^2$, recta $y = -1$ 27. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, recta $x = -3$

Fuente de Consulta: (Ayres & Mendelson, 2010; Larson & Edwars, 2018; Ruiz, 2021; Stewart, 2015; Zill & Wright, 2011).

1.4.4. Volúmenes por secciones transversales

1.4.4.1. Teoría y ejemplos

Existen sólidos que no se obtienen del giro de una región con respecto a un eje, para determinar el volumen de estos sólidos se emplea el método de secciones transversales, llamado también rebanadas. La idea de este método consiste en tomar el sólido con respecto a uno de sus ejes y cortarlo en "rebanadas", calcular el volumen de cada rebanada y sumarlas.

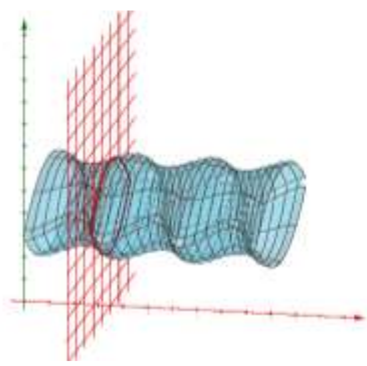


Arquímedes considera a Demócrito como el primero que estableció correctamente la fórmula del volumen de un cono o de una pirámide considerando estos sólidos como si estuvieran formados por innumerables capas paralelas (Newman, 1994).

1.4.4.2. Método de secciones transversales

Supongamos que se quiere hallar el volumen de un sólido S como el que se muestra en el Gráfico 1.53, tracemos los ejes x y y para referencia, cortemos el sólido con un plano obteniendo así la sección transversal que es perpendicular al eje x y que pasa por el punto x, donde $a \leq x \leq b$ y el área de la sección transversal es A(x) y varia conforme lo hace x.

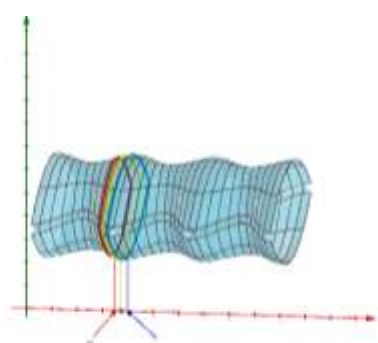
Gráfico 1.53 Representación del corte de un sólido S con un plano



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Si se divide el sólido S en n rebanadas de ancho igual a Δx, esto es una partición del intervalo [a, b] a lo largo del eje x. Consideremos el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y determinemos el volumen de la i-ésima rebanada V_i (Gráfico 1.54).

Gráfico 1.54 Representación de una rebanada el sólido



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

El volumen V_i de la rebanada es igual al área de la sección transversal $A_i(x)$ por su altura Δx, lo que se representa en 1.

$$V_i(x) = A_i(x)\Delta x \qquad (1.239)$$

Calculando los volúmenes para cada subintervalo y sumándolos, tenemos (1.240).

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x \qquad (1.240)$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito, se tiene que el volumen del sólido se expresa en (1.241).

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x = \int_a^b A(x)dx \qquad (1.241)$$

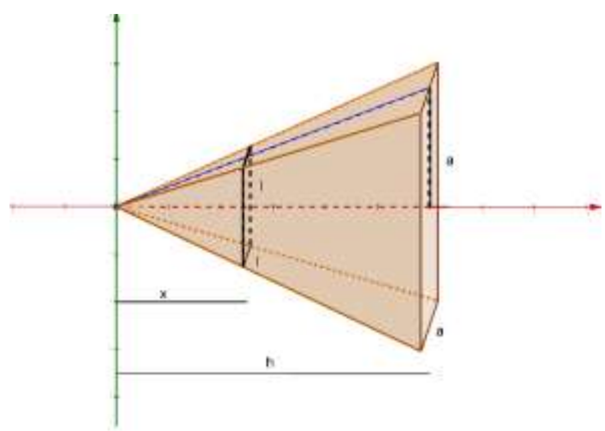
Definición: El volumen del sólido S con área de la sección transversal igual a$A(x)$, desde $x = a$ hasta $\boldsymbol{x = b}$, perpendicular al eje *x* es $V = \int_a^b A(x)\,dx$

El volumen del sólido S con área de la sección transversal igual a $A(y)$, desde $y = c$ hasta $\boldsymbol{y = d}$, perpendicular al eje *y* es $V = \int_c^d A(y)\,dy$

Ejemplo 1.4.10 Determinar el volumen de la pirámide recta de altura h y base cuadrada de lado a (Stewart, 2015).

Consideremos la pirámide de manera horizontal y hacia la derecha, esto para poder ubicar el eje *x*, como el eje de la pirámide, por lo cual se encuentra en el centro de ella sobre la base del Gráfico 1.55 (Stewart, 2015). La sección transversal perpendicular al eje *x*, a una distancia *x* del origen, esta sección es un cuadrado de lado *l*.

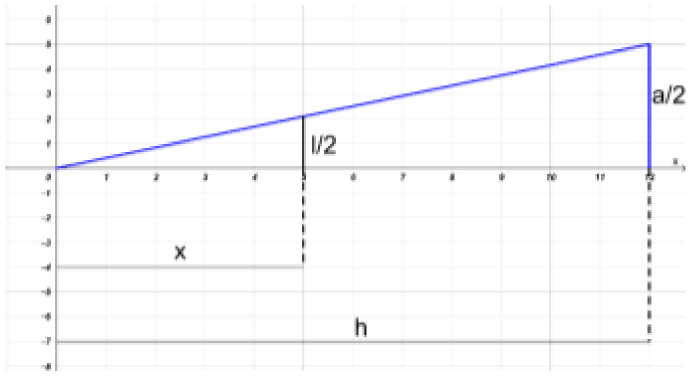
Gráfico 1.55 Pirámide de manera horizontal con la altura el eje x



Fuente de consulta: Stewart, 2015

Para determinar el volumen necesitamos determinar el área de la sección y posteriormente calcular el volumen con la integral de la sección de 0 hasta h, ya que *x* se puede tomar desde el vértice de la pirámide hasta la base. El área de la sección es $A(l) = l^2$, necesitamos expresar *l* en términos de la variable *x* y en dado caso, de las constantes. Para ello podemos tomar el triángulo que se forma del origen a la base de la pirámide que pasa por la sección transversal, como se muestra en el gráfico 1.56. (Stewart, 2015).

Gráfico 1.56 Pirámide de manera horizontal con la altura el eje x



Fuente de consulta: Stewart, 2015

Por triángulos semejantes tenemos (1.84).

$\frac{x}{h}=\frac{\frac{l}{2}}{\frac{a}{2}}$ de donde $\frac{x}{h}=\frac{l}{a}$ y $l=\frac{ax}{h}$ (1.242)

De donde $A(x)=\left(\frac{ax}{h}\right)^2=\frac{a^2}{h^2}x^2$ (1.243)

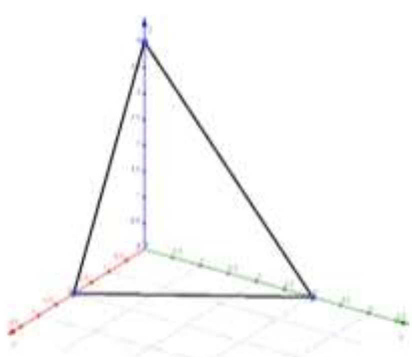
Así, integrando (2), obtenemos la fórmula del volumen de la pirámide de base cuadrada.

$$V=\int_0^h \frac{a^2}{h^2}x^2dx=\frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{1}{3}x^3\right)_0^h=\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{1}{3}h^3-0\right)_0^h=\frac{1}{3}a^2h \quad (1.244)$$

La fórmula del volumen de la pirámide recta de altura h y base cuadrada de lado a es $V=\frac{1}{3}a^2h$

Ejemplo 1.4.11 Un tetraedro tiene tres caras perpendiculares entre sí y tres aristas también perpendiculares de 2, 3 y 4 cm de longitud respectivamente. Calcular el volumen (Stewart, 2015). Para resolver el problema necesitamos trazar una sección transversal del sólido, para ello necesitamos esbozar el sólido. Gráfico 1.57.

Gráfico 1.57 Tetraedro

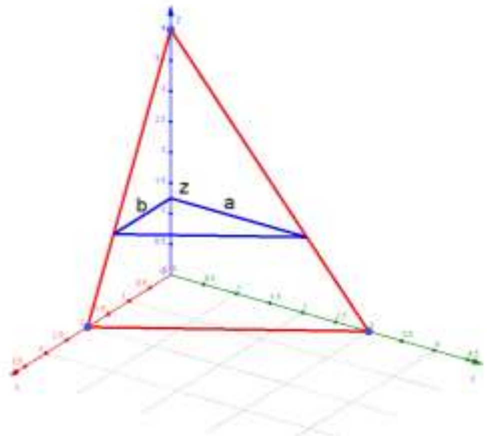


Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Un tetraedro es un poliedro de cuatro caras donde cada cara es un triángulo, para tener una idea más precisa un tetraedro que conocemos es el boing de triangulito. Eso ya nos da una idea del sólido, la otra indicación que nos dan es que tiene tres caras perpendiculares y tres aristas perpendiculares esto es, tres lados perpendiculares esto lo ubicamos en el plano xyz tomemos a este como base del sólido y las rectas que van del eje *x* al eje *y*, del eje *y* al eje *z* y del eje *z* al eje *x* , así:

Consideremos a z como el eje del tetraedro así las secciones transversales serán perpendiculares a z y la variable para integrar también es z. Trazando la sección a una distancia *z*, tenemos el Gráfico 1.58 (Stewart, 2015).

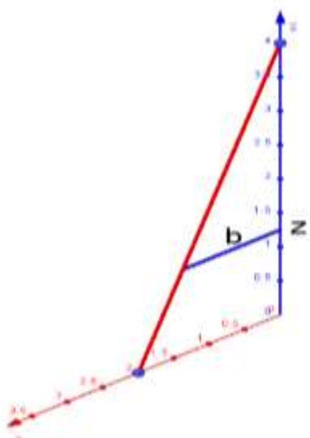
Gráfico 1.58 Z como eje del tetraedro



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

La sección transversal es un triángulo rectángulo digamos de catetos a y b, el área de la sección es $A = \frac{1}{2}ab$. Necesitamos expresar a y b en términos de la variable z. Gráfico 1.59

Gráfico 1.59 Representación de la sección transversal del tetraedro



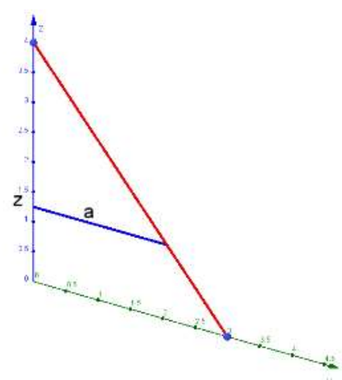
Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Tomamos el triángulo sobre el eje *x* y eje *z*

Por triángulos semejantes tenemos $\frac{b}{2} = \frac{4-z}{4}$ de donde $b = \frac{4-z}{2}$

Tomando ahora el triángulo del eje *y* al eje *z*, tenemos el Gráfico 1.60.

Gráfico 1.60 Representación de la sección transversal del tetraedro con base x y eje z



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

$\frac{a}{3} = \frac{4-z}{4}$ de donde $a = 3\left(\frac{4-z}{4}\right) = \frac{3}{4}(4-z)$, Luego $A(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}(4-z)\right)\left(\frac{4-z}{2}\right) = \frac{3}{16}(4-z)^2$, Así

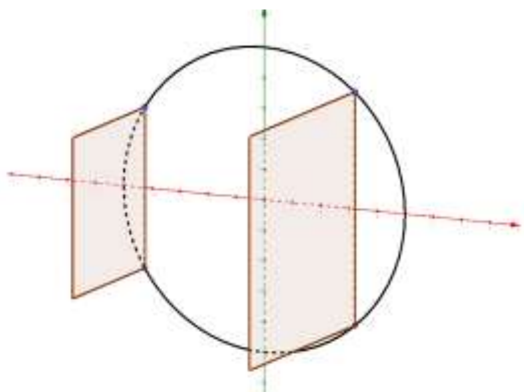
$$V = \int_0^4 \frac{3}{16}(4-z)^2 dz = \frac{3}{16}\int_0^4 (4-z)^2 dz = -\frac{3}{16}\left(\frac{1}{3}\right)(4-z)^3|_0^4 = -\frac{1}{16}[(4-4)^3 - (4-0)^3] = 4$$

Entonces el volumen del tetraedro que tiene tres caras perpendiculares entre sí y tres aristas también perpendiculares de 2, 3 y 4 cm de longitud respectivamente es: $V = 4$. Otro tipo de ejercicios que se consideran en esta sección es cuando no podemos dar la descripción del sólido mediante un objeto conocido, en ese caso se da una descripción del sólido mediante su base y las secciones transversales. Un ejemplo de este tipo es el siguiente.

Ejemplo 1.4.12 La base de un sólido es la región circular contenida en el plano *xy* acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = a^2$, donde $a > 0$. Calcular el volumen del sólido suponiendo que todas las secciones transversales correspondientes a planos perpendiculares al eje *x* son cuadrados (Ruiz, 2021).

En el Gráfico 1.61 se representa la base circular del sólido y dos secciones transversales perpendiculares al eje *x*.

Gráfico 1.61 Representación de la base circular del sólido y dos secciones transversales perpendiculares al eje x.



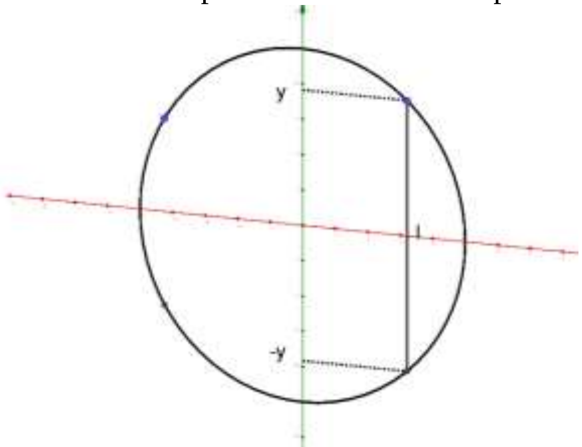
Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Como la sección transversal es un cuadrado, el área se expresa en (1.245).

$$A(l) = l^2 \qquad (1.245)$$

Por lo que se requiere determinar l en términos de la variable x, ya que la sección es perpendicular al eje x. Para ello consideremos el círculo y el lado de una sección sobre él, como se observa en el Gráfico 1.62.

Gráfico 1.62 Representación en forma plana.



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Por la simetría de la circunferencia se tiene que el lado del cuadrado es igual a $2y$, por lo que sustituyendo 2y en (1.245).

$$A = (2y)^2 = 4y^2 \quad (1.246)$$

Necesitamos que el área sea función de x. Sabemos que la ecuación de la circunferencia se expresa en (1.247).

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (1.247)$$

Al despejar y^2 de (1.24) se obtiene (1.248).

$$y^2 = a^2 - x^2 \quad (1.248)$$

Sustituyendo (1.248) en (1.247).

$$A(x) = 4(a^2 - x^2) \quad (1.249)$$

La sección transversal se toma desde $x = -a$ hasta $x = a$, por la integral definida queda expresada en (1.250).

$$V = \int_{-a}^{a} 4(a^2 - x^2)\,dx = 2\int_{0}^{a} 4(a^2 - x^2)\,dx = 8\int_{0}^{a}(a^2 - x^2)\,d \quad (1.250)$$

Resolviendo (1.250) se obtiene el volumen del sólido.

$$V = 8\left(a^2x - \frac{1}{3}x^3\right)_0^a = 8\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) = \frac{16}{3}a^3$$

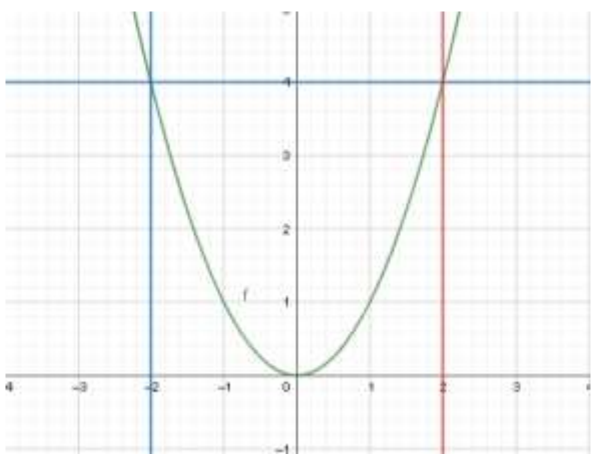
$$\boldsymbol{V = \frac{16}{3}a^3}$$

Ejemplo 1.4.13 Un sólido tiene base en el sector de la parábola comprendido entre $y = x^2$ y la recta $y = 4$, y las intersecciones con planos perpendiculares a la base y paralelos al eje x son cuadrados. Determinar su volumen (Gráficos 1.63 y 1.64).

La base del sólido está representada por la región expresada en 1.

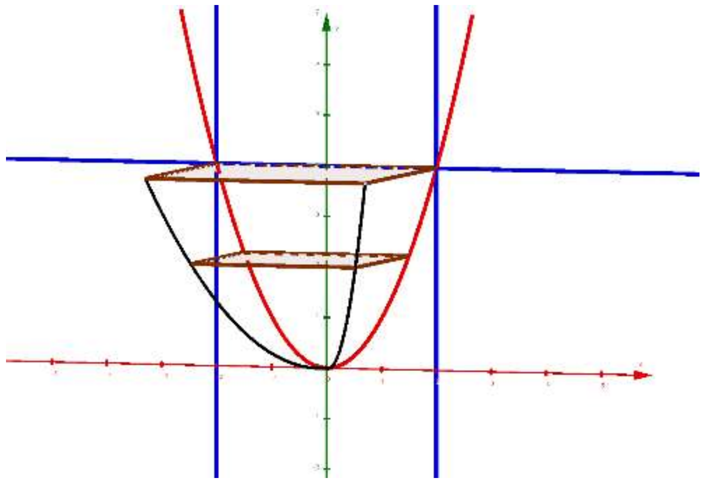
$$R = \{(x, y)|\ -2 \le \mathrm{x} \le 2 \quad \& \quad x^2 \le y \le 4\} \text{ o } R = \{(x, y)|\ 0 \le \mathrm{y} \le 4 \quad \& \quad -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\} \quad (1.251)$$

Gráfico 1.63 Representación de la región



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Gráfico 1.64 Representación del sólido



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Tomando el eje y como eje de rotación tenemos que $0 \leq y \leq 4$ y que el lado del cuadrado en la base se mide $l(y) = 2\sqrt{y}$, por lo que nos resulta el área, expresada en (1.98).

$$A(y) = (2\sqrt{y})^2 \tag{1.252}$$

El volumen se obtiene al calcular la integral de (1.253).

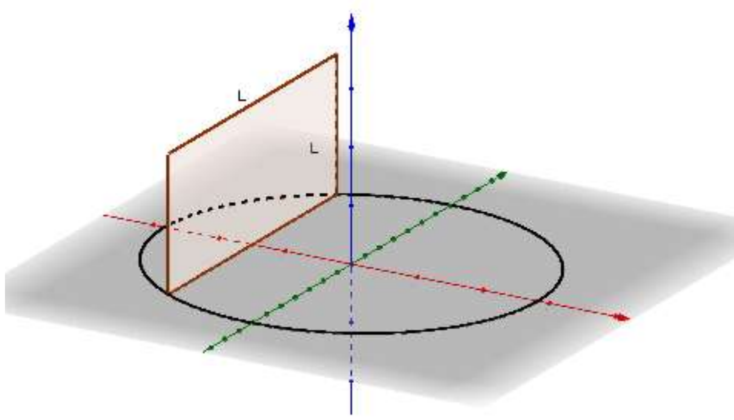
$$V = \int_0^4 A(y)dy = \int_0^4 4y\, dy = 4\frac{y^2}{2}\Big|_0^4 = 32\, u^3 \tag{1.253}$$

Ejercicios para completar de la sección 1.4.4

1. La base de un sólido es circular con un radio de $\sqrt{2}$, hallar su volumen, sabiendo que la sección transversal perpendicular al eje x es un cuadrado.

Observemos la representación en el Gráfico 1.65.

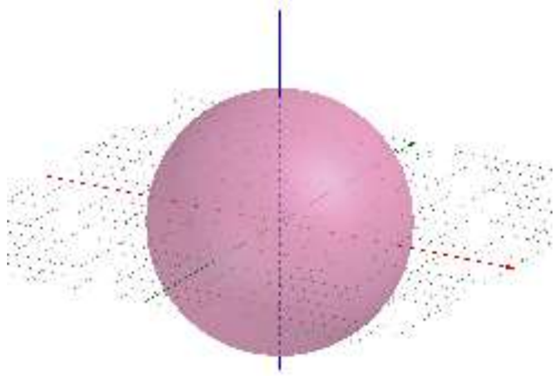
Gráfico 1.65 Representación gráfica



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

En el recuadro realiza el desarrollo

2. Juan tiene una pelota, de la cual le gustaría saber su volumen, ayuda a Juan a deducir el resultado de la fórmula, ya que no ha logrado determinar los límites de integración (Ruiz, 2021).



Recordemos la fórmula:

$$V = \int_a^b A dx$$

En el recuadro realiza el desarrollo

Actividad de la Lección 1.4.4

1. Calcular el volumen del sólido que está entre los planos perpendiculares al eje x acotado por $x = -1$ y $x = 1$, si las secciones transversales perpendiculares al eje x son círculos cuyos diámetros van de la parábola $y = x^2$ a la parábola $y = 2 - x^2$ (Ruiz, 2021).

2. La base de un sólido es un disco circular de radio 3. Encontrar el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos rectángulos isósceles con la hipotenusa apoyada a lo largo de la base (Ruiz, 2021).

3. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por las gráficas de $y = 4$ y $y = x^2$. Calcular el volumen del sólido suponiendo que las secciones transversales que se obtienen al cortarlos con planos perpendiculares al eje x son cuadrados en el plano xy (Ruiz, 2021).

Lista de ejercicios de la lección 1.4.4

Tabla 1.7 Lista de ejercicios de la lección 1.4.4

1. Calcular el volumen del sólido que está entre los planos perpendiculares al eje x acotado por $x = -1$ y $x = 1$, si las secciones transversales perpendiculares al eje x son círculos cuyos diámetros van de la parábola $y = x^2$ a la parábola $y = 2 - x^2$. 2. La base de un sólido es un disco circular de radio 3. Encontrar el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos rectángulos isósceles con la hipotenusa apoyada a lo largo de la base. 3. La base de un sólido es la región circular contenida en el plano xy acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = a^2$ donde $a > 0$. Calcular el volumen del sólido suponiendo que todas las secciones transversales correspondientes a planos perpendiculares al eje x son cuadrados. 4. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por las gráficas de $y = 4$ y $y = x^2$. Calcular el volumen del sólido suponiendo que las secciones transversales que se obtienen al cortarlos con planos perpendiculares al eje x son triángulos rectángulos isósceles cuya hipotenusa está en el plano xy. 5. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por las gráficas de $y = 4$ y $y = x^2$. Calcular el volumen del sólido suponiendo que las secciones transversales que se obtienen al cortarlos con planos perpendiculares al eje x son cuadrados en el plano xy. 6. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por las gráficas de $y = x$ y $y^2 = x$. Calcular el volumen del sólido suponiendo que las secciones transversales que se obtienen al cortarlos con planos perpendiculares al eje x son semicírculos cuyo diámetro está en el plano xy. 7. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por las gráficas de $y^2 = 4x$ y $x = 4$. Calcular el volumen del sólido suponiendo que las secciones transversales que se obtienen al cortarlos con planos perpendiculares al eje y son semicírculos. 8. La base de un sólido es la región circular del plano xy acotada por la gráfica de de $x^2 + y^2 = a^2$ donde $a > 0$. Calcular el volumen del sólido suponiendo que la sección que se obtiene al cortarlo con un plano perpendicular al eje x es un triángulo isósceles de altura constante b.	9. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = 1$. Calcular el volumen del sólido suponiendo que las secciones transversales que se obtienen al cortarlos con planos perpendiculares al eje x son círculos con diámetro en el plano xy. 10. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = 1$. Calcular el volumen del sólido suponiendo que las secciones transversales que se obtienen al cortarlos con planos perpendiculares al eje x son cuadrados con base en el plano xy. 11. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = 1$. Calcular el volumen del sólido suponiendo que las secciones transversales que se obtienen al cortarlos con planos perpendiculares al eje x son cuadrados con diagonales en el plano xy. 12. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = 1$. Calcular el volumen del sólido suponiendo que las secciones transversales que se obtienen al cortarlos con planos perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros con base en el plano xy. 13. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por la gráfica de $y = 2\sqrt{senx}$ en $[0, \pi]$ en x. Calcular el volumen del sólido suponiendo que las secciones transversales que se obtienen al cortarlos con planos perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros con bases desde el eje x hasta la curva. 14. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por la gráfica de $y = 2\sqrt{senx}$ en $[0, \pi]$ en x. Calcular el volumen del sólido suponiendo que las secciones transversales que se obtienen al cortarlos con planos perpendiculares al eje x son cuadrados con bases desde el eje x hasta la curva. 15. La base de un sólido es la región del plano xy acotada por la gráfica de $y = \tan x$ y $y = \sec x$ en $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ en x. Calcular el volumen del sólido suponiendo que las secciones transversales que se obtienen al cortarlos con planos perpendiculares al eje x son círculos con diámetros en el plano xy.

Fuente de Consulta: (Ruiz, 2021)

Lección 1.4.5 Longitud de arco y área de superficie

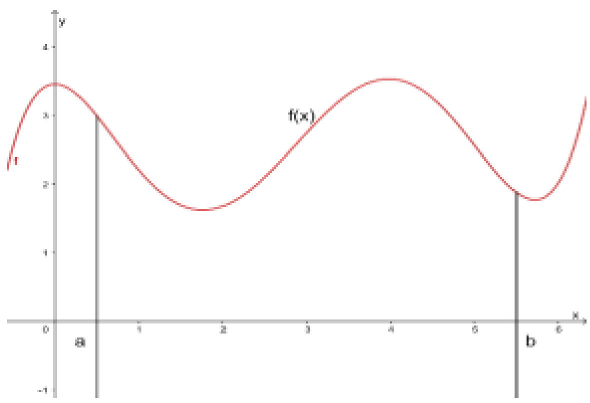
Investiga y Analiza

1. ¿En qué situaciones es requerido calcular la longitud de arco?
2. Menciona algunos ejemplos donde se requiera obtener la longitud de arco

1.4.5.1. Teoría y ejemplos

Si queremos conocer el largo de una curva, si dicha curva es una recta podemos calcularla como la distancia entre dos puntos. Pero si la curva no es una recta, no conocemos un procedimiento, veamos cómo se determina. Consideremos una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$, como se muestra en el Gráfico 1.66.

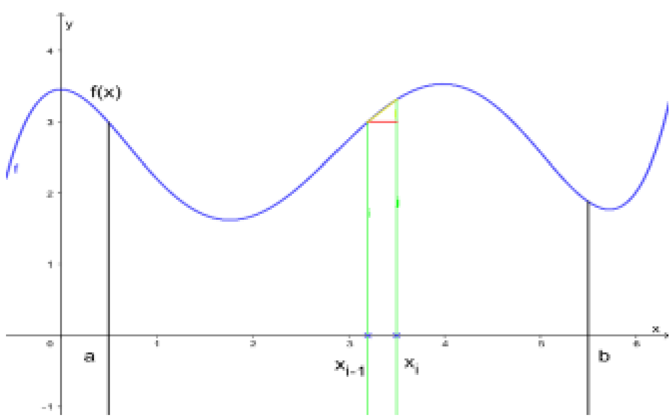
Gráfico 1.66 Representación gráfica de una función f(x) definida en un intervalo [a,b]



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Para determinar la longitud de la curva que define a la función, consideremos una partición del intervalo $[a, b]$ en n sub-intervalos de longitud Δx con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Considerando el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y si tomamos el rectángulo que se genera hacia la función se tiene lo que se observa en el Gráfico 1.67.

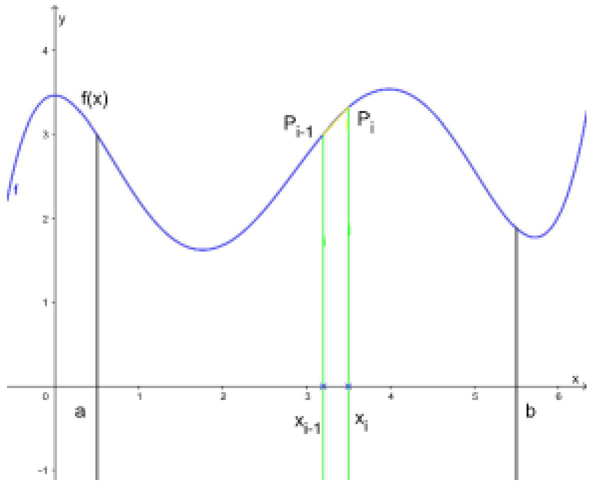
Gráfico 1.67 Rectángulo que se genera determinado por el intervalo [x_(i-1), x_i]



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

El rectángulo nos determina en su parte superior una aproximación a la curva, segmento que está marcado con rojo, el cual está muy alejado del valor real. Pero si en vez de tomar el segmento en color morado tomamos el segmento en color verde, éste se encuentra entre los puntos $P_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $P_i(x_i, f(x_i))$, se obtiene una aproximación más cercana a la longitud de la curva en este intervalo. Razón por la cual, en vez de tomar el rectángulo sobre cada intervalo, vamos a tomar el trapecio que se forma (Gráfico 1.68).

Gráfico 1.68 Trapecio que se forma a partir del rectángulo



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Determinemos la longitud l_i de la curva en este intervalo.

Longitud l_i es igual a la distancia entre los puntos P_{i-1} y P_i (1)

$$L_i = d(P_{i-1}, P_i) \tag{1.254}$$

Sustituyendo en la fórmula de la distancia entre dos puntos, las abscisas y las ordenadas se tiene (2).

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2} \tag{1.255}$$

Necesitamos buscar la forma de modificar la longitud ya que para que podamos llegar a la Suma de Riemann y posteriormente a la integral, necesitamos tener una expresión por Δx. Sin el factor Δx no podemos llegar a la Suma de Riemann.

Recordando el Teorema del Valor Medio.

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a) \text{ donde } c \in [a, b] \tag{1.256}$$

Si aplicamos el Teorema del Valor Medio para la función $f(x)$ en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, tenemos.

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i *)(x_i - x_{i-1}) \text{ con } x_i * \in [x_{i-1}, x_i] \tag{1.257}$$

Así, sustituyendo (4) en (2).

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f'(x_i *)(x_i - x_{i-1})\right)^2}$$

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f'(x_i *)\right)^2 (x_i - x_{i-1})^2}$$

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \left(1 + \left(f'(x_i *)\right)^2\right)}$$

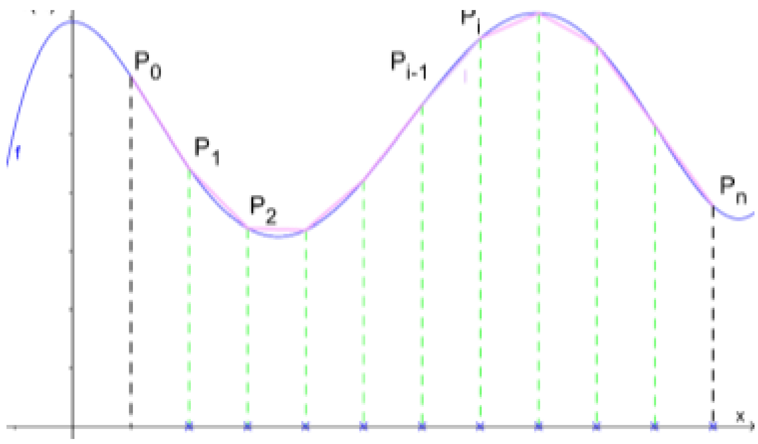
$$L_i = \sqrt{\left(1 + \left(f'(x_i *)\right)^2\right)(x_i - x_{i-1})^2}$$

$$L_i = \sqrt{1 + \left(f'(x_i *)\right)^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

$$L_i = \sqrt{1 + \left(f'(x_i *)\right)^2} \quad \Delta x \tag{1.258}$$

En la expresión (1.258) ya tenemos Δx. Luego, para aproximarnos a la longitud de la curva $f(x)$ en $[a, b]$, calculamos las longitudes de cada sub-intervalo. Gráficamente tenemos lo que se muestra en el Gráfico 1.69.

Gráfico 1.69 Representación de las longitudes de cada subintervalo



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Así, sustituyendo en (1.258) los valores correspondientes de *x* obtenemos (1.259).

$$L_1 = \sqrt{1 + \left(f'(x_1 *)\right)^2} \quad \Delta x$$

$$L_2 = \sqrt{1 + \left(f'(x_2 *)\right)^2} \quad \Delta x$$

$$\vdots$$

$$L_i = \sqrt{1 + \left(f'(x_i *)\right)^2} \quad \Delta x$$

$$\vdots$$

$$L_n = \sqrt{1 + \left(f'(x_n *)\right)^2} \quad \Delta x \tag{1.259}$$

Luego, (1.105) se expresa como una sumatoria.

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(x_i *)\right)^2} \quad \Delta x \tag{1.260}$$

Tomando el límite de (1.106), cuando n tiende a ∞, tenemos (8).

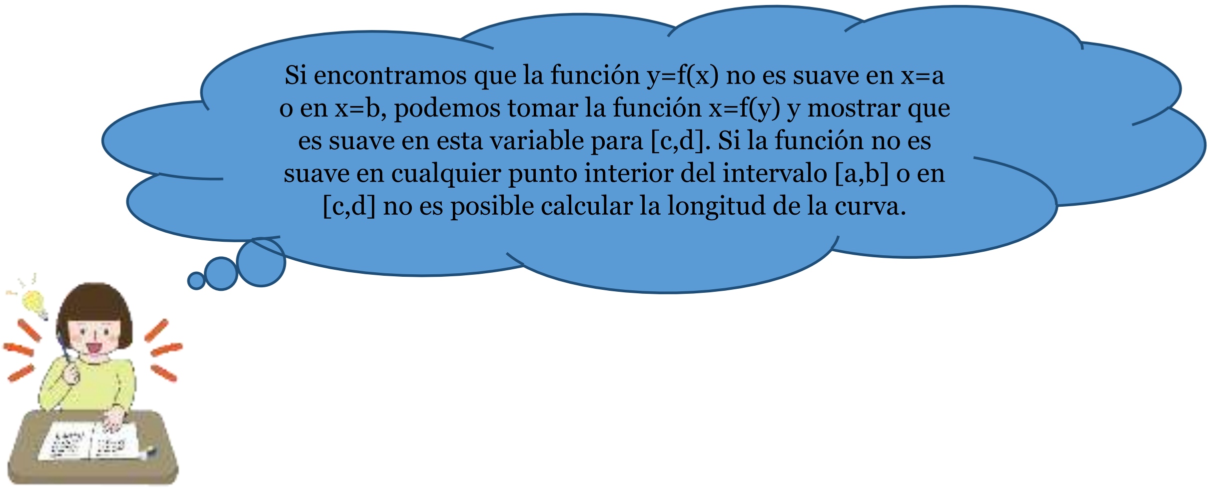
$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(x_i *)\right)^2} \quad \Delta x \tag{1.261}$$

Por la definición de integral definida obtenemos (1.108).

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx \tag{1.262}$$

1.4.5.2. Longitud de arco

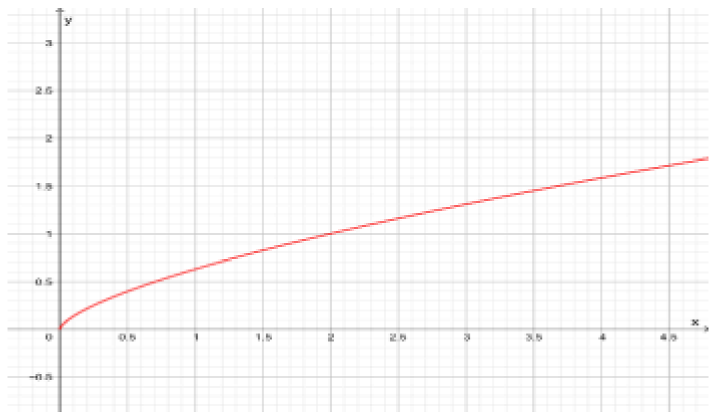
Definición 1.4.5.1 Sea f una función suave o alisada en $[a,b]$, esto es $f'(x)$ continua en $[a,b]$, la longitud de la curva $y=f(x)$ para $a \le x \le b$, es $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$, Como región y, f una función suave o alisada en $[c,d]$, esto es $f'(y)$ continua en $[c,d]$, la longitud de la curva $x=f(y)$ para $c \le y \le d$, es $L=\int_c^d \sqrt{1+\left(f'(y)\right)^2}\,dy$



Nota: Cuando calculamos la longitud de la curva no es necesario graficar la función,

Ejemplo 1.4.5.1 Calcular la longitud de arco de la curva $y=\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$ desde $x=0$ hasta $x=2$

Gráfico 1.70 Representación gráfica de la función



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Primero determinemos si la función $y=\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$ es suave.

$$f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}} \qquad (1.263)$$

Encontramos que $f'(x)$ no es continua para $x=0$. Veamos que sucede si cambiamos la variable, esto es que consideremos la función $x=f(y)$, despejando x de la expresión $y=\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$, tenemos

$$y=\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \Longrightarrow y^{\frac{3}{2}}=\frac{x}{2} \Longrightarrow x=2y^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow f(y)=2y^{\frac{3}{2}} \quad f(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad (1.264)$$

El intervalo para y, queda determinado si evaluamos los valores de x

Si $x = 0 \Longrightarrow y = \left(\frac{0}{2}\right)^{2/3} = 0$

Si $x = 2 \Longrightarrow y = \left(\frac{2}{2}\right)^{2/3} = 1$, y varia de $y = 0$ hasta $y = 1$

Veamos si la función es suave

$f'(y) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(2y^{\frac{1}{2}}\right) = 3y^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{y}$ $f'(y)$ es continua en $[0,1]$, luego la función es suave. (1.265)

Calculemos la longitud de la curva

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(3\sqrt{y}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y}\, dy \qquad (1.266)$$

Resolviendo la integral

$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y}\, dy \quad u = 1 + 9y \quad du = 9dy$

$$L = \frac{1}{9}\int_0^1 \sqrt{1 + 9y}\, dy = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}(1 + 9y)^{\frac{3}{2}}\right)_0^1 = \frac{2}{27}(1 + 9y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{27}(1 + 9)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{27}(1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{27}(10)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{27} = \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) = 2.26 \text{ unidades} \qquad (1.267)$$

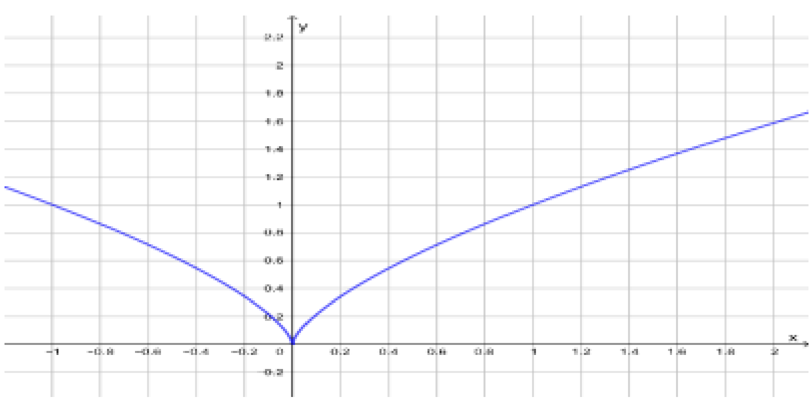
La longitud de arco de la curva $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$ es 2.26 unidades

Ejemplo 1.4.5.2 Se requiere saber la longitud de arco de un tramo de la curva de una carretera. Función de la curva: $x^2 = y^3$ en el intervalo [0,2].

Figura 1.4.5.4 Imagen de la carretera

Primero se grafica la función

Gráfico 1.71 Representación de la función y= (x^2)^(1/3)



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Dada $x^2 = y^3, d$espejando y tenemos

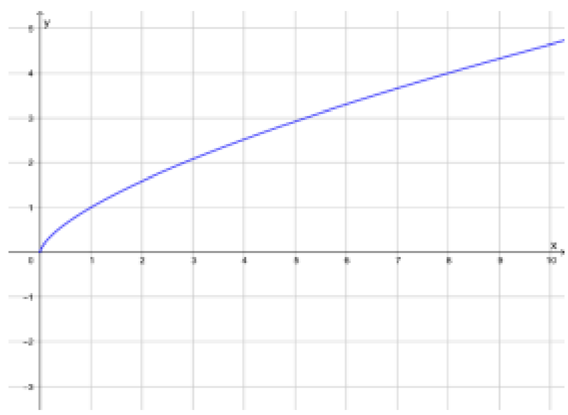
$$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \tag{1.268}$$

Revisemos si la derivada de la función es continua en el intervalo [0,2].

$$y' = \frac{2}{3}(x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} \tag{1.269}$$

Observamos que la derivada de la función $y = (x^2)^{\frac{1}{3}}$, no es continua en el intervalo [0,2], por lo que ahora trabajamos con la función $x = y^{\frac{3}{2}}$ (1.270)
representada en el Gráfico 1.72.

Gráfico 1.72 Representación de la función x= y^(3/2)



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Derivando (3) obtenemos $\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}\sqrt{y}$ (1.271)

Como la derivada es continua en [0,2], podemos obtener la longitud de la curva, empleando la fórmula

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{y}\right)^2}\, dy \qquad L = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}y}\, dy \qquad u = 4 + 9y$$

$$du = 9$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{\frac{4+9y}{4}}\, dy \qquad L = \frac{1}{2}\frac{1}{9}\int_0^2 \sqrt{u}\, du$$

$$L = \frac{1}{18}\int_0^2 \sqrt{u}\, du \qquad L = \frac{1}{18}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 \qquad L = \frac{1}{18}\left[(4 + 9y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$L = \frac{1}{18}\left[(4 + 9(2))^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$L = \frac{1}{18}\left[(4 + 18)^{\frac{3}{2}}\right]$$

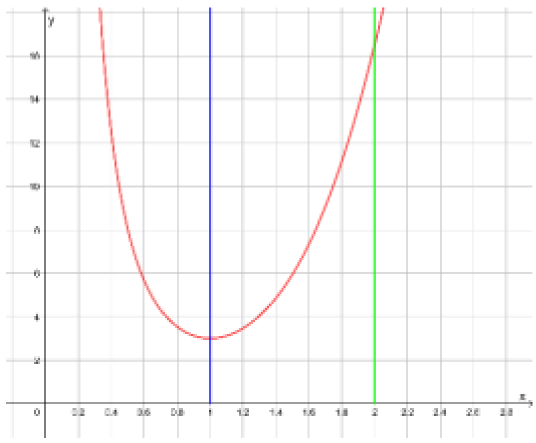
$$L = \frac{1}{18}(22)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{18}(22)\sqrt{22} = \frac{11}{9}\sqrt{22} \cong 5.73$$

La longitud de arco de la curva $x^2 = y^3$ es 5.73 unidades

Ejercicios para completar de la sección 1.4.5.2

1. Un trabajador necesita calcular la longitud de la curva que se encuentra en una parte de un cable de alta tensión que está ligeramente caído, pero sin tocar el suelo, cuya función de la curva es $y = x^4 + \frac{2}{x^2}$, en el intervalo [1,2].

Observa la gráfica de la función.



Deriva la función $y = x^4 + \frac{2}{x^2}$

¿La derivada obtenida es una función continua en el intervalo [1,2]?

¿Cuál es la fórmula que vas a emplear para obtener la longitud de arco solicitado?

En el siguiente recuadro realiza el desarrollo para obtener la longitud de arco solicitada.

Actividad de la sección 1.4.5.2

Calcular la longitud de arco de la función dada en el intervalo señalado.

1. $y = 6\sqrt[3]{x^2} + 1$ de A (–1,7) a B (–8,25)

2. (a) Hallar una curva que pasa por el punto (1, 1) cuya integral de longitud sea $L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$

(b)¿Cuántas curvas como ésa hay? Justifica su respuesta

Lista de Ejercicios de la sección 1.4.5.2

Tabla 1.8 Lista de ejercicios 1.4.5.2

Instrucciones: Calcular la longitud de arco de la función dada en el intervalo señalado.	11. $y = ln(sec\,x)$ de x = 0 a x = $\frac{\pi}{4}$
1. $y^2 = x^3$ de $(1,1)$ a $(4,8)$	12. $x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + \sqrt{y}$, $1 \le y \le 9$
2.$(y+1)^2 = (x-4)^3$ de $A(5,0)$ a $B(8,7)$	13. $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ $0 \le x \le 2$
3.$y = 3x^{\frac{2}{3}} - 5$ de $A(8,7)$ a $B(27,22)$	14. $y = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{8}x^{\frac{2}{3}} + 5$, $1 \le x \le 8$
4.$y = 5 - \sqrt{x^3}$ de $A = (1,4)$ a $B = (4,-3)$	15. $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$, $1 \le y \le 3$
5.$y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$ de $\left(1, \frac{13}{12}\right)$ a $\left(2, \frac{7}{6}\right)$	16. $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$ $1 \le x \le 2$
6.$x = \frac{y^4}{16} + \frac{1}{2y^2}$ de $\left(\frac{9}{8}, -2\right)$ a $\left(\frac{9}{16}, -1\right)$	17. $y = ln(\,senx)$para $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}$
7.$x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{2y}$ desde y = 1 hasta y = 2	18. $y = ln(\,1 - x^2)$ para $0 \le x \le \frac{1}{2}$
8.$y = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{4x+4}$ de x = 0 a x = 2	19. $y = cosh\,x$ de x = 0 a x = 1
9.$y = \frac{x^2}{2} - \frac{ln\,x}{4}$ de x = 2 a x = 4	20. $y = e^x$ de x = 0 a x = 1
10. $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}$ de x = 1 a x = 2	21. $y = ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$ para $a \le x \le b$, a > 0

Fuente de Consulta: (Larson & Edwars, 2018; Stewart, 2015).

1.4.5.3. Teoría y ejemplos

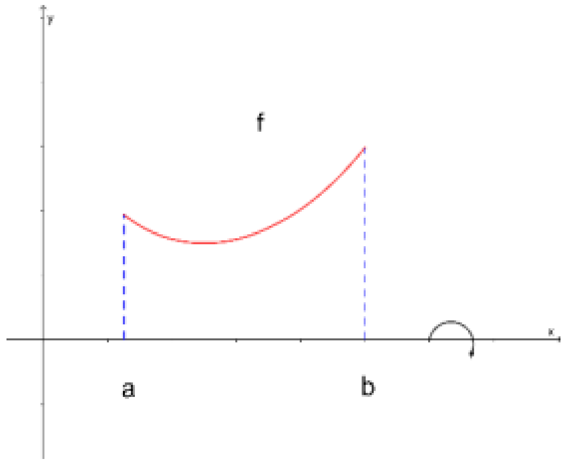
Una superficie de revolución se obtiene al girar una curva llamada *generatriz* alrededor de una recta que se utiliza como *eje* en el plano. Un ejemplo de esto se obtiene al girar una circunferencia alrededor de su diámetro obteniendo una esfera. Muchas de las superficies simétricas que conocemos pueden generarse utilizando una única curva que describe el comportamiento de su contorno, ejemplo de ello son: huevo, jarrón, botella, trompo, etc.

Figura 1.7 Superficies simétricas

Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Determinemos la forma de calcular el área de superficie que se genera al girar una función $y = f(x)$ con respecto al eje x, supongamos que $y = f(x)$ es una función no negativa y con derivada $f'(x)$ continua en $[a,b]$.

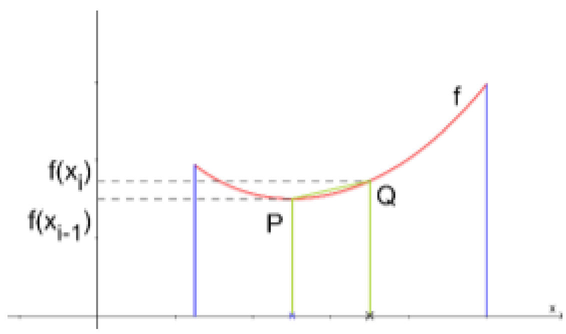
Gráfico 1.73 Representación gráfica de f



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

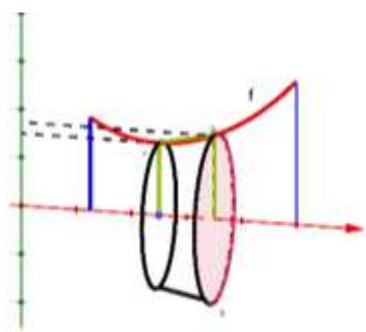
Para determinar el área de la superficie del sólido que se obtiene al girar la función con respecto al eje x, consideremos una partición del intervalo $[a, b]$ en n sub-intervalos de longitud Δx con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Considerando el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y si tomamos el segmento de recta que se tiene entre los puntos P$\left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right)$ y Q$\left(x_i, f(x_i)\right)$ se forma un trapecio, mismo que ya vimos en longitud de arco es más cercano a la curva, se tiene:

Gráfico 1.74 Representación gráfica del trapecio obteniéndose como un cono truncado



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Gráfico 1.75 Representación gráfica del giro del trapecio alrededor del eje x

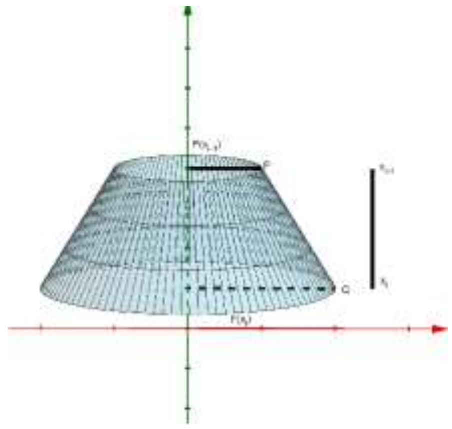


Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Al girar el trapecio obtenemos un cono truncado como el que se muestra en el Gráfico 1.74, y éste tiene un área de superficie S_i

Dado el cono truncado, anotamos los datos correspondientes (Gráfico 1.76).

Gráfico 1.76 Elementos destacados en el cono truncado



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

El área de la superficie S de un cono truncado se expresa en (1.272).

$S = 2\pi$ (radio medio)(longitud generatriz) (1.272)

La generatriz es la distancia entre P y Q

radio medio $= \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$ (1.273)

La longitud generatriz $= L_{PQ}$=Longitud de arco entre los puntos P y Q (1.274)

Utilizando la fórmula de la longitud de arco

longitud generatriz $= \sqrt{1+\left(f'(x_i*)\right)^2}\Delta x$ (1.275)

Así el área de superficie del cono truncado generado en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, está dado en (1.276).

$$S_i = 2\pi\left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'(x_i*)\right)^2}\Delta x \quad (1.276)$$

Calculando el área de superficie de los conos trucados que se generan sobre cada sub-intervalo y sumándolas tenemos

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi\left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'(x_i*)\right)^2}\Delta x \quad (1.277)$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito, tenemos que el área de superficie es:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'(x_i*)\right)^2}\Delta x \quad (1.278)$$

Empleando la definición de la integral definida como el límite de suma de Riemann

$$S = \int_a^b 2\pi\left(\frac{f(x)+f(x)}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx \quad (1.279)$$

Sustituyendo por f(x)

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx \quad (1.280)$$

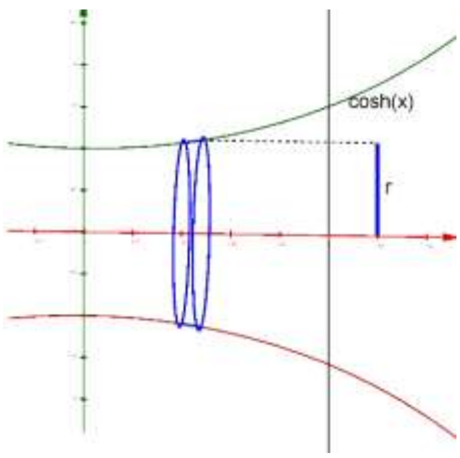
1.4.5.4 Área de superficie de sólidos

Definición: Sea f una función suave o alisada en $[a,b]$, esto es $f'(x)$ continua en $[a,b]$, el área S de la superficie generada al girar la gráfica de $y = f(x)$ para $a \leq x \leq b$, alrededor del eje x, es $S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$, siendo $f\left(x\right)$ el radio medio del cono truncado que se genera. Como región y, f una función suave o alisada en $[c,d]$, esto es $f'(y)$ continua en $[c,d]$, el área S de la superficie generada al girar la gráfica de $x = f(y)$ para $c \leq y \leq d$, alrededor del eje y, es $S = \int_c^d 2\pi f(y)\sqrt{1+\left(f'(y)\right)^2}\,dy$ (Larson & Edwars, 2018).

Ejemplo 1.4.5.3 Calcular el área de la superficie generada al girar la región limitada por $y = cosh\,x$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$ con respecto del eje x

Solución:

Gráfico 1.77 Representación gráfica de la región limitada por y=coshx desde x=0 hasta x=2



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

En este caso el radio coincide con la función, luego $y = f(x) = cosh\,x$ y los límites nos lo dan en el planteamiento del problema, por lo que x varia de 0 a 1, luego hay que determinar si la función es suave

$f'(x) = sinh\,x$ $\qquad$ $f'(x)$ es continua para todo x. luego la función es suave.

Calculemos el área de superficie

$$S = \int_0^1 2\pi\,cosh\,x\,\sqrt{1+(sinh\,x)^2}dx \quad (1.281) = \int_0^1 2\pi\,cosh\,x\,\sqrt{cosh^2\,x}\,dx = \int_0^1 2\pi\,cosh\,x\,cosh\,x\,dx$$

$$= \int_0^1 2\pi\,cosh^2\,x\,dx = 2\pi\int_0^1 \frac{cosh\,2x+1}{2}dx = \pi\int_0^1 (cosh\,2\,x+1)dx = \pi\left(\frac{1}{2}sinh\,2\,x + x\right)_0^1$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}sinh\,2 + 1 - \frac{1}{2}sinh\,0 - 0\right) = \pi\left(\frac{1}{2}sinh\,2 + 1\right) = 8.8386$$

$$\boldsymbol{S = 8.8386}$$

Ejemplo 1.4.5.4 La forma del reflector de un faro se obtiene haciendo girar una parábola alrededor de su eje. Calcular el área de la superficie de un reflector que mide 4 pies de diámetro y tiene una profundidad de 1 pie. Figura 1.8.

Figura 1.8 Imagen del reflector

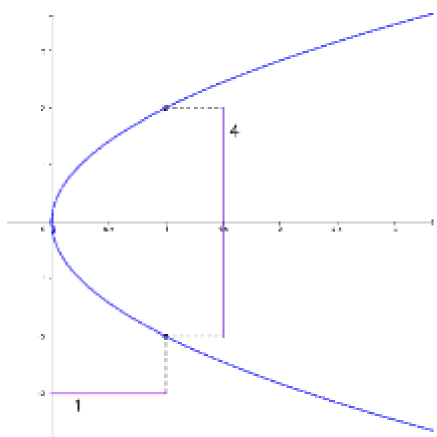
Fuente de Consulta: Elaboración Propia

El reflector del faro se obtiene de una parábola que podemos situar su centro en el origen (Figura 1.8). Vemos que la parábola pasa por los puntos $(1{,}2)$ y $(1,-2)$, por lo que podemos determinar la ecuación de la parábola con centro en el origen que pasa por esos puntos.

La ecuación de la parábola con centro en el origen que abre hacia la derecha es

$$y^2 = 4px \tag{1.282}$$

Gráfico 1.78 Gráfica de la parábola y^2=4px.



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Como el punto $(1{,}2)$ están en la parábola para ese punto se cumple igualdad, así $(2)^2 = 4p(1)$ $\Rightarrow 4 = 4p \Rightarrow p = 1$ (1.283)

Luego la función es $y^2 = 4x$, esto es $y = \sqrt{4x} = \pm 2\sqrt{x}$ (1.284)

Pero como queremos una función de x, que gire con respecto al eje x, es suficiente con la parte superior de la parábola o con la raíz positiva, así

$$y = f(x) = 2\sqrt{x} \tag{1.285}$$

Veamos si la función es suave en $(0{,}1)$, para lo cual la derivamos

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{1.286}$$

(1.286) es continua en el intervalo $(0,1)$ por lo tanto es suave

Nota: El cero no está incluido porque el intervalo es abierto.

Determinemos el área de superficie, para lo cual integremos.

$$S = \int_0^1 2\pi\left(2\sqrt{x}\right)\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = 4\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)}\,dx = 4\pi\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$$

$$= 4\pi\int_0^1 \sqrt{x}\,\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,dx = 4\pi\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx = \frac{8\pi}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3}(1+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{8\pi}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}}$$

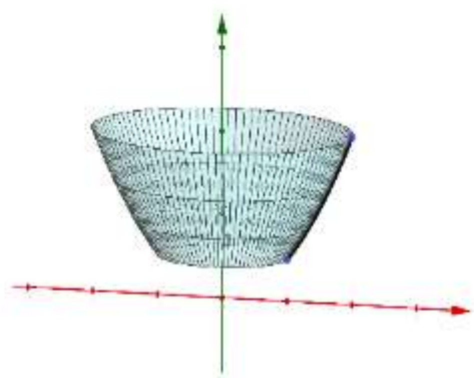
$$= \frac{8\pi}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - \frac{8\pi}{3}(1)^{\frac{3}{2}} = \frac{8\pi}{3}\left((2)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{8\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

El área de la superficie es:

$$\boldsymbol{A = \frac{8\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)}$$

Ejemplo 1.4.5.5 El arco de la parábola $y = x^2$ de (1,1) a (2,4) se hace girar en torno al eje y. Encuentre el área de la superficie resultante (Gráfico 1.79).

Gráfico 1.79 Arco de la parábola y=x^2 que se hace girar en torno del eje y.



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Revisamos si la derivada de la función es continua en el intervalo dado.

$$x = \sqrt{y} \;\; entonces \;\; \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \tag{1.287}$$

Escribimos la fórmula para determinar el área de la superficie

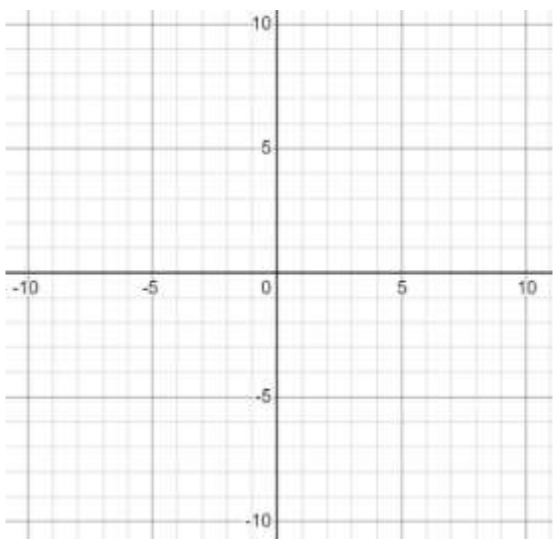
$$S = 2\pi\int_1^4 \sqrt{y}\,\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\,dy \tag{1.288}$$

Solución 1	**Solución 2**
Resolvemos la integral $S = 2\pi \int_1^4 \sqrt{y}\ \sqrt{1+\frac{1}{4y}}\,dy =$ $2\pi \int_1^4 \sqrt{y}\ \sqrt{\frac{4y+1}{4y}}\,dy = 2\pi \int_1^4 \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}\sqrt{4y+1}dy$ $S = \pi \int_1^4 \sqrt{4y+1}\,dy = \frac{\pi}{4}\int_1^4 u^{\frac{1}{2}}du =$ $\frac{\pi}{4}\,\frac{2}{3}(4y+1)^{\frac{3}{2}}\Big\|_1^4 = \frac{\pi}{6}((16+1)^{\frac{3}{2}} - \left((5)^{\frac{3}{2}}\right)$ $S = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}) = 9.81\pi$	Utilizando $y = x^2$ y $\frac{dy}{dx} = 2x$ $S = \int 2\pi x\ ds$ $S = \int_1^2 2\pi\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2 dx}$ $S = 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1+4x^2}\,dx$ Al sustituir $u = 1 + 4x^2$, se tiene $du = 8x$. Recuerda que al cambiar los límites de integración, se tiene $S = \frac{\pi}{4}\int_5^{17} \sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_5^{17}$ $S = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$ Llegamos al mismo valor obtenido en la solución 1 El área de la superficie resultante es $\boldsymbol{S = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}) \approx 9.81\pi}$

Ejercicios para completar de la sección 1.4.5.4

1. Para calcular el área de la superficie de una cubeta se tiene la región dada por la función $y = x^2$ y las rectas $y = 4$ y $y = 8$

En el plano cartesiano haz la gráfica de la función



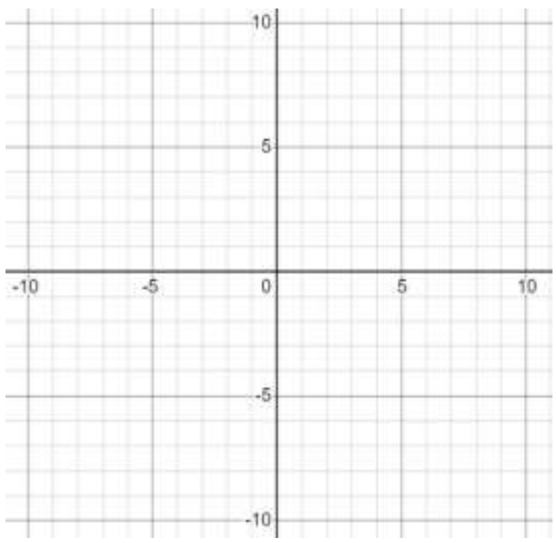
Cuál es la fórmula que emplearás

En el recuadro haz el desarrollo

Anota la respuesta

2. Se tiene una antena parabólica (Figura 1.9) cuya función es $y=x^2$, en los puntos (0,0) y (1,1), que gira alrededor del eje y. Calcule el área de la superficie generada.

En el plano cartesiano haz la gráfica de la función.



¿Cuál es la fórmula que emplearás?

En el recuadro haz el desarrollo

Anota la respuesta

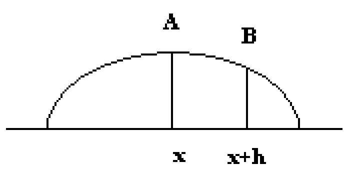
Lista de ejercicios de la sección 1.4.5.4

Tabla 1.9 Lista de ejercicios de la lección 1.4.5.4

Determinar el área de la superficie genera al girar la región dada con respecto al eje señalado. 1. $4x = y^2$ de A (0, 0) a B (1, 2); eje *x* 2. $x = 4\sqrt{y}$ de A (4, 1) a B (12, 9); eje *y* 3. El arco de la parábola $y^2 = x$ con el primer cuadrante que va de (1, 1) a (4, 2) gira alrededor del eje *x*. Calcular el área de la superficie resultante. 4. Hallar el área de la superficie lateral del cono generado al girar el segmento de recta$y = \frac{x}{2}$, $0 \le x \le 4$gira alrededor del eje *x*. Verifica tu respuesta.	5. ¿Sabías que, si cortas una pieza esférica de pan en rebanadas del mismo ancho, cada una tendría la misma cantidad de corteza? Para probarlo supongamos que el semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$mostrado gira alrededor del eje *x*. Sea AB un arco del semicírculo que esta sobre un intervalo de longitud h en el eje x. Muestra que el área barrida por AB no depende de la ubicación del intervalo si no depende de la longitud del intervalo 6. $8y = 2x^4 + x^{-2}$ de $A\left(1, \frac{3}{8}\right)$ a $B\left(2, \frac{139}{32}\right)$; eje *x*

Fuente de Consulta: (Ruiz, 2021; Stewart, 2015; Larson & Edwars, 2018)

Tabla 1.10 Parte 2 de la lista de ejercicios de la lección 1.4.5.4

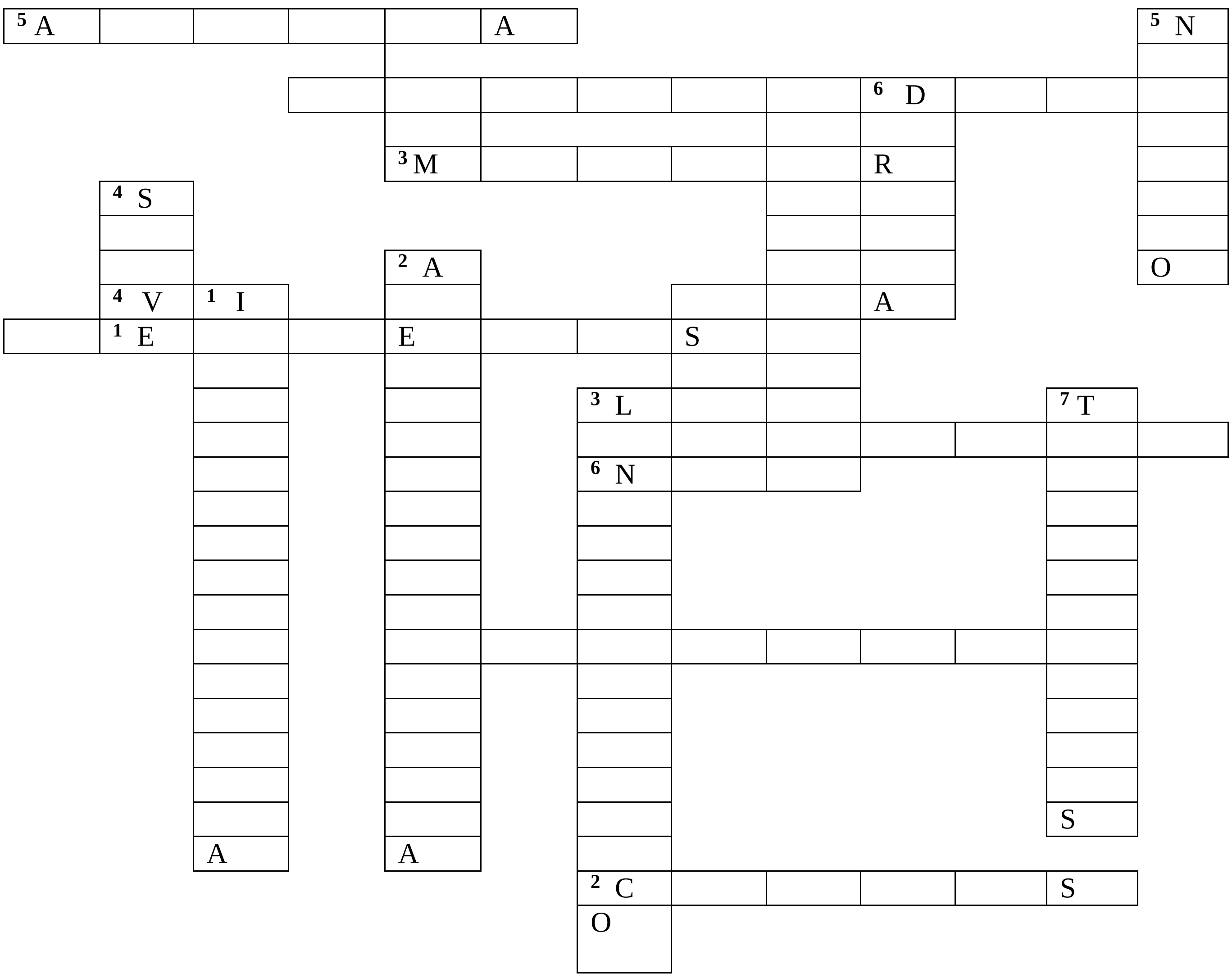
7. $y = 2\sqrt{x+1}$ de A(0, 2) a B(3, 4); eje *x* 8. $y = 2\sqrt[3]{x}$ de A(1, 2) a B(8, 4); eje *y* 9. $x = 4\sqrt{y}$ de A(4, 1) a B(12, 9); eje *y* 10. $y = tan\, x$ en $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$; eje *x* 11. $x = 2\sqrt{4-y}, 0 \le y \le \frac{15}{4}$; eje *y* 12. $x = \sqrt{2y-1}, \frac{5}{8} \le y \le 1$; eje *y* 13. $x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}$, $1 \le y \le 2$; eje *y* 14. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{ln\, x}{2}$, $1 \le x \le 4$; eje *x* 15. *y* = cosh *x*, $0 \le x \le 1$; eje *x* 16. $x = e^y$, $0 \le y \le \frac{1}{2}$, eje *y* 13. El arco de la parábola $y^2 = x$ con el primer cuadrante que va de (1, 1) a (4, 2) gira alrededor del eje *x*. Calcular el área de la superficie resultante. 14. Hallar el área de la superficie lateral del cono generado al girar el segmento de recta$y = \frac{x}{2}$, $0 \le x \le 4$gira alrededor del eje *x*. Verifica tu respuesta con la formula geométrica. 15. Hallar el área de la superficie lateral del cono generado al girar el segmento de recta$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, $1 \le x \le 3$gira alrededor del eje *x*. Verifica tu respuesta con la formula geométrica. 16. Hallar el área de la superficie generada al girar alrededor del eje *x*, la parte del hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.  	17. La banda sombreada que se muestra en la figura, es un corte de la esfera del radio R por planos paralelos que se encuentran a h unidades uno del otro. Muestra que el área de la superficie de la banda es $2\pi Rh$. 18. La forma del reflector de un faro se obtiene haciendo girar una parábola alrededor de su eje. Calcular el área de la superficie de un reflector que mide 4 pies de diámetro y tiene una profundidad de 1 pie. 19. ¿Sabias que, si cortas una pieza esférica de pan en rebanadas del mismo ancho, cada una tendría la misma cantidad de corteza? Para probarlo supongamos que el semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$mostrado, gira alrededor del eje *x*. Sea AB un arco del semicírculo que esta sobre un intervalo de longitud h en el eje x. Muestra que el área barrida por AB no depende de la ubicación del intervalo si no depende de la longitud del intervalo. 20. Calcular el área de la superficie generada cuando el menor de los arcos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ entre los puntos (– 3, 4) y (3, 4) gira alrededor del eje *x*. 21. Mostrar que el área de la superficie de un cono circular recto de altura a y radio de la base b es $\pi b\sqrt{a^2 + b^2}$ 22. Halla el área de la superficie lateral del cono generado al girar el segmento de recta $y = \frac{x}{2}$, $0 \le x \le 4$, alrededor del eje *y*. 23. Mostrar que el área de la superficie de una esfera de radio *a* es $4\pi a^2$. 24. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con a > b se hace girar en torno del eje *x* para formar una superficie llamada elipsoide. Calcular el área superficial del elipsoide.

Fuente de Consulta: (Ruiz, 2021; Stewart, 2015; Larson & Edwars, 2018)

Actividad 1 de la Unidad 1

Instrucciones: Resuelve el crucigrama, lee cada reactivo y recuerda lo visto en clases.

Verticales	Horizontales
1. Se define como el límite cuando n tiende a infinito de la suma de Riemman	1. Esta fótmula n(n+1)/2 permite obtener la suma de
2. Esta suma de Riemman $\sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x$permite encontrar	2. Esta fótmula $[n(n+1)]^2/2$ permite obtener la suma de
3. La fórmula $L=\int_c^d \sqrt{1+\left(f'(y)\right)^2}\,dy$ permite obtener	3. Al calcular áreas por el método de discos y arandelas, si integro con respecto a x, la función f(x), es ______ con respecto a la función g(x)
4. Cuando la derivada de una función es contínua en [a,b], cómo es la función en el mismo intervalo	4. Si cambias p por v se lee π.
5. Si f es una función integrable en un intervalo $[a,b]$, entonces $\int_b^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$ y el signo debe ser	5. En las fórmulas para obtener el volumen por el método de discos y arandelas, f(x) qué representa del sólido.
6. Al calcular áreas por el método de discos y arandelas, si integro con respecto a y, la función f(y), se encuentra a la _________ de la función g(x)	6. ¿Es correcto calcular la longitud de arco de una curva si la derivada no es alisada o suave en el intervalo determinado?
7. Un sólido tiene base en el sector de parábola comprendido entre $y = x^2$ y la recta $y = 4$, y las intersecciones con planos perpendiculares a la base y paralelos al eje x son cuadrados. Determinar su volumen:	



Examen de la unidad 1

1. Encuentre el área bajo la curva para la función $f(x) = x^2 + 6x + 3$ en el intervalo [-1,3] mediante Sumas de Riemann.
a. $\frac{136}{3}u^2$
b. $\frac{13}{2}u^2$
c. $32\ u^2$
d. $134\ u^2$

2. Evalúe la siguiente integral definida usando la definición:

$$\int_1^3 (2x^2 - 3x + 5)$$

a. 28
b. $\frac{9}{10}$
c. $\frac{12}{5}$
d. $\frac{46}{3}$

3. Integre por el método del trapecio con n = 6:

$$\int_1^2 \frac{x^3}{1+x^{\frac{1}{2}}}dx$$

a. 1.587
b. 1.654
c. 2.801
d. 1.217

4. Determinar el valor del área encerrada por las curvas: $f(x) = 3 + 2x + x^2$ y $g(x) = x^2 - 4x+3$
a. 9 u^2
b. 18 u^2
c. 24/3 u^2
d. 8 u^2

5. Hallar el volumen del sólido que resulta de girar, alrededor del eje x, la región limitada por la curva $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ y las rectas Y = 0 y X = 4.
a. 9π u^3
b. $14\pi\ u^3$
c. $21\pi\ u^3$
d. 8π u^3

6. La base de un sólido es la región R limitada por la gráfica $y^2 + x^2 = 4$ se toman secciones perpendiculares al eje x en forma de triángulo equilátero, halle el volumen del sólido.
a. 18.48 u^3
b. 15.17 u^3
c. 35 u^3
d. 13.67 u^3

7.-Calcular la longitud de arco de la función dada en el intervalo señalado:

$$y = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{8}x^{\frac{2}{3}} + 5,\ \ 1 \le x \le 8$$

a. 5/8
b. 100/3

c. 99/8
d. 21/4

8. Determinar el área de superficie obtenida al girar la curva $y = (1 + 4x)^{\frac{1}{2}}$y en el intervalo $1 \leq x \leq 5$ respecto al eje x
a. 5π
b. 2π/3
c. 98π/3
d. 15π

9. Integre por el método del trapecio con n = 6:

a. 1.120
b. 2.843
c. 3.210
d. 12.251

10. Calcular el área de la región comprendida entre y = x + 2, y = x en el intervalo [0,4].
a. 3/15 u^2
b. 7 u^2
c. 18 $u^2$2
d. 8 u^2

En el siguiente enlace encontrarás otros exámenes
https://drafabiola.com/webaplicado/PARCIAL1.html

Unidad 2 Formas indeterminadas e Integrales impropias

La finalidad de esta unidad es que determines la convergencia o divergencia de una integral impropia a partir de los límites de formas indeterminadas.

Pero ¿cuáles son las integrales impropias? Son aquellas cuyos límites de integración son infinitos o las funciones son discontinuas, entonces una vez que las resuelves debes obtener el límite de la función y de esta forma llegas a un valor que puede ser un número real o infinito. En caso de que sea un número real, se dice que la integral es convergente, es decir que se aproxima al valor obtenido, pero si te da $\pm\infty$ entonces la integral es divergente, es decir no se aproxima a un valor.

Límite de integración superior

Se resuelve la integral, se evalúa en el límite superior e inferior y se calcula el límite cuan b tiende a infinito.

Como se obtiene infinito, la integral es divergente

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} lnx \Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} (lnb - ln0) = \infty - (-\infty) = \infty + \infty = \infty$$

Integrando

Límite de integración inferior

Te preguntarás ¿Por qué es importante el contenido de esta Unidad?

Hay ocasiones en que al calcular límites obtienes indeterminaciones, las cuales has podido remover usando alguna técnica algebraica como factorización, o división sintética o dividiendo entre la variable de mayor exponente; pero te habrás encontrado con algunos ejercicios en que estas técnicas no han sido útiles, y esto ocurre cuando tienes una función compuesta por una función algebraica y una función trascendente, como en el siguiente caso $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{x}$, por ello es importante que conozcas otro camino para remover la indeterminación y es a través del uso de la Regla de L'Hôpital.

Con este nuevo conocimiento podrás resolver integrales denominadas "impropias", de las cuales se requiere que calcules el límite de la función resultante.

Lección 2.1 Formas indeterminadas

Investiga y Analiza

1.- ¿Qué es el límite de una función?

2.- ¿Qué significa que al calcular el límite se obtenga una indeterminación?

3.-¿Qué formas indeterminadas conoces?

2.1.1. Teoría y ejemplos

Cuando determinamos el límite de una función $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, tenemos las opciones siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ es igual a un número real.
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe[1].

[1] En los siguientes casos: si el resultado es ∞, si se aproxima a más de un valor o si oscila (como en el caso de todas las funciones trigonométricas en infinito)

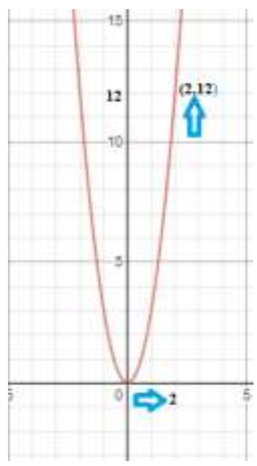
3. $\lim_{x \to a} f(x)$ es una forma indeterminada.

Las dos primeras opciones dan solución al límite, pero la tercera no, así que cuando encontramos una forma indeterminada necesitamos realizar algún procedimiento que nos permita determinar el valor del límite de la función y remover la forma indeterminada que presenta.

a) En el primer caso, que es la obtención de un número real, se tiene el siguiente ejemplo:
$\lim_{x \to 2} 3x^2 = 12$

Cuando x se aproxima a 2, la función $3x^2$ se aproxima a 12, como se observa en el gráfico 2.1.

Gráfico 2.1 Representación gráfica de y= 〖3x〗^2.



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

b) En el tercer caso, que se refiere a una indeterminación como los cocientes $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$, la indeterminación se puede remover empleando alguna técnica algebraica, como factorizar, dividir entre la variable de mayor exponente, usar racionalización, emplear división sintética, como se muestra en la siguiente situación:

Al hacer el cálculo se obtiene una indeterminación de cociente (2.1)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \tag{2.1}$$

Se remueve la indeterminación empleando factorización.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{x+1} \tag{2.2}$$

Se cancelan términos semejantes.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} \tag{2.3}$$

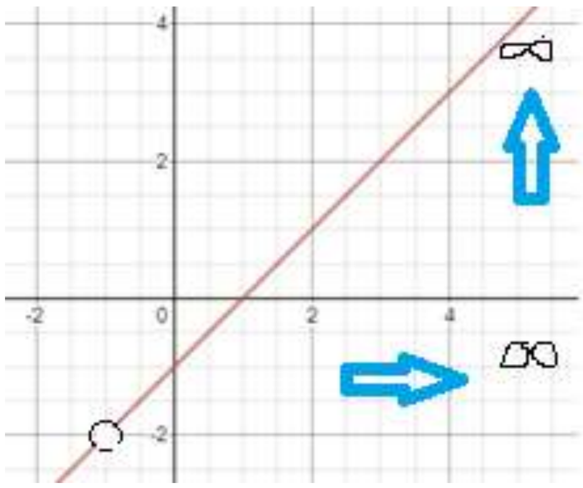
Al hacer el cálculo se obtiene ∞.

$$\lim_{x \to \infty} (x-1) = \infty \tag{2.4}$$

El límite no existe

Se observa que la función $y = \frac{x^2-1}{x+1}$ es una función racional y al dividir el numerador entre el denominador se obtiene la función $\boldsymbol{y = (x-1)}$ cuya representación gráfica es una línea recta. Esta representación aparece en el gráfico 2.2. en donde se observa que en el punto (-1,-2) hay un hueco, pero es continua en todos los demás puntos. También se observa que cuando el valor de x tiende a infinito, la función también tiende a infinito.

Gráfico 2.2 Gráfica de la función y=(x^2-1)/(x+1)



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Enseguida tenemos otro ejemplo en este caso al remover la indeterminación se obtiene un número real. Al calcular el límite se obtiene una indeterminación de cociente.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1} = \frac{\infty}{\infty} \tag{2.5}$$

Se divide entre la *x* de mayor exponente.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2-x-2}{x^2}}{\frac{5x^2+4x+1}{x^2}} \tag{2.6}$$

Se efectúan las divisiones tanto en el numerador como en el denominador.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}} \tag{2.7}$$

Se hace el cálculo.

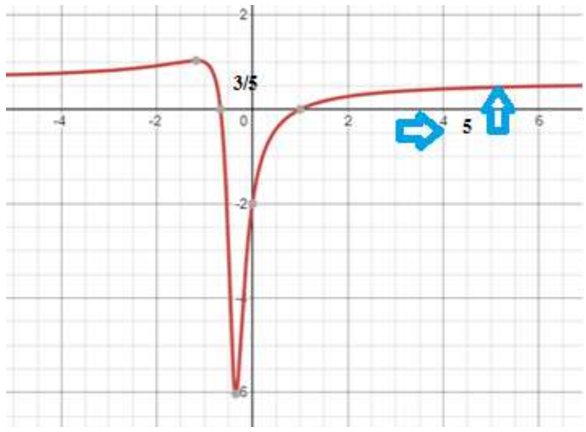
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{5} \tag{2.8}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1} = \frac{3}{5}$$

En el gráfico 2.3 se representa a la función racional $\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$ en donde se observa que cuando x se aproxima a 5, esta función se aproxima a $\frac{3}{5}$.

Gráfico 2.3 Gráfica de la función y=(〖3x〗^2-x-2)/(〖5x〗^2+4x+1)



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Hasta aquí se ha hecho un repaso sobre la indeterminación que se usa en el cálculo de límites de funciones, pero hay más formas indeterminadas, como las que aparecen en la tabla 2.1.

Tabla 2.1 Tipos de indeterminación

Tipos de indeterminación			
Cociente	Producto	Diferencia	Potencia
$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$	$0\cdot\infty$	$\infty-\infty$	$0^0, 1^\infty, \infty^0$

Fuente de consulta: Elaboración Propia

2.1.2. Cocientes indeterminados $\left(\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right)$ y la Regla de L'Hôpital

En el estudio del cálculo con frecuencia aparecen límites de la forma donde ambas funciones f y g tienen límite 0 cuando x tiende a c. En consecuencia, se dice que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tienen la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ en $x=c$ Si los límites de $f(x)$ y $g(x)$ son ∞ o bien $-\infty$ cuando $x\to c$, se dice que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ en $x=c$.

Los cocientes indeterminados están presentes en límites como los siguientes:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6},\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^3+5x^2-3x+8}{(x^2-2)^2},\ \lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3},\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{x^2}$$

De los cuales se obtienen las siguientes formas indeterminadas.

$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0},\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ respectivamente.

En el caso de los dos primeros límites $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6},\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^3+5x^2-3x+8}{(x^2-2)^2}$ es posible calcularlos usando técnicas algebraicas, pero los límites $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3},\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{x^2}$ no se pueden determinar usando procedimientos algebraicos, esto es debido a que en ellos combinamos funciones algebraicas con funciones transcendentes, por lo que necesitaremos otra técnica para su solución.

Esta otra técnica se denomina Regla de L'Hôpital, pero para poder llegar a su definición y comprender cómo surgió, es importante que revisemos primero la Fórmula de Cauchy.

Fórmula de Cauchy
Si las funciones f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivables en el intervalo abierto (a,b) y si $g'(x) \neq 0$ $\forall x$ en (a,b), entonces existe un número w en (a,b) tal que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(w)}{g'(w)}$ (Swokowski, 1989).

Demostración:

Nótese primero que $g(b) - g(a) \neq 0$, ya que si $g(a) = g(b)$, entonces por el Teorema de Rolle (*si una función* f *es continua en el intervalo cerrado* $[a,b]$, *derivable en el intervalo abierto* (a,b) *y* $f(a) = f(b)$, *entonces existe al menos un número* c *en* (a,b) *tal que* $f'(c) = 0$ existe un número c en (a,b) tal que $g'(c) = 0$ lo que contradice la hipótesis sobre g'.

Sea h una nueva función definida de la siguiente manera:

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x) \qquad \forall x \ en\ [a,b] \tag{2.9}$$

Determinando $h(a)$ obtenemos

$$h(a) = [f(b)g(a) - f(a)g(a)] - [g(b)f(a) - g(a)f(a)] \tag{2.10}$$

Simplificando (2.10)

$$h(a) = [f(b)g(a) - g(b)f(a)] \tag{2.11}$$

Obtengamos $h(b)$

$$h(b) = [f(b)g(b) - f(a)g(b)] - [g(b)f(b) - g(a)f(b)] \tag{2.12}$$

Simplificando (2.12)

$$h(b) = [g(a)f(b) - f(a)g(b)] \tag{2.13}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$h(a) = h(b) \tag{2.14}$$

Dado que f y g son continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) *se* deduce que *h* es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y por el Teorema de Rolle existe un número w en (a,b) tal que $h'(w) = 0$ es decir;

$$h'(w) = [f(b) - f(a)]g'(w) - [g(b) - g(a)]f'(w) = 0 \tag{2.15}$$

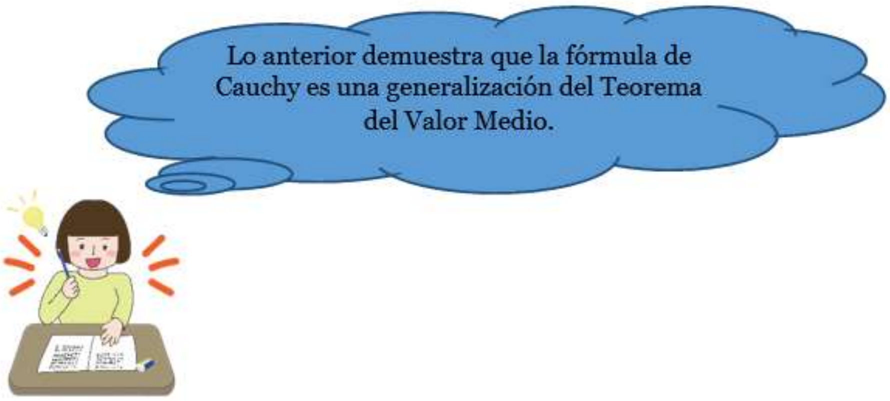
en consecuencia

$$\frac{[f(b)-f(a)]}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(w)}{g'(w)} \tag{2.16}$$

Para el caso particular en el que $g(x) = x$ se tiene que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(w)}{1} \tag{2.17}$$

$f(b) - f(a) = f'(w)(b - a)$ (**Teorema del valor medio)**



Regla de L'Hôpital

Sea (a,b) un intervalo abierto que contiene a c. Sean f y g funciones definidas y derivables en (a,b), excepto posiblemente en c. Si $g'(x) \neq 0$ para $x \neq c$ y supóngase que

$\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = 0$

O que

$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$

Esto es que $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ o bien $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \pm\frac{\infty}{\infty}$

Entonces $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, siempre que $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista o en su caso $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ (Soler, Núñez, & Aranda, 2008).

Demostración:

Supongamos que $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ y que $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ para un número real L. Se quiere demostrar que $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Sean F y G tales que: $F(x) = f(x)$ si $x \neq c$ y $F(c) = 0$ y $G(x) = g(x)$ si $x \neq c$ y $G(c) = 0$
Como $\lim_{x\to c} F(x) = \lim_{x\to c} f(x) = 0 = F(c)$ la función F es continua en c y por lo tanto es continua en todo el intervalo (a,b); además; $F'(x) = f'(x)$ y $G'(x) = g'(x)$ siempre que $x \neq c$

Aplicando la fórmula de Cauchy a los intervalos $[c,x]$ o $[x,c]$ resulta que existe un número w entre c y x tal que

$$\frac{F(x)-F(c)}{G(x)-G(c)} = \frac{F'(w)}{G'(w)} = \frac{f'(w)}{g'(w)} \quad (2.18)$$

Aprovechando el hecho de que $F(x) = f(x)$, $G(x) = g(x)$ y $F(c) = G(c) = 0$ (2.19)

Haciendo sustituciones de (2) en (1), se tiene que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(w)}{g'(w)} \quad (2.20)$$

cómo w se encuentra entre c y x resulta que

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(w)}{g'(w)} = \lim_{w\to c}\frac{f'(w)}{g'(w)} = L \quad (2.21)$$

Enseguida te presentamos dos ejemplos y te pedimos calcular el límite de las funciones, te fijarás que ambos ejemplos corresponden a funciones algebraicas, por lo que puedes emplear ya sea una técnica algebraica de la que conoces para remover la indeterminación o, la regla de L´Hôpital. Por lo que calculamos el límite usando los dos procedimientos.

Ejemplo 2.2.1 Determinar el valor del límite si es que existe

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6}$$

Al evaluar se tiene una forma indeterminada

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6}=\frac{0}{0} \tag{2.22}$$

Determinando el valor del límite usando técnicas algebraicas

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{3}=\frac{4}{3} \tag{2.23}$$

Usando la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{3}=\frac{4}{3} \tag{2.24}$$

Por lo que el valor que se obtiene es:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6}=\frac{4}{3}}$$

Ejemplo 2.2.2 Determinar el límite de la función

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^3+5x^2-3x+8}{(x^2-2)^2}$$

Al evaluar se tiene una forma indeterminada

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^3+5x^2-3x+8}{(x^2-2)^2}=\frac{\infty}{\infty} \tag{2.25}$$

Resolviendo algebraicamente.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^3+5x^2-3x+8}{(x^2-2)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4-3x^3+5x^2-3x+8}{x^4}}{\frac{(x^2-2)^2}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{8}{x^4}}{\left(1-\frac{2}{x^2}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{8}{x^4}}{\left(1-\frac{2}{x^2}\right)^2}=\frac{1-\frac{3}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}-\frac{3}{\infty^3}+\frac{8}{\infty^4}}{\left(1-\frac{2}{\infty^2}\right)^2}=1$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{8}{x^4}}{\left(1-\frac{2}{x^2}\right)^2}=\frac{1-\frac{3}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}-\frac{3}{\infty^3}+\frac{8}{\infty^4}}{\left(1-\frac{2}{\infty^2}\right)^2}=1 \tag{2.26}$$

El límite es 1

Ahora calculemos el límite usando la Regla de L´Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^3+5x^2-3x+8}{(x^2-2)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-9x^2+10x-3}{2(x^2-2)2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-9x^2+10x-3}{4x(x^2-2)}\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-9x^2+10x-3}{4x(x^2-2)}=\frac{\infty}{\infty} \tag{2.27}$$

Apliquemos nuevamente la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-9x^2+10x-3}{4x(x^2-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-18x+10}{4x(2x)+4(x^2-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-18x+10}{8x^2+4x^2-8}=\frac{\infty}{\infty} \tag{2.28}$$

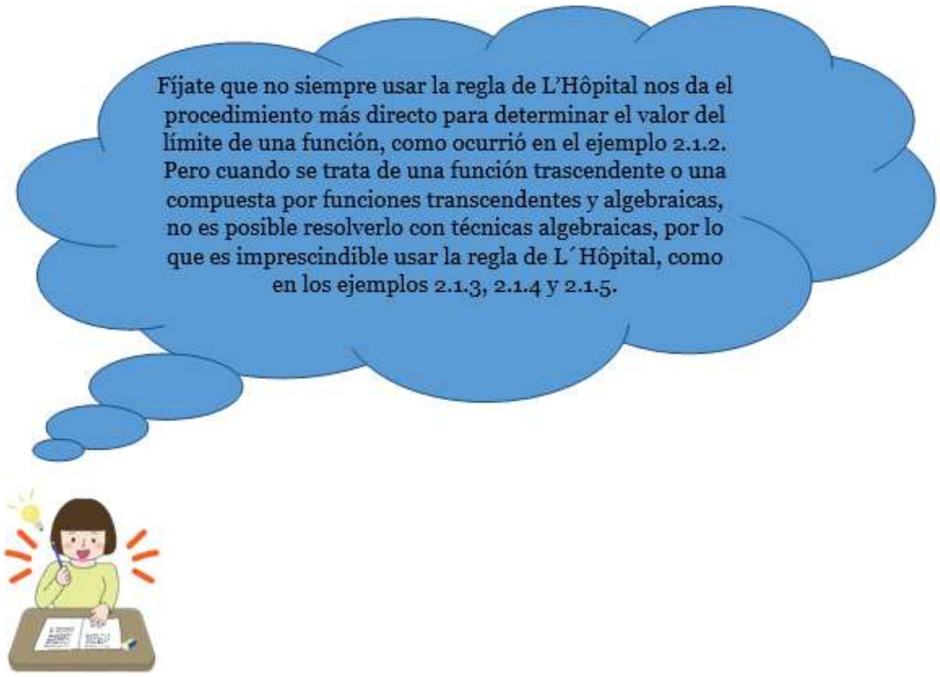
Apliquemos nuevamente la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-18x+10}{12x^2-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x-18}{24x}=\frac{\infty}{\infty} \tag{2.29}$$

Apliquemos una vez más la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{24x-18}{24x} = \lim_{x\to\infty} \frac{24}{24} = 1 \qquad (2.30)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-3x^3+5x^2-3x+8}{(x^2-2)^2}=1$$



Ejemplo 2.2.3 Calcular el límite de la función y= $\boldsymbol{\frac{e^x-1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \frac{e^0-1}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminación de cociente} \qquad (2.31)$$

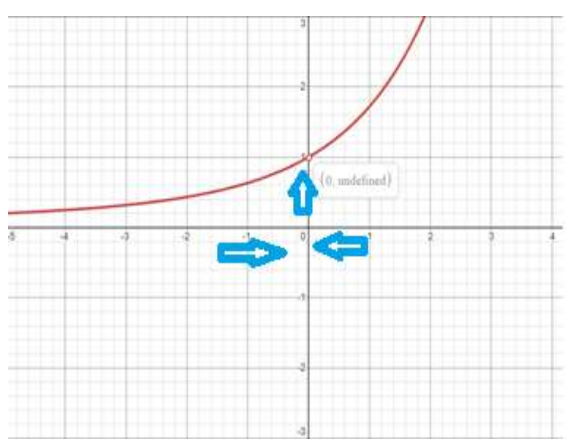
Se aplica la Regla de L´Hôpital (derivando el numerador y el denominador).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{e^0}{1} = \frac{1}{1} = 1 \qquad (2.32)$$

Se sustituye el valor de x $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$

Como se puede observar en el Gráfico 2.4 cuando x se acerca a cero, por la derecha o por la izquierda, la función se aproxima 1.

Gráfico 2.4 Gráfica de la función y= (e^x-1)/x.



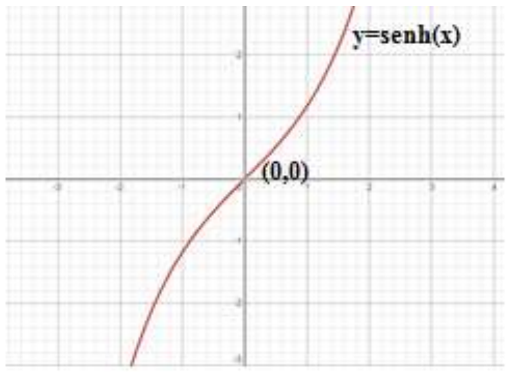
Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Ejemplo 2.2.4 Calcular el límite de la función $\boldsymbol{y = \frac{\mathrm{senh}(x)}{sen(x)}}$

Recuerda que $senh(0) = 0\ \ y\ sen(0) = 0$. Ver Gráficos 2.5 y 2.6.

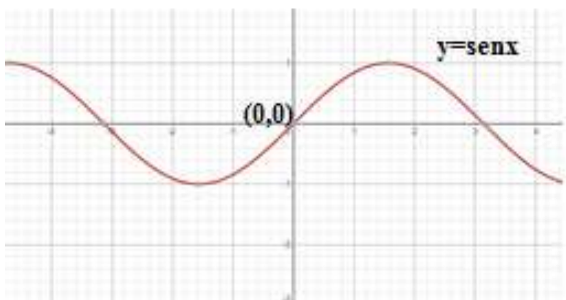
$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{senh}(x)}{sen(x)} = \frac{0}{0} \tag{2.33}$$

Gráfico 2.5 y=senh(x)



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Gráfico 2.6 y=sen(x)



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

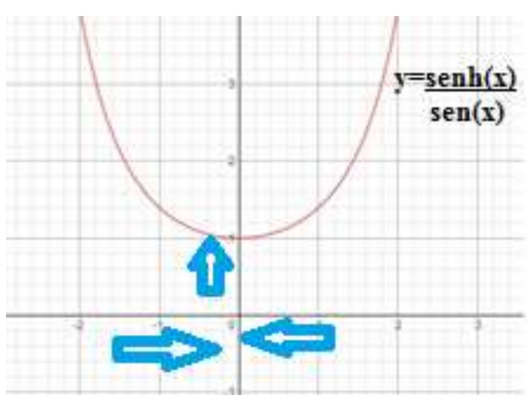
$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh(x)}{\cos(x)}$ Se aplica la Regla de L´Hôpital (derivando numerador y denominador). (2.34)

$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$ Se sustituye el valor al que tiende x, por lo tanto, (2.35)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{senh}(x)}{sen(x)} = 1$$

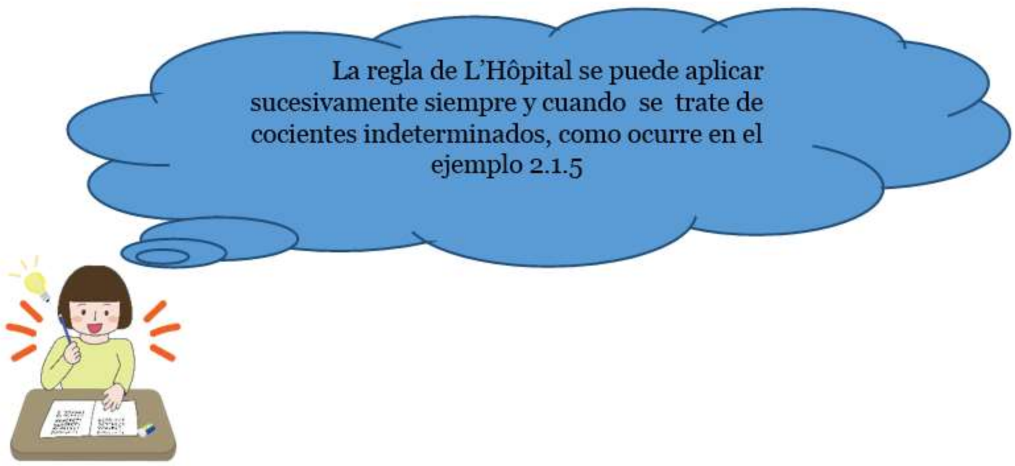
En el Gráfico 2.7 se observa que cuando x tiende a 0, por la derecha o por la izquierda, la función $\boldsymbol{y = \frac{\mathrm{senh}(x)}{sen(x)}}$ se aproxima a 1.

Gráfico 2.7 Gráfica de la función y=senh(x)/sen(x)



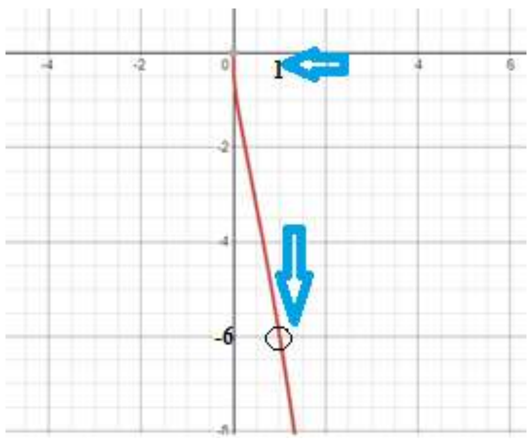
Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Recuerda:



Ejemplo 2.2.5 Calcular el límite de la función $\boldsymbol{y = \frac{x^3-3x+2}{1-x+ln(x)}}$

Gráfico 2.8 Gráfica de la función y=(x^3-3x+2)/(1-x+ln(x)).



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

$\boldsymbol{\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{1-x+ln(x)} = \frac{0}{0}}$ Indeterminación de cociente. (2.36)

$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{-1+\frac{1}{x}}$ Se aplica la Regla de L'Hôpital. (2.37)

$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{-1+\frac{1}{x}} = \frac{3-3}{0} = \frac{0}{0}$ Se sustituye el 1, que es el valor al que tiende x. (2.38)

$\lim_{x\to 1} \frac{6x}{-\frac{1}{x^2}}$ (2.39)

Como se obtuvo una indeterminación de cociente, se vuelve a aplicar la Regla de L'Hôpital

$\lim_{x\to 1} \frac{6x}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{6}{-1} = -6$ Se sustituye por 1 que es el valor al que tiende x. Por lo tanto, cuando x se aproxima a 1 la función se aproxima a -6

$\boldsymbol{\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{1-x+ln(x)} = -6}$

Ejercicios y problemas para completar de la Lección 2.1.2

Determina el límite si es que existe

1. $\lim_{x \to 1} \frac{x^a - ax + a - 1}{(x-1)^2}$

$$Evaluando\ en\ 1\ \frac{1^a - a(1) + a - 1}{(1-1)^2} = \frac{1-a+a-1}{0^2} = \frac{0}{0}, tenemos\ una\ indeterminación \quad (2.40)$$

Aplicando L'Hopital

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{dy}{dx}x^a - ax + a - 1}{\frac{dy}{dx}(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{ax^{a-1} - a}{2x-2} \quad (2.41)$$

Evaluando en 1

$$\frac{a(1)^{a-1} - a}{2(1)-2} = \frac{a(1) - a}{2-2} = \frac{0}{0} \quad (2.42)$$

Se aplica nuevamente L'Hopital

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{dy}{dx}ax^{a-1} - a}{\frac{dy}{dx}2x-2} = \lim_{x \to 1} \frac{(a^2-1)x^{a-2}}{2}, evaluando\ tenemos: \frac{(a^2-1)(1)^{a-2}}{2} = \frac{(a^2-1)(1)}{2} = \frac{(a^2-1)}{2}. \quad (2.43)$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 1} \frac{x^a - ax + a - 1}{(x-1)^2} = \frac{(a^2-1)}{2}}$$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

$$Evaluando\ en\ 0\ \frac{\cos(0) - 1 + \frac{1}{2}(0)^2}{(0)^4} = \frac{1-1+0}{0} = \frac{0}{0}, tiene\ indeterminacion. \quad (2.44)$$

Aplicando L'Hopital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{dy}{dx}(\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2)}{\frac{dy}{dx}x^4} = \lim_{x \to 0} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \quad (2.45)$$

Evaluando en 1

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \frac{0}{0}, \quad (2.46)$$

hasta desaparecer la variable del denominador podremos eliminar la indeterminación aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{dy}{dx}(-sen\ x + x)}{\frac{dy}{dx}4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{-cosx + 1}{12x^2} = \_\_\_\_\_\_ = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{dy}{dx}(-cosx + 1)}{\frac{dy}{dx}12x^2} = \lim_{x \to 0} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{dy}{dx}senx}{\frac{dy}{dx}24x} = \lim_{x \to 0} \_\_\_\_\_ \quad (2.47)$$

$evaluando\ en\ 0\ tenemos$: _______. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} = \_\_\_\_\_\_$$

3. Hallar los valores de a y b tales que $\lim_{x \to 0} \frac{sen2x + ax + bx^3}{x^3} = 0$

Evaluando obtenemos $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen2x+ax+bx^3}{x^3}=\frac{sen(0)+0+0}{0}=-$ Se obtiene la forma indeterminada, lo que nos permite aplicar la regla de L´Hôpital (derivar el numerador y derivar el denominador).

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{dy}{dx}(sen2x+ax+bx^3)}{\frac{dy}{dx}x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=\frac{2+a}{0}$$

Si 2+*a* es un número real *n* diferente de cero el límite no existiría ya que se tendría $\frac{n}{0}=\pm\infty$, pero el problema indica que el límite si existe porque vale 0, así la única opción para el numerador es que sea cero, estos es $2+a=0$ luego $a=-2$

Y tenemos nuevamente una forma indeterminada por lo que volvemos a aplicar la regla de L’Hôpital y se tiene

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{dy}{dx}(\,2\cos 2x+a+3bx^2)}{\frac{dy}{dx}3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=\frac{0}{0}$$

Podemos volver a aplicar la regla de L´Hôpital

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{dy}{dx}(-4sen2x+6bx)}{\frac{dy}{dx}6x}=\lim\limits_{x\to 0}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_\_\_\_=\frac{-8+6b}{6}$$

Así, tenemos que el valor del límite es $\frac{-8+6b}{6}$ y que es 0, luego $\frac{-8+6b}{6}=0$ de donde $-8+6b=0$ así $6b=8$ y $b=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$. Lo valores de *a* y *b* para los cuales el límite existe y vale 0 son:

$\boldsymbol{a=-2,\ b=\frac{4}{3}}$

Actividad de la Lección 2.1.2

Instrucciones: Determina el límite de las funciones dadas, si es que existe y en caso de que obtengas una indeterminación de cociente utiliza alguna técnica algebraica o la regla de L´Hôpital, según corresponda.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^9-1}{x^5-1}$

Encierra en un círculo la respuesta que consideres correcta. ¿Qué tipo de función es? Algebraica Trascendente Combinación de algebraica con trascendente De acuerdo con lo que respondiste, en caso de que te de un cociente indeterminado ¿qué técnica ocuparías para remover la indeterminación? Algebraica Regla de L’Hôpital ¿Es posible usar cualquiera de los dos métodos, el algebraico y Regla de L’Hôpital?   Determina el límite

2. $\lim_{x \to 1} \frac{1-x+ln\,x}{1+\,cos\pi x}$

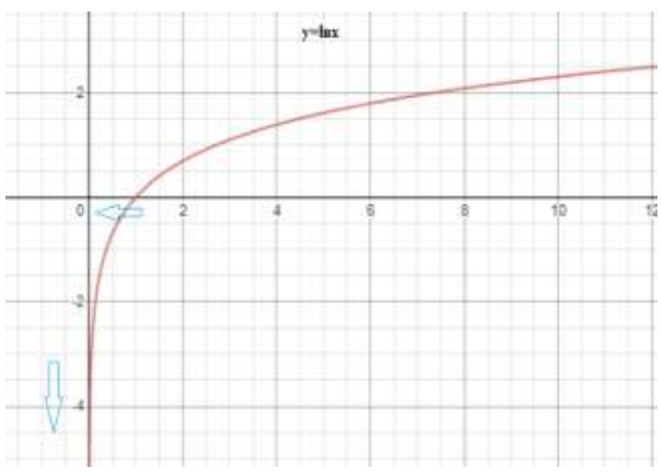
Encierra en un círculo la respuesta que consideres correcta. ¿Qué tipo de función es? Algebraica Trascendente Combinación de algebraica con trascendente De acuerdo con lo que respondiste, en caso de que te de un cociente indeterminado ¿qué técnica ocuparías para remover la indeterminación? Algebraica Regla de L'Hôpital ¿Es posible usar cualquiera de los dos métodos, el algebraico y Regla de L'Hôpital? Determina el límite

2.1.3. Teoría y ejemplos Producto indeterminado

Definición 2.1.3 Un producto indeterminado se obtiene cuando al evaluar el límite de la función, obtenemos las formas $0 \cdot \infty$ *ó* $0\,(-\infty)$ y la estrategia de solución es modificar algebraicamente la función para convertirla a un cociente, lo que nos permite usar la Regla de L'Hôpital.

Ejemplo 2.1.6 Determina el límite de la función si es que existe: $\lim_{x \to 0^+} x\;lnx$

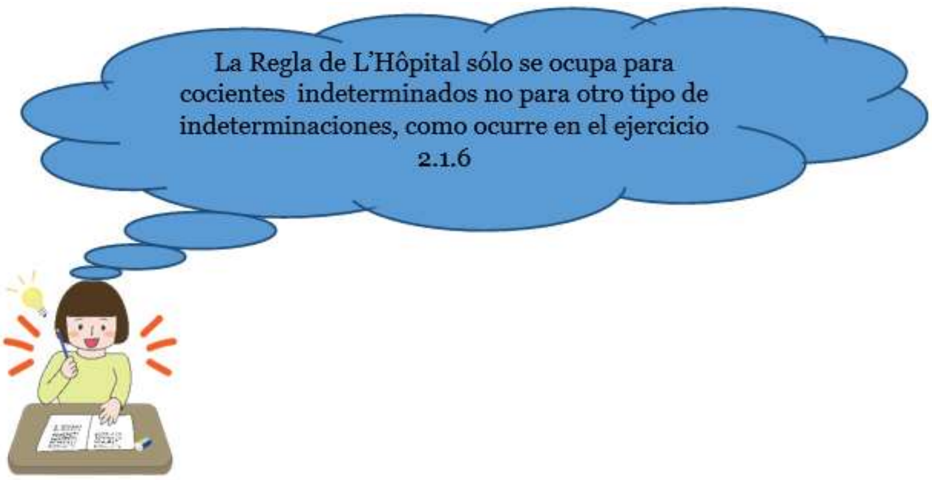
Gráfico 2.9 Gráfica de la función y=lnx.



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Al evaluar se tiene una forma indeterminada de producto: $\lim_{x \to 0^+} x\;lnx = 0\;ln0^+,$ el valor de $0^+\;es -\infty$, como se observa en el Gráfico 2.9 ya que cuando x se aproxima acero por la derecha, los valores de la función lnx crecen hacia los negativos, así: $\lim_{x \to 0^+} lnx = -\infty$, De esta forma $\lim_{x \to 0^+} x\;lnx = 0(-\infty)$, que es una indeterminación de producto. Para remover la indeterminación, se requiere expresar a la función como un cociente.

Recuerda que:



Entonces al transformar la función $y = xlnx$ en cociente (usando leyes de exponentes) y enseguida evaluando en cero, observamos que se obtiene una indeterminación de cociente:

$$\lim_{x\to 0^+} xlnx = \lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} \tag{2.48}$$

Se aplica la Regla de L´Hôpital y se simplifica

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} \tag{2.49}$$

Se evalúa en cero

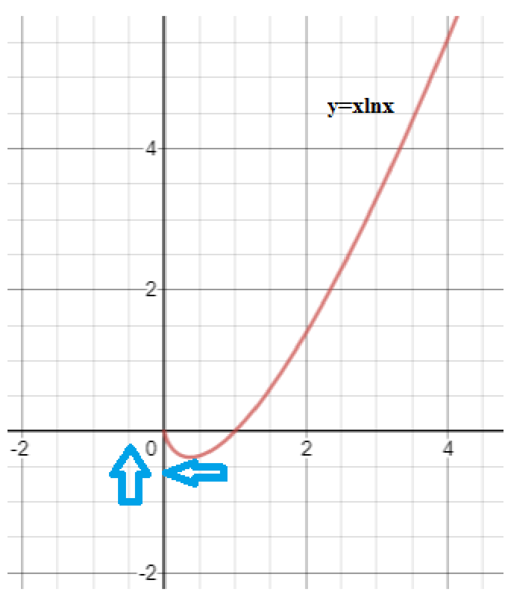
$$\lim_{x\to 0^+} -x = 0 \tag{2.50}$$

Por lo tanto,

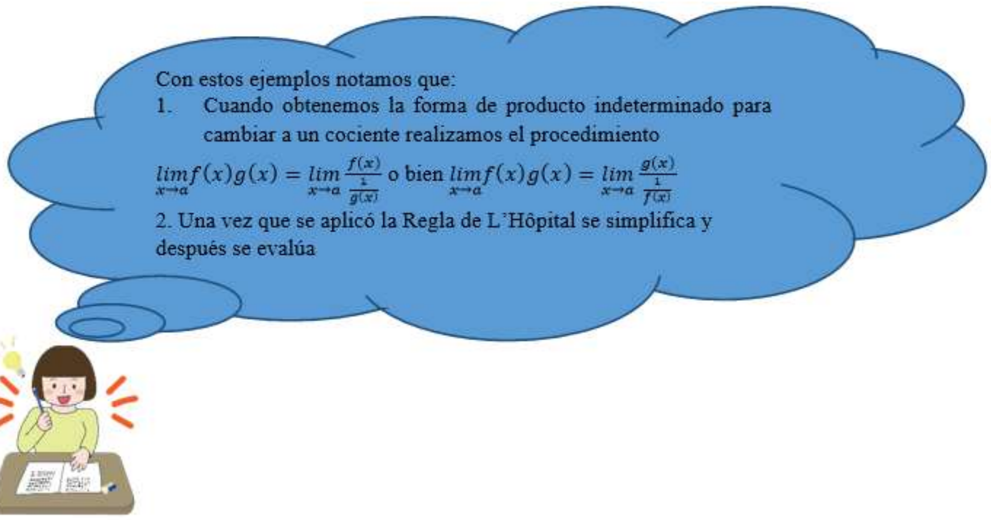
$$\lim_{x\to 0^+} xlnx = 0$$

Se observa en el Gráfico 2.10 que cuando x se aproxima a 0 la función $y = xlnx$ se aproxima también a cero.

Gráfico 2.10 Gráfica de la función y=xlnx



Fuente de Consulta: Elaboración Propia



Ejercicios y problemas resueltos de la Lección 2.1.3

1. Determine el límite de la función si es que existe.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} cosx\ tanx = 0\cdot\infty$ Indeterminación de producto.

La función se expresa como cociente empleando la identidad trigonométrica $tanx = \frac{senx}{cosx}$, después se cancelan términos semejantes.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} cosx\ tanx = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} cosx\frac{senx}{cosx} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} senx$$

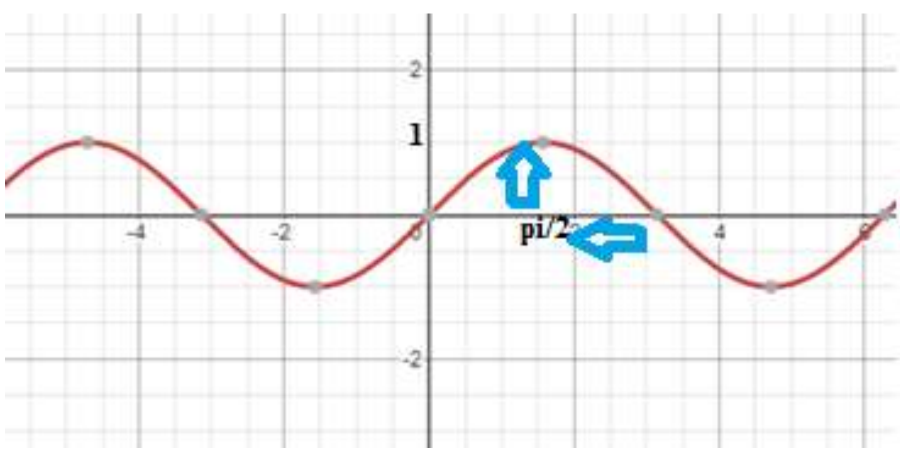
Se evalúa el límite en $\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} senx$ =1

En el Gráfico 2.11 se observa que para $\frac{\pi}{2}$ la función tiene el valor de 1. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} cosx\ tanx = 1}$$

Gráfico 2.11 Gráfica de la función y=cosx tanx



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

2. Determinar el límite si es que existe.

$\lim_{x\to 0} (\cot 2x \; sen\; 6x) = 0(\infty)$ Indeterminación de producto

$\lim_{x\to 0} \frac{Sen\;6x}{Tan\;2x} = \frac{0}{0}$ Por identidades trigonométricas expresamos como cociente la función y al evaluar se obtiene un cociente indeterminado

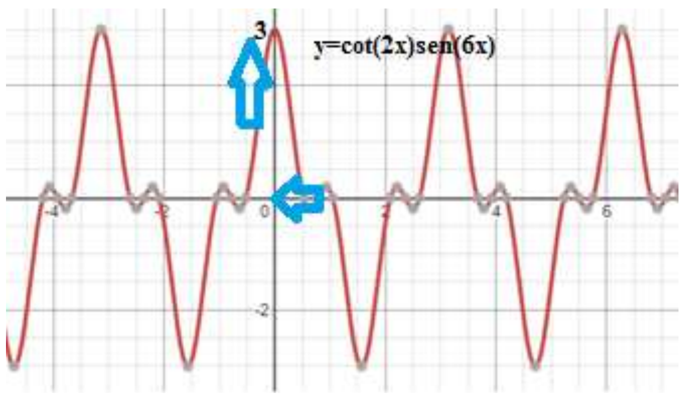
$\lim_{x\to 0} \frac{6Cos6x}{2Sec^2 2x} = \frac{6}{2} = 3$ Se aplica L'Hôpital y se evalúa.

Por lo tanto,

$\mathbf{\lim_{x\to 0} (\cot 2x \; sen\; 6x) = 3}$

En el Gráfico 2.12 se observa que al evaluar en 0 la función tiene el valor de 3. La función se expresa como cociente empleando la identidad trigonométrica $tanx = \frac{senx}{cosx}$, después se cancelan términos semejantes.

Gráfico 2.12 Gráfica de la función y=cot[2x] sen [6x]



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Teoría y ejemplos

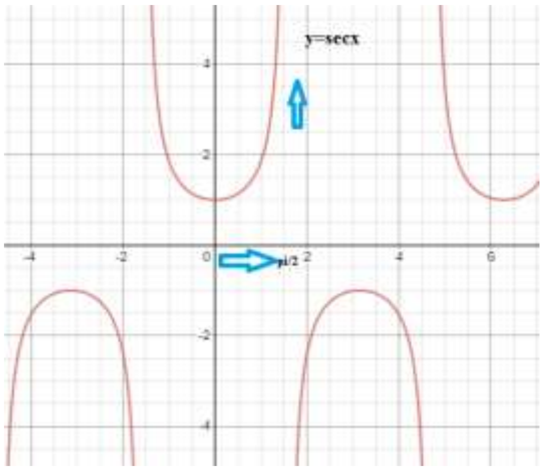
2.1.4. Diferencia indeterminada

Definición 2.1.4 Una diferencia indeterminada se obtiene cuando al evaluar el límite de la función, obtenemos la forma $\infty - \infty$, en este caso no se puede emplear ninguna regla operatoria para límites, por lo que la estrategia de solución es modificar algebraicamente la función para convertirla a un cociente, lo que nos permite usar la Regla de L'Hôpital.

Ejemplo 2.1.7 Determine el valor del límite $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (secx - tanx)$, si es que existe.

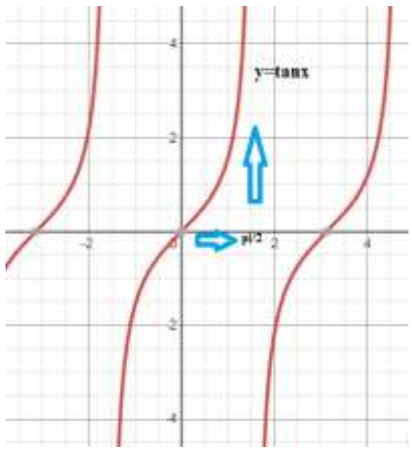
En la función $secx$ como en la de $tanx$ cuando el valor de x se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda, ambas funciones tienden a ∞, como está representado en los Gráficos 2.13 y 1.14 respectivamente.

Gráfico 2.13 Gráfica y=secx



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Gráfico 2.14 Gráfica y=tanx



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

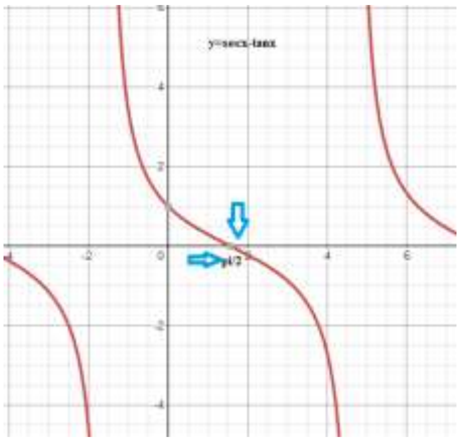
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (Secx - Tanx) = (\infty - \infty)$$

Por propiedades trigonométricas transformamos en cociente a la función para aplicar L'Hôpital. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{Cosx} - \frac{Senx}{Cosx} = \frac{1-Senx}{Cosx} = \frac{0}{0}$ Es una indeterminación de cociente $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-Cosx}{-Senx} = \frac{0}{1} = 0$ Se aplica Regla del L´Hôpital y se evalúa, Por lo tanto,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \boldsymbol{(Secx - Tanx) = 0}$$

En el Gráfico 2.15 se observa que cuando x se aproxima por la izquierda a $\frac{\pi}{2}$ la función $y = secx - tanx$ se aproxima a cero.

Gráfico 2.15 Gráfica de la función y=secx-tanx



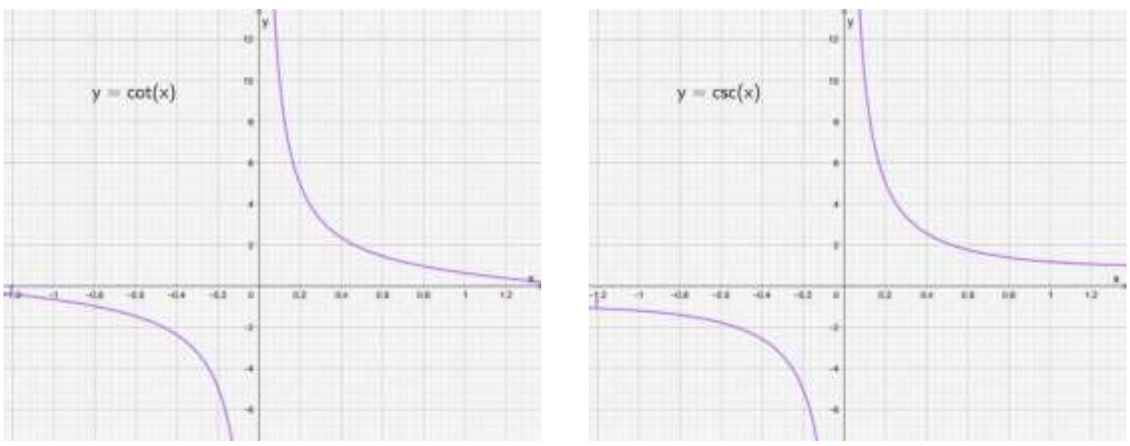
Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Ejercicios y problemas resueltos de la Lección 2.1.4

1. Determina el valor del límite $\lim_{x \to 0^+} (\csc x - \cot x)$ si es que existe.

Si evaluamos tenemos $\lim_{x \to 0^+} (\csc x - \cot x) = \csc 0^+ - \cot 0^+$ para determinar el valor de las funciones trigonométricas en cero veamos el Gráfico 2.16.

Gráfico 2.16 Gráficas de las funciones cscx (izquierda) y cotx (derecha)



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Cuando nos aproximamos a cero por la derecha, ambas funciones crecen, por lo que el límite será infinito.

Luego $\lim_{x \to 0^+} (\csc x - \cot x) = \csc 0^+ - \cot 0^+ = \infty - \infty$

Hay que pasar a un cociente la diferencia de funciones y como son funciones trigonométricas, entonces las identidades nos dan esta posibilidad, así:

$$\lim_{x \to 0^+} (\csc x - \cot x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos 0}{\sin 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Como se obtuvo un cociente indeterminado, podemos aplicar la Regla de L´Hôpital

$\lim_{x \to 0^+} (\csc x - \cot x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$. Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0^+} (\csc x - \cot x) = 0}$$

2. Determinar el valor del límite $\lim_{x\to\infty}(\ln 2x - \ln(x+1))$ si es que existe.

Si evaluamos tenemos $\lim_{x\to\infty}(\ln 2x - \ln(x+1)) = \ln\infty - \ln\infty = \infty - \infty$, el $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ debido a que cuando x crece también lo hace $\ln x$.

Hay que pasar a un cociente, en este caso vemos el tipo de función y revisamos el tipo de propiedad algebraica nos lleva a determinar un cociente, después, por las leyes de los logaritmos tenemos: $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$, Esto nos da la posibilidad de representar como un cociente a la diferencia de los logaritmos que se tiene en la función. Así: $\lim_{x\to\infty}(\ln 2x - \ln(x+1)) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$

Si evaluamos $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{2(\infty)}{\infty+1}\right) \neq \frac{\infty}{\infty}$

El aplicar la propiedad no nos lleva a la forma indeterminada para poder aplicar la Regla de L'Hôpital, pero tenemos el Teorema siguiente:

Teoremas. Si f y g son funciones tales que $\lim_{x\to a} g(x) = b$, y si f es continua en b, entonces $\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f(b) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$

Este Teorema nos permite intercambiar la función y el límite, siempre y cuando la función sea continua. $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}\right)$, esto debido a que la función logaritmo natural es continua.

Calculamos el límite de la función y obtenemos una indeterminación de cociente.

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty}$ aplicamos la Regla de L'Hôpital $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1} = 2$

Regresamos a la expresión que teníamos $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}\right) = \ln(2)$. Así:

$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}(\ln 2x - \ln(x+1)) = \ln 2}$

Actividad 2 de la Lección 2.1.4

1. Determina el valor del límite $\lim_{x\to 1}(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x})$, en caso de que exista. Encierra en un círculo la respuesta que consideres correcta. ¿Qué tipo de función es? Algebraica Trascendente Combinación de algebraica con trascendente ¿Qué operación compone a las funciones? Adición Diferencia Producto Cociente Potencia Al calcular el límite ¿encontraste una indeterminación? Si No ¿Qué tipo de indeterminación es? Cociente

Producto Diferencia Potencia ¿Puedes ocupar la Regla de L'Hôpital directamente? Si No Continúa con el procedimiento para determinar el límite, en caso de que exista.

2. Determina el valor del límite $\lim_{x \to \infty} x^3 e^{-x^2}$, en caso de que exista.

Encierra en un círculo la respuesta que consideres correcta. ¿Qué tipo de función es? Algebraica Trascendente Combinación de algebraica con trascendente ¿Qué operaciones componen a la función? Adición Diferencia Producto Cociente Potencia Al calcular el límite, ¿encontraste una indeterminación? Si No ¿Qué tipo de indeterminación es? Cociente Producto Diferencia Potencia ¿Puedes ocupar la Regla de L'Hôpital directamente? Si No Continúa con el procedimiento para determinar el límite, en caso de que exista

Teoría y ejemplos

2.1.5. Potencias indeterminadas

Definición 2.1.5 Las indeterminaciones de potencias surgen del $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$

1. $Si\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0\ y\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0\ \ es\ de\ tipo\ 0^0$

2. $Si\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty\ y\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0\ \ es\ de\ tipo\ \infty^0$

3. $Si\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = 1\ y\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty\ \ es\ de\ tipo\ 1^\infty$

Para determinar el límite de una forma indeterminada de potencia procedemos de la siguiente forma:

1. Se toma la función $y = \left(f(x)\right)^{g(x)}$

2. Se aplica logaritmo natural a ambos lados de la expresión, $ln(y) = ln\left(f(x)\right)^{g(x)}$, aplicando propiedades de los logaritmos se tiene que $ln(y) = g(x)\, ln\left(f(x)\right)$.

3. Se aplica el límite cuando x tiende a c a ambos lados de la ecuación, $\lim\limits_{x\to c}[ln(y)] = \lim\limits_{x\to c}\left[g(x)\, ln\left(f(x)\right)\right]$

4. Al calcular el $\lim\limits_{x\to c}\left[g(x)\, ln\left(f(x)\right)\right]$ se tiene que:

a) Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to c}\left[g(x)\, ln\left(f(x)\right)\right] = 0\, ln(0) = 0(-\infty)$

b) Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to c}\left[g(x)\, ln\left(f(x)\right)\right] = 0\, ln(\infty) = 0(\infty)$

c) Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$ entonces $\lim\limits_{x\to c}\left[g(x)\, ln\left(f(x)\right)\right] = \infty\, ln(1) = \infty(0)$

Es decir, en cada caso nos lleva a una forma indeterminada de producto.

5. Si llamamos L al $\lim\limits_{x\to c}\left[g(x)\, ln\left(f(x)\right)\right]$ se tiene que $\lim\limits_{x\to c}[ln(y)] = L$.

6. Aplicando exponencial a ambos lados de la ecuación se tiene $e^{\left(\lim\limits_{x\to c}[ln(y)]\right)} = e^{(L)}$, es decir $\lim\limits_{x\to c} y = e^{(L)}$.

Ejemplo 2.1.8 $\lim\limits_{x\to 0}\ \left(1 + sen(4x)\right)^{ctg(x)} = 1^\infty$ Indeterminación de potencia. (2.51)

$\lim\limits_{x\to 0}\ y = \lim\limits_{x\to 0} \left(1 + sen(4x)\right)^{ctg(x)}$ Se expresa como una función y se obtiene el límite en ambos lados para no alterar la igualdad. (2.52)

$\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} \ln\ \left(1 + sen(4x)\right)^{ctg(x)}$ Se obtiene ln de las funciones en ambos lados de la ecuación. (2.53)

$\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} ctg(x) \ln\left(1 + sen(4x)\right) = (\infty)(0)$ Por leyes de los logaritmos se expresa como un producto y se calcula el límite obteniéndose una indeterminación de producto. (2.54)

$\ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+sen(4x))}{tg(x)} = \frac{0}{0}$ La función se expresa como un cociente y se obtiene el límite, el cual es una indeterminación de cociente. (2.55)

Aplicando L´Hôpital $\ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4\cos(4x)}{1+sen(4x)}}{\sec^2(x)} => \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{4\cos(4x)}{\sec^2(x)(1+sen(4x))} = 4$ (2.56)

Por definición de logaritmo sabemos que el logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número. En este caso el logaritmo natural de y es igual a 4, por lo que el 4 es el exponente de la base del logaritmo natural que es e.

$\mathbf{\ln y = 4\ \boldsymbol{entonces}\ y = e^4}$

Ejemplo 2.1.9 Calcular el límite $\lim_{x \to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}$si existe.

Podemos observar que si $f(x) = (1+ax)$ se tiene que $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(1+ax) = 1$y si $g(x) = \frac{b}{x}$ se tiene que $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{b}{x} = \frac{b}{0} = \infty$, en consecuencia $\lim_{x \to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}} = 1^{\infty}$, la cual es una forma indeterminada de potencia.

Para calcular el límite, primero construimos la función $y = (1+ax)^{\frac{b}{x}}$, aplicando logaritmo natural y propiedades del logaritmo, se obtiene $\ln y = \frac{b}{x}\ln(1+ax)$.

Aplicando límite a ambos lados de la ecuación se tiene $\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{b}{x}\ln(1+ax)$, calculando el límite de la derecha observamos que tenemos una forma indeterminada de producto $\lim_{x \to 0} \frac{b}{x}\ln(1+ax) = \frac{b}{0}\ln(1+a\cdot 0) = \infty \ln(1) = \infty \cdot 0$

Rescribiendo la expresión se tiene $\lim_{x \to 0} \frac{b}{x}\ln(1+ax) = \lim_{x \to 0} \frac{b\ln(1+ax)}{x} = \frac{b\ln(1)}{0} = \frac{b\cdot 0}{0} = \frac{0}{0}$ por lo que se sugiere aplicar la regla del L´Hôpital. De esta manera se tiene $\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{b\ln(1+ax)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{ab}{1+ax}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{ab}{1+ax} = \frac{ab}{1+a(0)} = ab$. En consecuencia,

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}} = e^{ab}}$$

Ejercicios y problemas resueltos de la Lección 2.1.5

1. Calcular el límite $\lim_{x \to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ si existe

$$\lim_{x \to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{0}\right)^0 = (1+\infty)^0 = \infty^0$$

De donde $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Calculando el límite

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0\ln\left(1+\frac{1}{0}\right) = 0\cdot\infty$$

Se obtuvo una indeterminación de producto, por lo que debemos expresar a la función como un cociente y calcular el límite. Así: $\lim_{x\to 0^+} x\, ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{ln\left(1+\frac{1}{0}\right)}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$ Se obtuvo una indeterminación de cociente, por lo que se puede aplicar la Regla de L'Hôpital $\lim_{x\to 0^+} x\, ln\left(1+\frac{1}{x}\right) =$ $\lim_{x\to 0^+} \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left(0-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{0}\right)} = \frac{1}{(1+\infty)} = \frac{1}{\infty} = 0$. Así, $\lim_{x\to 0^+} ln\, y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$.

$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1}$

2. Determine el valor del límite $\lim_{x\to\infty} (x)^{\frac{1}{x}}$ si existe.

$\lim_{x\to\infty} (x)^{\frac{1}{x}} = \infty^0\ Indeterminacion\ de\ potencia$ (2.57)

$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} (x)^{\frac{1}{x}}\ Aplicando\ ln => \lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \ln(x)^{\frac{1}{x}}$ (2.58)

Por leyes de logaritmos:

$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ Se obtiene una indeterminación de cociente. (2.59)

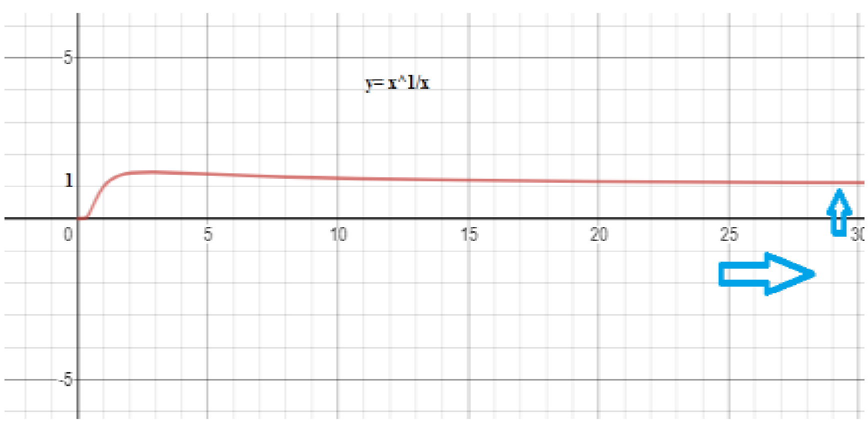
$Aplicando\ L\'hopital => \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ (4)

$Entonces\ \ln y = 0\ => \ y = e^0$. Por lo tanto,

$\boldsymbol{y = 1}$

En el Gráfico 2.17 se observa que cuando x se aproxima a infinito, la función $y = x^{\frac{1}{x}}$ se aproxima a 1.

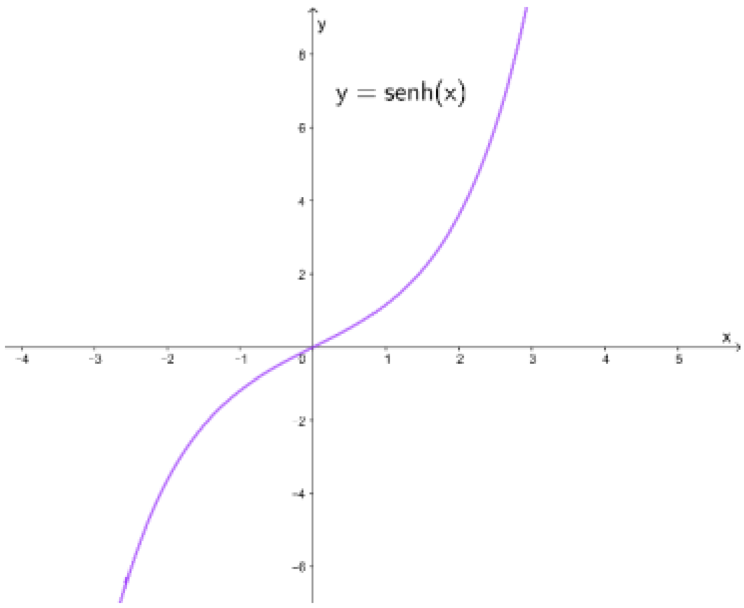
Gráfico 2.17 Gráfica de la función y=x^(1/x)



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

3. Calcular el límite si existe $\lim_{x\to\infty}\left[\sinh x - x\right]$.

Gráfico 2.18 Gráfica de la función f(x)=senhx



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Evaluando

$\lim_{x\to\infty}\left[\sinh x - x\right] = \sinh\infty - \infty = \infty - \infty$, la gráfica del senh *x*, la gráfica de esta función tiene la forma de x^3 nos muestra que cuando *x* crece también crece la función senh *x*.

Veamos la forma de pasar a un cociente de acuerdo con la estrategia para la solución del límite que tiene este tipo de forma indeterminada.

Racionalizando $\lim_{x\to\infty}\left[\sinh x - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\sinh x - x\right)\frac{\sinh x + x}{\sinh x + x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sinh^2 x - x^2}{\sinh x + x} = \frac{\infty-\infty}{\infty+\infty}$

Nos queda una expresión más compleja que la original porque ya no solo es diferencia indeterminada sino un cociente donde el numerador es una diferencia indeterminada y el denominador es infinito, no nos ayuda para eliminar la diferencia indeterminada porque no se reduce la expresión que es lo que debe de suceder cuando racionalizamos.

Definición de la función hiperbólica como función exponencial

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sinh x - x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} e^x - e^{-x} - 2x = \frac{1}{2}\left(e^\infty - e^{-\infty} - 2(\infty)\right) = \frac{1}{2}(\infty - 0 - \infty) = \frac{1}{2}(\infty-\infty)$$

Cambiamos de función hiperbólica a exponencial, pero la forma indeterminada se mantiene no hay cambio.

Si aplicamos álgebra a la expresión se tiene

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sinh x - x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} e^x - e^{-x} - 2x = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} e^{-x}\left(e^{2x} - 1 - 2xe^x\right) = \frac{1}{2}e^{-\infty}\left(e^{2(\infty)} - 1 - 2(\infty)e^\infty\right) = 0(\infty-\infty)$$

Nuevamente no se puede reducir la forma indeterminada y además se complica. Otra forma

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sinh x - x\right] = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} e^{-x}\left(e^{2x} - 1 - 2xe^x\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x} - 1 - 2xe^x}{e^x} = \frac{1}{2}\frac{e^\infty - 1 - 2(\infty)e^\infty}{e^\infty} = \frac{\infty-\infty}{\infty} \qquad (2.60)$$

Sigue sin poder eliminar la diferencia indeterminada.

Factorizando

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sinh x - x\right] = \lim_{x\to\infty}\sinh x - x = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\sinh x}{x} - 1\right) = \infty\left(\frac{\sinh\infty}{\infty} - 1\right) = \infty\left(\frac{\infty}{\infty} - 1\right) \tag{2.61}$$

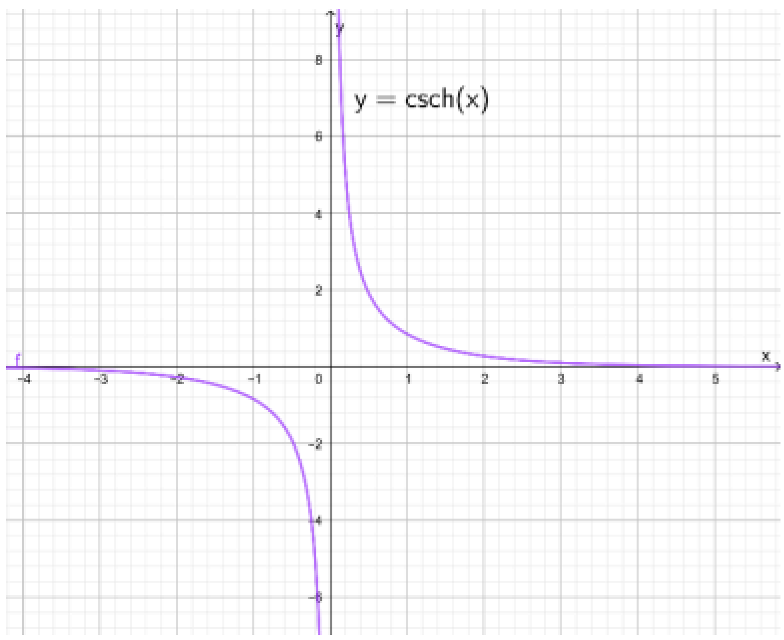
Se tiene una forma indeterminada combinada no es una de las principales.

Identidades hiperbólicas

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sinh x - x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\csc hx} - x = \lim_{x\to\infty}\frac{1 - x\csc hx}{\csc hx} = \frac{1-(\infty)\csc h\infty}{\csc h\infty} \tag{2.62}$$

En esta evaluación nos falta el valor de la cosecante hiperbólica de infinito, veamos su gráfica

Gráfico 2.19 Gráfica de la función f(x)=cshx.



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Conforme x crece la función csch$x$ tiende a cero, luego

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sinh x - x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\csc hx} - x = \lim_{x\to\infty}\frac{1 - x\csc hx}{\csc hx} = \frac{1-(\infty)\csc h\infty}{\csc h\infty} = \frac{1-(\infty)\cdot 0}{0} \tag{2.63}$$

Que no lleva a la forma de cociente indeterminado para poder aplicar la Regla de L´Hospital.

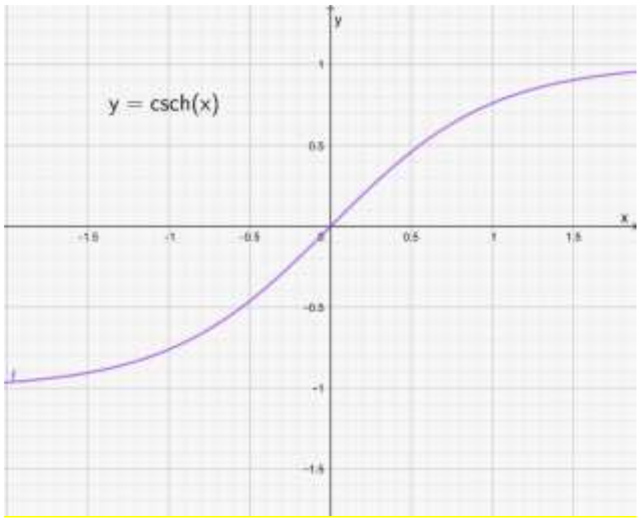
Otra identidad, multiplicando por una función hiperbólica

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sinh x - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\sinh x - x\right)\frac{\sec hx}{\sec hx} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sinh x - x)\sec hx}{\sec hx} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sinh x\sec hx - x\sec hx}{\sec hx}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x\sec hx - x\sec hx}{\sec hx} = \lim_{x\to\infty}\frac{\tanh x - x\sec hx}{\sec hx} = \frac{\tanh\infty - (\infty)\sec h\infty}{\sec h\infty} \tag{2.64}$$

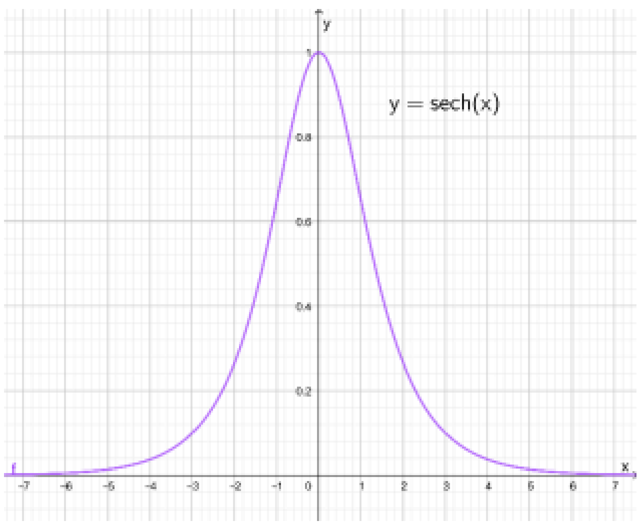
Determinemos los valores en infinito de las funciones tangente hiperbólica y secante hiperbólica, para ello tenemos las gráficas de ellas.

Gráfico 2.20 Gráfica de la función f(x)=tanhx.



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Gráfico 2.21 Gráfica de la función f(x)=sechx



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Cuando x crece la función se aproxima a 1, luego $\lim_{x\to\infty} \tanh x = 1$,

Cuando x crece la función se aproxima a 0, Así $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sech} x = 0$, Así
$\lim_{x\to\infty} \frac{\tanh x - x\sec hx}{\sec hx} = \frac{\tanh\infty - (\infty)\sec h\infty}{\sec h\infty} = \frac{1-(\infty)0}{0}$ (2.65)

Tampoco nos lleva a un cociente indeterminado.

Son varios procedimientos y ninguno nos lleva a un cociente indeterminado.

Para determinar el valor del límite si es que existe, no es posible con la forma de cociente indeterminado. Podemos aplicar las propiedades de los límites, recordando que para poder aplicar las operaciones del límite todos deben de existir.

Donde usamos identidades hiperbólicas, en los dos últimos casos, obtuvimos la misma forma indeterminada $\frac{1-(\infty)0}{0}$, donde se tiene un producto indeterminado dentro de un cociente, pero tenemos que el límite de las otras funciones si existen por lo tanto en cualquiera de estas vamos a aplicar las propiedades y calcular el límite.

Usamos la identidad que se aplicó en (4), que es la más directa.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sinh x - x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\csc hx} - x = \lim_{x\to\infty}\frac{1-x\csc hx}{\csc hx} = \frac{1-(\infty)\cdot 0}{0} \tag{2.66}$$

Aplicando propiedades

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x\operatorname{csch} x}{\operatorname{csch} x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-x\operatorname{csch} x\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{csch} x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}x\operatorname{csch} x}{\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{csch} x} \tag{2.67}$$

Calculamos los tres límites

$\lim\limits_{x\to\infty}1=1$, límite existe.

$\lim\limits_{x\to\infty}x\operatorname{csch} x=(\infty)\operatorname{csch}\infty=(\infty)\cdot 0$, usando la gráfica de la función que presentamos antes.

Forma de producto indeterminado, pasamos a un cociente con las identidades

$$\lim_{x\to\infty}x\operatorname{csch} x = \lim_{x\to\infty}x\left(\frac{1}{\sinh x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sinh x} = \frac{\infty}{\sinh\infty} = \frac{\infty}{\infty} \tag{2.68}$$

Podemos aplicar la Regla de L´Hospital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sinh x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\cosh\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \tag{2.69}$$

Así el límite existe y vale 0.

$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{csch} x=\operatorname{csch}\infty=0$, por lo cual el límite existe.

Así

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sinh x - x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{1-x\csc hx}{\csc hx} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}x\operatorname{csch} x}{\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{csch} x} = \frac{1-0}{0} = \frac{1}{0} = \infty \tag{2.70}$$

Por lo tanto, el límite $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sinh x - x\right]$ no existe.

Actividad 3 de la Lección 2.1.5

1. Determine el valor del límite $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ si existe.

Al calcular el límite ¿obtienes una interminación? Si No ¿Qué tipo de indeterminación es? ¿Puedes ocupar la Regla de L'Hôpital de manera directa? Continúa con el procedimiento hasta obtener el valor del límite, si es que existe.

2. Calcular el límite $\lim_{x\to\infty}(1+e^{x})^{e^{-x}}$ si existe

Al calcular el límite ¿obtienes una interminación?
Si
No

¿Qué tipo de indeterminación es?

¿Puedes ocupar la Regla de L’Hôpital de manera directa?

Continúa con el procedimiento hasta obtener el valor del límite, si es que existe.

L’Hôpital	
 *Fuente de Consulta: (Solaeche, 1993; Soler, Núñez, & Aranda, 2008)*	En el año de 1969, en París, L’Hospital publicó el primer tratado sobre el Cálculo Diferencial “Analyse des infiniment petits pour l´ıntelligence des lignes courbes”. Dividió la obra en diez secciones, de las cuales, en la novena aparece la controversial Regla de L’Hospital (Solaeche, 1993), ya que fue descubierta en 1694 por el matemático suizo Johann Bernoulli. La explicación es que ambos habían entrado en un curioso arreglo de negocios por medio del cual el marqués de L’Hôpital compró los derechos de los descubrimientos matemáticos de Bernoulli (Soler, Núñez, & Aranda, 2008). El marqués de L’Hospital fue un matemático aficionado que desde temprana edad se interesó por las Matemáticas, y muy particularmente por el nuevo Cálculo presentado al mundo por Leibniz en dos breves trabajos, en 1684 y en 1686. Consciente de que él no podría por sí mismo dominar esta excitante faceta, “recurrió” a Johann Bernoulli (Solaeche, 1993).

Bernoulli	
 *Fuente de Consulta: (Soler, Núñez, & Aranda, 2008)*	Bernoulli conoció a L’Hôpital en su estadía en Francia en 1691, donde L’Hôpital contrato a Bernoulli para que lo iniciara en el nuevo mundo del cálculo infinitesimal, las lecciones fueron dadas en París, Bernoulli fue generosamente compensado. Cuando Bernoulli tuvo que regresar a Suiza, siguieron las lecciones por correspondencia. Esta correspondencia se convirtió en la base para el primer libro de cálculo diferencial, lo que aseguro a L’Hôpital un lugar en la historia de las matemáticas (Soler, Núñez, & Aranda, 2008; Solaeche, 1993).

Actividad 4 de la Lección 2.1

Dados los límites de las funciones:

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ $\lim_{x \to a} h(x) = 1$ $\lim_{x \to a} p(x) = \infty$ $\lim_{x \to a} q(x) = \infty$

¿Cuáles de los límites siguientes son formas indeterminadas? Para aquellos que no son una forma indeterminada, evalúa el límite donde sea posible hacerlo.

1. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
2. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{p(x)}$
3. $\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{p(x)}$
4. $\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{f(x)}$
5. $\lim_{x \to a} [f(x)p(x)]$
6. $\lim_{x \to a} [h(x)p(x)]$
7. $\lim_{x \to a} [p(x)q(x)]$
8. $\lim_{x \to a} [f(x) - p(x)]$
9. $\lim_{x \to a} [p(x) - q(x)]$
10. $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$
11. $\lim_{x \to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$
12. $\lim_{x \to a} [f(x)]^{p(x)}$
13. $\lim_{x \to a} [h(x)]^{p(x)}$

Lista de ejercicios de la lección 2.1

Tabla 2.1 Lista de ejercicios de la lección 2.1

Cocientes indeterminados. Calcular el límite si existe.	12. $\lim_{x\to 0}\frac{senx-x}{\tan x-x}$	**Productos indeterminados** Calcular el límite si existe
1. $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$	13. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\cos(2\pi-x)}$	1. $\lim_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)$
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$	14. $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\cos x)}{x-senx}$	2. $\lim_{x\to\infty}\left(xsen\frac{1}{x}\right)$
3. $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$	15. $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\cos x)}{x-senx}$	3. $\lim_{x\to 0^+}\left(x\cot x\right)$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$	16. $\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{3x}+\ln x}{e^{3x}+x^2}$	4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sec x\cos 3x\right)$
5. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	17. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2senx}{xsenx}$	5. $\lim_{x\to 0^+}x\ln\left(senx\right)$
$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}+5x-4}{x\ln x}$	18. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$	6. $\lim_{x\to\infty}\left[x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)\right]$
6. $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{1+senx}{\cos^2 x}$	19. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(2x\right)}{\arcsin x}$	7. $\lim_{x\to 0^+}\left[\sin x\ln\left(\sin x\right)\right]$
7. $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{1+senx}{\cos^2 x}$	20. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x\sin x}$	8. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left[\tan x\ln\left(senx\right)\right]$
8. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-sen\theta}{1+\cos 2\theta}$	21. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3-3^x}{5-5^x}$	9. $\lim_{x\to\infty}\left(x^3 2^{-x}\right)$
9. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\tan x}{\cot 2x}$	22. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	10. $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2e^x\right)$
10. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan t}{\tan 3t}$	23. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x\ln x}{x+\ln x}\right]$	11. $\lim_{x\to\infty}\left[x\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)\right]$
11. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-senx}{x^3\tan x}$	24. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(senx)}{\ln(sen2x)}$	12. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\left(e^{\frac{1}{x}}-x\right)\right]$
	25. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cosh x}{x^2+1}$	13. $\lim_{x\to 0^+}\left(e^{-x}\ln x\right)$

Fuente de Consulta: (Ruiz, 2021)

Tabla 2.2 Segunda parte de la lista de ejercicios de la lección 2.1

14. $\lim_{x\to\infty}\left[\left(x^2-1\right)e^{-x^2}\right]$	6. $\lim_{x\to 0}\left[(\cos x)^{x+1}\right]$	24. Hallar los valores de a y b tales que $\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-b}{2x^2}=-4$
Diferencias Indeterminadas Calcular el límite si existe.	7.	25. Hallar los valores de a y b tales que $\lim_{x\to 0}\frac{sen2x+ax+bx^3}{x^3}=0$
1. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}\right]$	8. $\lim_{x\to 0^+}\left[\left(2x+1\right)^{\cot x}\right]$	26. Calcule los valores de a y b tales que $lím_{x\to 0}\left(\frac{sen(3x)+ax+bx^2}{x^3}\right)=0$
2. $\lim_{x\to -3}\left[\frac{4}{x^2+2x-3}-\frac{4}{x+3}\right]$	9. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\left[1+\cos x\right]^{\tan x}\right)$	27. Si $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{nx+1}{nx-1}\right)^x=9$, determinar n.
3. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]$	$\lim_{x\to 0}\left(x+\cos 2x\right)^{\csc 3x}$	
4. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right]$	10. $\lim_{x\to 0}\left[(1+sen4x)^{\cot x}\right]$	
5. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\sec x-\tan x\right]$	11. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left[\left(\tan x\right)^{\cos x}\right]$	
	12. $\lim_{x\to 0^+}(e^x-1)^x$	
	13. $\lim_{x\to\infty}\left(x+e^x\right)^{\frac{2}{x}}$	

6. $\lim_{x\to\infty}\left[\ln 2x-\ln(x+1)\right]$

7. $\lim_{x\to\infty}\left[\ln(4x+3)-\ln(3x+4)\right]$

8. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+5x^2+3}-x^2\right)$

9. $\lim_{x\to\infty}\left[\sinh x-x\right]$

10. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$

Potencias Indeterminadas

Calcular el límite si existe.

1. $\lim_{x\to\infty}(1+x^3)^{x^{-2}}$

2. $\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}\right]$

3. $\lim_{x\to 0^+}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]$

4. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x^2}$

5. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+1}\right)^{x}$

14. $\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^x+3x\right)^{\frac{1}{x}}\right]$

15. $\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+e^x\right)^{e^{-x}}\right]$

16. $\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\ln x}$

17. $\lim_{x\to\infty}\left[\left(\ln x\right)^{\frac{1}{x}}\right]$

18. $\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+2x\right)^{\frac{1}{2\ln x}}\right]$

19. $\lim_{x\to e}\left[(\ln x)^{\frac{1}{x-e}}\right]$

20. $\lim_{x\to 0}(senhx)^{\tan x}$

21. $\lim_{x\to 0}\left(\left(\cos x\right)e^{x^2}\right)^{\frac{4}{x^4}}$

22. $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{3x}$

23. Demostrar que si $a>0$, entonces $\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln a$

28. Demostrar que $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$ para cualquier entero n.

29. Demostrar que $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^p}=0$ para cualquier $p>0$.

30. Determinar los valores de a, b y c para los cuales $\lim_{x\to 1}\frac{ax^4+bx^3+1}{(x-1)sen(\pi x)}=c$

31. Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}}{x^4}$

32. Calcular $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$, donde $a>0$

Fuente de Consulta: (Ruiz, 2021)

Lección 2.2 Integrales impropias

Investiga y Analiza

1.- ¿Qué es una integral definida?

2.- ¿Qué es una integral impropia? ¿Cómo las puedes identificar?

3.- ¿Qué diferencia existe entre una integral impropia con extremos acotados y una con extremos no acotados?

4.- ¿Las integrales siguientes son impropias? ¿Por qué?

$a)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \qquad b)\ \int_0^{\pi} tanx\, dx \qquad c)\ \int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^3} \qquad d)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-x-2}$

Teoría y ejemplos

Introducción

Las integrales se pueden clasificar en:

a) Integral indefinida

– Ejemplo

$$\int 3xdx=\frac{3x^2}{2}+c$$

b) Integral definida

– Ejemplo

$$\int_2^4 3xdx=\frac{3x^2}{2}\Big|_2^4=24-6=18$$

Cuando se aborda el concepto de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se define con las condiciones de que la función f es continua sobre un intervalo finito $[a,b]$. Sin embargo, en ocasiones nos encontramos con integrales que no satisfacen estos requisitos porque: 1) cualquiera de los límites de integración son infinitos, o 2) f tiene un número finito de discontinuidades en el intervalo $[a,b]$. A estas integrales les llamamos integrales impropias. Como en los siguientes casos: $\int_1^\infty x^2dx,\quad \int_{-\infty}^5 x^2dx,\quad \int_{-\infty}^\infty x^2dx,\quad \int_0^1 \frac{1}{x}dx,$

2.2.1. Caso I. Integrales impropias con límites de integración infinitos

Definición 2.2.1

1. Si f es continua en el intervalo $[a,\infty)$, entonces
$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$
2. Si f es continua en el intervalo $(-\infty,b]$, entonces
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Se dice que la integral impropia ***converge*** si el límite existe, en caso contrario, la integral impropia ***diverge***.

Ejemplo 2.2.1 de integral impropia con límite de integración infinito

Determinar si la integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ converge o diverge. (2.71)

El integrando es $f(x)=\frac{1}{x}$, el cual es una función continua en el intervalo $[1,\infty)$ usando la definición, tenemos: $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}[ln\,x]_1^b = \lim_{b\to\infty}(ln\,b - ln\,1) = \lim_{b\to\infty}(ln\,b) = \infty$. Luego, **la integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ diverge**

Ejemplo 2.2.2 Determina si la siguiente integral $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{2x-5}$ es convergente o divergente. Si es convergente diga a qué converge.

Se obtienen las raíces del denominador del integrando, para saber con qué valor se hace discontinua la función

$2x-5=0$
$2x=5$
$x=\frac{5}{2}$

El integrando es discontinuo para $x=\frac{5}{2}$, sin embargo, este punto está fuera de los límites de integración, por lo tanto, se puede resolver la integral $\lim_{n\to-\infty}\int_n^0 \frac{dx}{2x-5}$ (2.72)

Observamos que esta integral se resuelve por cambio de variable, por lo que decimos que:
$u=2x-5\ ;\ du=2dx$

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{2}\int_n^0 \frac{du}{u} \tag{2.73}$$

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{2}[\ln u]_n^0 \tag{2.74}$$

Volviendo a la variable original:

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{2}[\ln|2x-5|]_n^0 \tag{2.75}$$

Evaluando la integral:

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{2}[(\ln|2(0)-5|)-(\ln|2n-5|)] \tag{2.76}$$

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{2}[(\ln|-5|)-(\ln|2(-\infty)-5|)] \tag{2.77}$$

Obtenemos los valores de $\ln|-5|$ y $\ln|-\infty-5|$, pero sabemos que $\ln|-5|=\ln 5$ y $\ln|-\infty-5| = \ln|-\infty| = \ln\infty = \infty$.

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{2}[(\ln 5)-\infty] \tag{2.78}$$

A su vez, sabemos que $\ln|5| \gg -\infty$ por lo que la resta se desprecia, obteniendo así: $\lim_{n\to-\infty}\int_n^0\frac{dx}{2x-5} = -\infty$ (2.79)

La integral diverge

Ejemplo 2.2.3 Evalúa $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$

El integrando es $f(x)=xe^x$, el cual es una función continua en el intervalo$(-\infty,0]$, usando la definición, tenemos:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 xe^x dx \tag{2.80}$$

Integrando por partes, haciendo $u=x, du=dx$ y $dv=e^x dx, v=e^x$, obtenemos:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x \tag{2.81}$$

Luego $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 xe^x dx = \lim_{a\to-\infty}(xe^x-e^x)|_a^0 = \lim_{a\to-\infty}[(0e^0-e^0)-(ae^a-e^a)]$

$$= \lim_{a\to-\infty}(-1-ae^a+e^a) = \lim_{a\to-\infty}-1+\lim_{a\to-\infty}-ae^a+\lim_{a\to-\infty}e^a \tag{2.82}$$

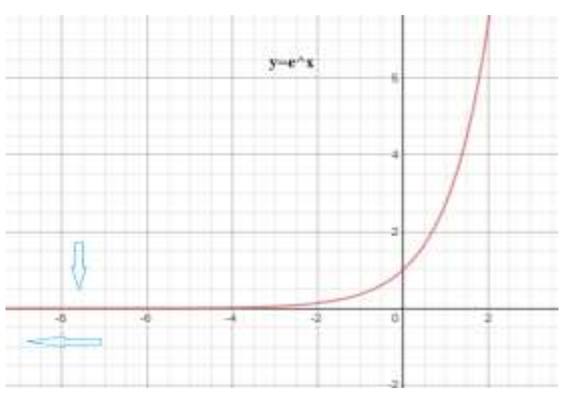
Calculando los límites

i) $\lim_{a\to-\infty}-1=-1$ (2.83)

ii) $\lim_{a\to-\infty}e^a = e^{-\infty}$, (2.84)

es decir hay que determinar el valor del límite de la función exponencial cuando $x\to-\infty$, a partir de la gráfica de la función que se encuentra en el Gráfico 2.22.

Gráfico 2.22 Gráfica de la función y=e^x



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Observamos que, si los valores de x decrecen, esto es si tienden a $-\infty$, los valores de y se aproximan a cero, esto es $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, así, $\lim_{a\to-\infty} e^{a} = 0$ (2.85)

iii) $\lim_{a\to-\infty} -ae^{a} = -(-\infty)e^{-\infty} = \infty \cdot 0$, en este límite se vuelve a tener $\lim_{a\to-\infty} e^{a}$ que ya vimos es cero.

Pero al evaluar el límite no tenemos un resultado como en los otros casos, obtenemos una forma indeterminada, por lo que hay que resolverla.

Representamos el producto como un cociente

$$\lim_{a\to-\infty} -ae^{a} = \lim_{a\to-\infty} -\frac{a}{e^{-a}} \tag{2.86}$$

Aplicando la regla de L´Hôpital

$$\lim_{a\to-\infty} -\frac{a}{e^{-a}} = \lim_{a\to-\infty} -\left(\frac{1}{-e^{-a}}\right) = \lim_{a\to-\infty} e^{a} = 0 \tag{2.87}$$

Así

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx = \lim_{a\to-\infty}(-1 - ae^{a} + e^{a}) = \lim_{a\to-\infty} -1 + \lim_{a\to-\infty} -ae^{a} + \lim_{a\to-\infty} e^{a} = -1 + 0 + 0 = -1. \tag{2.88}$$

Y decimos que,

La integral converge y su valor es –1

Ejemplo 2.2.4 ¿Cómo calculamos el valor de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$?

En este caso no podemos usar ninguno de los dos casos de la definición ya que infinito no solo es límite inferior o superior sino ambos y no tenemos que la función es continua en un intervalo semi-abierto como $a, \infty)$ o $-\infty, b$. Para este tipo de integrales donde los dos límites de integración son infinitos y donde la función es continua en $(-\infty, \infty)$, se tiene la definición siguiente.

Definición 2.2.2 Si f es continua en $(-\infty,\infty)$ y si tanto $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ y $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ convergen, decimos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge y se determina su valor como
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$ donde c es un número real
si alguna de las integrales $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ y $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ diverge entonces la $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ diverge.

Continuemos resolviendo la integral del ejemplo 2.2.4. Determinar si la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ converge o diverge (2.89)

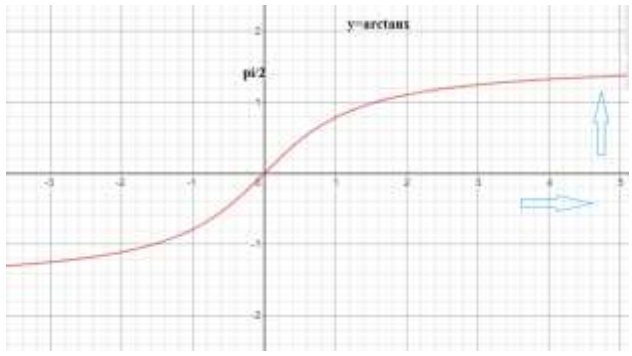
El integrando $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continuo en $(-\infty,\infty)$, luego decimos que la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continua en $(-\infty, c]$ y en $[c, \infty)$.

Así si $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continua en $(-\infty, c]$, entonces.

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a\to-\infty} \arctan x|_{a}^{c} = \lim_{a\to-\infty} (\arctan c - \arctan a) = \arctan c - \lim_{a\to-\infty} \arctan a \tag{2.90}$$

El límite de la función trigonométrica inversa lo determinamos a partir del Gráfico 2.23.

Gráfico 2.23 Gráfica de la función y=arctanx



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

$\lim_{x\to-\infty} arctan\, x = -\frac{\pi}{2}$ y $\lim_{x\to\infty} arctan\, x = \frac{\pi}{2}$ (2.91)

Así $\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+x^2} dx = arctan\, c - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = arctan\, c + \frac{\pi}{2}$ (2.92)

Determinemos la otra integral.

Como $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continua en $[c, \infty)$, entonces :

$\int_{c}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to\infty} arctan\, x|_{c}^{b} = \lim_{b\to\infty}(arctan\, b - arctan\, c)$ (2.93)

$= \lim_{b\to\infty} arctan\, b - arctan\, c = \frac{\pi}{2} - arctan\, c$, anteriormente determinamos el valor del límite en infinito. (2.94)

Luego,

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = arctan\, c + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - arctan\, c = \pi.$ (2.95)

Así,

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ converge y su valor es π

De acuerdo con la definición $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$. donde c es un número real. Podemos tomar a c como cualquier número real de tal manera que al evaluar la integral nos dé un valor conocido, así podemos decir que $c = 0$, de modo tal que se divida en la integral de números negativos y de números positivos. Si hubiéramos aplicado este hecho en el problema que acabamos de resolver tenemos.

Ejemplo 2.2.5. Determinar si la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ converge o diverge

El integrando $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continua en $(-\infty, \infty)$, luego decimos que la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$es continua en $-\infty, 0$ y en $0, \infty$).

Así si $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continua en $-\infty, 0$, entonces

$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a\to-\infty} arctan\, x|_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty}(arctan\, 0 - arctan\, a)$
$= arctan\, 0 - \lim_{a\to-\infty} arctan\, a = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ (2.96)

Determinemos la otra integral, Como $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continua en $[0, \infty)$, entonces

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty} arctan\, x|_0^b = \lim_{b\to\infty}(arctan\, b - arctan\, 0)$$

$$= \lim_{b\to\infty} arctan\, b - arctan\, 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \tag{2.97}$$

Luego

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = a\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \tag{2.98}$$

Así,

La integral $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ converge y su valor es π

2.2.2 Caso II. Integrales con discontinuidades infinitas

Muchos autores llaman a este tipo de integrales como: integrales de segunda especie, integrales impropias de tipo II, integrales discontinuas; pero eso depende de cada uno la interpretación que le da.

Definición 2.2.3

Una Integral Impropia de segundo tipo es la que tiene una discontinuidad en 0 entre los límites de integración:

I. Si f es continuo en el intervalo [a, b) y tiene una discontinuidad infinita en b, entonces: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b} \int_a^c f(x)dx$

II. Si f es continua en el intervalo (a, b] y tiene una discontinuidad infinita en a, entonces: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a} \int_a^b f(x)dx$

III. Si f es continuo en el intervalo [a, b], excepto para algún c en (a, b) en que f tiene una discontinuidad infinita, entonces: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Si al calcular el límite de la función resultante, existe, entonces la integral converge o es convergente, y en el caso contrario la integral diverge o es divergente. A continuación, se describen los pasos a seguir para resolver una integral con discontinuidades infinitas (Pinzón, 1973):

- Ver la discontinuidad que se muestra en la integral para así mismo ver el procedimiento a realizar.
- Se identifica u y du;
- Observar si la integral está completa, en caso contrario se completa de acuerdo a su derivada.
- Procedemos a integrar la función.
- Después de integrar, se realiza la fórmula: f(b) – f(a).
- Se concluye si es convergente o divergente.
- Si se desea, graficar la función.

Ejemplo 2.2.4 Si f es continuo en el intervalo [a, b) y tiene una discontinuidad infinita en b,

Determinar si la integral $\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ converge o diverge.

El integrando es $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}$, esta función no es continua en $x = \pm 1$, luego es continua en el intervalo [0,1), usando la definición, tenemos $\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

La integral $\int \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ se resuelve por cambio de variable, tomando $u = x^2$, $du = 2xdx$

$$\int \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}dx = 2\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = 2\arcsin x^2 \quad (2.99)$$

Así

$$\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \lim_{b\to 1^-} 2\,arcsin\,x^2|_0^b = \lim_{b\to 1^-} 2\,arcsin\,b^2 - 2\,arcsin\,0^2$$

$$= \lim_{b\to 1^-} 2\,arcsin\,b^2 - 2\,arcsin\,0 = 2\,arcsin\,1 - 2\,arcsin\,0 \quad (2.100)$$

Determinemos los valores de las funciones $y = 2\,arcsin\,1$ y $z = 2\,arcsin\,0$, usando los valores principales de las funciones trigonométricas tenemos que $y = \frac{\pi}{2}$ y $z = 0$

Luego $\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}dx = 2\,arcsin\,1 - 2\,arcsin\,0 = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2(0) = \pi.$ (2.101)

Por lo tanto,

La integral $\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}dx$converge y su valor es π

Ejemplo2.2.5 Si f es continua en el intervalo (a, b] y tiene una discontinuidad infinita en a.

Evalúe la integral $\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$ y diga si es convergente o divergente

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{3}{x^5}dx = \lim_{a\to 0} 3\int_a^1 x^{-5}dx = \lim_{a\to 0} \frac{3}{-4x^4}\Big|$$

$$= \lim_{a\to 0}\left[\left(-\frac{3}{4\,(1)^4}\right) + \left(-\frac{3}{4\,(a)^4}\right)\right] = \lim_{a\to 0}\left[\left(-\frac{3}{4\,(1)^4}\right) + \left(-\frac{3}{4\,(0)^4}\right)\right] \quad (2.102)$$

$= -\frac{3}{4} + \frac{3}{0} = -\frac{3}{4} + \infty = Diverge\ a\ \infty\ (infinito)$. Por lo tanto,

La integral $\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$ es divergente

Ejemplo 2.2.6 Si f es continuo en el intervalo [a, b], excepto para algún c en (a, b) en que f tiene una discontinuidad infinita, entonces determine si la siguiente integral$\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}$ es convergente o divergente. Si es convergente diga a qué converge (Pinzón, 1973).

Al obtener indeterminación al evaluar en 1 es necesario ajustar la integral:

$$\lim_{b\to 1}\int_0^b \frac{dx}{x^2-6x+5} + \lim_{a\to 1}\int_1^3 \frac{dx}{x^2-6x+5} \quad (2.103)$$

Factorizamos para hacer más fácil la integración:

$$\lim_{b\to 1}\int_0^b \frac{dx}{(x-3)^2-(2)^2} + \lim_{a\to 1}\int_1^3 \frac{dx}{(x-3)^2-(2)^2} \quad (2.104)$$

Integraremos usando la fórmula:$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\,ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|$, donde u=(X-3) y a=2

$$\lim_{b\to 1}[\frac{1}{2(2)}\,ln\left|\frac{(x-3)-2}{(x-3)+2}\right|]_0^b + \lim_{a\to 1}[\frac{1}{2(2)}\,ln\left|\frac{(x-3)-2}{(x-3)+2}\right|]_a^3 \quad (2.105)$$

Simplificamos y evaluamos:

$$\lim_{b\to 1}\frac{1}{4}\left(ln\left|\frac{b-5}{b-1}\right| - ln|5|\right) + \lim_{a\to 1}\frac{1}{4}\left(ln|-1| - ln\left|\frac{a-5}{a-1}\right|\right) \qquad (2.106)$$

Resolvemos el primer límite:

Aplicamos propiedades de los logaritmos:

$$\lim_{b\to 1}\frac{1}{4}\left(ln\left|\frac{\frac{b-5}{b-1}}{5}\right|\right) = \lim_{b\to 1}\frac{1}{4}\left(ln\left|\frac{b-5}{(5b-5)}\right|\right) \qquad (2.107)$$

Evaluamos el límite:

$$\frac{1}{4}(ln|\infty|) = \frac{1}{4}(\infty) = \infty \qquad (2.108)$$

Al obtener divergencia en el primer límite, ya no es necesario resolver el segundo límite. Por lo tanto,

$\boldsymbol{\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}}$ **es divergente**

Ejercicios Resueltos de la Lección 2.2

1. Para qué valores de p la integral $\int_0^1 \frac{1}{x^P}dx$ converge y para cuáles valores de p, diverge.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^P}dx = \int_0^1 x^{-P}dx = \frac{x^{-P+1}}{-P+1}\Big|_0^1 \qquad (2.109)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{-P+1}}{-P+1} = \frac{0^{-P+1}}{-P+1} = \frac{\mathbf{0^{-P+1}}}{\mathbf{-P+1}} \qquad (2.110)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{-P+1}}{-P+1} = \frac{1^{-P+1}}{-P+1} = \frac{\boldsymbol{1}}{\mathbf{1-P}} \qquad \textbf{Si P}\boldsymbol{\neq}\textbf{1} \qquad (2.111)$$

Si $-P+1>0 \rightarrow 1>P \rightarrow P<1$	Si $-P+1<0 \rightarrow 1<P \rightarrow P>1$
Entonces $\int_0^1 \frac{1}{x^P}dx$ **Converge**	Entonces $\int_0^1 \frac{1}{x^P}dx$ **Diverge**

Evaluando en algunos valores de P

Para **P=1**

$$\int_0^1 \frac{1}{X}dx = (\ln|x|)\Big|_0^1 \qquad (2.112)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{X}dx = \lim_{x\to 0}\ln|x| = \ln|0| = -\infty \qquad (2.113)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{X}dx = \lim_{x\to 1}\ln|x| = \ln|1| = 0 \qquad (2.114)$$

$\lim_{x\to 0}\ln|x| + \lim_{x\to 1}\ln|x| = 0 + \infty = \infty \therefore$ Es divergente

Para P>1, como ejemplo P=2

$$\int_0^1 \frac{1}{X^2}dx = \int_0^1 x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}\Big|_0^1 \qquad (2.115)$$

$\int_0^1 \frac{1}{X^2} dx = \lim_{x \to 0} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{0} = -\infty$ (2.116)

$\int_0^1 \frac{1}{X^2} dx = \lim_{x \to 1} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{1} = -1$ (2.117)

$\int_0^1 \frac{1}{X^2} dx = -1 + \infty = \infty$ ∴ Es **divergente**

Para **P<1,** como ejemplo **P=** $\mathbf{\frac{1}{3}}$

$\int_0^1 \frac{1}{X^{\frac{1}{3}}} dx = \int_0^1 x^{-2} dx = \frac{X^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{X^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} X^{\frac{2}{3}} |_0^1$ (2.118)

$\int_0^1 \frac{1}{X^{\frac{1}{3}}} dx = \lim_{x \to 0} \frac{3}{2} X^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} 0^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} . 0 = 0$ (2.119)

$\int_0^1 \frac{1}{X^{\frac{1}{3}}} dx = \lim_{x \to 1} \frac{3}{2} X^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} 1^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} . 1 = \frac{3}{2}$ (2.120)

$\int_0^1 \frac{1}{X^{\frac{1}{3}}} dx = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$ ∴ Es **convergente a** $\frac{3}{2}$

Para **P<1,** como ejemplo **P=−1**

$\int_0^1 \frac{1}{X^{-1}} dx = \int_0^1 x \, dx = \frac{X^{1+1}}{1+1} = \frac{X^{1+1}}{2} = \frac{X^2}{2} |_0^1$ (2.121)

$\int_0^1 \frac{1}{X^{-1}} dx = \lim_{x \to 0} \frac{X^2}{2} = \frac{0^2}{2} = \frac{0}{2} = 0$ (2.122)

$\int_0^1 \frac{1}{X^{-1}} dx = \lim_{x \to 1} \frac{X^2}{2} = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (2.123)

$\int_0^1 \frac{1}{X^{-1}} dx = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ ∴ Es **convergente a** $\frac{1}{2}$

2. Evalúe la integral $\int_0^{33} (x-1)^{-\frac{1}{5}} dx$ diga si es convergente o divergente

$\int_0^{33} (x-1)^{-\frac{1}{5}} dx = \int_0^{33} \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)}} =$ (2.124)

$\lim a \to 1 \int_0^{a} (x-1)^{-\frac{1}{5}} dx + \lim b \to 1 \int_b^{33} (x-1)^{-\frac{1}{5}} dx = \lim_{a \to 1} \frac{5(x-1)^{\frac{4}{5}}}{4} + \lim_{b \to 1} \frac{5(x-1)^{\frac{4}{5}}}{4} =$

$\left(\frac{5(1-1)^{\frac{4}{5}}}{4} - \frac{5(0-1)^{\frac{4}{5}}}{4} \right) + \left(\frac{5(33-1)^{\frac{4}{5}}}{4} - \frac{5(1-1)^{\frac{4}{5}}}{4} \right) = \left(0 - \frac{5}{4}\right) + (20 - 0) = -\frac{5}{4} + 20 = \frac{75}{4}$ (2.125)

$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{3}} \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-5)(x-1)} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-5)(x-1)}$ (2.126)

$Por\ fracciones\ parciales \frac{1}{(x-5)(x-1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1}$ (2.127)

$Entonces\ 1 = A(x-1) + B(x-5) => A = \frac{1}{4}\ \ y\ \ B = -\frac{1}{4}$ (2.128)

Primera integral:

$$\lim_{a\to 1^-}\left(\frac{1}{4}\int_0^a \left(\frac{1}{(x-5)}+\frac{1}{(x-1)}\right)dx\right) => \lim_{a\to 1^-} \frac{1}{4}((ln(x-5)-ln(x-1)) =>$$

$$\lim_{a\to 1^-} \frac{1}{4}\left(ln\left(\frac{x-5}{x-1}\right)\right) \ Ahora\ evaluando = \frac{1}{4}(ln(\infty)-ln(-5)) = \frac{1}{4}\left(ln\left(\frac{\infty}{-5}\right)\right) = \infty \quad (2.129)$$

Ya que la primera integral es **divergente**, no hace falta hacer la segunda porque el resultado será ∞. Entonces:

$\int_0^{33}(x-1)^{-\frac{1}{5}}\,dx$ es divergente

3. Determina si la siguiente integral $\int_0^{\infty} se^{-5s}ds$ es convergente o divergente. Si es convergente diga a qué converge.

Primero lo expresamos como límite, cambiando el infinito por otra variable

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a se^{-5s}\,ds \quad (2.130)$$

Integrar por partes

$u = s \qquad du = ds$

$dv = e^{-5s}ds \quad v = -\frac{e^{-5}}{5}$

$$\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{se^{-5s}}{5}+\frac{1}{5}\int e^{-5s}ds\right) \quad (2.131)$$

$$\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{se^{-5s}}{5}-\frac{e^{-5s}}{25}\right)_0^a \quad (2.132)$$

Aplicamos álgebra

$$\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{se^{-5s}}{5}-\frac{e^{-5s}}{25}\right)_0^a \quad (2.133)$$

$$\lim_{a\to\infty}\left(\frac{e^{-5s}}{25}(-5s-1)\right)_0^a \quad (2.134)$$

Evaluando

$$\lim_{a\to\infty}\left(\frac{e^{-5a}}{25}(-5a-1)-\left(\frac{e^{-5(0)}}{25}(-5(0)-1)\right)\right) \quad (2.135)$$

$$\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{\infty}{\infty}+\frac{1}{25}\right) \quad (2.136)$$

Como se indetermina se aplica la regla de L`Hôpital para remover la indeterminación, se selecciona el término que presenta la indeterminación de cociente.

$\lim_{a\to\infty}\left(\frac{e^{-5a}}{25}(-5a-1)\right) \to \quad \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{25e^{5s}}(-5s-1)\right)$ A esta expresión se le aplica la regla

$$\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{5}{125e^{5s}}\right) = -\frac{5}{\infty}=0 \quad (2.137)$$

Por lo tanto

$$\lim_{a\to\infty}\left(0+\frac{1}{25}\right)=\frac{1}{25}. \text{ Entonces,} \qquad (2.138)$$

La integral $\int_0^\infty se^{-5s}ds$ es convergente y converge en $\frac{1}{25}$

Actividad 1 de la lección 2.2

Instrucciones: Identifica si las siguientes integrales son impropias, fundamenta tu respuesta y resuelve las integrales, di si la integral es convergente o divergente. Si es convergente indica a donde converge.

1. $\int_0^\infty sen^2\alpha\ d\alpha$

¿La integral es impropia? ¿Por qué razón?   Determina si converge o diverge Si converge da su valor.

2. $\int_{-\infty}^0 ze^{2z}dz$

¿La integral es impropia? ¿Por qué razón?   Determina si converge o diverge Si converge da su valor.

3. $\int_{-2}^{3} \frac{dx}{x^4}$

¿La integral es impropia?

¿Por qué razón?

Determina si converge o diverge

Si converge da su valor.

4. $\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$

¿La integral es impropia?

¿Por qué razón?

Determina si converge o diverge

Si converge da su valor.

Lista de ejercicios de integrales impropias lección 2.2

Tabla 2.3 Lista de ejercicios de la lección 2.2

Determinar si la integral converge o diverge, si converge calcule su valor.

1. $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2} dx$
2. $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$
3. $\int_{4}^{\infty} \frac{x+18}{x^2+x-12} dx$
4. $\int_{3}^{\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$
5. $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$
6. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\left(x-1\right)^3}$
7. $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{x^2+4} dx$
8. $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2-3x+2} dx$
9. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^4+9}$
10. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} dx$
11. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}} dx$
12. $\int_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right) dx$
13. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+\tan^{-1} x\right)}$
14. $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$
15. $\int_{4}^{\infty} \frac{1}{x\left(\ln x\right)^3} dx$
16. $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$
17. $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx$
18. $\int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1} dx$
19. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$
20. $\int_{0}^{\infty} xe^{-x} dx$
21. $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x} dx$
22. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx$
23. $\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} sen 2x dx$
24. $\int_{0}^{\infty} e^{-x} \cos x dx$
25. $\int_{0}^{\infty} e^{-2x} \sin 3x dx$
26. $\int_{-\infty}^{\infty} \sec h\left(x\right) dx$

Determine si las integrales dadas convergen o divergen.

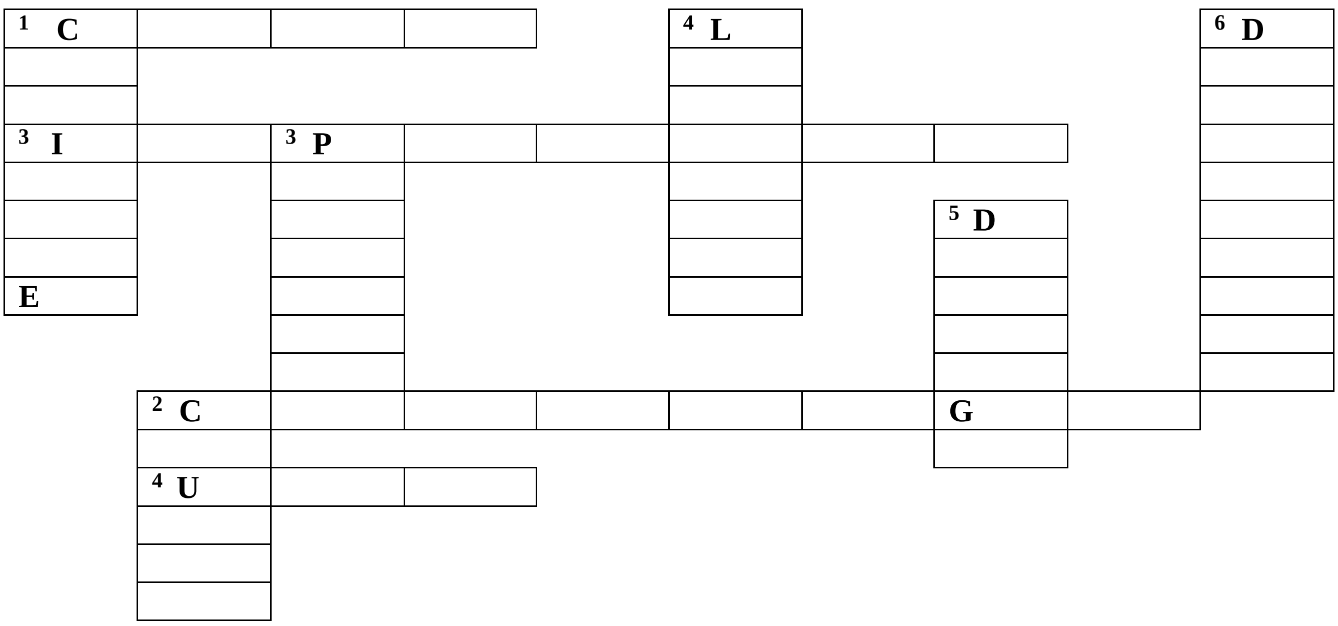
27. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{1-x}$
28. $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{\left(x+1\right)^3}$
29. $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2-x-2}$
30. $\int_{0}^{4} \frac{1}{x^2-4x+3} dx$
31. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{\left(x+2\right)^{5/4}} dx$
32. $\int_{-2}^{3} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$
33. $\int_{-2}^{2} \frac{x}{x^2-1} dx$
34. $\int_{0}^{1} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
35. $\int_{0}^{1} -\ln x dx$
36. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x\left(\ln x\right)^2} dx$
37. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 x dx$
38. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan^2 x dx$
39. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1-\cos x} dx$
40. $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+5x+6}$
41. $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$
42. $\int_{0}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{x}(x+6)} dx$
43. $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx$
44. $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx$
45. $\int_{5}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-25}} dx$
46. $\int_{-1}^{1} \ln|x| dx$
47. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$
48. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2dx}{x^2-1}$

Fuentes de Consulta: (Swokowski, 1989; Stewart, 2015)

Actividad de la Unidad 2

Instrucciones: Resuelve el crucigrama, lee cada reactivo y recuerda lo visto en clases.

Verticales	**Horizontales**
1. $\frac{\infty}{\infty}$ es una forma indeterminada de:	1. Al calcular el límite de la función . $\lim_{x\to 0} \frac{sen^{-1}x}{x}$, se obtiene
2. Fórmula auxiliar en la demostración de la Regla de L'Hôpital	2. Determine si la integral $\int_{\mathbf{4}}^{\infty} .(\boldsymbol{e}^{\frac{-y}{2}})\, \boldsymbol{dy}$ converge o diverge
3. $0 \cdot \infty$ es una forma indeterminada de:	3. Integral que tiene límites de integración infinitos
4. Regla que permite derivar la función del numerador y la del denominador	4. Al calcular el límite de la función $\lim_{x\to\infty} \frac{lnx}{\sqrt{x}}$ se obtiene:
5. Determine si la integral $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx$ converge o diverge	
6. $\infty - \infty$ es una forma indeterminada de:	



Examen de la unidad 2

Instrucciones: Resuelve lo que se solicita en cada reactivo y elige la opción que consideres es la correcta.

1. Al resolver la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$, ¿cuál es el valor del límite?

a) Es ∞
b) Es 1
c) Es $-\infty$

2. La integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ es

a) Convergente
b) Divergente

3. Al resolver la integral $\int_0^{\infty} e^{-x} sen\, x\, dx$, ¿cuál es el valor del límite?

a) Es 0
b) Es ∞
c) Es $\frac{1}{2}$

4. La integral $\int_0^{\infty} e^{-x} sen\, x\, dx$ es

a) Convergente
b) Divergente

5. ¿Cuál es el valor de $\lim_{x \to 0^+} x^x$, si es que existe?

a) 1
b) 0
c) ∞

6. ¿Cuál es el valor de $\lim_{x \to 0^+} (1 + sen\, 4x)^{\cot x}$, si es que existe?

a) ln e
b) e^4
c) c) 0

7. Determine el área bajo la curva $y = \frac{1}{x^3}$ desde x=1 hasta x=t, y evalúela para:

i) t=10,
ii) t=100
iii) t= 1000.

i) t=10
a) 0.498
b) 0.496
c) 0.495

ii) t=100
a) 0.496666
b) 0.499995
c) 0.49888

iii) t= 1000
a) 0.4999995
b) 0.4988888
c) 0.496666666

iv) Encuentre el área total bajo esta curva para x=1

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{249}{500}$

c) $\frac{62}{125}$

Determine si las siguientes integrales son convergentes o divergentes

8. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} dx$

a) Converge a 2.24

b) Diverge

c) Convergente a $\frac{4}{3}$

9. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3} dx$

a) Diverge

b) Converge a $-\frac{1}{36}$

c) Converge a $\frac{1}{36}$

10. $\int_{0}^{2} z^2 \ln(z) dz$

a) Diverge

b) Converge a 0.9595

c) Converge a 0

11. Debido a que es una integral que presenta una discontinuidad, ¿cómo está clasificada?

$\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{dx}}{5\mathrm{x}-3}$

a) Definida

b) Impropia

c) convergente

Relaciona ambas columnas colocando en el paréntesis la letra que corresponda a la respuesta correcta

( ) $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2-w}} dw$	a) Divergente
( ) $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx$	b) Converge en $\frac{2}{\sqrt{3}}$
( ) $\int_{2\pi}^{\infty} sen\,\emptyset\, d\emptyset$	c) Converge en $2e^{-2}$
( ) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$	d) Divergente
( ) $\int_{\mathbf{4}}^{\infty} .(\boldsymbol{e}^{\frac{-y}{2}})\, \boldsymbol{dy}$	e) Convergente en $\frac{1}{12}$
( ) $\int_{3}^{\infty} \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} dx$	f) Divergente
( ) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(x+1)}} dx$	g) Divergente
( ) $\int_{\mathbf{1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{3}x+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}} \boldsymbol{dx}$	h) Convergente en 0

En el siguiente enlace encontrarás más exámenes

https://drafabiola.com/webaplicado/PARCIAL2.html

Unidad 3 Sucesiones y Series

Establece la convergencia o divergencia de sucesiones y series a partir de sus propiedades, características y criterios.

¿Por qué es importante esta Unidad?

Nos permite conocer las series infinitas y nos da la posibilidad de representar una función por medio de una serie. Generalmente una serie de potencias permite ver a una a función como un “polinomio” infinito. Las series se utilizan en diferentes áreas como lo son la física o la química y asientan las bases para cursos posteriores de ingeniería en sistemas computacionales como lo es Matemáticas avanzadas.

Lección 3.1 Sucesiones

Investiga y Analiza

1. Da un ejemplo de una sucesión
2. ¿Qué es una sucesión?
3. ¿Cómo se grafica una sucesión?
4. ¿Has trabajado con sucesiones anteriormente?
5. ¿Dónde se pueden encontrar sucesiones?

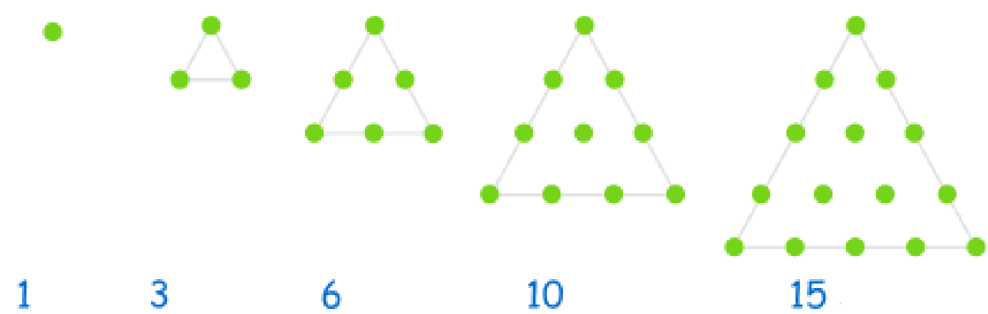
Teoría y ejemplos

3.1.1 Introducción

Tal vez te es familiar encontrar un listado de números que siguen un patrón y se te solicita encontrar el que sigue, como por ejemplo los múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15,18, …

O el acomodo de puntos como se muestran en el Gráfico 3.1 y determinar la cantidad de puntos de la figura que sigue.

Gráfico 3.1 Números **triangulares**



Fuente de Consulta: Elaboración Propia.

Ambos ejemplos representan una sucesión, de manera informal, entonces una sucesión es una lista de elementos que tienen un orden definido, de la cual podemos indicar cuáles son el primer, el segundo y hasta el n-ésimo término.

Definición 3.1.1 Un sucesión infinita o sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. Una sucesión puede verse como una lista de números que describen un orden definido tal como
$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$
donde cada número a_n, tiene su sucesor a_{k+1}.

3.1.1. Notación de las sucesiones

La sucesión {$a_1, a_2, a_3,$} puede escribirse como $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ o $\{a_n\}$.

Para expresar el término -ésimo se puede emplear la siguiente notación:

Ejemplo 3.1.1 Como función $a(n) = \frac{(-1)^n(2n-1)}{2^n}$ (3.1)

Por medio del término n-ésimo $a_n = \frac{(-1)^n(2n-1)}{2^n}$ (3.2)

Sucesión implícita, con su término n-ésimo $\left\{\frac{(-1)^n(2n-1)}{2^n}\right\}$ (3.3)

Sucesión explicita, indicando todos los términos $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \cdots, \frac{(-1)^n(2n-1)}{2^n}. \cdots\right\}$ (3.4)

Ruiz (2021), señala que *cualquier expresión que se usa para definir una función real se puede emplear para una sucesión, así se pueden usar todas las operaciones como son: suma, diferencia, producto, cociente, potencia, etc. y cualquier función como son las algebraicas y las trascendentes, aunque se tiene que en sucesiones se usa* $(-1)^n$ *el cual es un factor que no se emplea en funciones reales.*

Son sucesiones las siguientes

$a(n) = \sqrt{n}$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, $\{3\}$, $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ y $\left\{(-1)^{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}$

"En sucesiones una función constante como la que se tiene en variable real no representa solo a un número, sino que nos indica que para cada número entero positivo la función natural toma ese valor" (Ruiz, 2021)*, así :*

$f(x) = 5$

$\{5\} = \{5,5,5,5 \cdots ,5, \cdots\}$

Ejemplo 3.1.2 Una expresión para el término general a_n de una sucesión, suponiendo que el patrón de los primeros términos continua. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right\}$ (3.5)

La forma que tienen los elementos de la sucesión son fracciones con numerador fijo 1 y con denominador que varía, los denominadores son 2,4,8,16,… los números en los denominadores son las potencias de 2, luego

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$$

Ejemplo 3.1.3 $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \cdots\right\}$ (3.6)

La forma que tienen los elementos de la sucesión son fracciones con numerador fijo 1 y con denominador que varía, los denominadores son 2,4,6,8, … los números en los denominadores son múltiplos de 2, luego

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \cdots\right\} = \left\{\frac{1}{2n}\right\}$$

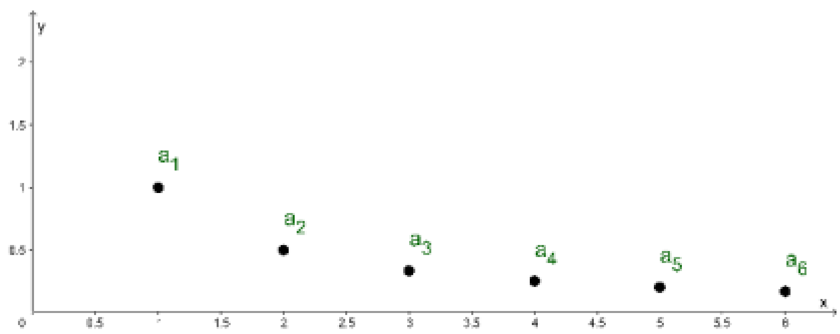
3.1.2. Gráfica de una sucesión

Una sucesión se grafica en el plano de ejes n y a_n. Los términos de la sucesión se representan en el plano por puntos, el primer término serán el punto $(1, a_1)$, el siguiente $(2, a_2)$ luego $(3, a_3)$etc.

Grafiquemos la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ (3.7)

Los términos de la sucesión son $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots\right\}$ (Ver Gráfico 3.2)

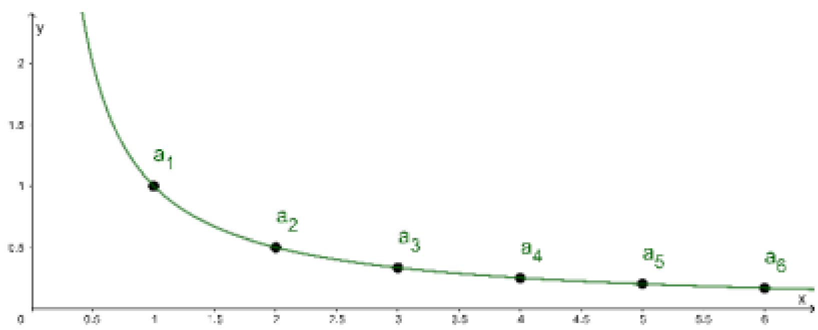
Gráfico 3.2 Gráfica de la sucesión {1/n}



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

La gráfica la constituye solo los puntos, ya que la sucesión es una función que solo está definida en los números naturales por lo cual no podemos unirlos con una línea como sucede con los números reales. Se puede usar la función real, si la conocemos, para apoyarnos en su trazo y marcar los puntos que determinan a la sucesión. (Gráfico 3.3)

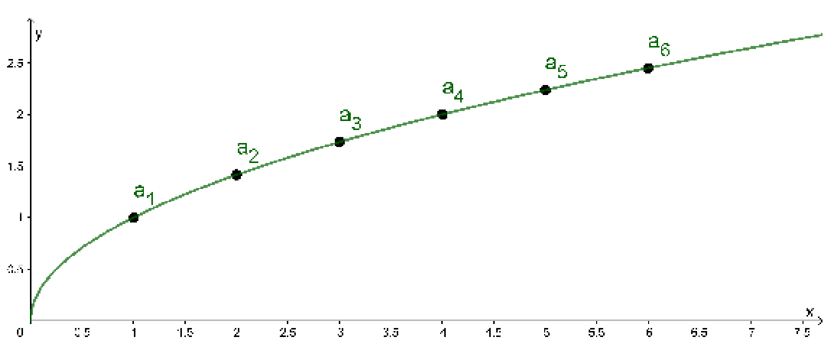
Gráfico 3.3 Gráfica de la función real y=1/x



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Grafiquemos ahora la sucesión $\{\sqrt{n}\}$ (3.8)

Gráfico 3.4 Gráfica de la función real y=√x

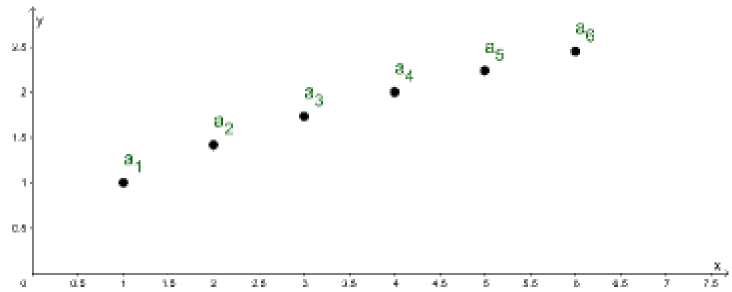


Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Los elementos de la sucesión son $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \cdots\}$, podemos usar la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ como base para determinar la gráfica de la sucesión.

La gráfica de la sucesión la constituyen los puntos en negro como puede verse en el Gráfico 3.5.

Gráfico 3.5 Gráfica de la sucesión $\{\sqrt{n}\}$



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Las dos sucesiones que graficamos se comportan de manera muy diferente, en la primera de ellas, conforme se incrementa *n*, los valores de a_n se acercan a una línea, en este caso a 0. Y en la segunda sucesión los valores se dispersan y conforme *n* crece, estos también lo hacen. Estos comportamientos están relacionados con la convergencia y divergencia de una sucesión. Las propiedades de funciones en general son aplicables a sucesiones, enunciamos algunas de las propiedades de sucesiones.

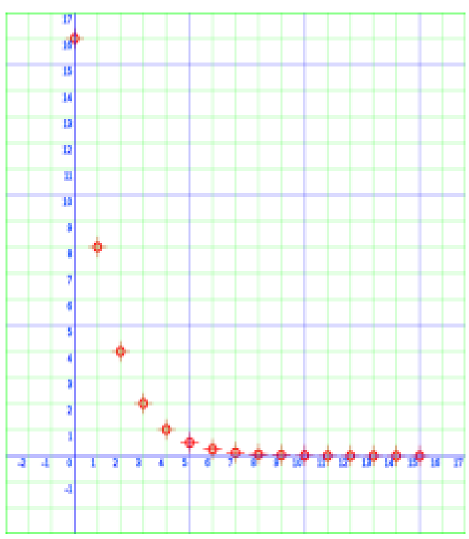
- Las sucesiones son acotadas superior e inferiormente, si y sólo si, su imagen es acotada (superior e inferiormente).
- Si *a* y *b* son sucesiones, su combinación lineal y su producto son sucesiones.
- Dada la sucesión *b* diferente de cero, la recíproca $\frac{1}{b}$ es también una sucesión, así como el cociente $\frac{a}{b}$, donde a es una sucesión

Definición 3.1.2 Sea $\{a_n\}$ una sucesión, ésta es
a) Creciente si $a_n < a_{n+1}$ para todo *n* positivo,
b) Decreciente si $a_n > a_{n+1}$ para todo *n* positivo.

3.1.3 Convergencia de una sucesión

Si una sucesión tiene límite, se dice que es una sucesión **convergente**, y que la sucesión converge o tiende al límite. En caso contrario, la sucesión es **divergente**. La definición significa que eventualmente todos los elementos de la sucesión se aproximan tanto como queramos al valor límite. La condición que impone que los elementos se encuentren arbitrariamente cercanos a los elementos subsiguientes no implica, en general, que la sucesión tenga un límite (Thomas, 2010). (Ver Gráfico 3.6).

Gráfico 3.6 Gráfica de una sucesión.



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Definición 3.1.3 La sucesión $\{a_n\}$ tiene límite L o converge a L, lo cual se denota por
$\lim_{n\to\infty} a_n = L$
si dado $\varepsilon > 0$ existe un número positivo N tal que
$|a_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n > N$
si tal numero L no existe, decimos que la sucesión no tiene límite o que diverge.

Esta definición nos dice que para determinar si una sucesión dada $\{a_n\}$ converge si el límite $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe. Hasta el momento sabemos determinar límites de funciones y en caso de que obtengamos una forma indeterminada ya conocemos estrategias para su solución, también al tener el concepto de límite sabemos las leyes de los límites y propiedades que cumplen. Sin embargo, todavía hay límites que no podremos calcular, para solventar esto agregaremos los teoremas siguientes que nos proporcionan más estrategias para la solución de límites.

3.1.4 Teoremas para sucesiones

Teorema. Sean $\{a_n\}$ una sucesión infinita y sea $f(n) = a_n$ donde $f(x)$ existe para todo número real $x \geq 1$

i) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$

ii) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(n) = \pm\infty$

Este teorema nos permite determinar el límite de una sucesión, a partir de límite de la función real, lo que justifica el uso de todas las propiedades y estrategias sobre límites.

Ejemplo 3.1.6 Determinemos si convergen o divergen las sucesiones $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ y $\{\sqrt{n}\}$. que son las que graficamos anteriormente y que de acuerdo con su gráfica se dijo si convergen o divergen. Este comportamiento debe ser el mismo que se obtenga algebraicamente.

1. Determinemos si la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge o diverge. (3.9)

De acuerdo con la definición calculamos el límite, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (3.10)

Así la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge a cero, como se había visto gráficamente. Luego

La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge a 0

Ejemplo 3.1.7 Determinemos si la sucesión $\{\sqrt{n}\}$ converge o diverge (3.11)

De acuerdo con la definición calculamos el límite, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$ (3.12)

Así la sucesión $\{\sqrt{n}\}$ diverge, como se había visto gráficamente. Así

La sucesión $\{\sqrt{n}\}$ diverge.

Teorema. Sean $\{a_n\}$ una sucesión con $a_n = r^n$ con *r* constante

i) $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$

ii) $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ si $|r| > 1$

El teorema no nos dice que pasa con el valor del límite cuando $r = \pm 1$, determinemos que pasa en ese caso

(i) $\lim_{n\to\infty}(1)^n = 1^\infty$, forma indeterminada de potencia (3.13)

$$\lim_{n\to\infty}(1)^n = \lim_{n\to\infty} n\, ln(1) = \lim_{n\to\infty} n(0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1)^n = e^0 = 1 \quad (3.14)$$

Luego la sucesión $\{(1)^n\}$ converge a 1. (3.15)

Otra opción se tiene si analizamos la sucesión esta es $\{(1)^n\} = \{1,1,1,1,1,\cdots,1,\cdots\}$, es decir la sucesión constante 1, luego converge a uno.

La sucesión $\{(\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}\}$ converge a 1

(ii) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$, este límite no lo podemos determinar ya que, dependiendo de n, varía el resultado, analicemos la sucesión de donde parte, $\{(-1)^n\}$ (3.16)

$\left\{(-1)^n\right\} = \left\{-1,1,-1,1,-1,1,\cdots\right\}$, esta puede descomponerse en dos sub-sucesiones

$$\{(-1)^n\} = \begin{cases} \{(-1)^n\} & \text{con } n \text{ impar} \\ \{(-1)^n\} & \text{con } n \text{ par} \end{cases} \Rightarrow \{(-1)^n\} = \begin{cases} \{-1,-1,-1,-1,\cdots\} & \text{con } n \text{ impar} \\ \{1,1,1,1,\cdots\} & \text{con } n \text{ par} \end{cases} \quad (3.17)$$

Cada una de estas sub-sucesiones por si sola es una sucesión y cada una de ellas converge ya que

$$\lim_{n\to\infty} -1 = -1 \text{ y } \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \quad (3.18)$$

Como las dos sub-sucesiones $\{-1\}$ y $\{1\}$constituyen la sucesión $\{(-1)^n\}$, para que esta última converja deberían de converger al mismo valor esto no sucede, luego decimos que la sucesión $\{(-1)^n\}$diverge.

Con respecto al límite tenemos que

Para n impar $\lim_{n\to\infty} -1 = -1$ (3.19)

Para n par $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$ (3.20)

Así el límite no existe, ya que se aproxima a dos valores diferentes.

La sucesión $\{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}\}$ diverge

Con esto, podemos determinar si la sucesión $\{a_n\}$ con $a_n = r^n$ con r constante converge o diverge para todo valor de a.

> **Teorema.** Sean $\{a_n\}$ una sucesión, si $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
>
> Este teorema es útil cuando tenemos sucesiones con el factor $(-1)^n$.

Ejemplo 3.1.8 Determinar si la sucesión $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$ converge o diverge (3.21)

Para determinar si la sucesión converge o diverge, calculamos el límite $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, como el limite tiene el signo –1 que varía no podemos determinar su valor, podemos dividirlo en sub-sucesiones, estas son $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ si n es impar y $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ si n es par, determinemos si convergen o divergen

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ y $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$ ambas sucesiones convergen a cero. (3.22)

Luego el límite $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 0$. (3.23)

La sucesión $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$ converge a 0.

Otra opción más directa es usar el teorema anterior, que nos dice que calculemos el límite del valor absoluto de término n-ésimo y si este vale cero, entonces el límite del término general de la sucesión también es cero, así

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\right|\left|\frac{1}{n}\right|$ por propiedades del valor absoluto (3.24)

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\right|\left|\frac{1}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$, porque $|(-1)^{n+1}|$=1 debido a que el valor absoluto ya sea de 1 o de –1 es 1, y como n es positivo $\frac{1}{n} > 0$ con lo cual $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$ (3.25)

Así $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\right|\left|\frac{1}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ (3.27)

Por el teorema $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 0$ (3.28)

La sucesión $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$ converge a 0.

Teorema. (De intercalación para sucesiones) Si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sucesiones infinitas tal que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo n y si

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

Al determinar si una sucesión converge o diverge podemos encontrar límites como los siguientes.

Ejemplo 3.1.8 Determinar si la sucesión $\left\{\frac{\cos^2 n}{3^n}\right\}$ converge o diverge

Para determinar si converge o diverge calculemos el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos^2 n}{3^n} = \frac{\cos^2\infty}{3^\infty} = \frac{?}{\infty}$, si evaluamos el límite no obtenemos una forma indeterminada, el denominador tiende a infinito, pero el numerador, la función trigonométrica no permite determinar un valor ya que no se aproxima a un mismo valor, luego este límite no existe.

No podemos emplear la regla de L´Hôpital porque no llegamos a una forma indeterminada de cociente. La forma para determinar el valor del límite es con el teorema de intercalación, este dice que hay que acotar la sucesión por abajo y por arriba.

El término general de la sucesión es $a_n = \frac{\cos^2 n}{3^n}$, está constituido por una función trigonométrica y una función exponencial general, la función trigonométrica si está acotada y la exponencial solo por abajo, así partamos de la función trigonométrica

Sabemos que la función $\cos n$ está acotada, por lo que $-1 \leq \cos n \leq 1$, luego $0 \leq \cos^2 n \leq 1$, porque el cuadrado de la función coseno son solo números positivos y como la función era menor o igual a 1 el cuadrado también es menor o igual a 1, así

$-1 \leq \cos n \leq 1$ (3.29)

$0 \leq \cos^2 n \leq 1$, dividiendo por la función exponencial $\frac{0}{3^n} \leq \frac{\cos^2 n}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$, no cambia el signo de la desigualdad porque la función 3^n siempre se positiva

$0 \leq \frac{cos^2 n}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$ (3.30)

Así ya acotamos el término general de la sucesión y $a_n = \{0\}$, $b_n = \left\{\frac{cos^2 n}{3^n}\right\}$ y $c_n = \left\{\frac{1}{3^n}\right\}$, calculemos los limites

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ y $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^\infty} = 0$ (3.31)

Luego $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n}$ y por el teorema $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, (3.32)

Así $\lim_{n\to\infty} \frac{cos^2 n}{3^n} = 0$ (3.33)

La sucesión $\left\{\frac{cos^2 n}{3^n}\right\}$ converge a cero.

Límites importantes

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{ln\, n}{n} = 0$

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$, donde *x* representa a un número real

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, donde *x* representa a un número real

Demostración

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{ln\, n}{n} = \frac{ln\, \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ (3.34)

Aplicando la regla de L'Hôpital $\lim_{n\to\infty} \frac{ln\, n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$ (3.35)

Así:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (n)^{\frac{1}{n}} = \infty^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0$, forma de potencia indeterminada (3.36)

Calculamos primero $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} ln\, n = \frac{1}{\infty} ln\, \infty = 0(\infty)$, forma de producto indeterminado

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} ln\, n = \lim_{n\to\infty} \frac{ln\, n}{n} = \frac{ln\, \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ (3.37)

Aplicando la regla de L'Hôpital

$\lim_{n\to\infty} \frac{ln\, n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0,$ (3.38)

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = e^0 = 1$$

3. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{\infty}\right)^\infty = (1)^\infty$, forma de potencia indeterminada (3.39)

$$\lim_{n\to\infty} n\, ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \infty\, ln\left(1+\frac{x}{\infty}\right) = \infty\, ln(1) = \infty(0) \text{ forma de producto indeterminado} \tag{3.40}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\, ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{ln\left(1+\frac{x}{\infty}\right)}{\frac{1}{\infty}} = \frac{ln(1)}{0} = \frac{0}{0}, \tag{3.41}$$

Aplicando la regla de L'Hospital

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{1+\frac{x}{n}}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} \lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+\frac{x}{n}} = \frac{x}{1+\frac{x}{\infty}} = x. \tag{3.42}$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = \frac{x^\infty}{\infty!} = \frac{\infty}{\infty}$, el límite tiene la forma de cociente indeterminado, pero no podemos aplicar la regla de L´Hôpital ya que no hay una manera de calcular derivada de $f(x) = x!$, así necesitamos buscar otra opción para determinar el límite.

Expresemos la función de manera desarrollada, así $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{x\cdot x\cdot x\ldots\cdot x}{n(n-1)(n-2)\ldots 1}$ tanto en el numerador como el denominador tienen n factores, por lo que es posible asociarlos en cocientes como sigue

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{x\cdot x\cdot x\ldots\cdot x}{n(n-1)(n-2)\ldots 1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)\left(\frac{x}{n-1}\right)\left(\frac{x}{n-2}\right)\cdots\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{1}\right) \tag{3.43}$$

Por propiedades de los límites, tenemos

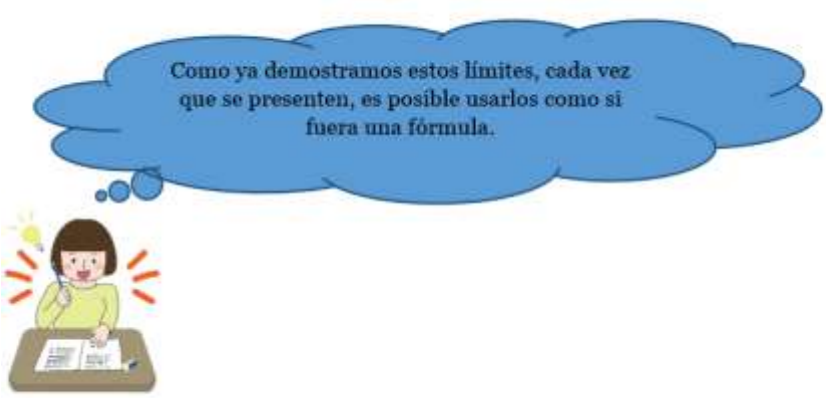
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)\left(\frac{x}{n-1}\right)\left(\frac{x}{n-2}\right)\cdots\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n-1}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n-2}\right)\cdots\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1}\right) \tag{3.44}$$

Evaluando

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n-1}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n-2}\right)\cdots\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1}\right) = \left(\frac{x}{\infty}\right)\left(\frac{x}{\infty-1}\right)\left(\frac{x}{\infty-2}\right)\cdots\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{1}\right)$$
$$= (0)(0)(0)\cdots\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{1}\right) = 0 \tag{3.45}$$

Es posible separar los límites porque todos existen, de acuerdo a las propiedades de los límites si uno de ellos no existe no es posible separarlos. Así:

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0}$$



Ejercicios y problemas resueltos de la Lección 3.1

Encuentre una expresión para el término general a_n de la sucesión, suponiendo que el patrón de los primeros términos continua.

1. $\left\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \cdots\right\}$ (3.46)

La forma que tienen los elementos de la sucesión son fracciones donde se va intercalando los signos negativo y positivo, esto queda determinado con la potencia de (-1), como el primer término es negativo el exponente es *n*; el numerador corresponde a los números naturales y el denominador está determinado por los números 4,9,16,25, … que corresponde a los cuadrados de los números naturales empezando por el 2, así:

$$\left\{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}, -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{16}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{25}}, \cdots\right\} = \left\{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} \frac{\boldsymbol{n}}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}}\right\}$$

2. $\left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \cdots\right\}$ (3.47)

La forma que tienen los elementos de la sucesión son fracciones donde se va intercalando los signos positivo y negativo, esto queda determinado con la potencia de (-1), como el primer término es positivo el exponente puede ser *n* – 1 o *n* + 1; el numerador corresponde a 1, 2, 4, 8 que son las potencias de 2, empezando con el exponente 0 y el denominador está determinado por los números 1,3,9,27,… que corresponde a las potencias de 3 empezando con el exponente 0, así:

$$\left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \cdots\right\} = \left\{(-1)^{n-1} \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\right\} = \left\{(-1)^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\} = \left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}, \tag{3.48}$$

Si hubiésemos elegido el exponente *n* + 1 para el (-1) no hubiésemos podido hacer la simplificación, ambos exponentes llevan al mismo resultado dependiendo de los demás elementos se puede definir cuál es el que usamos.

3. $\{0,1,0,1, \cdots\}$ Con esta sucesión inicialmente solo notamos que se intercalan los valores 0 y 1, pero qué función en general nos permite tener estos valores, una opción es pensar en las funciones seno y coseno, sabemos que para ciertos valores una función es 0 y la otra 1, así podemos proponer $sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$, examinemos que sucede con esta función

$$\text{Si } n = 1 \Rightarrow sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \tag{3.49}$$

$$\text{Si } n = 2 \Rightarrow sin(\pi) = 0, \tag{3.50}$$

$$\text{Si } n = 3 \Rightarrow sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, \tag{3.51}$$

$$\text{Si } n = 2 \Rightarrow sin(2\pi) \tag{3.52}$$

no corresponde a lo que necesitamos, ya que debemos empezar con cero

Proponemos $cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$, examinemos que sucede con esta función

$$\text{Si } n = 1 \Rightarrow cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \tag{3.53}$$

$$\text{Si } n = 2 \Rightarrow cos(\pi) = -1, \tag{3.54}$$

$$\text{Si } n = 3 \Rightarrow cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \tag{3.55}$$

Si $n = 2 \Rightarrow cos(2\pi) = 1$ (3.56)

Esta función se aproxima más a lo que necesitamos solo que no se deben de tener términos negativos, para poder ajustarlo usemos el valor absoluto, esto es $\left|cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right|$, así: $\left\{\left|cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right|\right\} = \{0,1,0,1,\cdots\}$

Con sucesiones tenemos otra opción como solución, ya que como se dijo se tiene el elemento $(-1)^n$. Así para determinar el término general de la sucesión, analicemos qué necesitamos, uno de los términos tiene que ser 1 y el otro 0. Situándonos en 0, para que se obtengan cero cuando resto a – a ó b – b, entonces se debe de tener el mismo valor que sume y reste, ¿cómo podemos lograr esto?

Con la variación de signo en un valor, así en la expresión $1 + (-1)^n$ tenemos el valor 1 y luego dependiente del valor de *n* se sumará o restará 1, veamos que sucede con esta función

Si $n = 1 \Rightarrow 1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0,$ (3.57)

Si $n = 2 \Rightarrow 1 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2,$ (3.58)

Si $n = 3 \Rightarrow 1 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0,$ (3.59)

Si $n = 2 \Rightarrow 1 + (-1)^4 = 1 + 1 = 2$ (3.60)

El único problema es que en vez de 1 se tiene 2, pero si dividimos entre 2 ya obtenemos los términos deseados, así:

$\boldsymbol{a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}}$ **y** $\boldsymbol{\{0,1,0,1,\cdots\} = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}}$

Para esta sucesión presentamos dos diferentes opciones una con operaciones que no puede aplicarse a funciones reales.

Actividad de la lección 3.1

I. Instrucciones: Proporcione los primeros cinco términos de la sucesión.

1. $a_n = \frac{n+1}{3n-1}$

2. $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

II. Instrucciones: Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión, suponiendo que se mantenga el patrón de los primeros términos.

1. $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots\}$

2. $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\}$

III. Instrucciones: Determina si las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes, si converge calcula el límite.

1. $a_n = 1 - (0.2)^n$

2.. $a_n = \frac{n^3}{n^3+1}$

$\left\{\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right\}$

$\left\{\frac{(e^n n + e^{-n})}{(e^{2n}-1)}\right\}$

Ejerccios de la lección 3.1

Tabla 3.1 Lista de ejercicios de la lección 3.1

Enlistar los primeros 4 términos y el n-ésimo término de la sucesión.	16. $\left\{2\left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right\}$	34. $\left\{\frac{\ln(n+1)}{\ln(3n)}\right\}$
1. $a_n = 2n!$	17. $a_n = 6\left(\frac{-5}{6}\right)^n$	35. $\left\{\frac{n^2}{\ln(n+1)}\right\}$
2. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	18. $\left\{1+(0.1)^n\right\}$	36. $\left\{\ln n - \ln\left(n^2+1\right)\right\}$
3. $a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$	19. $\left\{1+(-1)^n\right\}$	37. $\left\{\cos^{-1}\left(\frac{n^3}{2n^3+1}\right)\right\}$
Determinar los primeros 4 términos y el n-ésimo término de la sucesión definida recurrentemente.	20. $a_n = \frac{100n}{n^{3/2}+4}$	38. $a_n = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$
	21. $a_n = (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$	39. $\left\{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right\}$
4. $a_1 = 1 \quad a_{k+1} = a_k + 1$		40. $\left\{\sqrt{n^2+n}-n\right\}$
5. $a_1 = 1 \quad a_{k+1} = (k+1)a_k$	22. $\left\{\frac{n-2}{\sqrt{n}}\right\}$	41. $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right\}$
6. $a_1 = 2 \quad a_{x+1} = a_k + \frac{1}{2^k}$	23. $\left\{\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right\}$	42. $\left\{n-\sqrt{n^2-n}\right\}$
7. $a_1 = 1 \quad a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1}$	24. $\left\{\frac{(3n-2)(2n+1)}{2n^3-1}\right\}$	43 $\left\{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right\}$
8. $a_1 = 2 \quad a_{k+1} = 2a_k$		44. $\left\{\sqrt[n]{3^{2n+1}}\right\}$

9. $a_1 = 1 \; a_{k+1} = 1 + \frac{1}{2} a_k$ **Determinar una fórmula para el término general de la sucesión y determine si converge.** 10. $\left\{\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \ldots\right\}$ 11. $\left\{1+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{4}+\frac{1}{5}, \ldots\right\}$ 12. $\{3, -5, 7, -9, \ldots\}$ 13. $\left\{\frac{1}{1\cdot 4}, \frac{1}{2\cdot 8}, \frac{1}{3\cdot 16}, \frac{1}{4\cdot 32}, \ldots\right\}$ **Determinar si la sucesión converge o diverge; si converge calcule el límite.** 14. $\{-3\}$ 15. $\left\{15(-1)^{n+1}\right\}$	25. $an = \frac{(2n-1)(3n+1)}{n^3+1}$ 26. $\left\{\frac{5-3n^2}{2+n^2}\right\}$ 27. $\left\{\frac{4-n^3}{5+3n^3}\right\}$ 28. $\left\{\frac{n^2}{2n-1} - \frac{n^2}{2n+1}\right\}$ 29. $\left\{(-1)^{n+1} \frac{3n}{n^2+4n+5}\right\}$ 30. $\left\{\frac{n^2}{n(n+1)}\right\}$ 31. $a_n = \frac{n}{2^n}$ 32. $\left\{\ln\left(\frac{2n+1}{5n-1}\right)\right\}$ 33. $\left\{\ln\left(\frac{12n+2}{4n-9}\right)\right\}$	45. $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$ 46. $a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{1/n}$ 47. $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 48. $\left\{\left(\frac{n-2}{n}\right)^n\right\}$ 49. $\left\{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n\right\}$ 50. $\left\{\frac{e^n+1}{e^n}\right\}$ 51. $\left\{\frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}\right\}$ 52. $\left\{\frac{5-2^{-n}}{7+4^{-n}}\right\}$ 53. $\left\{4+\frac{3^n}{2^n}\right\}$

Fuente de Consulta: (Thomas, 2010; Ruiz, 2021; Stewart, 2015)

Tabla 3.2 Segunda parte de la lista de ejercicios de la lección 3.1

42. $\left\{\frac{3^n}{2^{2n}}\right\}$ 43. $\left\{\frac{e^n}{4^n}\right\}$ 44. $a_n = \left\{\frac{3^n}{n^3}\right\}$ 45. $\left\{(-1)^n n^3 2^{-n}\right\}$ 46. $\{\cos(n\pi)\}$ 47. 75. $a_n = \tanh n$ 48. $\left\{n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$ 49. $\left\{nsen\left(\frac{6}{n}\right)\right\}$	50. $\left\{\frac{\cos^2 n}{3^n}\right\}$ 51. $\left\{\frac{(3)(2^{-n})}{cscn}\right\}$ 52. $\left\{\frac{\cos n}{n}\right\}$ 53. $\left\{\frac{n^{-6}}{\csc n}\right\}$ 54. $\left\{\frac{n^{-10}}{\sec n}\right\}$ 55. $\left\{\frac{sen^2 n}{4^n}\right\}$ 56. $\left\{\frac{3^n}{n!}\right\}$	57. $\left\{\frac{8^{2n}}{n!}\right\}$ 58. $\left\{2^{-n} n!\right\}$ 59. $\left\{\frac{n!}{6^n}\right\}$ 60. $\left\{\frac{3^n 6^n}{2^{-n} n!}\right\}$ 61. $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$ 62. $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$ 63. $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$ 64. $a_n = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}$

Fuentes de Consulta: (Thomas, 2010; Ruiz, 2021; Stewart, 2015)

Lección 3.2 Series

Investiga y Analiza

1.- ¿Qué es una serie infinita?

2.- ¿Has trabajado con series anteriormente?

3.- Da un ejemplo de una serie infinita

Teoría y ejemplos

3.2.1. Introducción: Serie infinita

Consideremos la sucesión $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$, esto es (3.61)

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}$ (3.62)

Y consideremos las sumas parciales S_n de n términos de la sucesión

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$

$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$

$\vdots$

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}} =$ (3.63)

Para identificar el valor que tiene la n-ésima suma parcial, revisemos el comportamiento que siguen los resultados de las sumas efectuadas. Nos percatamos que en el denominador se encuentran los siguientes valores: 1, 2,4, 8, y 16 y podemos ver que coincide con la expresión $\frac{1}{2^{n-1}}$. Con relación al numerador tenemos los siguientes valores: 1, 3, 7, 15 y 31. Podemos establecer una relación entre el numerador y el denominador, de tal forma que la segunda suma parcial es $\frac{3}{2}$, la tercera es $\frac{7}{4}$, la cuarta es $\frac{15}{8}$ y la quinta es $\frac{31}{16}$, se aproxima al doble el valor del numerador con respecto al denominador. Para que sea exactamente la doble falta sumarle la unidad a cada numerador. Lo podemos expresar de la siguiente manera:

Doble	Denominador	menos 1
2	2^{n-1}	-1

De esta forma el numerador queda como: $2 \cdot 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$ (3.64)

Luego $S_n = \frac{2 \cdot 2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ (3.65)

Entonces las sumas parciales constituyen la siguiente sucesión: $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \cdots, 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ (3.66)

Observamos que el término e-nésimo de esta sucesión es $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ (3.67)

Para saber si esta sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge o diverge calculamos su límite

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{\infty}} = 2 \quad (3.68)$$

Encontramos que la sucesión de sumas parciales converge a 2, esto implica que la suma infinita vale 2, esto es:

$$\mathbf{1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8} + \frac{31}{16} + \cdots + \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \cdots = 2}$$

Notemos que la sucesión original

$\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots$ converge si el límite existe, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$, luego

$\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ **converge a 0**

Definición 3.2.1 Dada una sucesión de números $\{a_n\}$, una expresión de la forma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, se denomina serie infinita o simplemente serie.

La sucesión $\{S_n\}$ definida como

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \quad (3.69)$$

Es la sucesión de sumas parciales de la serie, donde S_n denota la n-ésima suma parcial. Si la sucesión de sumas parciales converge a un límite L, decimos que la serie converge y que su suma es L, y en este caso escribimos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \quad (3.70)$$

Si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ no tiene límite decimos que la serie diverge.

Notación: la serie $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ se representa por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o por $\sum a_n$.

Observación: En general todas las series inician en $n = 1$, cuando usamos la notación $\sum a_n$ esto suponemos cuando la representación de la serie es

Teoría y ejemplos

3.2.2 Series especiales

Serie Geométrica

Consideremos la serie $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ (3.71)

Donde a y r son números fijos y $a \neq 0$. ¿para qué valores de r la serie converge?

Para poder determinar si una serie converge lo que conocemos hasta ahorita es la definición, entonces hay que determinar la sucesión de sumas parciales de la serie y hallar los valores de r para los cuales converge la sucesión de sumas parciales y en consecuencia la serie.

Así consideremos las sumas parciales

$S_1 = a$

$S_2 = a + ar$

$S_3 = a + ar + ar^2$

$\vdots$

$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ (3.72)

Al ser una serie general no podemos determinar de manera precisa cual es cada una de las sumas parciales.

Apliquemos la estrategia siguiente para poder dar una expresión de la sucesión de sumas parciales.

Multipliquemos la n-ésima suma parcial S_n por r

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$ (3.73)

Ahora hagamos la diferencia

$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n)$ (3.74)

$S_n - rS_n = a - ar^n$ (3.75)

$S_n(1 - r) = a - ar^n$ (3.76)

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ (3.77)

De esta forma tenemos la expresión para la sucesión de sumas parciales $\{S_n\} = \left\{\frac{a(1-r^n)}{1-r}\right\}$

Determinemos para que valores de r converge la sucesión de sumas parciales

La sucesión converge si $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} 1 - r^n = \frac{a}{1-r}\left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} r^n\right) = \frac{a}{1-r}\left(1 - \lim_{n\to\infty} r^n\right)$ (3.78)

Debemos hallar los valores de r para los cuales el límite $\lim_{n\to\infty} r^n$ existe,

La respuesta a esto lo tenemos en uno de los teoremas de sucesiones:

Teorema. Sean $\{a_n\}$ una sucesión con $a_n = r^n$ con r constante

iii) $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$

iv) $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ si $|r| > 1$

Con lo cual si $|r| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, luego

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}\left(1 - \lim_{n\to\infty} r^n\right) = \frac{a}{1-r}(1-0) = \frac{a}{1-r} \tag{3.79}$$

Si $|r| > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}\left(1 - \lim_{n\to\infty} r^n\right) = \frac{a}{1-r}(1-\infty) = -\infty$, sucesión diverge.

Nos falta determinar si la serie converge o diverge si $|r| = 1$, esto es si $r = \pm 1$

Si $r = 1$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a(1)^{n-1} = a + a + a + a + a \cdots + a + \cdots$ (3.80)

la sucesión de sumas parciales es (Zill & Wright, 2011).

$S_1 = a$

$S_2 = a + a = 2a$

$S_3 = a + a + a = 3a$

$\vdots$

$$S_n = a + a + a + \cdots + a = na \tag{3.81}$$

Calculando el límite de la sucesión de sumas parciales

$$\lim_{n\to\infty} na = a(\infty) = \infty \tag{3.82}$$

Para $r = 1$ la serie diverge.

Si $r = -1$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a(-1)^{n-1} = a - a + a - a + a \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots$ (3.83)
la sucesión de sumas parciales es (Zill & Wright, 2011).

$S_1 = a$

$S_2 = a - a = 0$

$S_3 = a - a + a = a$

$S_4 = a - a + a - a = 0$

$\vdots$

La sucesión de sumas parciales es $\{a, 0, a, 0, \ldots\}$

Esta sucesión se puede dividir en dos sub-sucesiones donde una de ellas converge a a y la otra converge a 0, así la sucesión diverge.

Para $r = -1$ la serie diverge. Por lo tanto:

la serie converge si $|r| < 1$ y su suma es $\frac{a}{1-r}$, esto es $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

Hemos demostrado el teorema siguiente.

Teorema: La serie geométrica es

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$

Converge si $|r| < 1$ y su suma es $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ y diverge si $|r| \geq 1$

Observación: Otra opción para representar la serie es $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$. Una forma de identificar la serie geométrica es con su representación explícita o desarrollada, esto es mediante la suma de sus elementos

Ejemplo 3.2.1 Determina si la serie geométrica converge o diverge, si converge calcular su suma.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, la serie presenta la forma $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, así se tiene que $a = \frac{1}{9}$ y $r = \frac{1}{3}$, luego $|r| = \frac{1}{3} < 1$ y la serie converge, su suma es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$. (3.84)

Resumiendo,

$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$ **converge y su suma es** $\boldsymbol{\frac{1}{6}}$

Ejemplo 3.2.2 Determina si la serie geométrica converge o diverge, si converge calcular su suma.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n}$, la serie no tiene la forma $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, busquemos modificarla para que tenga la forma de la serie geométrica.

El exponente tiene que ser *n* – 1, aplicando las leyes de los exponentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)+1} 5}{4^{(n-1)+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(-1)^{(n-1)} 5}{4 \cdot 4^{(n-1)}} \tag{3.85}$$

Asociando términos comunes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-5}{4}\right) \frac{(-1)^{(n-1)}}{4^{(n-1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-5}{4}\right)\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1} \tag{3.86}$$

Ya tiene la forma principal de la serie geométrica con $a = -\frac{5}{4}$ y $r = -\frac{1}{4}$, $|r| = \frac{1}{4} < 1$ y converge, su suma es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = \frac{-\frac{5}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = -1$. (3.87)

Resumiendo,

$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n}}$ **converge y su suma es -1**

Ejemplo 3.2.3 Determina si la serie geométrica converge o diverge, si converge calcular su suma.

$\sum_{n=1}^{\infty} (2)^{2n} 3^{1-n}$, la serie no tiene la forma $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, busquemos modificarla para que tenga la forma de la serie geométrica.

El exponente tiene que ser *n* – 1, aplicando las leyes de los exponentes y reduciendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2)^{2n} 3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^2)^n}{3^{(n-1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4)^n}{3^{(n-1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(4)^{n-1}}{3^{(n-1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \tag{3.88}$$

Ya tiene la forma principal de la serie geométrica con $a = 4$ y $r = \frac{4}{3}$, $|r| = \frac{4}{3} > 1$.

Por lo tanto:

$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathbf{2})^{\mathbf{2n}}\mathbf{3}^{\mathbf{1-n}}$ **diverge**

Ejemplo 3.2.4 Determina si la serie geométrica converge o diverge, si converge calcular su suma.

$0.6 + 0.06 + 0.006 + \cdots + \frac{6}{10^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{10^n}$, la serie no tiene la forma $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, busquemos modificarla para que tenga la forma de la serie geométrica. (3.89)

El exponente tiene que ser *n* – 1, aplicando las leyes de los exponentes y reduciendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} 6\frac{1}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 6\left(\frac{1}{10}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 6\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \tag{3.90}$$

Ya tiene la forma principal de la serie geométrica con $a = \frac{6}{10}$ y $r = \frac{1}{10}$ y $|r| = \frac{1}{10} < 1$ y la serie converge, su suma es $0.6 + 0.06 + 0.006 + \cdots + \frac{6}{10^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{10^n} = \frac{\frac{6}{10}}{1-\left(\frac{1}{10}\right)} = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Resumiendo:

$\mathbf{0.6 + 0.06 + 0.006} + \cdots + \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10^n}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10^n}}$ **converge y su suma es** $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

Ejemplo 3.2.5 Escribe el número 2.3171717... como una razón de números enteros

Podemos descomponer el número como la suma de un número racional y una serie, esto es

$$2.3171717\ldots = 2.3 + 0.0171717\ldots = \frac{23}{10} + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$
$$2.3171717\ldots = \frac{23}{10} + \frac{17}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right) \tag{3.91}$$

La serie es

$$1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \cdots + \frac{1}{10^{2n}} + \cdots = 1 + \frac{1}{(10^2)^1} + \frac{1}{(10^2)^2} + \frac{1}{(10^2)^3} + \cdots + \frac{1}{(10^2)^{n-1}} + \frac{1}{(10^2)^n} + \cdots$$
$$1 + \frac{1}{(10^2)^1} + \frac{1}{(10^2)^2} + \frac{1}{(10^2)^3} + \cdots + \frac{1}{(10^2)^{n-1}} + \frac{1}{(10^2)^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10^2)^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10^2}\right)^{n-1} \tag{3.92}$$

Serie geométrica con $a = 1$ y $r = \frac{1}{10^2}$ y $|r| = \frac{1}{10^2} < 1$ la serie converge, su suma es $1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \cdots + \frac{1}{10^{2n}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10^2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{100}\right)} = \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{100}{99}$ (3.93)

Luego $2.3171717\ldots = \frac{23}{10} + \frac{17}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right) = \frac{23}{10} + \frac{17}{10^3}\left(\frac{100}{99}\right) = \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1145}{95}$. Resumiendo:

el número 2.3171717... expresado como una razón de enteros es $\frac{1145}{495}$

Serie Armónica

Definición 3.2.1 La serie armónica es la serie infinita divergente (Boyce & Diprima, 2005).

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Serie armónica solo se tiene una, la que se define.

Serie Telescópica
Se le llama de esta forma a la serie que tiene como característica que puede expresarse como una diferencia de tal modo que la sucesión de sumas parciales queda definida por el primer y el último término.

Ejemplo 3.2.6 Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ converge o diverge. Si converge calcula su suma (Boyce & Diprima, 2005).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots \tag{3.94}$$

$S_n=\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$, podríamos tratar de determinar una expresión para la sucesión de sumas parciales de la serie, pero nos interesa ilustrar un tipo de serie especifico, así que busquemos la forma de representarla como una resta, por el tipo de función podemos aplicar fracciones parciales.

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}=\frac{(A+B)n+A}{n(n+1)} \tag{3.95}$$

$$A+B=0 \quad \Rightarrow \quad A=-B$$

$A=1$ y $B=-1$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \tag{3.96}$$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ (3.97)

Determinando la sucesión de sumas parciales de la serie, con la diferencia obtenida.

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \tag{3.98}$$

Simplificando los términos comunes.

$$S_n=1-\frac{1}{n+1} \tag{3.99}$$

De este modo ya obtuvimos una expresión para la sucesión de sumas parciales, determinemos si converge.

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{\infty+1}=1-0=1 \tag{3.100}$$

La sucesión de sumas parciales de la serie converge. Por lo tanto,

La serie converge y su suma es $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1}$

Criterio del n-ésimo término para la divergencia

Teorema. (Límite del término n-ésimo de una serie convergente) (Swokowski, 1989).

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

Ejemplo 3.2.7 La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ converge, fue la que se estudió al inicio del tema y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$. Lo que ilustra el teorema.

> **Teorema.** (Criterio del n-ésimo término para la divergencia) (Swokowski, 1989).
> La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si:
>
> i) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$
> ii) $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe

Ejemplos 3.2.8 Aplica el, criterio n-ésimo de la divergencia para determinar si la serie dada diverge.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$, calculando el límite $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$, el límite no existe, por lo que de acuerdo al criterio,

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ diverge.

Ejemplo 3.2.9 Aplica el, criterio n-ésimo de la divergencia para determinar si la serie dada diverge,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n!+1}$, calculando el límite $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2n!+1} = \frac{\infty}{\infty}$ que es una forma indeterminada, no podemos usar la regla de L'Hôpital porque no hay una regla de derivación para el factorial, luego hay que usar un procedimiento algebraico, usemos el de dividir entre la potencia mayor siendo ésta $n!$, así $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{n!}}{\frac{2n!+1}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{n!}}{\frac{2n!}{n!}+\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n!}} = \frac{1}{2+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{2} \neq 0$. Como el límite es diferente de cero de acuerdo al criterio

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n!+1}$ diverge

Ejemplo 3.2.10 Aplica el, criterio n-ésimo de la divergencia para determinar si la serie dada diverge, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$, notamos que el límite $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ no se puede determinar evaluando, usando regla de L'Hôpital (al no ser cociente indeterminado no se puede usar) o con alguno de los teoremas de sucesiones (ya que si calculamos el límite del valor absoluto del término general no es cero). Pero podemos calcular el valor del límite tomando el valor de n par e impar,

Si *n* es par $(-1)^{n+1} = -1$ entonces $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1$

Si *n* es impar $(-1)^{n+1} = 1$ entonces $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

Como los límites son diferentes entonces $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ no existe. Por lo que de acuerdo al criterio

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$diverge.

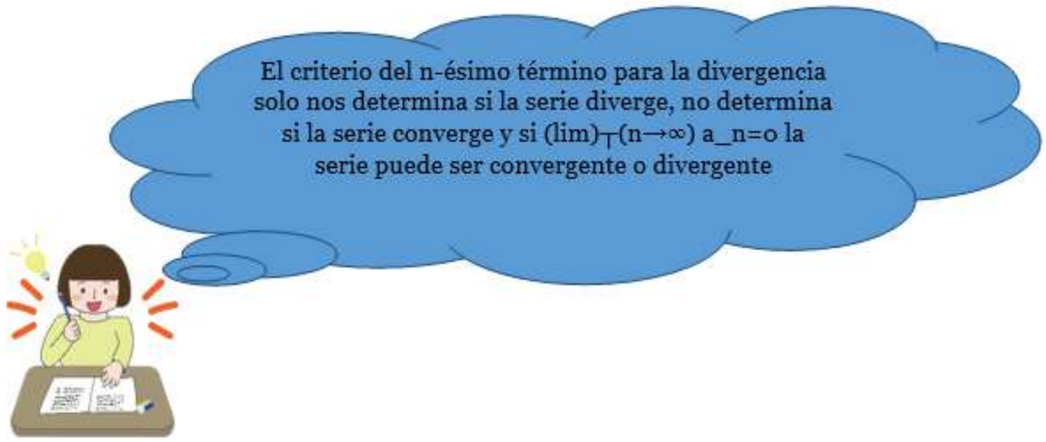
Ejemplo 3.2.11 Aplica el, criterio n-ésimo de la divergencia para determinar si la serie dada diverge, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, calculando el límite $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Como el límite es cero el criterio

No determina si la serie converge o diverge.

Ejemplo 3.2.12 Aplica el, criterio n-ésimo de la divergencia para determinar si la serie dada diverge,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, calculando el límite $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\infty(\infty+1)} = 0$. Como el límite es cero el criterio

No determina si la serie converge o diverge.



De los ejemplos que vimos 3.2.11 y 3.2.12, se obtiene que el límite en infinito es cero y no se determina si converge o diverge; sin embargo, son dos ejemplos que ya abordamos y en su momento determinamos lo siguiente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ se definió como la serie armónica y diverge.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ fue el ejemplo que se vio en la serie telescópica y se determinó que converge.

Estos son dos ejemplos de series donde el límite en infinito del término general es cero pero el comportamiento es diferente, uno converge y otro diverge.

Propiedades de series

Teorema. Si $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ son series convergentes con sumas A y B respectivamente, entonces
- i) Si c es un número real, $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ converge y su suma es cA (Swokowski, 1989).
- ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ converge y su suma es A + B
- iii) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ converge y su suma es A – B

Ejercicios resueltos de la Lección 3.2

1. Determina si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{n(n+1)}+\frac{2}{3^{n-1}}\right)$ converge o diverge

Por propiedades $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{n(n+1)}+\frac{2}{3^{n-1}}\right)=7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$ (3.101)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ corresponde al ejemplo de la serie telescópica y determinamos que converge y su suma es 1

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$ tiene a la variable n solo en el exponente lo que nos sugiere sea una serie geométrica, démosle la forma de ésta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. Enseguida revisamos que la serie geométrica tiene $a=1$ y $r=\frac{1}{3}$, y como $|r|<1$, por lo tanto converge, y su suma es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$

Así

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{n(n+1)}+\frac{2}{3^{n-1}}\right)=7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=7(1)+2\left(\frac{3}{2}\right)=10. \quad (3.102)$$

La serie converge y su suma es 10.

2. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$ es convergente o divergente

Usamos la prueba de la divergencia

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \text{no existe o} \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0, \text{entonces} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, es \text{ divergente} \lim_{k\to\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+2k}{k^2+6k+9} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k^2}{k^2}+\frac{2k}{k^2}}{\frac{k^2}{k^2}+\frac{6k}{k^2}+\frac{9}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{2}{k}}{1+\frac{6}{k}+\frac{9}{k^2}} = \frac{1+\frac{2}{\infty}}{1+\frac{6}{\infty}+\frac{9}{\infty}} = \frac{1+0}{1+0+0} = 1 \neq 0 \tag{3.103}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$ es divergente

3. Determine si la serie es convergente o divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{3^n}{2^n}\right)$

Por propiedad de los exponentes se puede descomponer en dos sumatorias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \tag{3.104}$$

Si analizamos la sumatoria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$, podemos ver que $|r| = \frac{3}{2} > 1$.

Por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ es divergente.

Al ser divergente una de las dos series en que se descompuso la serie inicial, entonces ésta también es divergente. Así

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$ es divergente

Actividad de la lección 3.2

Instrucciones: Determina si las series son convergentes o divergentes, si son convergentes calcula su suma.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k + 4^k}$

¿La serie es geométrica? ¿Es armónica? ¿Es Telescópica?   Si calculas el límite del término n-ésimo, ¿qué obtienes?   ¿La serie se puede descomponer en dos series?   ¿De qué tipo es cada una de ellas?   Concluya si la serie es convergente o divergente

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

¿La serie es geométrica? ¿Es armónica? ¿Es Telescópica? Si calculas el límite del término n-ésimo, ¿qué obtienes? ¿La serie se puede descomponer en dos series? ¿De qué tipo es cada una de ellas? Concluya si la serie es convergente o divergente

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1*3*5\ldots(2n-1)}{2*5*8\ldots(3n-1)}$

¿La serie es geométrica? ¿Es armónica? ¿Es Telescópica? Si calculas el límite del término n-ésimo, ¿qué obtienes? ¿La serie se puede descomponer en dos series? ¿De qué tipo es cada una de ellas? Concluya si la serie es convergente o divergente

4. Instrucciones: exprese como una razón de enteros el siguiente número decimal

$6.2\overline{54} = 6.2545454\ldots$

Lección 3.3 Series de términos positivos

Teoría y ejemplos

Criterios de convergencia

En el tema anterior vimos el concepto de serie y como al determinar la sucesión de sumas parciales de la serie se tiene la posibilidad de indicar si la serie converge o diverge; sin embargo, no siempre es posible el determinar una expresión algebraica para la n-ésima suma parcial de la serie. Si tenemos una serie especial como lo son la series geométrica, telescópica, armónica, podemos identificarlas y de acuerdo con su tipo determinar si convergen o divergen, pero también no todas las series son especiales, entonces, ¿Cómo poder determinar la convergencia de la serie?, y si ésta converge ¿Cuál es su suma?

Sin lugar a duda, como estudiantes de computación, alguno de ustedes podría sugerir el uso de la computadora para dar respuesta a estas preguntas, primero se observarían los resultados obtenidos en la s sumas parciales, si estos números parecen estabilizarse en un número fijo S, la serie converge, lo que respondería a la primera pregunta, después concluiríamos que S es la suma de la serie, dando así respuesta a la segunda pregunta. Sin embargo, esta respuesta es incorrecta para la primera pregunta y sólo parcialmente correcta para la segunda. Analicemos el por qué es incorrecta la respuesta obtenida con la computadora. Considere la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, las sumas parciales de esta serie son:

$s_1 = 1$

$s_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$s_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

$s_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{25}{12}$

$\vdots$

$s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n} = ?$

La sucesión de sumas parciales crece sin límite, pero crece tan lentamente que se necesitan cientos de millones de términos para que S_n sea igual a 20 y más de 10^{43} términos para que S_n llegue a 100. Debido a las limitaciones propias de una computadora, como el número de dígitos, ocurriría que en algún momento se obtendrían valores repetidos para S_n, lo que sugeriría incorrectamente que la serie converge (la serie analizada se llama serie armónica la cual se demostrará más adelante que es divergente).

Es claro que una computadora no puede sustituir los criterios matemáticos para la convergencia y divergencia de una serie (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2007). Con este tema ampliamos el tipo de series para poder determinar si son convergentes o divergentes; se tomará el caso particular de series de términos positivos, ya que las sumas parciales forman sucesiones no decrecientes, y las sucesiones no decrecientes que están acotadas superiormente convergen. Sin embargo, ya no podemos determinar la suma de la serie.

Teorema:

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos. Si existe un número M tal que $S_n < M$ para toda n, entonces la serie converge y tiene suma S$< M$. Si tal numero M no existe, entonces la serie diverge (Zill & Wright, 2011).

Si $\{s_n\}$ es la sucesión de sumas parciales de la serie de términos positivos $\sum a_n$ y recordemos que $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, …
entonces:

$s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_5 < s_6$ ...

La sucesión s_n es creciente y por lo tanto es monótona.

Si existe un número M tal que $s_n < M$ para toda n, entonces $\{s_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.

$\lim_{n\to\infty} S_n < S \leq M$

Para algún número S y por lo tanto la serie converge. Si tal número M no existe, entonces:

$lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ y por lo tanto la serie diverge.

Los criterios de convergencia que analizaremos en este tema son:

– El criterio de la integral
– El criterio básico de comparación
– El criterio de comparación por límite
– El criterio de la raíz
– El criterio de la razón

3.3.2 Criterio de la Integral

Teorema

Suponga que f es una función positiva, continua y decreciente en $1, \infty)$ y sea $a_n = f(n)$, entonces la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente, esto es (Zill & Wright, 2011):

i) Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$converge.

ii) Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$diverge.

Ejemplo 3.3.1 Usar el criterio de la integral para demostrar que la serie armónica, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$es divergente.

Solución.

Se tiene que $f(n) = \frac{1}{n} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$

Verifiquemos que $f(x)$ cumple con las condiciones del Criterio de la Integral Positiva $f(x) = \frac{1}{x}$ es positiva para $x \geq 1$.

Continuidad

$f(x) = \frac{1}{x}$ no es continua para $x = 0$, así $f(x)$ es continua para $x \geq 1$.

Para determinar que es decreciente calculemos la derivada de la función

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ y se tiene que $-\frac{1}{x^2} < 0$ para toda x, luego $f'(x) < 0$ y la función es decreciente en particular para $x \geq 1$.

Luego $f(x) = \frac{1}{x}$ es positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$, así calculemos la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} [ln\, x]|_1^b = \lim_{b\to\infty} [ln\, b - ln\, 1] = \lim_{b\to\infty} ln\, b = \infty \qquad (3.105)$$

Así la integral impropia diverge y por el Criterio de la Integral

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Ejemplo: 3.3.2 Determinar si la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ converge o diverge.

Solución

Sea $f(n) = ne^{-n^2} \Rightarrow f(x) = xe^{-x^2}$, veamos que cumple las condiciones

Positiva

$f(x) = xe^{-x^2}$ es positiva si $x > 0$ y si $e^{-x^2} > 0$, la función exponencial siempre es positiva, su imagen es $(0, \infty)$, por lo cual, f es positiva para todo $x > 0$. En particular $f(x) = xe^{-x^2}$ es positiva para $x \geq 1$.

Continua

$f(x) = xe^{-x^2}$ es continua para todo valor de x, ya que no existe un valor de x para el cual se indetermine, en particular $f(x) = xe^{-x^2}$ es positiva para $x \geq 1$.

Decreciente

Calculemos la derivada $f(x) = x\left(-2xe^{-x^2}\right) + e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2x^2 + 1)$

Tenemos $e^{-x^2} > 0$ para toda x y $-2x^2 + 1 < 0$ para $x \geq 1$,

luego $f(x) = xe^{-x^2}$ es decreciente si $x \geq 1$

Luego $f(x) = xe^{-x^2}$ es positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$, así calculemos la integral impropia
$\int_1^\infty xe^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b xe^{-x^2} dx$

Calculando la integral

$$\int xe^{-x^2} dx, \text{ sea } u = -x^2 \text{ y } du = -2xdx \Rightarrow \int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \qquad (3.106)$$

Así

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-b^2}+\frac{1}{2}e^{-(1)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-(\infty)^2}+\frac{1}{2}e^{-1} = -\frac{1}{2}e^{-\infty}+\frac{1}{2}e^{-1} = 0+\frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2}e^{-1}. \quad (3.107)$$

Así la integral impropia converge y por el criterio de la integral, concluimos que la serie infinita

$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ **es convergente.**

3.3.2. Serie Hiperarmónica

Teorema: La serie hiperarmónica o serie p, definida como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

Converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Demostración

Usemos el criterio de la integral para demostrarlo.

Sea p un número real positivo y $f(x)=\frac{1}{x^p}=x^{-p}$, veamos que cumple con las condiciones del criterio

Positiva, $f(x)=\frac{1}{x^p}=x^{-p}$ es positiva siempre que $x \geq 1$

Continua, $f(x)=\frac{1}{x^p}=x^{-p}$ no es continua si $x = 0$, luego es continua para $x \geq 1$

Decreciente, calculemos la derivada $f'(x) = -px^{-p-1} = -\frac{p}{x^{p+1}}$, si $x \geq 1$ entonces $f'(x) < 0$ y a la función $f(x)=\frac{1}{x^p}=x^{-p}$ es decreciente para $x \geq 1$

Por lo que $f(x)=\frac{1}{x^p}=x^{-p}$ es positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$, así calculemos la integral impropia.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\frac{b^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1^{-p+1}}{-p+1} = \lim_{b\to\infty}\frac{b^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}$$

$$= \frac{1}{-p+1}\left(\left(\lim_{b\to\infty} b^{-p+1}\right)-1\right) \quad (3.108)$$

Determinemos $\lim_{b\to\infty} b^{-p+1}$, $\lim_{b\to\infty} b^{-p+1} = \infty^{-p+1}$, dependiendo del exponente será el resultado, ya que no se obtiene el mismo resultado si el exponente es positivo o negativo, analicemos esto.

Si $-p+1 > 0 \Rightarrow -p > -1 \Rightarrow p < 1$, para este caso $\lim_{b\to\infty} b^{-p+1} = \infty^{-p+1} = (\infty)^{númeropositivo} = \infty$
y la integral impropia $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$ diverge.

Si $-p+1 < 0 \Rightarrow -p < -1 \Rightarrow p > 1$, para este caso $\lim_{b\to\infty} b^{-p+1} = \infty^{-p+1} = (\infty)^{número negativo}$, es conveniente que los exponentes sean siempre positivos, así se tiene

$$\lim_{b\to\infty} b^{-p+1} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{-(-p+1)}} = \frac{1}{(\infty)^{-(número negativo)}} = \frac{1}{(\infty)^{número positivo}} = \frac{1}{\infty} = 0\,. \tag{3.109}$$

Por tanto, $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}\left(\left(\lim_{b\to\infty} b^{1-p}\right) - 1\right) = \frac{1}{1-p}(0-1) = -\frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$, (3.110)

la integral impropia converge, así por el criterio de la integral se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$converge.

Nos falta analizar qué pasa si $-p+1=0 \;\Rightarrow\; \Rightarrow p=1$ y a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, es decir la serie armónica y ya demostramos que diverge. Por lo tanto la serie hiperarmónica o serie p

$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}}$**, converge si** $p>1$ **y diverge si** $p\le 1$**.**

Ejemplo 3.3.3 Determinar si la serie dada converge o diverge.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es una serie hiperarmónica con $p=2$, como $p>1$, se concluye que la serie es convergente. (3.111)

La conclusión es que **La serie** $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$ **converge.**

Ejemplo 3.3.4 Determinar si la serie dada converge o diverge.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{\sqrt{n}}$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{\sqrt{n}}$ se puede representar como $5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ la cual es una serie hiperarmónica con $p=\frac{1}{2}$ y como $p<1$, se concluye que

la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{\sqrt{n}}$ es divergente. (3.112)

Observación: La serie hiperarmónica o serie p, no es una serie especial, sin embargo, nos da una forma de determinar de manera directa la convergencia o divergencia de una serie.

3.3.3. Criterio básico de comparación (CBC)

Criterio básico de comparación (Criterio de comparación directa) (Thomas, 2010).

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos.

a) Si $\sum b_n$ converge y $a_n \leq b_n$ para todo entero positivo n, entonces $\sum a_n$ es convergente.
b) Si $\sum b_n$ diverge y $a_n \geq b_n$ para todo entero positivo n, entonces $\sum a_n$ es divergente.

Nota: Para aplicar este criterio, es necesario tener presente una lista de series cuya convergencia o divergencia se pueda determinar fácilmente como por ejemplo las series geométricas, las cuales convergen si $|r| < 1$ y divergen en otro caso, las series hiperarmónicas, las cuales convergen si $p > 1$ y divergen en otro caso, y las series cuyo límite de su n-ésimo término sea diferente de cero ya que estas divergen, esto último aplicando el criterio del n-ésimo termino para la divergencia.

b_n se determina a partir de a_n considerando el término predominante en el numerador y en el denominador, en el caso de polinomios, el término predominante es el que tiene la variable con mayor exponente.

Ejemplo 3.3.5 Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+5^n}$converge o diverge.

Solución

Partiendo de la expresión algebraica de la serie determinemos la expresión de la serie con la cual se compara.

Así $a_n = \frac{1}{3+5^n}$ y tenemos que determinar la expresión de b_n (3.113)

Sabemos que

$3 + 5^n > 5^n$, la suma de dos sumandos es mayor que cada uno de los sumandos (3.114)

$\frac{1}{3+5^n} < \frac{1}{5^n}$ tomando el recíproco (3.115)

Así $b_n = \frac{1}{5^n}$ y $a_n < b_n$ (3.116)

Determinemos si la serie $\sum b_n$ converge y diverge, para poder aplicar el criterio básico de comparación

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$, es una serie geométrica con $r = \frac{1}{5}$, como $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, la serie converge. (3.117)

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ converge y $a_n = \frac{1}{3+5^n} < \frac{1}{5^n} = b_n$. Por el criterio básico de comparación concluimos,

que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+5^n}$ converge. (3.118)

Ejemplo 3.3.6 Determinar si la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$converge o diverge.

Solución

Sea $a_n = \frac{3}{\sqrt{n}-1}$ y tenemos (3.119)

$\sqrt{n}-1<\sqrt{n}$ (3.120)

$\frac{1}{\sqrt{n}-1}>\frac{1}{\sqrt{n}}$ Tomando el reciproco (3.121)

$\frac{3}{\sqrt{n}-1}>\frac{3}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$ Multiplicando por 3 y comparando (3.122)

Así $a_n=\frac{3}{\sqrt{n}-1}$ y $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. (3.123)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, esta es una serie hiperarmónica con $p=\frac{1}{2}<1$ y la serie diverge. (3.124)

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge y $a_n=\frac{3}{\sqrt{n}-1}>\frac{1}{\sqrt{n}}=b_n$. Por el criterio básico de comparación concluimos que,
la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n}-1}$ diverge. (3.125)

Ejemplo 3.3.7 Determinar si la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$converge o diverge.

Solución

Sea $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ (3.126)

$\sqrt{n}+1>\sqrt{n}$ (3.127)

$\frac{1}{\sqrt{n}+1}<\frac{1}{\sqrt{n}}$ Tomando el reciproco (3.128)

Así $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ y $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. (3.129)

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} b_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, es una serie hiperarmónica con $p=\frac{1}{2}<1$ y la serie diverge. (3.130)

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} b_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge y $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+1}<\frac{1}{\sqrt{n}}=b_n$. (3.131)

El criterio básico de comparación no nos permite concluir si la serie converge o diverge. Ya que no se cumplen ambas condiciones, el criterio dice que $\sum b_n$ diverge y $a_n\geq b_n$.

Usemos otro criterio, por ejemplo, el criterio de la integral que es el que conocemos hasta ahorita, primero verifiquemos si se cumplen las condiciones requeridas para poder aplicar este criterio.

Sea $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$. f es una función positiva y continua para toda $x\geq 0$, en consecuencia, también para toda $x\geq 2$.

La derivada de la función es$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ la cual es negativa para todo $x\geq 0$, por lo cual es decreciente para toda $x\geq 2$.

Como se cumplen las condiciones requeridas es posible aplicar el criterio de la integral.

Ahora calculemos $\int_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+1}$, para ello apliquemos la definición de integral impropia

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{\sqrt{x}+1} \quad (3.132)$$

Calculemos la integral indefinida $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+1}$y el resultado lo sustituiremos en la ecuación (3.132).

Tomando $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}du = 2udu$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \int \frac{2udu}{u+1} \tag{3.133}$$

Tomando $v = u + 1 \Rightarrow dv = du$ y $u = v - 1$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \int \frac{2udu}{u+1} = 2\int \frac{v-1}{v}dv = 2\int dv - 2\int \frac{dv}{v} = 2v - 2\,ln\,v = 2(u+1) - 2\,ln(u+1) = 2\left(\sqrt{x} + 1\right) - 2\,ln\left(\sqrt{x}+1\right) \tag{3.134}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (3.133), se tiene

$$\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \lim_{b\to\infty} \left(2\left(\sqrt{x}+1\right) - 2\,ln\left(\sqrt{x}+1\right)\Big|_2^b\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[2\left(\sqrt{b}+1\right) - 2\,ln\left(\sqrt{b}+1\right)\right] - \left[2(2) - 2\,ln\,2\right]\right) = \left(\lim_{b\to\infty} 2\left(\sqrt{b}+1\right) - 2\,ln\left(\sqrt{b}+1\right)\right) - 4 + 2\,ln\,2 \tag{3.135}$$

Calculemos el límite

$$\lim_{b\to\infty} 2\left(\sqrt{b}+1\right) - 2\,ln\left(\sqrt{b}+1\right) = \infty - \infty, \text{ forma indeterminada} \tag{3.136}$$

Resolviéndolo

$$\lim_{b\to\infty} 2\left(\sqrt{b}+1\right) - 2\,ln\left(\sqrt{b}+1\right) = 2\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{b}+1\right) - ln\left(\sqrt{b}+1\right), \tag{3.137}$$

Usando la función exponencial y el logaritmo natural, expresemos el primer sumando del límite como un logaritmo natural, esto es usamos el hecho de que $a = e^{ln\,a} = 2\lim_{b\to\infty} ln\,e^{\left(\sqrt{b}+1\right)} - ln\left(\sqrt{b}+1\right)$

Por propiedades de logaritmo $= 2\lim_{b\to\infty} ln\left(\frac{e^{\left(\sqrt{b}+1\right)}}{\sqrt{b}+1}\right) = 2\,ln\,\lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{\left(\sqrt{b}+1\right)}}{\sqrt{b}+1}\right) = 2\,ln\left(\frac{e^{\infty}}{\infty}\right)$ (3.138)

Calculemos el límite

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{\left(\sqrt{b}+1\right)}}{\sqrt{b}+1}\right) = \frac{\infty}{\infty} \tag{3.139}$$

Aplicado la regla de L'Hôpital

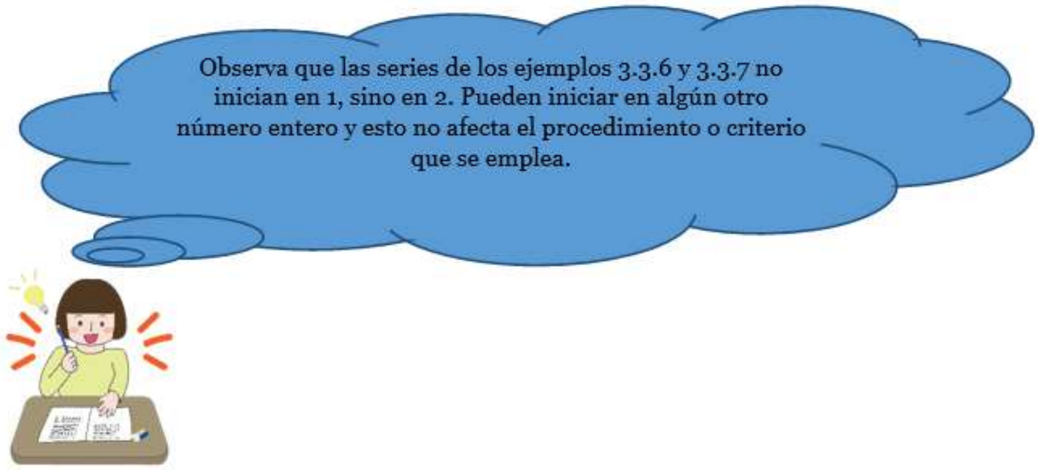
$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{\left(\sqrt{b}+1\right)}}{\sqrt{b}+1}\right) = \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{b}}e^{\left(\sqrt{b}+1\right)}}{\frac{1}{2\sqrt{b}}} = \lim_{b\to\infty} e^{\left(\sqrt{b}+1\right)} = e^{\infty} = \infty \tag{3.140}$$

Luego

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = 2\,ln\,\lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{\left(\sqrt{b}+1\right)}}{\sqrt{b}+1}\right) = 2\,ln(\infty) = \infty. \tag{3.141}$$

Por lo tanto,
la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ diverge.

El procedimiento para determinar la convergencia o divergencia de la serie dada en el ejemplo resultó un poco largo. Existen otros métodos que podrían resultar menos laboriosos, uno de los cuales veremos a continuación.



Ejemplo 3.3.8 Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$converge o diverge.

Solución.

Sea $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ (3.142)

$n^2 + 1 > n^2$ (3.143)

$\sqrt[3]{n^2 + 1} > \sqrt[3]{n^2}$ (3.144)

$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ (3.145)

Así $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ y $b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. (3.146)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$, es una serie hiperarmónica con $p = \frac{2}{3} < 1$ y la serie diverge.

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ diverge y $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = b_n$ (3.147)

El criterio básico de comparación no nos permite concluir si la serie converge o diverge. Ya que no se cumplen ambas condiciones, el criterio dice que $\sum b_n$ diverge y $a_n \geq b_n$.

Hay que emplear otro criterio para determinar si la serie converge o diverge, hasta el momento solo conocemos el criterio de la integral, pero veamos el Criterio de Comparación por Límite y con este determinemos su comportamiento.

Criterio de Comparación por Límite (CCL) (Thomas, 2010)**.**

Supongamos que $a_n > 0$ y $b_n > 0 \forall n \geq N$ entero.

1) Si $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 \Rightarrow \sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen o divergen ambas.
2) Si $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge.
3) Si $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ y si $\sum b_n$ diverge entonces $\sum a_n$ diverge.

Retomemos el ejemplo 3.3.8.

Al emplear el Criterio Básico de Comparación para determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$converge o diverge, no pudimos encontrar la convergencia ni la divergencia, por ello ahora recurrimos a otro criterio.

Encontramos que $b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$, y ahora empleemos el Criterio de Comparación por Límite con $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ y $b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ (3.148)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2+1}} = \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1}} == \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}}} = \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1+\frac{1}{(\infty)^2}}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{1+0}} = 1 > 0 \qquad (3.149)$$

Como el límite es mayor que cero el criterio nos dice que las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$convergen o divergen.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$, es una serie hiperarmónica con $p = \frac{2}{3} < 1$ y diverge. (3.150)

Luego,
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ diverge.

Ejemplo 3.3.9 Determinar si la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$converge o diverge.

Solución

Esta serie fue la del ejemplo 3.3.7, a la cual no se le pudo aplicar el Criterio Básico de Comparación y resolvimos con el Criterio de la Integral en un proceso largo, el aplicar el Criterio de Comparación por Límite nos da otra opción para obtener si converge o diverge más directo.

Como ya se usó esta serie tenemos que $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ y $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

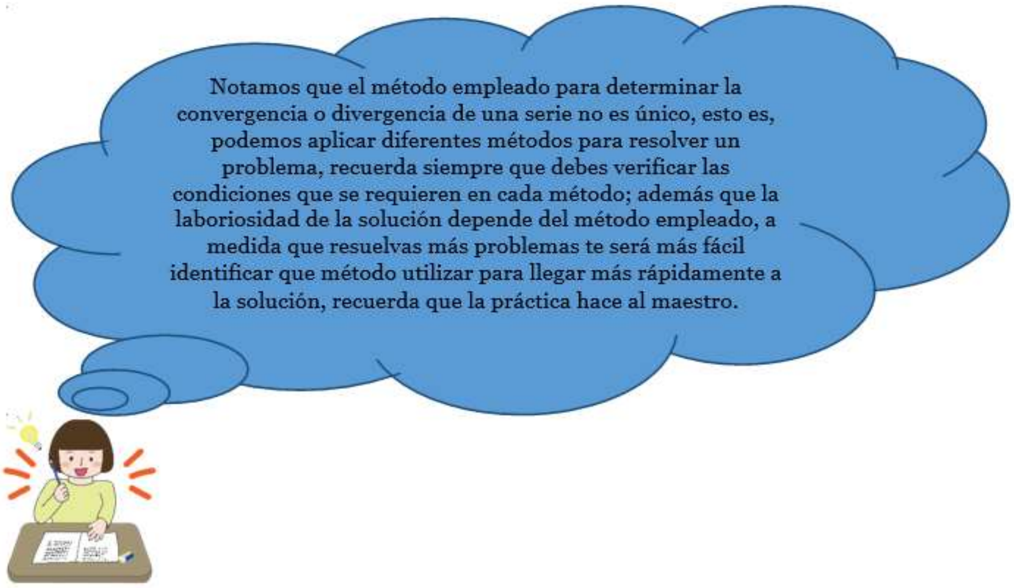
Calculemos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{\infty}}} = 1 > 0 \qquad (3.151)$$

Como el límite es mayor que cero el criterio nos dice que las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$convergen o divergen.

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, es una serie hiperarmónica con $p = \frac{1}{2} < 1$ y diverge. (3.152)

Luego,
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ diverge.



Estos dos últimos ejemplos (3.3.7 y 3.3.8) ya habíamos intentado resolverlos por el Criterio Básico de Comparación y esto hizo posible que tuviéramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pero no siempre tenemos que iniciar aplicando este criterio. Una forma de obtener la expresión para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es, como ya se mencionó en una cápsula anterior), usando los términos mayores del numerador y de denominador de la función dada en el término general de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ejemplo 3.3.9 Determinar si la serie$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$ converge o diverge.

Solución. Para determinar b_n consideremos los términos mayores del numerador y del denominador de

$$a_n = \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)} \tag{3.153}$$

Así $b_n = \frac{3n^2}{2^n n^2} = \frac{3}{2^n}$. Aplicando el criterio de comparación por límite se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}}{\frac{3}{2^n}} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2+5n)2^n}{3\cdot 2^n(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2+5n)}{3(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+5n}{n^2}}{3\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+5n}{n^2}}{3\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{5}{n}}{3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3+\frac{5}{\infty}}{3\left(1+\frac{1}{(\infty)^2}\right)} = \frac{3}{3(1)}$$

$$= 1 > 0 \tag{3.154}$$

Como el límite es mayor que cero el criterio nos dice que las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ convergen o divergen.

Determinemos si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ converge o diverge.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es geométrica con $r = \frac{1}{2}$ y $|r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$ por lo que,

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$ converge. (3.155)

Criterio de la Razón o del Cociente (Zill & Wright, 2011)**.**

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

Entonces:

i) Si $L < 1$, la serie converge.
ii) Si $L > 1$, la serie diverge.
iii) Si $L = 1$, el criterio no determina convergencia o divergencia, hay que usar otro criterio.

Ejemplo 3.3.10 Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$

Solución. Usando el criterio de la razón, tenemos

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!n!} \text{ y } a_{n+1} = \frac{\big(2(n+1)\big)!}{(n+1)!(n+1)!} \tag{3.156}$$

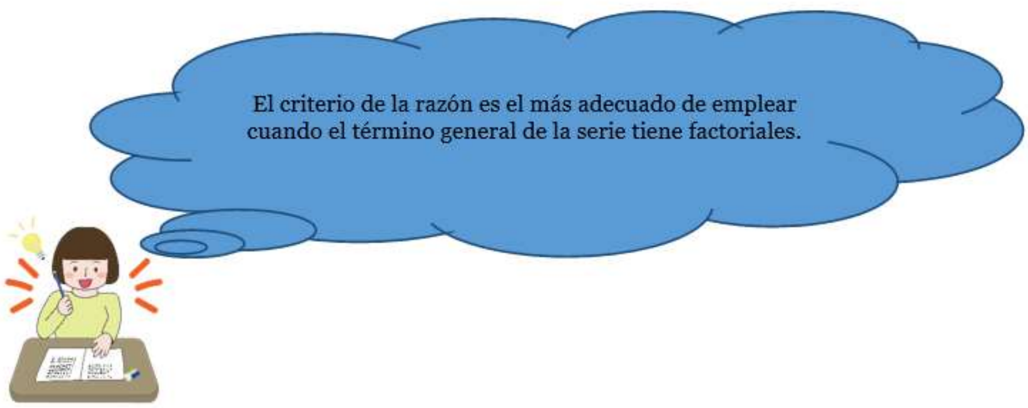
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\big(2(n+1)\big)!n!n!}{(2n)!(n+1)!(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!n!n!}{(2n)!(n+1)!(n+1)!} \tag{3.157}$$

Usando la definición de factorial

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!n!n!}{(2n)!(n+1)n!(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2n+2}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\left(2+\frac{2}{\infty}\right)\left(2+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)} = \frac{(2)(2)}{(1)(1)} = 4 > 1. \text{ Por el criterio de la razón,} \tag{3.158}$$

La serie $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}}$ **diverge.** (3.159)



Criterio de la Raíz

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que (Zill & Wright, 2011). $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

Entonces:

i) Si $L < 1$, la serie converge.
ii) Si $L > 1$, la serie diverge.
iii) Si $L = 1$, el criterio no determina convergencia o divergencia, hay que usar otro criterio.

Ejemplo 3.3.11 Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$ es convergente o divergente

Solución. Usando el criterio de la raíz, tenemos

$$a_n = \frac{2^{3n+1}}{n^n} \tag{3.160}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{3n+1}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^{3n+1}}}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2^{3n+1}\right)^{\frac{1}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3+\frac{1}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^3 \cdot 2^{\frac{1}{n}}}{n}$$

$$= 8 \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n} = 8\left(\frac{2^{\frac{1}{\infty}}}{\infty}\right) = 8\left(\frac{2^0}{\infty}\right) = 8(0) = 0 < 1. \tag{3.161}$$

Por lo que,

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$ converge.

Veamos los siguientes ejercicios donde se quiere determinar la convergencia o divergencia de una serie para lo cual no se indica el método, por lo que se tiene que probar con los ya trabajados.

Ejercicios resueltos de la Lección 3.3

1. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge o diverge.

Solución.

Primero usemos el **Criterio de la Raíz**

$$a_n = \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\ln n}}{\sqrt[n]{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\ln n}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Calculemos cada uno de los límites, para que sea válido el procedimiento ambos limites deben de existir.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}} = (\ln \infty)^{\frac{1}{\infty}} = (\infty)^0$, esta es una forma indeterminada de potencia

Resolviéndola $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(\ln n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n} = \frac{\ln(\ln \infty)}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$

Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n}\right)}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = e^0 = 1$

Calculando el otro limite $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^{\frac{3}{2}} = 1^{\frac{3}{2}} = 1$. Debido al límite importante $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

Luego

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1} = 1$, luego no se puede determinar si la serie converge o diverge con este criterio hay que usar otro.

Observación: Cuando para determinar la convergencia de una serie aplicamos el criterio de la raíz o de la razón y obtenemos que el valor del límite es uno entonces al aplicar el otro criterio razón o raíz respectivamente también se obtendrá uno. Aun así, aquí emplearemos a continuación el criterio de la razón debido a que no sabemos con qué criterio obtendremos la convergencia o divergencia de la serie.

Usemos ahora el **Criterio de la Razón**

$a_n = \frac{ln\,n}{n^{\frac{3}{2}}}$ y $a_{n+1} = \frac{ln(n+1)}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$ (3.162)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{ln(n+1)}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{ln\,n}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}\,ln(n+1)}{(n+1)^{\frac{3}{2}}\,ln\,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \lim_{n\to\infty} \frac{ln(n+1)}{ln\,n} \quad (3.163)$$

Calculemos cada uno de los límites, para que el procedimiento sea válido ambos deben de existir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{3}{2}} = 1^{\frac{3}{2}} = 1 \quad (3.164)$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n+1)}{ln\,n} = \frac{\infty}{\infty}$, aplicando la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n+1)}{ln\,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = 1 \quad (3.165)$$

Luego $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{ln(n+1)}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{ln\,n}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \lim_{n\to\infty} \frac{ln(n+1)}{ln\,n} = (1)(1) = 1$ (3.166)

Luego no se puede determinar si la serie converge o diverge con este criterio hay que usar otro.

Usemos ahora el **Criterio Básico de Comparación (CBC)**

Tenemos $a_n = \frac{ln\,n}{n^{\frac{3}{2}}}$ (3.167)

Determinemos b_n

Podemos comparar el logaritmo natural con cualquier potencia de n, en particular comparémosla con n, así

$ln\,n < n$

Dividiendo por $n^{\frac{3}{2}}$

$\frac{ln\,n}{n^{\frac{3}{2}}} < \frac{n}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, (3.168)

$\frac{ln\,n}{n^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ (3.169)

Así $a_n = \frac{ln\,n}{n^{\frac{3}{2}}}$ y $b_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. (3.170)

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, es una serie hiperarmónica con $p = \frac{1}{2} < 1$ y la serie diverge. (3.180)

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge y $a_n = \frac{ln\,n}{n^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = b_n$. (3.181)

El criterio básico de comparación no nos permite concluir si la serie converge o diverge. Ya que no se cumplen ambas condiciones, el criterio dice que $\sum b_n$ diverge y $a_n \geq b_n$.

Usemos ahora el **Criterio de Comparación por Límite (CCL)**

Tenemos que $a_n = \frac{ln\, n}{n^{\frac{3}{2}}}$ y $b_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. (3.182)

Calculando el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{ln\, n}{n^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}} ln\, n}{n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln\, n}{n} = \frac{\infty}{\infty} \tag{3.183}$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital

$\lim_{n\to\infty} \frac{ln\, n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$, así $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y la serie $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge, por lo cual

El criterio no determina si la serie converge o diverge hay que usar otro criterio.

Finalmente usemos el **Criterio de la Integral**, el único que faltaba.

Tenemos $a_n = \frac{ln\, n}{n^{\frac{3}{2}}}$, luego $f(x) = \frac{ln\, x}{x^{\frac{3}{2}}}$ (3.184)

Determinemos si cumple las condiciones para aplicar el criterio:

Positiva, sabemos $ln\, x \geq 0$ si $x \geq 1$ y $x^{\frac{3}{2}} > 0$ si $x > 0$, luego la función es positiva si $x \geq 1$ (3.185)
Continua, la función $f(x) = \frac{ln\, x}{x^{\frac{3}{2}}}$, no es continua en $x = 0$ y su dominio es $(0.\infty)$, luego la función es continua si $x \geq 1$

Decreciente, calculemos la derivada

$$f'(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) - ln\, x\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(x\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{3}{2} ln\, x\right)}{x^3} = \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{3}{2} ln\, x\right)}{x^3} \tag{3.186}$$

Veamos bajo qué condiciones la derivada es negativa,

El denominador x^3es positivo si $x \geq 1$, $x^{\frac{1}{2}}$ es positiva si $x \geq 1$

Y el factor $1 - \frac{3}{2} ln\, x$ es negativo si
$1 - \frac{3}{2} ln\, x < 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} ln\, x < -1 \Rightarrow \frac{3}{2} ln\, x > 1 \Rightarrow ln\, x > \frac{2}{3} \approx 0.66666$ por lo que podemos decir que f es decreciente si $x \geq 2$. (3.187)

Luego $f(x) = \frac{ln\, x}{x^{\frac{3}{2}}}$ es positiva, continua y decreciente si $x \geq 2$ y para este intervalo podemos aplicar el criterio de la integral.

El criterio de la integral nos permite determinar si converge o diverge la serie en el intervalo $(2, \infty)$, así la podemos dividir en un número real y el comportamiento de esta será el mismo para la serie inicial.

La serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln\, n}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{ln\, 1}{1^{\frac{3}{2}}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{ln\, n}{n^{\frac{3}{2}}} = 0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{ln\, n}{n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{ln\, n}{n^{\frac{3}{2}}}$ (3.188)

En este caso la serie en el intervalo $(1, \infty)$ es la misma que en el intervalo $(2, \infty)$

Calculemos la integral impropia

$$\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}dx \tag{3.189}$$

Calculemos la integral

$\int \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}d\,x$, resolvámosla por partes, sea $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$ y

$v = \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx \Rightarrow v = \int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}$

$$\int \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}d\,x = -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\ln x - \int -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{x}dx\right) = -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\ln x + 2\int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx = -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\ln x + 2\left(-\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{3.190}$$

Así $\int \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}d\,x = -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\ln x - \frac{4}{x^{\frac{1}{2}}}$ (3.191)

$$\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\ln x - \frac{4}{x^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_2^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{2\ln b}{b^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{b^{\frac{1}{2}}} + \frac{2\ln 2}{(2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{(2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \left(\lim_{b\to\infty} -\frac{2\ln b}{b^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{b^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{2\ln 2}{(2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{(2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.192}$$

Calculando el límite

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{2\ln b}{b^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{b^{\frac{1}{2}}} = -2\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b^{\frac{1}{2}}} - 4\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}} \tag{3.193}$$

$\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminada aplicamos la Regla de L'Hospital

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b^{\frac{1}{2}}} = \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{2}\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{b\to\infty}\frac{2b^{\frac{1}{2}}}{b} = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\infty} = 0 \tag{3.194}$$

$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\infty} = 0$, luego (3.195)

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{2\ln b}{b^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{b^{\frac{1}{2}}} = -2(0) - 4(0) = 0 \tag{3.196}$$

$\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}dx = (0) + \frac{2\ln 2}{(2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{(2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\ln 2}{(2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{(2)^{\frac{1}{2}}}$, como el resultado es un número real, entonces la integral converge. (3.197)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge

5. Determinar si la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k k!}{(k+2)!}$ Converge o diverge.

Podemos usar 2 métodos para resolver esta sumatoria, empecemos con la prueba de la divergencia

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k k!}{(k+2)!} = \lim_{k\to\infty}\frac{2^k k!}{(k+2)!} = \frac{\infty}{\infty} \tag{3.198}$$

De esta forma no llegamos a nada por ello aplicamos algebra para cancelar términos y evaluar nuevamente

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k k!}{(k+2)!} = \frac{2^k k!}{(k+2)(k+1)(k!)} = \frac{2^k}{(k+2)(k+1)} = \frac{2^k}{k^2+3k+2} \tag{3.199}$$

Una vez hecho esto procedemos a evaluar el limite $\lim_{k\to\infty}\frac{2^k k!}{(k+2)!} = \frac{2^k}{k^2+3k+2} = \infty \neq 0$ por lo tanto diverge

Pero ¿cómo podemos estar seguros de esto?

Para ello hagamos un análisis de los términos más complejos tanto del numero como denominador siendo estos 2^k y k^2 respectivamente $\lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{k^2}$ vemos que esta expresión es de igual manera indeterminada, pero hagamos el análisis

Sabiendo que $k \to \infty$ o un numero muy grande, tenemos que:

$\lim_{k\to\infty} \frac{2^\infty}{\infty^2} = \frac{2^{100000}}{100000^2}$ tenemos que siempre 2^k va a ser mayor que k^2 un ejemplo con números

pequeños es: $\frac{2^{10}}{10^2} = \frac{1024}{100}$. Por lo tanto $\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\infty} \frac{\boldsymbol{2^k k!}}{\boldsymbol{(k+2)!}}$ **es divergente** (3.200)

Si esta prueba no les convence del todo aplicamos la prueba de la razón

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(k+2)(k+1)}$ $Usaremos\ esta\ sumatoria\ para\ usar\ el\ metodo\ de\ la\ razón$

Aplicando el método de la razón

$$\left|\frac{\frac{2^{k+1}}{(k+2+1)(k+1+1)}}{\frac{2^k}{(k+2)(k+1)}}\right| = \frac{(2^{k+1})(k+2)(k+1)}{(2^k)(k+2+1)(k+1+1)} = \frac{(2^k)(2^1)(k+2)(k+1)}{(2^k)(k+3)(k+2)} = \frac{(2)\,(k+1)}{(k+3)} = \frac{2k+2}{k+3} \qquad (3.201)$$

Aplicando el limite cuando $k \to \infty$

$\lim_{k\to\infty} \frac{2k+2}{k+3} = \frac{\infty}{\infty}$ como es indeterminado dividimos entre el termino de mayor grado

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2k+2}{k+3} = \frac{\frac{2k}{k}+\frac{2}{k}}{\frac{k}{k}+\frac{3}{k}} = \frac{2+\frac{2}{k}}{1+\frac{3}{k}} = \frac{2+0}{1+0} = 2 \qquad (3.202)$$

Como $2 > 1$ por el criterio de la razón tenemos que

$\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\infty} \frac{\boldsymbol{2^k k!}}{\boldsymbol{(k+2)!}}$ **es divergente** (3.203)

Actividad de la Lección 3.3

Instrucciones: Determina si las siguientes series son convergentes o divergentes y justifica el o los métodos empleados

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^{1.2}}$

¿Qué criterio de los siguientes puedes emplear?

a) Integral
b) Básico de Comparación
c) Comparación por límite
d) Razón o Cociente
e) Raíz

Una vez que decidas cuál, aplícalo.

Si el criterio que pensabas no te lleva a un resultado, ¿cuál aplicarás a continuación?

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$

¿Qué criterio de los siguientes puedes emplear?

a) Integral
b) Básico de Comparación
c) Comparación por límite
d) Razón o Cociente
e) Raíz

Una vez que decidas cuál, aplícalo.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k+1)^3}$

¿Qué criterio de los siguientes puedes emplear?

a) Integral
b) Básico de Comparación
c) Comparación por límite
d) Razón o Cociente
e) Raíz

Una vez que decidas cuál, aplícalo.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n4^n}$

¿Qué criterio de los siguientes puedes emplear?

a) Integral
b) Básico de Comparación
c) Comparación por límite
d) Razón o Cociente
e) Raíz

Una vez que decidas cuál, aplícalo.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$

¿Qué criterio de los siguientes puedes emplear? a) Integral b) Básico de Comparación c) Comparación por límite d) Razón o Cociente e) Raíz Una vez que decidas cuál, aplícalo.

Lista de ejercicios de la lección 3.3

Tabla 3.3 Lista de ejercicios de la lección 3.3

Criterios de convergencia Usar el criterio de convergencia apropiado para determinar si la serie converge o diverge 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$	2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n}}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ 4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$	5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2n+1}$ 6. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln n\sqrt{\ln^2 n-1}}$ 7. $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{8^n}$
1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} nsen\left(\frac{1}{n}\right)$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1+\ln^2(n)\right)}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(n^2+1\right)^3}$ 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n}}$	17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$ 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n+e^{-n}}$ 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}+2}{4^n}$ 21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$ 22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-3n}{3^n(n^2+2)}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-2}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+\sqrt{n}}{3+2n^2+n^{\frac{7}{2}}}$	23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$ 24. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$ 25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2}$ 26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+5n}{4+3^n}$ 27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{2n^2(n-1)}$ 28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n3^n}$ 29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+n\ln n}{n^2+4}$ 30. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n^5}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^4}$	11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{(n+2)^2}$	31. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n\ln n}$
10. $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{9}{10^{\mathrm{n}}}$	12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n+\sqrt{n}}$	32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen^2 n}{4^n}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4^n+3}$	13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-2}$	33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+senn}{\sqrt[3]{n^4+1}}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\tan^{-1}n}{1+n^2}$	14. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}-2}$	34. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{2}{\ln\left[\ln(n)\right]}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\frac{1}{n}$	15. $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\coth n}{\mathrm{n}^2}$	35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2+\ln(n)}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty}\sec hn$	16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}n}{n^{1.1}}$	36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n2^n}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n}$	17. $\sum_{n=1}^{\infty} sen\frac{1}{n}$	37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(2^n)}{n!}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right)$		

Fuente de Consulta: (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2007; Ruiz, 2021; Thomas, 2010; Swokowski, 1989)

Lección 3.4 Series Alternantes

Teoría y ejemplos

3.4.1. Introducción

Hasta este momento hemos visto el concepto de serie, la determinación de la convergencia y divergencia de una serie especial además de las series de términos positivos, pero no todas las series son de términos positivos, por lo cual nos centraremos en este caso en las series que tienen signos positivo y negativo de manera alterna y en series que tienen tanto signos positivos como negativos, estas últimas tienen sus limitaciones para la convergencia y divergencia de una serie.

Definición 3.4.1 Decimos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie alternante si cambian de signo sus términos de manera alternada, esto es

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots$ con $b_i > 0$

Así una serie alternada se representa como $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$.

Ejemplo 3.4.1. Son series alternantes

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^{n-1}} \qquad (3.204)$$

Pero también lo son

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n+1},\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} 3^{n-1},\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{4}{2^{n}} \qquad (3.205)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!},\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos n \qquad (3.206)$$

La característica principal de una serie alternante es que los signos negativo y positivo se tienen de manera alternada no importando si se inicia con el positivo o el negativo. Sin embargo, se usa más el empezar con el signo positivo y la notación $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$.

Teoría y ejemplos

3.4.2. Criterio para series alternantes

La serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots$ con $b_i > 0$

Converge si:

i) $b_{n+1} \le b_n \quad \forall n$
ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

b_n es el término general de la serie sin tomar en cuenta el signo y este es positivo de acuerdo a la condición en la definición.

La primera condición nos indica que los elementos de la serie son decrecientes, por lo que también se puede comprobar asignando el término general a una función y verificando que es decreciente usando la derivada de la función.

Ejemplo 3.4.2 Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{4n^2-3}$ converge o diverge.

Como la serie es alternante, usamos el criterio para series alternantes.

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{2n}{4n^2-3} \text{ y } b_n = \frac{2n}{4n^2-3} \tag{3.207}$$

i) En la primera condición se debe mostrar que es decreciente, por la forma que tiene el termino general, tomamos $f(x) = \frac{2x}{4x^2-3}$

Calculemos la derivada

$$f'(x) = \frac{(4x^2-3)2-2x(8x)}{(4x^2-3)^2} = \frac{8x^2-6-16x^2}{(4x^2-3)^2} = \frac{-6-8x^2}{(4x^2-3)^2} = -\frac{6+8x^2}{(4x^2-3)^2} < 0 \ \ \forall x \tag{3.208}$$

f es decreciente y la primera condición se cumple.

ii) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n^2-3} = \frac{\infty}{\infty} \tag{3.209}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n^2}}{\frac{4n^2-3}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{4-\frac{3}{n^2}} = \frac{0}{4-0} = 0 \tag{3.210}$$

Con esto se cumple la segunda condición, por lo que,
la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{4n^2-3}$converge

Ejemplo 3.4.3 Determina si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$ converge o diverge.

Como la serie es alternante, usamos el criterio para series alternantes.

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n} \text{ y } b_n = \frac{n+1}{n} \tag{3.211}$$

i) En la primera condición se debe mostrar que es decreciente, por la forma que tiene el termino general, tomamos $f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ (3.212)

Calculemos la derivada

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \ \ \forall x$, f es decreciente y la primera condición se cumple.

ii) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{\infty}{\infty},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty}1 + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{\infty} = 1 \neq 0 \tag{3.213}$$

Como el límite es diferente de cero no se cumple la segunda condición y la serie diverge. Se concluye que,
La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$diverge (3.214)

Teoría y ejemplos

3.4.3. Convergencia Absoluta

Definición 3.4.3 Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente o es absolutamente convergente si la serie correspondiente de los valores absolutos converge. Esto es, si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$ converge.

En general si tenemos una serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$, la serie de los valores absolutos es $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}b_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}||b_n|$, por la propiedad de valor absoluto, el valor absoluto del producto es igual al producto de los valores absolutos.

Y como $|(-1)^{n-1}| = 1$ ya que independientemente de que el exponente sea par o impar, $(-1)^{n-1}$ es 1 o -1 y el valor absoluto de este es 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}b_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}||b_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n| \quad (3.215)$$

Cuando definimos la serie alternante se puso como condición en la definición que $b_n > 0$, así $|b_n| = b_n$, por lo que $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}b_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}||b_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (3.216)

Ejemplo 3.4.5. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ converge absolutamente.

Esto es debido a que la serie de los valores absolutos

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}|\left|\frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, porque $|(-1)^{n-1}| = 1$ y $\frac{1}{n^2}$ es positivo. (3.217)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es la serie p con $p > 1$ y converge. (3.218)

Teorema. Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

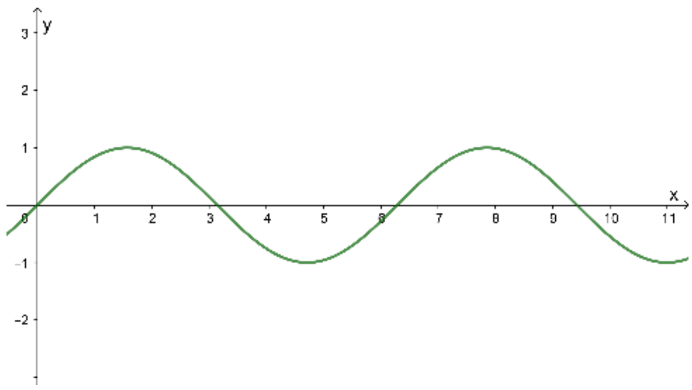
Este teorema nos proporciona una estrategia para determinar si una serie que no sea de valores positivos o alternante converge, ya que basta con que se tome la serie de los valores absolutos y si esta converge entonces la serie original también converge.

Ejemplo 3.4.6 Determinar si la serie $sin\,1 + \frac{sin\,2}{2^2} + \frac{sin\,3}{3^2} + \cdots + \frac{sin\,n}{n^2} + \cdots$ converge o diverge.

Para aplicar algún criterio debemos de determinar el tipo de serie.

Veamos el signo que tienen los términos, el denominador es positivo ya que es el cuadrado de un número entero positivo, así el signo depende del numerador de la función que es la función $sin\,n$, para ello veamos la gráfica de la función en el Gráfico 3.7.

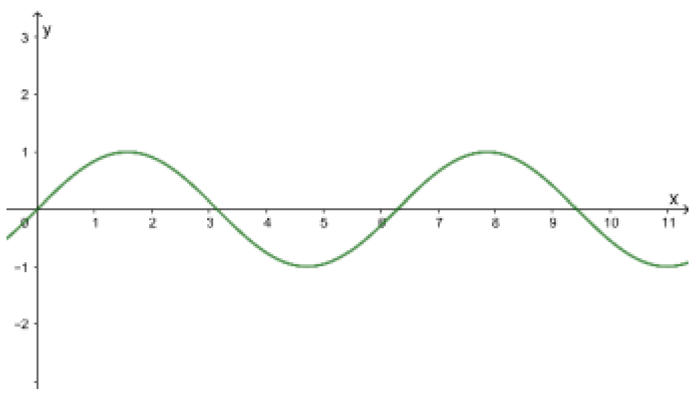
Gráfico 3.7 Gráfica de la función $\boldsymbol{y = \frac{senx}{x^2}}$**.**



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

En el Gráfico 3.8 notamos que $sin\,1\,, sin\,2\ y\ sin\,3$ son mayores que cero y que $sin\,4\,, sin\,5\ \ y\ \ sin\,6$ son negativos, ¿será que el signo se intercala de 3 en 3 elementos?

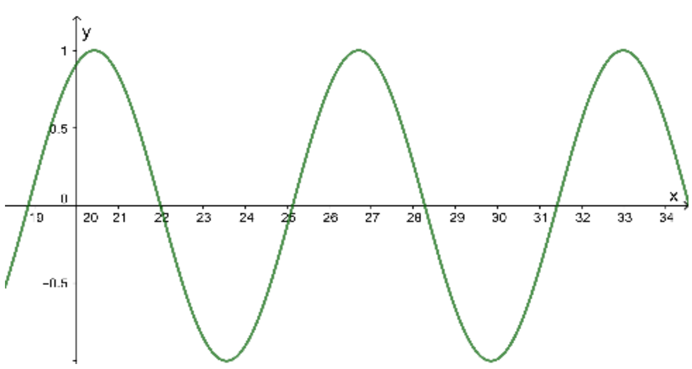
Gráfico 3.8 Gráfica de la función $\boldsymbol{y = \frac{senx}{x^2}}$



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Los valores de $sin\,2\,2, sin\,2\,3, sin\,2\,4\ y\ \ sin\,2\,5$ son negativos, $sin\,2\,2 = -0.0088$ y $sin\,2\,5 = -0.1323$ luego en este intervalo ya no se tienen 3 valores con el mismo signo sino 4.

Gráfico 3.9 Gráfica de la función $\boldsymbol{y = \frac{senx}{x^2}}$



Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Por lo cual no hay regularidad en los valores de la serie, así no es una serie de términos positivos y no es una serie alternante. No podemos aplicar los criterios conocidos para determinar su convergencia o divergencia, así usaremos la convergencia absoluta y el teorema anterior $sin\, 1 + \frac{sin\, 2}{2^2} + \frac{sin\, 3}{3^2} + \cdots + \frac{sin\, n}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin\, n}{n^2}$

La serie de los valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{sin\, n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sin\, n|}{n^2}$, esta es una serie de términos positivos y para determinar su convergencia o divergencia podemos usar cualquiera de los criterios para este tipo de serie.

Usemos el criterio básico de comparación

$|sin\, n| \leq 1$

$\frac{|sin\, n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$**. Así,** $\boldsymbol{b_n = \frac{1}{n^2}}$ **y** $\boldsymbol{a_n = \frac{|sin\, n|}{n^2}}$

Determinemos si la serie $\sum b_n$ converge o diverge.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, es una serie p con $p = 2 > 1$ y la serie converge. (3.218)

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge y $a_n = \frac{|sin\, n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} = b_n$. (3.219)

Por el criterio básico de comparación concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sin\, n|}{n^2}$ converge. (3.220)

Como es la serie de los valores absolutos se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin\, n}{n^2}$ converge absolutamente y por el teorema ,

La serie $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin\, n}{n^2}}$ **converge.**

Teoría y ejemplos

3.4.4. Convergencia Condicional

> **Definición 3.4.4** Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$converge condicionalmente o es condicionalmente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y la serie de los valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Ejemplo 3.4.7 Mostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ converge condicionalmente.

La serie de los valores absolutos es $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1} \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1}| \left|\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, esta es la serie armónica y sabemos que diverge. (3.221)

Luego la serie de los valores absolutos diverge, pero la serie original, ¿converge? O ¿diverge?, esta es una serie alternante, determinemos su convergencia.
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ (3.222)

i) Si $f(x) = \frac{1}{x}$, derivando $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \ \ \forall x$, luego la función es decreciente y se cumple la primera condición del criterio. (3.223)

ii) Si $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, con lo que se cumple la segunda condición. (3.224)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ converge. Y la serie Converge Condicionalmente.

Con las definiciones de convergencias condicional y absoluta tenemos los casos de convergencia que se muestran en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4 Casos de convergencia

Serie		Serie absoluta		Tipo convergencia
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Converge	$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$	Converge	Converge Absolutamente
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Converge	$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$	Diverge	Converge Condicionalmente
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Diverge	$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$	Converge	No puede darse, por el teorema
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Diverge	$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$	Diverge	Diverge

Fuente de Consulta: Elaboración Propia

Ejercicios resueltos de la lección 3.4

1. Menciona si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$

Solución:

Por el criterio de la razón

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^4}}{\frac{(-1)^n}{n^4}}\right| = \left|\frac{(-1)^n(-1)n^4}{(n+1)^4(-1)^n}\right| = \frac{n^4}{(n+1)^4} \tag{3.225}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{(n+1)^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^4}{n^4}}{\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4} = 1 \tag{3.226}$$

Como $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ El criterio de la razón no es concluyente. (3.227)

Por el criterio de la convergencia absoluta.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^4}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \quad Serie\ p, con\ p = 4 > 1 \tag{3.228}$$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$ Es absolutamente convergente

2. Determina el tipo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1+n}{n^2}$.

Hay que determinar si la serie converge absolutamente, converge condicionalmente o diverge. Podemos empezar determinando la convergencia de los valores absolutos, ya que si converge de acuerdo al teorema converge también la serie original y con eso daremos solución al problema.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1+n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{n^2}$, esta es una serie de términos positivos. (3.229)

Como es una función racional, polinomio en el numerador y en denominador, usemos el criterio de comparación por limite.

Así $a_n = \frac{1+n}{n^2}$ y $b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ (3.230)

Con lo cual $\sum_{n=1}^{\infty}\ \ _n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, es la serie armónica y sabemos que diverge.

Determinemos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+n)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 1 = 1 > 0 \quad (3.231)$$

Luego por el criterio de comparación por limite las dos series convergen o divergen y como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2}$ diverge. (3.232)

Hay que determinar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1+n}{n^2}$, esta es una serie alternante, verifiquemos si converge o diverge.

$$b_n = \frac{1+n}{n^2} \quad (3.233)$$

i) Sea $f(x) = \frac{1+x}{x^2}$, calculando la derivada (3.234)

$f'(x) = \frac{x^2(1)-(1+x)2x}{x^4} = \frac{x^2-2x-2x^2}{x^4} = \frac{-x^2-2x}{x^4} < 0 \ \forall x > 0$, luego la función *f* es decreciente y se cumple la primera condición. (3.235)

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} = 0$, se cumple la segunda condición. (3.236)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1+n}{n^2}$ converge. Luego, **la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1+n}{n^2}$ converge condicionalmente.**

Actividad de la Lección 3.4

Instrucciones: Determina si las siguientes series son convergentes o divergentes y justifica el o los métodos empleados. En caso de que sean convergentes señala si son absolutamente convergentes o condicionalmente.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh(n)}$

Determine si la serie de valores absolutos es convergente.   Determine la convergencia de la serie alternante: Converge absolutamente Converge condicionalmente Diverge

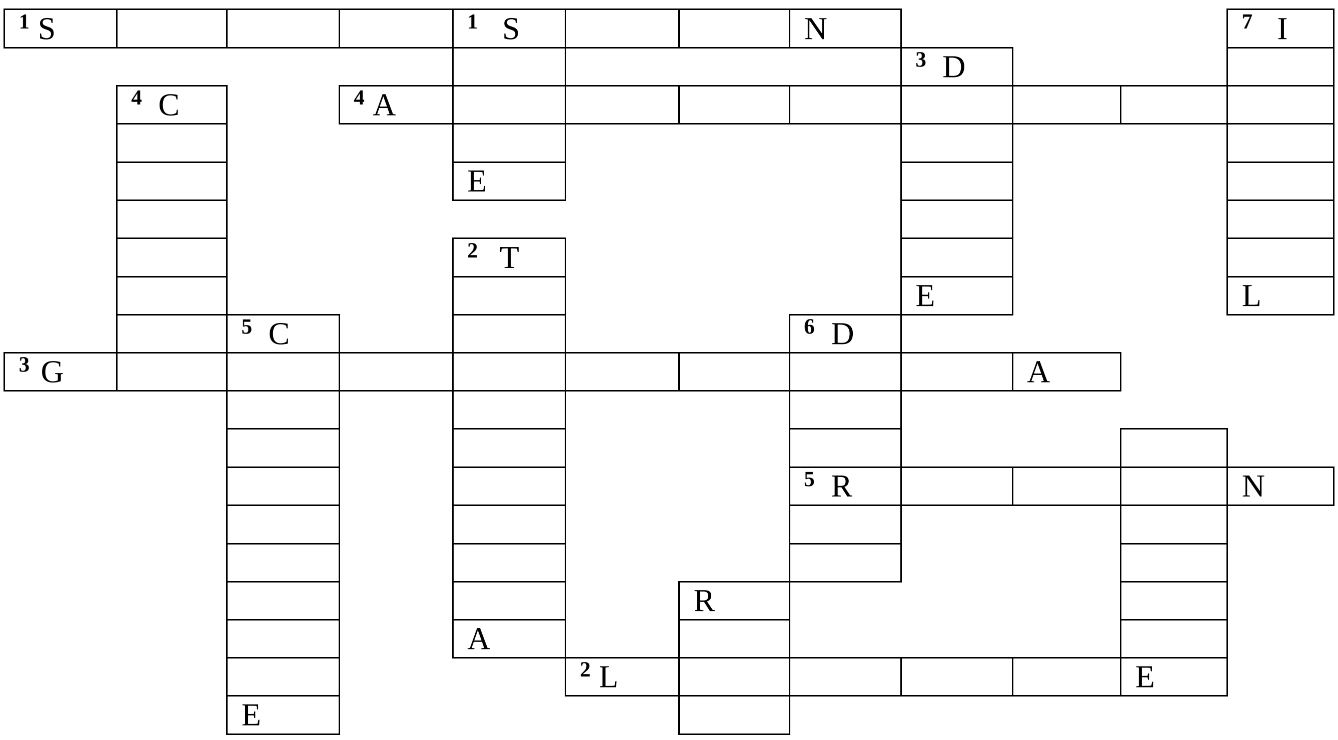
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

Determine si la serie de valores absolutos es convergente.   Determine la convergencia de la serie alternante: Converge absolutamente Converge condicionalmente Diverge

Actividad 1 de la Unidad 3

Resuelve el crucigrama

Verticales	Horizontales
1. Al sumar los términos de una sucesión obtenemos	1. Lista de números que describen un orden definido
2. Serie especial que siempre es convergente:	2. Si la sucesión de sumas parciales converge a un límite L, ¿su suma es igual a?
3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3n}{4n-1}$ converge o diverge (diverge)	3. Serie especial que converge cuando $\lvert r \rvert < 1$ y su suma es igual a $\frac{a}{1-r}$
4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+1}$ converge o diverge (converge)	4. Serie especial que siempre diverge
5. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n!}$, converge o diverge (diverge)	5. Criterio para determinar la convergencia o divergencia de las series con términos positivos obteniendo el siguiente límite: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$
5. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k+1)^3}$ es convergente o divergente	
6. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ converge o diverge	
7. Criterio que emplea la operación inversa a la derivada	



Actividad 2 de la Unidad 3

Instrucciones: Determine si las serien convergen o divergen especificando el criterio empleado

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+1}$

¿La serie es especial? ¿De términos positivos? ¿Es alternante? De acuerdo con tu respuesta, usa el criterio adecuado para determinar la convergencia

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

¿La serie es especial? ¿De términos positivos? ¿Es alternante? De acuerdo con tu respuesta, usa el criterio adecuado para determinar la convergencia

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$

¿La serie es especial? ¿De términos positivos? ¿Es alternante? De acuerdo con tu respuesta, usa el criterio adecuado para determinar la convergencia

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2} - 1$

¿La serie es especial?
¿De términos positivos?
¿Es alternante?

De acuerdo con tu respuesta, usa el criterio adecuado para determinar la convergencia

Actividad 3 de la Unidad 3

Instrucciones: Determine si las series son absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes o divergentes.

1. $\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \frac{\boldsymbol{(-1)^n}}{\boldsymbol{5n+1}}$

¿La serie de los valores absolutos converge?

¿La serie alternante converge?
Marca si la serie es:
Converge absolutamente
Converge condicionalmente
Diverge

2. $\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{k} \left(\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}\right)^{\boldsymbol{k}}$

¿La serie de los valores absolutos converge?

Marca si la serie es:
Converge absolutamente
Converge condicionalmente
Diverge

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

¿La serie de los valores absolutos converge?

Marca si la serie es:
Converge absolutamente
Converge condicionalmente
Diverge

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$

¿La serie de los valores absolutos converge?

¿La serie alternante converge?

Marca si la serie es:
Converge absolutamente
Converge condicionalmente
Diverge

Examen de la unidad 3

Parte I. Encuentre la fórmula para el término enésimo de la siguiente sucesión.

1. $\frac{3}{5}, \frac{-4}{25}, \frac{5}{125}, \frac{-6}{625}, \frac{7}{3125}, \ldots\ldots$

a) an=$\frac{(-1)^{n+1}\,(2+n)}{5^n}$
b) an=$\frac{(2+n)}{5^n}$
c) an=$\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$

2. Determina el tipo de serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n-1}$

a) especial
b) términos positivos
c) alternante

3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n-1}$

a) Converge
b) Diverge

4. Determina el tipo de serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$ $\rightarrow 2^{\frac{1}{n}}$

a) especial
b) términos positivos
c) alternante

5. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$:

a) Converge
b) Diverge

6. Determina el tipo de serie $\sum_{n=1}^{\infty} arc\tan n$

a) especial
b) términos positivos
c) alternante

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} arc\tan n$

a) Converge
b) Diverge

Parte II. Relaciona ambas columnas eligiendo la opción que corresponda

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$	( ) Serie geométrica que diverge.
$b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(2n)}{1+2^n}$	( ) Diverge por la prueba de la divergencia.
$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2*4*6----(2n)}{n!}$	( ) Converge por el criterio de la razón.
$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$	( ) Divergente por la prueba de la divergencia.
$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$	( ) Convergente por el criterio de la razón.
$f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$	( ) Converge por el criterio de la raíz.
$g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$	( ) Geométrica divergente.
$h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$	( ) Converge por el criterio básico de comparación.
$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right)^n$	( ) Converge por el criterio básico de comparación.
$j)\ \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1*3*5\ldots(2n-1)}}{\mathbf{2*5*8\ldots(3n-1)}}$	( ) Diverge por el criterio de la integral.

En el siguiente enlace encontrarás más exámenes

https://drafabiola.com/webaplicado/PARCIAL3.html

Unidad 4 Series de potencias

Representa funciones como series de potencias a partir de las series de Taylor y de McLaurin.

Hasta el momento has desarrollado los conceptos de sucesión y se serie, así como la convergencia de estos dos. También has considerado diferentes tipos de series, las series especiales, las series de términos positivos y las series alternantes.

En esta Unidad revisarás las series de potencias, así como la convergencia y divergencia de éstas y su convergencia absoluta o condicional.

Finalmente, agregaremos dos tipos más de series que son la Serie de Taylor y la Serie de McLaurin, veremos su definición, la manera de determinarla y su convergencia.

Lección 4.1 Series de Potencias

Investiga y Analiza

1. ¿En qué consiste una serie de potencias?

2.- Da un ejemplo de serie de potencias.

Teoría y ejemplos

4.1. Introducción

Una serie de potencias puede ser interpretada como una función de x. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a(x-c)^n$, Cuyo dominio es el conjunto de las x ∈ R para los que la serie es convergente y el valor de f(x) es, precisamente, la suma de la serie en ese punto x.

Font, Hernández y Vives, (2009), explican que

Las series de potencias, vistas como funciones, son funciones continuas y derivables de cualquier orden. Más aún, su función derivada es, otra vez, una serie de potencias. Desde un punto de vista más práctico, las series de potencias aproximan a su función suma. Es decir, la suma parcial de orden n, que no es más que un polinomio de grado n a lo sumo, representa una aproximación a la función suma en su dominio de convergencia.

Nuestro objetivo ahora será determinar el dominio de una serie de potencias. De tal forma que el centro c siempre está en el dominio ya que $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a(c-c)^n = a_o$

Puede ocurrir que la serie sólo sea convergente en x = c, pero, en general, el campo de convergencia será un intervalo.

Definición 4.1. Una serie de potencias alrededor de $x=0$ es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$

donde los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ son constantes.

Una serie de potencias alrededor de $x=a$ es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$

donde el centro a y los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ son constantes.

Si en la serie de potencias alrededor de $x=0$ consideramos que $c_0=c_1=c_2=\cdots=c_n=1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \qquad (4.1)$$

La cual es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$ converge para $|x| < 1$ y diverge si $|x| \geq 1$ y su suma es $\frac{1}{1-x}$,

Así una serie de potencias puede ser convergente para unos valores y divergente para otros.

¿Cómo determinamos para que valores converge una serie de potencias?

4.1.2 Radio e intervalo de convergencia de una serie de potencias

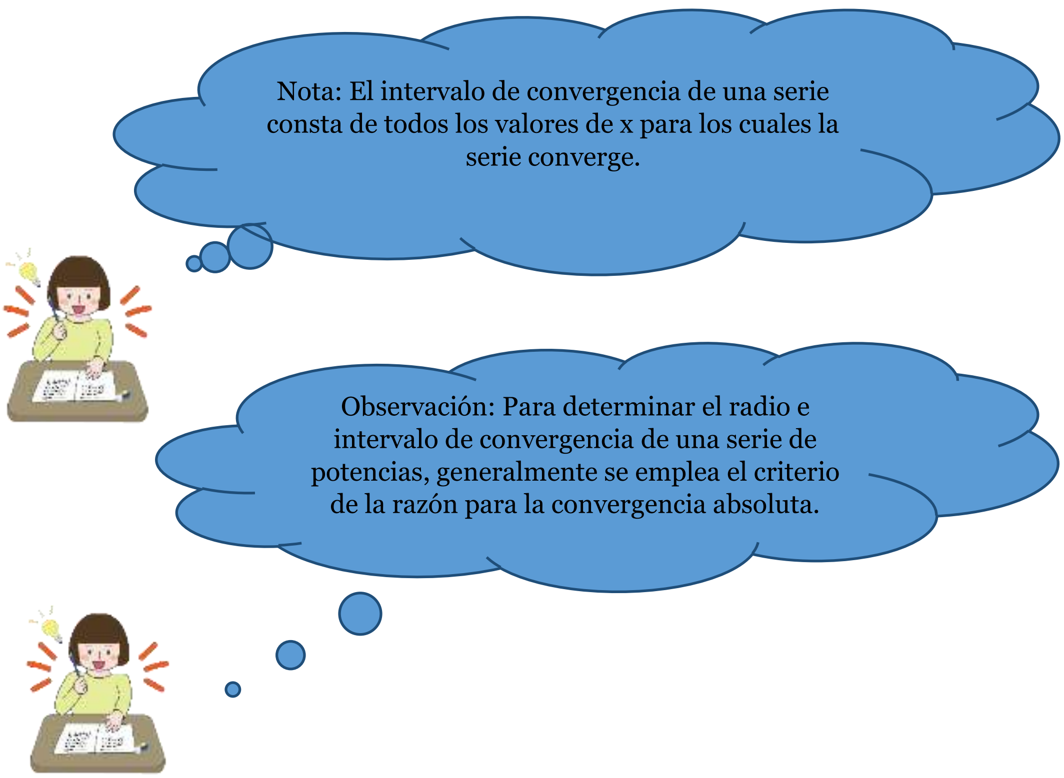
Teorema. Para una serie de potencias dada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ solo hay tres posibilidades (Stewart, 2015).

i) La serie converge cuando $x = a$

ii) La serie converge para toda x

iii) Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$la serie puede converger o no en $|x-a| = R$.

El número R se denomina radio de convergencia de la serie de potencias. En (i) el radio de convergencia es $R = 0$ y en (ii) el radio de convergencia es $R = \infty$.



Ejemplo 4.1.1 Determinar el radio e intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} !\, x^n$
$a_n = n!\, x^n$ y $a_{n+1} = (n+1)!\, x^{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)n!\, x^n x}{n!\, x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(n+1)x| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x|$$

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty, \text{ si } x \neq 0 \tag{4.2}$$

Si $x = 0$, $\lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|0| = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 < 1$ y por el criterio de la razón converge.

Así la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ converge para $x = 0$, el intervalo de convergencia $\{0\}$, solo es el punto cero.

Ejemplo 4.1.2 Determinar el radio e intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
$a_n = \frac{x^n}{n!}$ y $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!x^{n+1}}{(n+1)!x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!x^n x}{(n+1)n!x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \qquad (4.3)$$
$$|x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x|(0) = 0 < 1 \quad \forall x$$

Así la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para $x = \infty$, el intervalo de convergencia es $I = (-\infty, \infty)$

Ejemplo 4.1.3. Determinar el radio e intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n$

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n \text{ y } a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} (x-2)^{n+1} \qquad (4.4)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(x-2)^{n+1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(-\frac{1}{2}\right)(x-2)^n(x-2)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \left(-\frac{1}{2}\right)(x-2) \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \left(-\frac{1}{2}\right)(x-2) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \left(-\frac{1}{2}\right) \right| |x-2| = \frac{1}{2}|x-2| \lim_{n\to\infty} 1 = \frac{1}{2}|x-2| \qquad (4.5)$$

De acuerdo con el criterio de la razón, la serie converge si $\frac{1}{2}|x-2| < 1$, esto es $|x-2| < 2$, resolviendo la desigualdad

$$|x-2| < 2 \Rightarrow -2 < x-2 < 2 \Rightarrow -2+2 < x < 2+2 \Rightarrow 0 < x < 4$$

Luego, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n$ converge si $0 < x < 4$ (4.8)

Diverge si $\frac{1}{2}|x-2| > 1$, esto es $|x-2| > 2$, resolviendo la desigualdad

$$|x-2| > 2 \Rightarrow x-2 > 2 \Rightarrow x > 4$$

$$\text{y } -(x-2) > 2 \Rightarrow x-2 < -2 \Rightarrow x < -2+2 \Rightarrow x < 0$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n$ diverge si $x < 0$ y $x > 4$. (4.7)

Falta por determinar si la serie converge o diverge para $\frac{1}{2}|x-2| = 1$ de donde
$$|x-2| = 2 \Rightarrow x-2 = 2 \Rightarrow x = 2+2 = 4$$

$$\text{y } -(x-2) = 2 \Rightarrow x-2 = -2 \Rightarrow x = -2+2 = 0$$

Determinemos si la serie converge o diverge para $x = 0$ y para $x = 4$.

Si $x = 0$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (0-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \qquad (4.8)$$

Esta es una serie especial, podemos determinar su convergencia con la definición es decir con la sucesión de sumas parciales o podemos usar el criterio del n-ésimo término para la divergencia, usemos este último.

Calculamos el límite del término general $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$ por lo tanto diverge,

Si $x = 4$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (4-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)(2)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \tag{4.9}$$

Esta es una serie alternante, determinamos si converge o diverge con el criterio de series alternantes, para ello $b_n = 1$, notamos que no se cumple la segunda condición del criterio debido a que $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$, por lo cual la serie diverge.

Por lo tanto, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n$ converge si $0 < x < 4$, el radio de convergencia es

$R = 2$ y el intervalo de convergencia es $(0, 4)$.

Ejercicios y problemas resueltos de la Lección 4.1

1) Determinar el radio e intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^n}{n \ln n}$

$$a_n = (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n \ln n} \text{ y } a_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)} \tag{4.10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}}{(-1)^n\frac{(x-2)^n}{n \ln n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(-1)\frac{(x-2)(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}}{(-1)^n\frac{(x-2)^n}{n \ln n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)\frac{(x-2)}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{n \ln n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}|-1|\left|\frac{(x-2)n \ln n}{(n+1)\ln(n+1)}\right| = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n \ln n}{(n+1)\ln(n+1)} = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

$$= |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} = |x-2|\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \tag{4.11}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital

$$= |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = |x-2|(1)\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1} = |x-2| \tag{4.12}$$

De acuerdo con el criterio de la razón, la serie converge si $|x-2| < 1$, resolviendo la desigualdad

$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow -1+2 < x < 1+2 \Rightarrow 1 < x < 3$

$$\text{Luego, la serie } \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^n}{n \ln n} \text{ converge si } 1 < x < 3 \tag{4.13}$$

Diverge si $|x-2| > 1$, resolviendo la desigualdad

$|x-2| > 1 \Rightarrow x-2 > 1 \Rightarrow x > 3$

y $-(x-2) > 1 \Rightarrow x-2 < -1 \Rightarrow x < -1+2 = 1 \Rightarrow x < 1$

$$\text{La serie } \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^n}{n \ln n} \text{ diverge si } x < 1 \text{ y } x > 3. \tag{4.14}$$

Falta por determinar si la serie converge o diverge para $|x-2| = 1$ de donde

$|x-2| = 1 \Rightarrow x-2 = 1 \Rightarrow x = 1+2 = 3$
y $-(x-2) = 1 \Rightarrow x-2 = -1 \Rightarrow x = -1+2 = 1$

Determinemos si la serie converge o diverge para $x=1$ y para $x=3$.

Si $x=1$, la serie es

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-2)^n}{n\,ln\,n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{n\,ln\,n}=\sum_{n=2}^{\infty}\big((-1)(-1)\big)^n\frac{1}{n\,ln\,n}=\sum_{n=2}^{\infty}(1)^n\frac{1}{n\,ln\,n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,ln\,n} \qquad (4.15)$$

Esta es una serie de términos positivos, determinemos su convergencia con el criterio de la integral. $f(x)=\frac{1}{x\,ln\,x}$, f es positiva para $x>1$, y f no es continua en $x=0$ y $x=1$, luego f es continua para $x>1$.

Calculemos la derivada de la función $f'(x)=\frac{x\,ln\,x(0)-1\left(x\left(\frac{1}{x}\right)+ln\,x\right)}{(x\,ln\,x)^2}=-\frac{1+ln\,x}{(x\,ln\,x)^2}<0$ sí $x\geq 2$. (4.16)
Luego la función es decreciente para $x\geq 2$.

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\,ln\,x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{1}{x\,ln\,x}dx \qquad (4.17)$$

Calculando la integral

$\int\frac{1}{x\,ln\,x}dx$, sea $u=ln\,x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$

$$\int\frac{1}{u}du=ln\,u=ln(ln\,x) \qquad (4.18)$$

Así, $\int_2^{\infty}\frac{1}{x\,l\,x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{1}{x\,ln\,x}dx=\lim_{b\to\infty}ln(ln\,x)_2^b=\lim_{b\to\infty}ln(ln\,b)-ln(ln\,2)=\infty$ (4.19)

Luego la serie diverge.

Si $x=3$, la serie es

$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(3-2)^n}{n\,ln\,n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(1)^n}{n\,ln\,n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\,ln\,n}$, esta es una serie alternante con

$b_n=\frac{1}{n\,ln\,n}$, usemos el criterio de convergencia de series alternantes. (4.20)

i) Sea$f(x)=\frac{1}{x\,ln\,x}$, (4.21)

Calculemos la derivada de la función

$f'(x)=\frac{x\,ln\,x(0)-1\left(x\left(\frac{1}{x}\right)+ln\,x\right)}{(x\,ln\,x)^2}=-\frac{1+ln\,x}{(x\,ln\,x)^2}<0$ para $x\geq 2$, luego la función es decreciente y se cumple la primera condición del criterio. (4.22)

ii) $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{ln\,x}=\frac{1}{\infty}=0$ (4.23)

Se cumple la segunda condición y la serie converge.

Por lo tanto, la serie de potencias $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{n\,ln\,n}$ converge si $2<x\leq 3$, el radio de convergencia es $R=1$ y el intervalo de convergencia es $(2,3]$

Lista de ejercicios de la Lección 4.1

Tabla 4.1 Lista de ejercicios de la lección 4.1.}

Hallar el radio e intervalo de convergencia de cada serie.	16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$	31. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$
1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$	17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n4^n}$	32. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$	18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n3^n}$	33. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$	19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n+1}}{n!}$	34. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2x^n}{10^n}$
4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n\ln n}$	20. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$	35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^2}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$	21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n4^n x^n$	36. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n2^n}$	22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-3)^n}{n+3}$	37. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n}$	23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$	38. $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)x^n$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (4x-5)^{2n+1}$	24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-2)^n}{(n+2)!}$	39. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x+3)^n}{n\ln n}$
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n}$	25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$	40. $\sum_{n=0}^{\infty} n^3(x-5)^n$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(x+3)^n}{\sqrt{n}}$	26. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$	41. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^n}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$	27. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-3)^n}{\sqrt{n+3}}$	42. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}(x-1)^n$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$	28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(-2)^n n(n+1)}(x+5)^n$	43. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+2)^n}{n2^n}$
13. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 5^n}$	29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$	44. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(4x+1)^n$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$	30. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)^2}$	45. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$		

Fuente de Consulta: (Stewart, 2015; Ruiz, 2021)

Lección 4.2 Derivación e integración de series de potencias

Si se define la función $f(x)$ como la serie de potencias con centro en cero, esto es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \quad (4.24)$$

Podemos calcular la derivada de la función $f(x)$,como la derivada de una suma, solo que, al estar definida la función por una serie, esta sería una suma infinita, así:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots + nc_n x^{n-1} + \cdots \quad (4.25)$$

Podemos calcular la segunda derivada:

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + 4 \cdot 3c_4 x^2 + \cdots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \cdots \quad (4.26)$$

Tercera derivada:

$$f'''(x) = 3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4 x + 5 \cdot 4 \cdot 3c_5 x^2 + \cdots + n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3} + \cdots \quad (4.27)$$

Obteniendo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (4.28)$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots + nc_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \quad (4.29)$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + 4 \cdot 3c_4 x^2 + \cdots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \quad (4.30)$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4 x + 5 \cdot 4 \cdot 3c_5 x^2 + \cdots + n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3} \quad (4.31)$$

Y así sucesivamente es posible determinar las derivadas.

Si representamos la función como la serie de potencias con centro en a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \quad (4.32)$$

Podemos determinar las derivadas de un modo semejante obteniendo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad (4.33)$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n (x-a)^{n-1} \quad (4.34)$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_n (x-a)^{n-2} \quad (4.35)$$

$$f'''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n (x-a)^{n-3} \quad (4.36)$$

Podemos determinar la integral de la función, como sigue:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \quad (4.37)$$

$$\int f(x)dx = \int (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots)dx \quad (4.38)$$

$$\int f(x)dx = \int c_0 dx + \int c_1 x dx + \int c_2 x^2 dx + \cdots + \int c_n x^n dx + \cdots \quad (4.39)$$

$$\int f(x)dx = c_0 x + c_1\left(\frac{x^2}{2}\right) + c_2\left(\frac{x^3}{3}\right) + \cdots + c_n\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + C = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (4.40)$$

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$, la integral es:

$$\int f(x)dx = \int [c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots]dx = c_0(x-a) + c_1\left(\frac{(x-a)^2}{2}\right) + c_2\left(\frac{(x-a)^3}{3}\right) + \cdots + c_n\left(\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\right) + C = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^n}{n+1} \quad (4.41)$$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ es una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$, se define la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ en el intervalo $a - R < z < a + R$.

La función $f(x)$ tiene derivadas de todos los órdenes dentro del intervalo, por lo que es posible obtener la derivada de la función si derivamos la serie original término a término, esto es:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \quad (4.42)$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} \quad (4.43)$$

Y así sucesivamente. Cada una de estas series derivadas convergen en todos puntos del intervalo $a - R < z < a + R$.

Y la integral de la función la obtenemos si integramos término a término así:

$$\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \quad (4.44)$$

Esta serie converge en todos los puntos del intervalo $a - R < z < a + R$.

Este Teorema nos proporciona las igualdades siguientes:

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[c_n(x-a)^n] = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \quad (4.45)$$

$$\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int [c_n(x-a)^n]dx = + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \quad (4.46)$$

Determinar una representación como series de potencias para $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Sabemos que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, y que $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$

Así que si determinamos la derivada de la igualdad $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ se tendrá la serie de potencias para $\frac{1}{(1-x)^2}$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots) \quad (4.47)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (4.48)$$

Podemos cambiar el valor inicial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, haciendo el cambio de variable $m = n - 1 \Rightarrow n = m + 1$, así $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ es igual a $\sum_{n=0}^{\infty}(m+1)x^m$, expresando la serie con variable *n*, se tiene que:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad o \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \quad (4.49)$$

Determinar una representación como series de potencias de la función para $f(x) = \arctan x$.

Sabemos que $f'(x) = \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$, por lo cual $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$

Y al principio determinamos que:

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$ (4.50)

Usando estos hechos para determinar la expresión como serie de potencias de la función para $f(x) = \arctan x$, calculamos la integral de la igualdad.

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$ (4.51)

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots) dx$ (4.52)

$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + C = C + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$ (4.53)

$\arctan x = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ (4.54)

Determinemos el valor de C para $x = 0$.

$\arctan 0 = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (0)^{2n+1} \Rightarrow 0 = C + 0 \Rightarrow C = 0$ (4.55)

Por lo cual:

$\arctan x = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ y su radio de convergencia es $R = 1$. (4.57)

Lección 4.3 Series de Taylor y McLaurin

4.3.1 Introducción

Hasta el momento has desarrollado los conceptos de sucesión y de serie, así como la convergencia de estos dos. También has considerado diferentes tipos de series, las series especiales, las series de términos positivos, las series alternantes, las series de potencias y has determinado la convergencia y divergencia de estas, así como también, su convergencia absoluta o condicional.

En este tema agregaremos dos tipos más de series que son la Serie de Taylor y la Serie de McLaurin, veremos su definición, la manera de determinarla y su convergencia.

Definición 4.2.1 Serie de Taylor

Es una serie que surge de una ecuación en la cual se puede encontrar una solución aproximada a una función.

Pero vamos paso a paso:

En series de potencias representamos una serie como una función con derivadas de todos los órdenes, pero ¿es posible representar una función como una serie de potencias?

Veamos esto a continuación:

Supongamos que la función $f(x)$ es la suma de una serie de potencias, esto es

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$ (4.58)

Las derivadas de f son

$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1} + \ldots$ (4.59)

$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + 4 \cdot 3c_4(x-a)^2 + \ldots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \ldots$

$f'''(x) = 3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4(x-a) + 5 \cdot 4 \cdot 3c_5(x-a)^2 + \ldots + n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3} + \ldots$ (4.60)

Así $f^n(x) = n!\, c_n$ (4.61)

Evaluando en $x = a$, tenemos

$f(a) = c_0,\ f'(a) = c_1,\ f''(a) = 2c_2,\ f'''(a) = 3 \cdot 2c_3 = 3!\, c_3, \ldots f^n(a) = n!\, c_n$ (4.62)

De donde

$c_1 = f'(a),\ c_2 = \frac{f''(a)}{2},\ c_3 = \frac{f'''(a)}{3 \cdot 2} = \frac{f'''(a)}{3!}, \ldots\ c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$ (4.63)

Estos deben de ser los coeficientes de la serie de potencias que representa a la función $f(x)$ ¸ así

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$ (4.64)

Con esto, hemos encontrado los coeficientes de la función que se puede representar como una serie de potencias, lo cual queda planteado en el teorema siguiente.

Teorema: Si la función f tiene una representación en forma de serie de potencias en a, esto es si (Stewart, 2015).
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ con $|x-a| < R$
Los coeficientes están expresados por la fórmula $c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$, así $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$
Esta serie se denomina Serie de Taylor de la función f en a (alrededor de a o centrada en a).

Ejemplo 4.2.1 Hallar la Serie de Taylor generada por la función $f(x) = \frac{1}{x}$ alrededor del punto $a = 1$

Procedamos a calcular las derivadas de la función y a evaluarlas en el punto dado.

Derivada de la función		Valor de la función
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(1) = \frac{1}{1} = 1$	$f(1) = 1$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$	$f'(1) = -1$
$f''(x) = \frac{2}{x^3}$	$f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$	$f''(1) = 2$
$f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$	$f'''(1) = -\frac{2 \cdot 3}{1^4} = -2 \cdot 3 = -6$	$f'''(1) = -6$
$f^{IV}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}$	$f^{IV}(1) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1^5} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$	$f^{IV}(1) = 24$
:	:	:
$f^n(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$	$f^n(1) = (-1)^n \frac{n!}{1^{n+1}} = (-1)^n n!$	$f^n(1) = (-1)^n n!$

$\frac{1}{x} = 1 - 1(x-1) + \frac{2(x-1)^2}{2!} - \frac{6(x-1)^3}{3!} + \frac{24(x-1)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n n!(x-1)^n}{n!} + \ldots$

$\frac{1}{x} = 1 - 1(x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 + \ldots + (-1)^n(x-1)^n + \ldots$

Así la serie de Taylor es $\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n}$

Ejemplo 4.2.2 Hallar la Serie de Taylor generada por la función $f(x) = senx$ alrededor del punto $a = \frac{\pi}{4}$

Derivada de la función		**Valor de la función**
$f(x) = senx$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(x) = \cos x$	$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$f''(x) = -senx$	$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f^{IV}(x) = senx$	$f^{IV}\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$f^{IV}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
		$f^{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
		$f^{VI}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
		$f^{VII}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
:	:	:
		$f^{n}(1) = (-1)^{m}\frac{\sqrt{2}}{2}$

Determinemos la serie de Taylor

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5 + \ldots \tag{4.65}$$

Se puede observar que en el término general se tienen los coeficientes $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{n!}$ y el factor $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ pero no podemos determinar de manera única el signo, por lo que podemos considerar que el término general es $(-1)^m\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n$ para algún m entero. Luego suponemos la serie de Taylor queda como sigue:

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5 + \ldots\\ &\ldots + (-1)^p\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{(n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n-1} + (-1)^m\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n + \ldots\end{aligned} \tag{4.66}$$

Como en todos los términos está el coeficiente $\frac{\sqrt{2}}{2}$ este puede factorizarse, teniendo

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 + \frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5 + \ldots\right.\\ &\left.\ldots + (-1)^p\frac{1}{(n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n-1} + (-1)^m\frac{1}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n + \ldots\right)\end{aligned} \tag{4.67}$$

Agrupando los términos de potencia par e impar tenemos.

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^6 + \ldots\right) + \right.\\ &\qquad\left. + \left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^7 + \ldots\right)\right)\end{aligned}$$

Lo que nos permite dar un término general para cada uno de ellos.

Potencia par $(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}$ (4.68)

Potencia impar $(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}$ (4.69)

En esta expresión se puede apreciar una forma general definida para determinar el término n-ésimo.

Por lo que el término general de la serie de Taylor es:

$$(-1)^n \frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n} + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} = (-1)^n \left(\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right)$$

Por lo que serie de Taylor es $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5+\ldots\ldots+(-1)^n\left(\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}+\frac{1}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right)+\ldots\right)$ (4.70)

Luego, la serie de Taylor es:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}+\frac{1}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right) \quad (4.71)$$

Teoría y ejemplos

4.3.2 Serie de McLaurin

Definición 4.3.1

Si f es una función tal que $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para toda x en un intervalo abierto (-r, r), entonces $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots$

La Serie de McLaurin puede verse como el caso especial en el que se determina la Serie de Taylor con a = 0.

Ejemplo 4.2.3 Determinar la serie de McLaurin para la función $f(x)=senx$

Empecemos determinando las derivadas de la función, así como el valor de estas en el punto donde x = 0.

Derivada de la función		Valor de la función
$f(x)=senx$	$f(0)=sen(0)=0$	$f(0)=0$
$f'(x)=\cos x$	$f'(0)=\cos(0)=1$	$f'(0)=1$
$f''(x)=-senx$	$f''(0)=-sen(0)=0$	$f''(0)=0$
$f'''(x)=-\cos x$	$f'''(0)=-\cos(0)=-1$	$f'''(0)=-1$
$f^{IV}(x)=senx$	$f^{IV}(0)=sen(0)=0$	$f^{IV}(0)=0$
$f^{V}(x)=cos\,x$	$f^{V}(0)=cos(0)=1$	$f^{V}(0)=1$
$f^{VI}(x)=-senx$	$f^{VI}(0)=-sen(0)=0$	$f^{VI}(0)=0$
$f^{VII}(x)=-cos\,x$	$f^{VII}(0)=-cos(0)=-1$	$f^{VII}(0)=-1$
:	:	:
		$f^n(1)=\begin{cases}0\\(-1)^m\end{cases}$

En este caso no es posible determinar de manera única cual es la derivada de manera general ya que hay tres opciones, el 0, – 1 y 1.

Determinando la Serie de McLaurin

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots$$

$$0 + x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{0}{8!}x^8 + \frac{1}{9!}x^9 + \ldots \quad (4.72)$$

No podemos determinar el término general a partir de la derivada n-ésima, pero al eliminar los términos que son cero obtenemos

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \ldots \quad (4.73)$$

Con esta última expresión para la serie, se puede apreciar una forma para el término general, quedando como sigue

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots \quad (4.74)$$

Con lo cual la serie de McLaurin es

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$$

Ejemplo 4.2.4 Determinar la Serie de McLaurin para la función $f(x) = (1+x)^{-3}$

Empecemos determinando las derivadas de la función y evaluémoslas en x = 0

Derivada de la función		**Valor de la función**
$f(x) = (1+x)^{-3}$	$f(0) = (1+0)^{-3} = 1$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -3(1+x)^{-4}$	$f'(0) = -3(1+0)^{-4} = -3$	$f'(0) = -3$
$f''(x) = 3 \cdot 4(1+x)^{-5}$	$f''(0) = 3 \cdot 4(1+0)^{-5} = 3 \cdot 4$	$f''(0) = 3 \cdot 4$
$f'''(x) = -3 \cdot 4 \cdot 5(1+x)^{-6}$	$f'''(0) = -3 \cdot 4 \cdot 5(1+0)^{-6} = -3 \cdot 4 \cdot 5$	$f'''(0) = -3 \cdot 4 \cdot 5$
$f^{IV}(x) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6(1+x)^{-7}$	$f^{IV}(0) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6(1+0)^{-7} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$	$f^{IV}(0) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$
:	:	:
$f^n(x) = (-1)^n \frac{(n+2)!}{2}(1+x)^{-(n+3)}$	$f^n(0) = (-1)^n \frac{(n+2)!}{2}(1+0)^{-(n+3)} = (-1)^n \frac{n!}{2}$	$f^n(0) = (-1)^n \frac{(n+2)!}{2}$

Determinando la Serie de McLaurin

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots \quad (4.75)$$

Sustituyendo

$$1 - 3x + \frac{3\cdot 4}{2!}x^2 - \frac{3\cdot 4\cdot 5}{3!}x^3 + \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n\frac{(n+2)!}{2}}{n!}x^n + \ldots \quad (4.76)$$

Realizando las operaciones indicadas

$$1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 + \ldots + (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n + \ldots \quad (4.77)$$

Con lo cual la serie de McLaurin es

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n}$$

Ejercicios resueltos de la lección 4.3

1. Calcular la serie de Taylor de $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \tag{4.78}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \tag{4.79}$$

$$f'''^{(x)} = \frac{2}{x^3} \tag{4.80}$$

$$f''''(x) = \frac{-6}{x^4} \tag{4.81}$$

$$f^n(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n} \tag{4.82}$$

De la fórmula de Taylor

$$Ln\ x = \ln a - \frac{1}{a}(x-a) - \left(\frac{1}{a^2}\right)\frac{(x-a)^2}{2} + \left(\frac{1}{a^3}\right)\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{a^n}\frac{(x-a)^n}{n} \tag{4.83}$$

Con a=1

$$Ln\ x = \ln 1 - \frac{1}{1}(x-1) - \left(\frac{1}{1^2}\right)\frac{(x-1)^2}{2} + \left(\frac{1}{1^3}\right)\frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{1^n}\frac{(x-1)^n}{n} \tag{4.84}$$

$$Ln\ x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n\,(x-1)^{n+1}}{n+1} \tag{4.85}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(x-1)^{n+1}}{n+1}}$$

2. Encontrar el polinomio de Taylor de grado n para la función $f(x) = e^{5x}$ alrededor de a = 1.
Paso 1: Derivamos $f(x)$ varias veces y evaluamos cada derivada en a.

$$f(x) = e^{5x} => f(1) = e^{5(1)} \tag{4.86}$$

$$f'(x) = 5e^{5x} => f'(1) = 5e^{5(1)} \tag{4.87}$$

$$f''(x) = 5^2e^{5x} => f''(1) = 5^2e^{5(1)} \tag{4.88}$$

$$f'''(x) = 5^3e^{5x} => f'''(1) = 5^3e^{5(1)} \tag{4.89}$$

$$f''''^{(x)} = 5^4e^{5x} => f''''^{(1)} = 5^4e^{5(1)} \tag{4.90}$$

$$f^n(x) = 5^ne^{5x} => f^n(1) = 5^ne^{5(1)} \tag{4.91}$$

Paso 2: Usar la serie de Taylor y definir un patrón de convergencia

$$f(x) = e^{5x} + 5e^{5x}(x-1) + \frac{5^2e^{5x}(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{5^ne^{5x}(x-1)^n}{n!} \tag{4.92}$$

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^ne^{5x}(x-1)^n}{n!}}$$

3. Encuentre la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \cosh(x)$

Empecemos determinando las derivadas de la función y evaluémoslas en x = 0

Derivada de la función		Valor de la función
$f(x) = cosh\, x$	$f(0) = cosh\, 0 = 1$	$f(0) = 1$
$f'(x) = senhx$	$f'(0) = senh0 = 0$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = cosh\, x$	$f''(0) = cosh\, 0 = 1$	$f''(0) = 1$
$f'''(x) = senhx$	$f'''(0) = senh0 = 0$	$f'''(0) = 0$
$f^{IV}(x) = cosh\, x$	$f^{IV}(0) = cosh\, 0 = 1$	$f^{IV}(0) = 1$
:	:	:
$f^n(x) = \begin{cases} senhx & n \text{ impar} \\ cosh\, x & n \text{ par} \end{cases}$	$f^n(0) = \begin{cases} senh0 = 0 & n \text{ impar} \\ cosh\, 0 = 1 & n \text{ par} \end{cases}$	$f^n(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ 1 & n \text{ par} \end{cases}$

Determinando la Serie de McLaurin

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots. + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots \quad (4.93)$$

Sustituyendo

$$1 + 0x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots. + \quad (4.94)$$

No determinamos el término general ya que depende de que sea par o impar el valor de la n, pero de esta expresión tenemos la siguiente expresión para la Serie de McLaurin

$$1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \ldots. + \frac{1}{n!}x^n + \ldots. \quad (4.95)$$

En donde ya es posible determinar el término general ya que todos los términos de la serie con números pares por lo cual el termino n-ésimo también debe ser par por lo que podemos verla como sigue

$$1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \ldots. + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \ldots. \quad (4.96)$$

Con lo cual la serie de McLaurin es

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}}$$

Lista de ejercicios de la lección 4.3

Tabla 4.2 Lista de ejercicios

Determinar la serie de Taylor de cada función en el punto indicado		**Determinar la serie de MacLaurin**
$f(x) = \ln x$	en $a = 2$	$f(x) = senx$
1. $f(x) = \frac{1}{x}$	en $a = 1$	10. $f(x) = \cos x$
2. $f(x) = e^x$	en $a = 3$	11. $f(x) = \cos 2x$
3. $f(x) = e^{-2x}$	en $a = 2$	12. $f(x) = sen2x$
4. $f(x) = 3^x$	en $a = 1$	13. $f(x) = (1+x)^{-3}$
5. $f(x) = \ln x$	en $a = 2$	14. $f(x) = \ln(1+x)$
6. $f(x) = \log_3 x$	en $a = 1$	15. $f(x) = senhx$
7. $f(x) = \sqrt{x}$	en $a = 4$	16. $f(x) = \cosh x$
8. $f(x) = senx$	en $a = \frac{\pi}{4}$	
9. $f(x) = \cos x$	en $a = -\frac{\pi}{4}$	

Fuente de Consulta: (Ruiz, 2021; Stewart, 2015)

Examen de la unidad 4

Calcular la serie de Taylor dada la siguiente función:

$f(x) = e^x \ en \ x = 0$

a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

2.- Calcular la serie de Taylor dada la siguiente función:

$f(x) = \operatorname{sen} x \ \ en \ x = 0$

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (x)^{2n+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{4n \ (n!)^2 (2n+1)} (x)^{2n+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} (x)^{2n-1}$

3.-Determina el radio e intervalo de convergencia de la siguiente serie:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$

a) R: 4, Intervalo: [-8,2)
b) R: 5, Intervalo: (-8,2)
c) R: 5, Intervalo:[-8,2]
d) R: 5, Intervalo: (-8,2]

4.-Determina la serie de Maclauring de la siguiente función:

$f(x) = \operatorname{sen} x$

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

5.-Determina la serie de Maclauring de la siguiente función:

$f(x) = \operatorname{sen} 2x$

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n-1}$

d) $2x - \frac{4}{3!} x^3 + \frac{4}{15} x^5 - \frac{8}{315} x^7 + \frac{4}{28353} x^9 + \cdots$

En el siguiente enlace encontrarás más exámenes
https://drafabiola.com/webaplicado/PARCIAL4.html

Agradecimientos

Los autores del libro agradecen a la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional (SIP-IPN) por el financiamiento proporcionado para la publicación de esta obra.

Referencias

Ayres, F., & Mendelson, E. (2010). *Cálculo SCHAUM* (Quinta ed.). Ciudad de México, México: McGrawHill.

Boyce, W. E., & Diprima, R. (2005). *Cálculo.* Ciudad de México, México: Compañía editorial continental S. A de C. V.

Boyer, C. (1986). *Historia de las Matemáticas.* Madrid: Alianza Universidad.

De Saint-Exupéry, A. (2019). *El Prncipito.* Lima, Perú: Municipalidad de LIma.

Font, J., Hernández, S., & Vives, S. (2009). *Cálculo.* MAdrid, España: Universitat Jaume.

Instituto Politécnico Nacional. (6 de julio de 2022). *ESCOM-IPN.* Obtenido de https://www.escom.ipn.mx/docs/oferta/uaISC2020/calculoAplicado_ISC2020.pdf

Larson, R., & Edwars, B. (2018). *Matemáticas II Cálculo Integral.* Ciudad de México: Cenage Learning Editores S. A de C. V.

Mateus-Nieves, E. (2022). Epistemología de la integral como fundamento del cálculo. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 1593-1615.

Matheus-Nieves, E. (2015). Evolución histórico-epistemológica del conceto de integral. *Quinta Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática [ENHEM 5]*, 1-12. doi:10.13140/RG.2.2.32081.56164

Mathews, J., & Kurtis, F. (2000). *Métodos numéricos con Mathlab.* Madrid, España: Prentice Hall.

Muñoz, W. (2022). Elementos para un argumento didáctico. *Revista Ciencia e Interculturalidad, 30*(1), 26-39. doi:DOI: https://doi.org/10.5377/rci.v30i01.14241

Newman, J. (1994). *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Barcelona: Grijalbo.

Pinzón, A. (1973). *Cálculo integral II.* Bogotá, Colombia: Harla S.A de C.V. Colección Harper.

Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo* (Novena ed.). México: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Ruiz, E. F. (08 de Agosto de 2021). *Apuntes de Cálculo Aplicado.* Obtenido de https://www.escom.ipn.mx/docs/oferta/matDidacticoISC2009/CAplcd/Apuntes_CalAplicado.pdf

Solaeche, M. C. (1993). La Controversia L'Hospital – Bernoulli. *Divulgaciones Matemáticas*, 99-104.

Soler, F., Núñez, R., & Aranda, M. (2008). *Cálculo con Aplicaciones.* Bogotá: Pearson Prenctice Hall.

Stewart, J. (2015). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (Séptima ed.). Ciudad de México: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Swokowski, E. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica* (Segunda ed.). Ciudad de México, México: Grupo editorial Iberoamércia.

Thomas, J. G. (2010). *Cálculo una variable* (Décimo segunda ed.). Ciudad de Mëxico, México: Addison Wesley.

Zill, D., & Wright, W. (2011). *Cálculo Trascendentes tempranas* (Cuarta ed.). Ciudad de México: McGrawHill.

Zuin, E. S. (2001). Cálculo: uma abordagem histórica. En J. B. Laudares, & J. (. Lachini, *Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo* (págs. 13-36). Belo Horizonte: FUMARC.

[Título en Times New Roman y Negritas No. 14 en Español e Inglés]

Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 1er Autor†*, Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 1er Coautor, Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 2do Coautor y Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 3er Coautor

Institución de Afiliación del Autor incluyendo dependencia (en Times New Roman No.10 y Cursiva)

International Identification of Science - Technology and Innovation

ID 1er Autor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 1er Autor: (Becario-PNPC o SNI-CONACYT) (No.10 Times New Roman)

ID 1er Coautor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 1er Coautor: (Becario-PNPC o SNI-CONACYT) (No.10 Times New Roman)

ID 2do Coautor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 2do Coautor: (Becario-PNPC o SNI-CONACYT) (No.10 Times New Roman)

ID 3er Coautor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 3er Coautor: (Becario-PNPC o SNI-CONACYT) (No.10 Times New Roman)

(Indicar Fecha de Envío: Mes, Día, Año); Aceptado (Indicar Fecha de Aceptación: Uso Exclusivo de ECORFAN)

Citación: Primer letra (EN MAYUSCULAS) del Nombre del 1er Autor. Apellido, Primer letra (EN MAYUSCULAS) del Nombre del 1er Coautor. Apellido, Primer letra (EN MAYUSCULAS) del Nombre del 2do Coautor. Apellido, Primer letra (EN MAYUSCULAS) del Nombre del 3er Coautor. Apellido

Correo institucional [Times New Roman No.10]

Primera letra (EN MAYUSCULAS) del Nombre Editores. Apellidos (eds.) Título del Book [Times New Roman No.10], Temas Selectos del área que corresponde ©ECORFAN- Filial, Año.

Abstract

Texto redactado en Times New Roman No.12, espacio sencillo, en inglés.

Indicar (3-5) palabras clave en Times New Roman y Negritas No.12

Introducción

Texto redactado en Times New Roman No.12, espacio sencillo.

Explicación del tema en general y explicar porque es importante.

¿Cuál es su valor agregado respecto de las demás técnicas?.

Enfocar claramente cada una de sus características.

Explicar con claridad el problema a solucionar y la hipótesis central.

Explicación de las secciones del Capítulo.

Desarrollo de Secciones y Apartados del Capítulo con numeración subsecuente

[Título en Times New Roman No.12, espacio sencillo y Negrita]

Desarrollo de Capítulos en Times New Roman No.12, espacio sencillo.

Inclusión de Gráficos, Figuras y Tablas-Editables

En *el contenido del Capítulo* todo gráfico, tabla y figura debe ser editable en formatos que permitan modificar tamaño, tipo y número de letra, a efectos de edición, estas deberán estar en alta calidad, no pixeladas y deben ser notables aun reduciendo la imagen a escala.

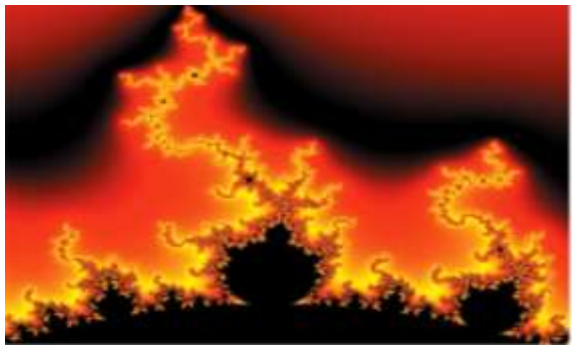
[Indicando el título en la parte Superior con Times New Roman No.12 y Negrita, señalando la fuente en la parte Inferior centrada con Times New Roman No. 10]

Tabla 1.1 Título

Variable	Descripción	Valor
P_1	Partición 1	481.00
P_2	Partición 2	487.00
P_3	Partición 3	484.00
P_4	Partición 4	483.50
P_5	Partición 5	484.00
P_6	Partición 6	490.79
P_7	Partición 7	491.61

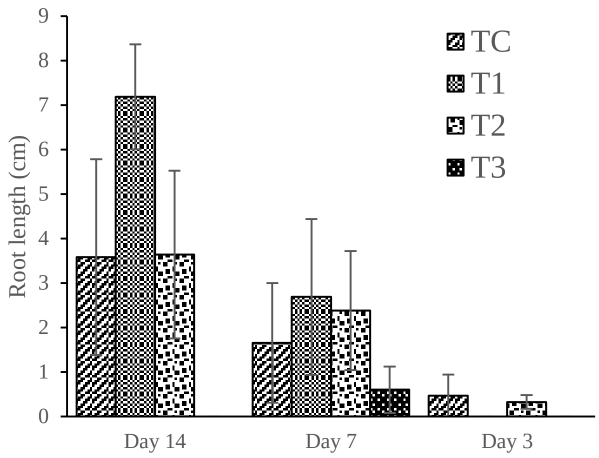
Fuente de Consulta:
(No deberán ser imágenes, todo debe ser editable)

Figura 1.1 Título



Fuente de Consulta:
(No deberán ser imágenes, todo debe ser editable)

Gráfico 1.1 Título



Fuente de Consulta:
(No deberán ser imágenes, todo debe ser editable)

Cada Capítulo deberá presentar de manera separada en 3 Carpetas: a) Figuras, b) Gráficos y c) Tablas en formato .JPG, indicando el número en Negrita y el Titulo secuencial.

Para el uso de Ecuaciones, señalar de la siguiente forma:

$$\int_{\boldsymbol{lim^{-1}}}^{\boldsymbol{lim^{1}}} = \int \frac{\boldsymbol{lim^{1}}}{\boldsymbol{lim^{-1}}} = \left[\frac{\mathbf{1}\,(-\mathbf{1})}{\boldsymbol{lim}}\right]^{\mathbf{2}} = \frac{(\mathbf{0})^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{lim}} = \sqrt{\boldsymbol{lim}} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \to \propto \tag{1}$$

Deberán ser editables y con numeración alineada en el extremo derecho.

Metodología a desarrollar

Dar el significado de las variables en redacción lineal y es importante la comparación de los criterios usados.

Resultados

Los resultados deberán ser por sección del Capítulo.

Anexos

Tablas y fuentes adecuadas.
Agradecimiento

Indicar si fueron financiados por alguna Institución, Universidad o Empresa.

Conclusiones

Explicar con claridad los resultados obtenidos y las posibilidades de mejora.

Referencias

Utilizar sistema APA. No deben estar numerados, tampoco con viñetas, sin embargo en caso necesario de numerar será porque se hace referencia o mención en alguna parte del Capítulo.

Ficha Técnica

Cada Capítulo deberá presentar en un documento Word (.docx):

Nombre del Book
Título del Capítulo
Abstract
Keywords
Secciones del Capítulo, por ejemplo:

1. *Introducción*
2. *Descripción del método*
3. *Análisis a partir de la regresión por curva de demanda*
4. *Resultados*
5. *Agradecimiento*
6. *Conclusiones*
7. *Referencias*

Nombre de Autor (es)
Correo Electrónico de Correspondencia al Autor
Referencias

Requerimientos de Propiedad Intelectual para su edición:

-Firma Autógrafa en Color Azul del Formato de Originalidad del Autor y Coautores
-Firma Autógrafa en Color Azul del Formato de Aceptación del Autor y Coautores

Reserva a la Política Editorial

ECORFAN Books se reserva el derecho de hacer los cambios editoriales requeridos para adecuar la Obra Científica a la Política Editorial del ECORFAN Books. Una vez aceptada la Obra Científica en su versión final, el ECORFAN Books enviará al autor las pruebas para su revisión. ECORFAN® únicamente aceptará la corrección de erratas y errores u omisiones provenientes del proceso de edición de la revista reservándose en su totalidad los derechos de autor y difusión de contenido. No se aceptarán supresiones, sustituciones o añadidos que alteren la formación de la Obra Científica.

Código de Ética – Buenas Prácticas y Declaratoria de Solución a Conflictos Editoriales

Declaración de Originalidad y carácter inédito de la Obra Científica, de Autoría, sobre la obtención de datos e interpretación de resultados, Agradecimientos, Conflicto de intereses, Cesión de derechos y distribución.

La Dirección de ECORFAN-México, S.C reivindica a los Autores de la Obra Científica que su contenido debe ser original, inédito y de contenido Científico, Tecnológico y de Innovación para someterlo a evaluación.

Los Autores firmantes de la Obra Científica deben ser los mismos que han contribuido a su concepción, realización y desarrollo, así como a la obtención de los datos, la interpretación de los resultados, su redacción y revisión. El Autor de correspondencia de la Obra Científica propuesto requisitara el formulario que sigue a continuación.

Título de la Obra Científica:

- El envío de una Obra Científica a ECORFAN Books emana el compromiso del autor de no someterlo de manera simultánea a la consideración de otras publicaciones seriadas para ello deberá complementar el Formato de Originalidad para su Obra Científica, salvo que sea rechazado por el Comité de Arbitraje, podrá ser retirado.

- Ninguno de los datos presentados en esta Obra Científica ha sido plagiado ó inventado. Los datos originales se distinguen claramente de los ya publicados. Y se tiene conocimiento del testeo en PLAGSCAN si se detecta un nivel de plagio Positivo no se procederá a arbitrar.

- Se citan las referencias en las que se basa la información contenida en la Obra Científica, así como las teorías y los datos procedentes de otras Obras Científicas previamente publicados.

- Los autores firman el Formato de Autorización para que su Obra Científica se difunda por los medios que ECORFAN-México, S.C. en su Holding México considere pertinentes para divulgación y difusión de su Obra Científica cediendo sus Derechos de Obra Científica.

- Se ha obtenido el consentimiento de quienes han aportado datos no publicados obtenidos mediante comunicación verbal o escrita, y se identifican adecuadamente dicha comunicación y autoría.

- El Autor y Co-Autores que firman este trabajo han participado en su planificación, diseño y ejecución, así como en la interpretación de los resultados. Asimismo, revisaron críticamente el trabajo, aprobaron su versión final y están de acuerdo con su publicación.

- No se ha omitido ninguna firma responsable del trabajo y se satisfacen los criterios de Autoría Científica.

- Los resultados de esta Obra Científica se han interpretado objetivamente. Cualquier resultado contrario al punto de vista de quienes firman se expone y discute en la Obra Científica.

Copyright y Accesso

La publicación de esta Obra Científica supone la cesión del copyright a ECORFAN-Mexico, S.C en su Holding México para su ECORFAN Books, que se reserva el derecho a distribuir en la Web la versión publicada de la Obra Científica y la puesta a disposición de la Obra Científica en este formato supone para sus Autores el cumplimiento de lo establecido en la Ley de Ciencia y Tecnología de los Estados Unidos Mexicanos, en lo relativo a la obligatoriedad de permitir el acceso a los resultados de Investigaciones Científicas.

Título de la Obra Científica:

Nombre y apellidos del Autor de contacto y de los Coautores	Firma
1.	
2.	
3.	
4.	

Principios de Ética y Declaratoria de Solución a Conflictos Editoriales

Responsabilidades del Editor

El Editor se compromete a garantizar la confidencialidad del proceso de evaluación, no podrá revelar a los Árbitros la identidad de los Autores, tampoco podrá revelar la identidad de los Árbitros en ningún momento.

El Editor asume la responsabilidad de informar debidamente al Autor la fase del proceso editorial en que se encuentra el texto enviado, así como de las resoluciones del arbitraje a Doble Ciego.

El Editor debe evaluar los manuscritos y su contenido intelectual sin distinción de raza, género, orientación sexual, creencias religiosas, origen étnico, nacionalidad, o la filosofía política de los Autores.

El Editor y su equipo de edición de los Holdings de ECORFAN® no divulgarán ninguna información sobre la Obra Científica enviado a cualquier persona que no sea el Autor correspondiente.

El Editor debe tomar decisiones justas e imparciales y garantizar un proceso de arbitraje por pares justa.

Responsabilidades del Consejo Editorial

La descripción de los procesos de revisión por pares es dado a conocer por el Consejo Editorial con el fin de que los Autores conozcan cuáles son los criterios de evaluación y estará siempre dispuesto a justificar cualquier controversia en el proceso de evaluación. En caso de Detección de Plagio a la Obra Científica el Comité notifica a los Autores por Violación al Derecho de Autoría Científica, Tecnológica y de Innovación.

Responsabilidades del Comité Arbitral

Los Árbitros se comprometen a notificar sobre cualquier conducta no ética por parte de los Autores y señalar toda la información que pueda ser motivo para rechazar la publicación de la Obra Científica. Además, deben comprometerse a mantener de manera confidencial la información relacionada con la Obra Científica que evalúan.

Cualquier manuscrito recibido para su arbitraje debe ser tratado como documento confidencial, no se debe mostrar o discutir con otros expertos, excepto con autorización del Editor.

Los Árbitros se deben conducir de manera objetiva, toda crítica personal al Autor es inapropiada.

Los Árbitros deben expresar sus puntos de vista con claridad y con argumentos válidos que contribuyan al que hacer Científico, Tecnológica y de Innovación del Autor.

Los Árbitros no deben evaluar los manuscritos en los que tienen conflictos de intereses y que se hayan notificado al Editor antes de someter la Obra Científica a evaluación.

Responsabilidades de los Autores

Los Autores deben garantizar que sus Obras Científicas son producto de su trabajo original y que los datos han sido obtenidos de manera ética.

Los Autores deben garantizar no han sido previamente publicados o que no estén siendo considerados en otra publicación seriada.

Los Autores deben seguir estrictamente las normas para la publicación de Obra Científica definidas por el Consejo Editorial.

Los Autores deben considerar que el plagio en todas sus formas constituye una conducta no ética editorial y es inaceptable, en consecuencia, cualquier manuscrito que incurra en plagio será eliminado y no considerado para su publicación.

Los Autores deben citar las publicaciones que han sido influyentes en la naturaleza de la Obra Científica presentado a arbitraje.

Servicios de Información

Indización - Bases y Repositorios

RESEARCH GATE (Alemania)
MENDELEY (Gestor de Referencias bibliográficas)
GOOGLE SCHOLAR (Índices de citaciones-Google)
REDIB (Red Iberoamericana de Innovación y Conocimiento Científico- CSIC)

Servicios Editoriales

Identificación de Citación e Índice H
Administración del Formato de Originalidad y Autorización
Testeo de Books con PLAGSCAN
Evaluación de Obra Científica
Emisión de Certificado de Arbitraje
Edición de Obra Científica
Maquetación Web
Indización y Repositorio
Publicación de Obra Científica
Certificado de Obra Científica
Facturación por Servicio de Edición

Política Editorial y Administración

143 - 50 Itzopan, Ecatepec de Morelos – México. Tel: +52 1 55 6159 2296, +52 1 55 1260 0355, +52 1 55 6034 9181; Correo electrónico: contact@ecorfan.org www.ecorfan.org

Publicidad y Patrocinio

(ECORFAN®- Mexico- Bolivia- Spain- Ecuador- Cameroon- Colombia- El Salvador- Guatemala- Nicaragua- Peru- Paraguay- Democratic Republic of The Congo- Taiwan), sponsorships@ecorfan.org

Licencias del Sitio

03-2010-032610094200-01-Para material impreso, 03-2010-031613323600-01-Para material electrónico, 03-2010-032610105200-01-Para material fotográfico, 03-2010-032610115700-14-Para Compilación de Datos, 04 -2010-031613323600-01-Para su página Web, 19502-Para la Indización Iberoamericana y del Caribe, 20-281 HB9-Para la Indización en América Latina en Ciencias Sociales y Humanidades, 671-Para la Indización en Revistas Científicas Electrónicas España y América Latina, 7045008-Para su divulgación y edición en el Ministerio de Educación y Cultura-España, 25409-Para su repositorio en la Biblioteca Universitaria-Madrid, 16258-Para su indexación en Dialnet, 20589-Para Indización en el Directorio en los países de Iberoamérica y el Caribe, 15048-Para el registro internacional de Congresos y Coloquios. financingprograms@ecorfan.org

Oficinas de Gestión

143 - 50 Itzopan, Ecatepec de Morelos – México.
21 Santa Lucía, CP-5220. Libertadores -Sucre – Bolivia.
38 Matacerquillas, CP-28411. Moralzarzal –Madrid-España.
18 Marcial Romero, CP-241550. Avenida, Salinas l - Santa Elena-Ecuador.
1047 Avenida La Raza -Santa Ana, Cusco-Perú.
Boulevard de la Liberté, Immeuble Kassap, CP-5963.Akwa- Douala-Camerún.
Avenida Suroeste, San Sebastian - León-Nicaragua.
31Kinshasa 6593- Republique Démocratique du Congo.
Avenida San Quentin, R 1-17 Miralvalle - San Salvador-El Salvador.
16 kilómetros, carretera estadounidense, casa Terra Alta, D7 Mixco Zona 1-Guatemala.
105 Alberdi Rivarola Capitán, CP-2060. Luque City- Paraguay.
69 Calle Distrito YongHe, Zhongxin. Taipei-Taiwán.
43 Calle # 30 -90 B. El Triunfo CP.50001. Bogotá-Colombia

9 786078 695805
ISBN 978-607-8695-80-5

www.ecorfan.org