Precálculo I

DURÁN-FONSECA, Miguel

CHARRE-IBARRA, Saida

GUDIÑO-LAU, Jorge

ALCALÁ-RODRÍGUEZ, Janeth

ECORFAN®

ECORFAN-México

Autores
DURÁN-FONSECA, Miguel. PhD
CHARRE-IBARRA, Saida. PhD
GUDIÑO-LAU, Jorge. PhD
ALCALÁ-RODRÍGUEZ, Janeth. PhD

Editor en Jefe
VARGAS-DELGADO, Oscar. PhD

Directora Ejecutiva
RAMOS-ESCAMILLA, María. PhD

Director Editorial
PERALTA-CASTRO, Enrique. MsC

Diseñador Web
ESCAMILLA-BOUCHAN, Imelda. PhD

Diagramador Web
LUNA-SOTO, Vladimir. PhD

Asistente Editorial
SORIANO-VELASCO, Jesús. BsC

Filóloga
RAMOS-ARANCIBIA, Alejandra. BsC

Precálculo I

Primera Edición
ISBN: 978-607-8948-17-8
Sello Editorial ECORFAN: 607-8948
Número de Control B: 2023-09
Clasificación B (2023): 301223-0009

Books

Definición de Books

Objetivos Científicos

Apoyar a la Comunidad Científica Internacional en su producción escrita de Ciencia, Tecnología en Innovación en las Áreas de investigación CONAHCYT y PRODEP.

ECORFAN-Mexico S.C es una Empresa Científica y Tecnológica en aporte a la formación del Recurso Humano enfocado a la continuidad en el análisis crítico de Investigación Internacional y está adscrita al RENIECYT de CONAHCYT con número 1702902, su compromiso es difundir las investigaciones y aportaciones de la Comunidad Científica Internacional, de instituciones académicas, organismos y entidades de los sectores público y privado y contribuir a la vinculación de los investigadores que realizan actividades científicas, desarrollos tecnológicos y de formación de recursos humanos especializados con los gobiernos, empresas y organizaciones sociales.

Alentar la interlocución de la Comunidad Científica Internacional con otros centros de estudio de México y del exterior y promover una amplia incorporación de académicos, especialistas e investigadores a la publicación Seriada en Nichos de Ciencia de Universidades Autónomas - Universidades Públicas Estatales - IES Federales - Universidades Politécnicas - Universidades Tecnológicas - Institutos Tecnológicos Federales - Escuelas Normales - Institutos Tecnológicos Descentralizados - Universidades Interculturales - Consejos de CyT - Centros de Investigación CONAHCYT.

Alcances, Cobertura y Audiencia

Books es un Producto editado por ECORFAN-Mexico S.C en su Holding con repositorio en México, es una publicación científica arbitrada e indizada. Admite una amplia gama de contenidos que son evaluados por pares académicos por el método de Doble-Ciego, en torno a temas relacionados con la teoría y práctica de las Área de investigación CONAHCYT y PRODEP respectivamente con enfoques y perspectivas diversos, que contribuyan a la difusión del desarrollo de la Ciencia la Tecnología e Innovación que permitan las argumentaciones relacionadas con la toma de decisiones e incidir en la formulación de las políticas internacionales en el Campo de las Ciencias. El horizonte editorial de ECORFAN-Mexico® se extiende más allá de la academia e integra otros segmentos de investigación y análisis ajenos a ese ámbito, siempre y cuando cumplan con los requisitos de rigor argumentativo y científico, además de abordar temas de interés general y actual de la Sociedad Científica Internacional.

Consejo Editorial

Comité Arbitral

Cesión de Derechos

El envío de una Obra Científica a ECORFAN Books emana el compromiso del autor de no someterlo de manera simultánea a la consideración de otras publicaciones científicas para ello deberá complementar el Formato de Originalidad para su Obra Científica.

Los autores firman el Formato de Autorización para que su Obra Científica se difunda por los medios que ECORFAN-México, S.C. en su Holding México considere pertinentes para divulgación y difusión de su Obra Científica cediendo sus Derechos de Obra Científica.

Declaración de Autoría

Indicar el Nombre de 1 Autor y 3 Coautores como máximo en la participación de la Obra Científica y señalar en extenso la Afiliación Institucional indicando la Dependencia.

Identificar el Nombre de 1 Autor y 3 Coautores como máximo con el Número de CVU Becario-PNPC o SNI-CONAHCYT- Indicando el Nivel de Investigador y su Perfil de Google Scholar para verificar su nivel de Citación e índice H.

Identificar el Nombre de 1 Autor y 3 Coautores como máximo en los Perfiles de Ciencia y Tecnología ampliamente aceptados por la Comunidad Científica Internacional ORC ID - Researcher ID Thomson - arXiv Author ID - PubMed Author ID - Open ID respectivamente

Indicar el contacto para correspondencia al Autor (Correo y Teléfono) e indicar al Investigador que contribuye como primer Autor de la Obra Científica.

Detección de Plagio

Todas las Obras Científicas serán testeadas por el software de plagio PLAGSCAN si se detecta un nivel de plagio Positivo no se mandará a arbitraje y se rescindirá de la recepción de la Obra Científica notificando a los Autores responsables, reivindicando que el plagio académico está tipificado como delito en el Código Penal.

Proceso de Arbitraje

Todas las Obras Científicas se evaluarán por pares académicos por el método de Doble Ciego, el arbitraje Aprobatorio es un requisito para que el Consejo Editorial tome una decisión final que será inapelable en todos los casos. MARVID® es una Marca de derivada de ECORFAN® especializada en proveer a los expertos evaluadores todos ellos con grado de Doctorado y distinción de Investigadores Internacionales en los respectivos Consejos de Ciencia y Tecnología el homologo de CONAHCYT para los capítulos de America-Europa-Asia-Africa y Oceania. La identificación de la autoría deberá aparecer únicamente en una primera página eliminable, con el objeto de asegurar que el proceso de Arbitraje sea anónimo y cubra las siguientes etapas: Identificación del ECORFAN Books con su tasa de ocupamiento autoral - Identificación del Autores y Coautores- Detección de Plagio PLAGSCAN - Revisión de Formatos de Autorización y Originalidad-Asignación al Consejo Editorial- Asignación del par de Árbitros Expertos-Notificación de Dictamen-Declaratoria de Observaciones al Autor-Cotejo de la Obra Científica Modificado para Edición-Publicación.

Precálculo I

Precalculus I

DURÁN-FONSECA, Miguel*†, CHARRE-IBARRA, Saida, GUDIÑO-LAU, Jorge* y ALCALÁ-RODRÍGUEZ, Janeth

Universidad de Colima, Facultad de Ingeniería Electromecánica, Km. 20.5 Carretera Manzanillo-Barra de Navidad, El Naranjo. C.P. 28860, Manzanillo, Colima, México

ID 1[er] Autor: *Miguel Angel, Durán-Fonseca* /**ORC ID**: 0000-0002-0780-6192

ID 1[er] Coautor: *Saida, Charre-Ibarra* **/ ORC ID**: 0000-0002-3823-5388, **Researcher ID Thomson**: Q6851-2018, **arXiv Author ID**: saidacharre

ID 2[do] Coautor: *Jorge, Gudiño-Lau* / **ORC ID**: 0000-0002-0585-908X, **Researcher ID Thomson**: Q-6844-2018, **arXiv Author ID**: jorgeglau, **CVU CONAHCYT ID**: 122644

ID 3[er] Coautor: *Janeth, Alcalá-Rodríguez* / **ORC ID**: 0000-0002-0238-3952

DOI: 10.35429/B.2023.8.1.97

* jglau@ucol.mx
† Investigador contribuyendo como primer autor.

Precálculo I

El Book ofrecerá contribuciones seleccionadas de investigadores que contribuyan a la actividad de difusión científica de la Universidad de Colima para su área de investigación en la función de la Universidad ante los retos de la Sociedad del Conocimiento. Además de tener una evaluación total, en las manos de los directores del Universidad de Colima, se colabora con calidad y puntualidad en sus capítulos, cada contribución individual fue arbitrada a estándares internacionales (RESEARCH GATE, MENDELEY, GOOGLE SCHOLAR y REDIB), el Book propone así a la comunidad académica, los informes recientes sobre los nuevos progresos en las áreas más interesantes y prometedoras de investigación en la función de la Universidad ante los retos de la Sociedad del Conocimiento.

Contenido

Prefacio 1
1. Aritmética 2
1.1. Introducción 2
1.2. Clasificación de los números 2
1.3. Números positivos y negativos 2
1.4. Mínimo común múltiplo 7
1.5. Máximo Común Divisor (MCD) 10
1.6. Jerarquía de las operaciones 13
1.7. Fracciones 16
1.8. Evaluación 21
1.9. Solución de ejercicios impares 22

2. Leyes de los Exponentes (Enteros y radicales) 25
2.1. Introducción 25
2.2. Leyes de los exponentes Enteros 27
2.2.1. Primera Ley de los Exponentes 27
2.2.2. Segunda Ley de los Exponentes 28
2.2.3. Tercera Ley de los Exponentes 29
2.2.4 Cuarta Ley de los Exponentes 30
2.2.5. Quinta Ley de los Exponentes 31
2.2.6. Sexta Ley de los Exponentes 33
2.3. Leyes de los exponentes Radicales 34
2.3.1. Primera Ley de los Radicales 36
2.3.2. Segunda Ley de los Radicales 37
2.3.3. Tercera Ley de los Radicales 38
2.4. Evaluación 40
2.5. Solución de ejercicios impares 41

3. Operaciones algebraicas 46
3.1. Introducción 46
3.2. Terminología algebraica 46
3.3. Clasificación de las expresiones algebraicas 47
3.4. Reducción de términos semejantes 48
3.5. Suma 49
3.6. Resta 51
3.7. Multiplicación 52
3.8. División 56
3.10. Solución de ejercicios impares 61

4. Productos Notables 63
4.1 Introducción 63
4.2. Binomio al cuadrado 63
4.3. Binomios conjugados 69
4.4. Binomio al cubo 71
4.5. Producto **x + ax + b** 78
4.6. Resumen del capítulo 79
4.7. Evaluación 80
4.8. Solución de ejercicios impares 81

Referencias 83

Prefacio

Este libro, titulado "Precálculo 1", ha sido diseñado para proporcionar los conocimientos fundamentales necesarios antes de adentrarse en el estudio del cálculo. Su alcance abarca una amplia gama de temas, desde la comprensión de los números con signo hasta el manejo de operaciones aritméticas básicas, la simplificación de expresiones mediante las leyes de los exponentes y las operaciones algebraicas esenciales. Además, se profundiza en la determinación de productos utilizando fórmulas que se encuentran con frecuencia en los cálculos algebraicos.

El pre-cálculo establece la fundación matemática necesaria para abordar problemas más avanzados en el área de control. Facilita la transición a conceptos más complejos en cálculo, álgebra lineal y teoría de sistemas dinámicos, que son esenciales para los ingenieros y profesionales del control.

Los contenidos de este libro sirven como una cimentación esencial para disciplinas más avanzadas en ingeniería. Proporciona las herramientas matemáticas y conceptuales necesarias para abordar temas más complejos en cálculo, álgebra lineal, física, estadísticas y más.

Este libro se estructura en cuatro capítulos fundamentales que abarcan una amplia gama de conceptos. En el primer capítulo, "Aritmética", se establecen los fundamentos al definir los números con signos y se presentan las operaciones aritméticas, que incluyen suma, resta, multiplicación y división de fracciones. También se aborda el cálculo del mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.

El segundo capítulo, titulado "Leyes de los exponentes", se centra en la aplicación práctica de estas reglas matemáticas, con ejercicios que ilustran su uso y relevancia.

En el tercer capítulo, denominado "Álgebra", se exploran en profundidad las operaciones algebraicas esenciales, incluyendo suma, resta, multiplicación y división de expresiones algebraicas.

Finalmente, el cuarto capítulo, "Productos notables", se dedica a la aplicación de fórmulas clave que permiten calcular productos resultantes de la multiplicación de factores.

Cada uno de estos capítulos ha sido cuidadosamente elaborado por los autores, basándose en ejemplos, ejercicios y evaluaciones propias, respaldados por una investigación en la literatura relacionada con estos temas. Al término de cada capítulo, se proporcionan las soluciones de los ejercicios impares presentados en el libro, para facilitar la comprensión y el aprendizaje del lector.

1. Aritmética

1.1. Introducción

La aritmética es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades y las operaciones de los números. La aritmética es muy importante para la ingeniería, ya que te permite resolver problemas prácticos y modelar situaciones reales. En este capítulo, se abordarán algunos conceptos básicos de la aritmética como: la clasificación de los números, operaciones de números con signo, mínimo común múltiplo, máximo común divisor, jerarquía de las operaciones y las operaciones con fracciones.

1.2. Clasificación de los números

Como ya se mencionó la aritmética estudia los números, sus operaciones y sus propiedades. Por tanto, es importante conocer los tipos de números que existen:

1. Números Naturales (N): Los números naturales son los que se utilizan para contar elementos o cosas, esto es, los números enteros positivos. Por ejemplo: 1, 2, 3, 4, …

2. Números Enteros (Z): Los números enteros incluyen a los números naturales, sus opuestos (negativos) y el cero. Por ejemplo: –9, –2, 0, 1, 4, 87, 25312

3. Números Racionales (Q): Un número racional es todo aquel que puede ser expresado como la división de dos números enteros. Por ejemplo: –3, –½, 0.25, ¾

4. Números Irracionales (I): Los números irracionales son aquellos que no pueden representarse como la división de dos números enteros. Los números irracionales se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales que no siguen ningún patrón repetitivo. Por ejemplo: π, $\sqrt{3}$, e

5. Números Reales (R): Los números reales incluyen tanto a los números racionales como a los números irracionales. Por ejemplo: –3, –0.8, –½, 0.25, ¾, π, $\sqrt{3}$

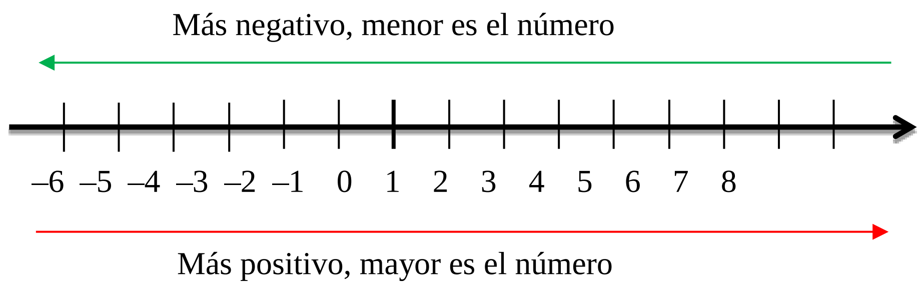
1.3. Números positivos y negativos

Los números con signo desempeñan un papel crítico en la descripción y modelado de una amplia gama de fenómenos y situaciones en la vida cotidiana y en la práctica ingenieril. Los números con signo nos permiten manejar y comprender situaciones que involucran magnitudes positivas y negativas, ganancias y pérdidas, temperaturas por encima y por debajo del punto de congelación, y muchas otras variables que pueden ser positivas o negativas.

La recta numérica es una herramienta fundamental en las matemáticas que nos permite visualizar y comprender la relación entre los números de una manera clara y ordenada. Es una representación gráfica de todos los números reales dispuestos en una línea recta, extendiéndose infinitamente en ambas direcciones. Además, desempeña un papel esencial en la resolución de problemas cotidianos, como el seguimiento de gastos financieros, la medición de distancias, la representación de temperaturas y mucho más.

Una recta numérica es una representación gráfica unidimensional que se utiliza en matemáticas para visualizar y organizar números reales de manera ordenada y secuencial. Consiste en una línea recta que se extiende infinitamente en ambas direcciones y se utiliza para mostrar la relación y la ubicación relativa de los números en el espectro de los números reales, ver Figura 1.1. El número cero se coloca en el centro, y los números positivos se extienden hacia la derecha, mientras que los números negativos se extienden hacia la izquierda. A medida que avanzas en cualquier dirección a lo largo de la recta numérica, los números aumentan en valor absoluto. Por ejemplo, a la derecha del cero, los números positivos aumentan en valor, mientras que, a la izquierda del cero los números negativos aumentan en valor absoluto pero disminuyen en valor.

Figura 1.1 Recta numérica



Se puede determinar la igualdad (=) y/o desigualdad (< , >) de dos cantidades basándonos en su ubicación en una recta numérica. Las expresiones "mayor que" y "menor que" son utilizadas en matemáticas para comparar dos números y determinar cuál es más grande o más pequeño en relación con el otro. Cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo.

Estas comparaciones se realizan mediante símbolos matemáticos especiales:

1. Mayor que (>): El símbolo ">" se utiliza para indicar que un número es mayor que otro. Por ejemplo, si decimos "5 > 3", estamos afirmando que el número 5 es mayor que el número 3.

2. Menor que (<): El símbolo "<" se utiliza para indicar que un número es menor que otro. Por ejemplo, si decimos "2 < 7", estamos afirmando que el número 2 es menor que el número 7.

Estas comparaciones son fundamentales en matemáticas y se utilizan en una variedad de situaciones, desde resolver desigualdades simples hasta analizar datos, realizar operaciones de ordenamiento y resolver problemas en diversas disciplinas.

Ejemplos:

1. $-2 < -1$

2. $2 > 1$

3. $-3 < 1$

4. $0 > -1$

5. $0.5 = 1/2$

Los números positivos pueden aparecen acompañados por el signo positivo (+) o sin ningún signo como se observó en los ejemplos anteriores, mientras que los números negativos siempre estarán acompañados por el signo negativo (–).

Ejercicios 1.1

Coloca entre los dos números el signo > (mayor que) o < (menor que) según la comparación correcta.

1.	-6	6
2.	-7	-6
3.	$+2$	-7
4.	-2	2
5.	-4	-7
6.	2	-2
7.	-5	1
8.	0	$+1$
9.	-6	$+4$
10.	-5	5

Suma y resta de números positivos y negativos

A continuación, se presenta una breve explicación de cómo se realizan estas operaciones:

1. Sumar números positivos: Sumar números positivos es una tarea sencilla. Simplemente se suman los valores como de costumbre. Si sumamos números positivos, el resultado será un numero positivo. Por ejemplo,

$$5 + 3 = 8$$

2. Sumar números negativos: Al sumar números negativos, primero identificamos los valores absolutos y luego aplicamos la suma. Por ejemplo, -5 + (-3) se resuelve tomando el valor absoluto de ambos números (5 y 3) y luego sumando los valores absolutos con el signo negativo. Si sumamos dos números negativos, el resultado será un numero negativo. En este caso,

$$-5 + (-3) = -8$$

3. Sumar números de diferente signo: Para sumar números con diferente signo, simplemente restamos los valores absolutos y tomamos el signo del número con el mayor valor absoluto. Por ejemplo, –5 + 3 se resuelve tomando 5 – 3 = 2 y tomando el signo del número mayor, que es negativo. Por lo tanto,

$$-5 + 3 = -2$$

4. La resta se representa comúnmente con el símbolo "–", y los números involucrados se llaman el "minuendo" (el número del que se resta) y el "sustraendo" (el número que se resta). El resultado se denomina la "diferencia". Para restar un número negativo se debe cambiar su signo y luego sumar los números.

Ejemplos:

1. $8 - 3 = 5$
2. $-5 - 3 = -8$
3. $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$
4. $-8 - (-3) = -8 + 3 = -5$
5. $-3 - (-5) = -3 + 5 = 2$

Es importante recordar que, al trabajar con números positivos y negativos, es esencial prestar atención al signo de los números y seguir las reglas de suma y resta adecuadas para obtener resultados precisos. Practicar con ejercicios y problemas te ayudará a fortalecer tu comprensión de estas operaciones.

Ejercicios 1.2

Realizar las siguientes sumas y restas:

1. $3 + 5$
2. $-6 + (-2)$
3. $10 + (-7)$
4. $-8 + 4$

5. $2 + (-9)$

6. $6 - 3$

7. $-5 - (-2)$

8. $12 - (-5)$

9. $-8 - 4$

10. $3 - (-7)$

Multiplicación y división de números positivos y negativos

La multiplicación y la división de números con signo se rigen por lo que comúnmente se conoce como "La Ley de los Signos" o "Reglas de los Signos". Estas reglas son fundamentales para determinar el signo del resultado cuando se multiplican o dividen números con signo. Aquí están las reglas básicas:

En la multiplicación:

La ley dice:	Ejemplo:
$(+)(+) = +$	$(2)(3) = 6$
$(+)(-) = -$	$(2)(-3) = -6$
$(-)(+) = -$	$(-2)(3) = -6$
$(-)(-) = -$	$(-2)(-3) = 6$

1. El producto de dos números con el mismo signo es siempre positivo: Cuando multiplicas dos números positivos o dos números negativos, el resultado es siempre positivo.

2. El producto de dos números con signos diferentes es siempre negativo: Cuando multiplicas un número positivo por un número negativo o viceversa, el resultado es siempre negativo.

En la división:

La ley dice:	Ejemplo:
$\frac{(+)}{(+)} = +$	$\frac{6}{3} = 2$
$\frac{(+)}{(-)} = -$	$\frac{6}{-3} = -2$
$\frac{(-)}{(+)} = -$	$\frac{-6}{3} = -2$
$\frac{(-)}{(-)} = +$	$\frac{-6}{-3} = 2$

1. El cociente de dos números con el mismo signo es siempre positivo: Cuando se dividen dos números positivos o dos números negativos, el resultado es siempre positivo.

2. El cociente de dos números con signos diferentes es siempre negativo: Cuando se dividen un número positivo por un número negativo o viceversa, el resultado es siempre negativo.

Operaciones con cero:

– Cualquier número multiplicado por cero es igual a cero, independientemente del signo: 0 x (cualquier número) = 0.

– Dividir cero por cualquier número (excepto cero) es igual a cero: 0 ÷ (cualquier número distinto de cero) = 0.

Estas reglas son esenciales al realizar operaciones con números con signo y ayudan a determinar el signo del resultado de manera consistente.

Ejemplos:

1. $(8)(-3) = -24$
2. $(-5)(-3) = 15$
3. $(-5)(3) = -15$
4. $\frac{8}{-4} = -2$
5. $\frac{-15}{-3} = 5$

Ejercicios 1.3

Realizar las siguientes multiplicaciones y divisiones:

1. $(-2)(-3)$
2. $(2)(3)$
3. $(-7)(8)$
4. $(7)(-8)$
5. $(-7)(-8)$
6. $\frac{6}{-2}$
7. $\frac{-6}{-2}$
8. $\frac{-8}{2}$
9. $\frac{8}{2}$
10. $\frac{-16}{-2}$

1.4. Mínimo común múltiplo

Antes de abordar los temas del mínimo común múltiplo y máximo común divisor, se debe tener claro que son los números primos. Los números primos son aquellos enteros mayores que 1 que tienen exactamente dos divisores positivos: 1 y ellos mismos. En otras palabras, un número primo no se puede dividir de manera exacta por ningún otro número distinto de 1 y sí mismo. Algunos ejemplos de números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, y así sucesivamente...

Es importante notar que no existen números primos negativos, ya que estos números tienen más de dos divisores (por ejemplo, -2 se puede dividir por -1, 1 y -2). La lista de números primos es interminable y no sigue un patrón predecible fácilmente.

Un múltiplo es un número que resulta de la multiplicación de otro número por un entero. En otras palabras, un número A es un múltiplo de otro número B si se puede expresar como A = B * n, donde "n" es un número entero.

Por ejemplo, los múltiplos de 4:

4 = 4 x 1
8 = 4 x 2
12 = 4 x 3
16 = 4 x 4
20 = 4 x 5
...

En esta secuencia, cada número es un múltiplo de 4 porque se obtiene multiplicando 4 por un número entero. Para cualquier número entero, hay infinitos múltiplos. Retomando las operaciones anteriores podemos decir que 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, etc. son múltiplos de 4.

Un múltiplo común es un número que es múltiplo de dos o más números diferentes. En otras palabras, es un número que puede dividirse exactamente por cada uno de los números dados sin dejar residuos. Por ejemplo, si se desea encontrar los múltiplos comunes de los números 3 y 4. Primero, enumeramos los múltiplos de cada número:

Múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...

Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, ...

El número 12 es un múltiplo de ambos 3 y 4, ya que se encuentra en ambas listas. Por lo tanto, 12 es un múltiplo común de 3 y 4.

Otros múltiplos comunes de 3 y 4 incluyen 24, 36, 48, y así sucesivamente. Estos números pueden dividirse exactamente por 3 y 4 sin dejar residuos.

Es importante destacar que existen infinitos múltiplos comunes de cualquier par de números, ya que puedes seguir multiplicando los números por enteros diferentes para obtener más múltiplos comunes.

El mínimo común múltiplo (mcm) es el múltiplo común más pequeño de los números dados y se calcula utilizando técnicas específicas, como la descomposición en factores primos.

Para calcular el mcm de dos o más números, puedes seguir estos pasos:

Paso 1: Se descompone cada número en sus factores primos. Esto significa expresar cada número como un producto de números primos. Por ejemplo, si tenemos los números 12 y 18:

- 12 se descompone en factores primos como 2 x 2 x 3 = 2^2 x 3.
- 18 se descompone en factores primos como 2 x 3 x 3 = 2 x 3^2.

Paso 2: Para calcular el mcm, multiplica todos los factores primos elevados a la mayor potencia en la descomposición de los números originales. En este caso:

- La mayor potencia de 2 es 2
- La mayor potencia de 3 es 2

Por lo tanto, el mcm de 12 y 18 es $2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

El mcm de 12 y 18 es 36. Esto significa que 36 es el número más pequeño que es múltiplo tanto de 12 como de 18, es decir, 36 es el primer número que ambos números (12 y 18) pueden dividir de manera exacta.

A continuación, se presenta un método para obtener el mcm:

Se desea obtener el mínimo común múltiplo de los números 10, 15 y 30, entonces se hace los siguiente:

- Se colocan los números de la siguiente forma:

10	15	30	

- En la última columna se escribe un número que divida a alguno de ellos, los números que se utilizan son los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 31, 37, etc, comenzando en orden ascendente. En este caso, el 2 puede dividir al 10 y al 30.

10	15	30	
5	**15**	**15**	**2**

En la última columna se colocó el 2, y en esa fila se escribe la mitad de 10, la mitad de 30 y como el 15 no tiene mitad, se bajó el número sin dividir.

- Ahora se puede observar que tenemos 5, 15 y 15, ninguno de los números se puede dividir exactamente entre 2, entonces se pasa al siguiente número primo que es el 3. El 15 se pueden dividir entre 3, entonces se repite el procedimiento del paso anterior.

10	15	30	
5	15	15	2
5	**5**	**5**	**3**

El 5 no se puede dividir exactamente entre 3, entonces se baja el número 5, el 15 si se puede dividir entre 3, es 5, por eso debajo del 15 escribimos un 5, lo mismo sucede con el otro 15.

- Lógicamente el siguiente número primo que se puede utilizar es el 5:

10	15	30	
5	15	15	2
5	5	5	3
1	**1**	**1**	**5**

La quinta parte de 5 es 1, por eso se escribe un 1 debajo de cada uno de los 5 que se obtuvieron anteriormente, el procedimiento termina cuando todos los números quedan reducidos a 1.

– Para obtener el mínimo común múltiplo se multiplican los números de la última columna:

10	15	30	
5	15	15	**2**
5	5	5	**3**
1	1	1	**5**

2 x 3 x 5 = 30, entonces el mínimo común múltiplo de 10, 15 y 30 es: 30

Ejemplos:

Calcula el mínimo común múltiplo para los siguientes números:

1. 18, 30, 24

18	30	24	
9	15	12	2
9	15	6	2
9	15	3	2
3	5	1	3
1	5	1	3
1	1	1	5

El mcm es 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 =**360**

2. 50, 70, 30

50	70	30	
25	35	15	2
25	35	5	3
5	7	1	5
1	7	1	5
1	1	1	7

El mcm es 2 x 3 x 5 x 5 x 7 =**1050**

3. 100, 45

100	45	
50	45	2
25	45	2
25	15	3
25	5	3
5	1	5
1	1	5

El mcm es 2 x 2 x 3 x 3 x 5 x 5 =**900**

4. 5, 6, 10

5	6	10	
5	3	5	2
5	1	5	3
1	1	1	5

El mcm es 2 x 3 x 5 = **30**

5. 2, 4, 8

2	4	8	
1	2	4	2
1	1	2	2
1	1	1	2

El mcm es 2 x 2 x 2 = **8**

Ejercicios 1.4

Obtener el mínimo común múltiplo de los siguientes números:

1. 4, 6
2. 7, 9
3. 15, 20
4. 15, 18
5. 8, 10, 12
6. 5, 25
7. 14, 21, 28
8. 3, 5, 7, 9
9. 16, 24, 32
10. 11, 22, 33

1.5. Máximo Común Divisor (MCD)

El Máximo Común Divisor (MCD), también conocido como máximo factor común o simplemente "el mayor divisor común", es un número entero positivo más grande que divide exactamente a dos o más números enteros sin dejar residuos. En otras palabras, es el número más grande que es un divisor común de los números dados.

Para calcular el MCD de dos o más números, se puede descomponer cada número en sus factores primos, identificar los factores primos comunes con las menores potencias y luego multiplicar estos factores primos comunes juntos te dará el MCD.

Por ejemplo, para los números 12 y 18:

- Factorización de $12 = 2^2 \times 3$
- Factorización de $18 = 2 \times 3^2$
- Factores primos comunes a la menor potencia: 2 y 3
- MCD = 2 x 3 = 6

Lo anterior se puede realizar también de la siguiente forma:

- Para descomponer en factores primos, se va dividiendo cada número entre los números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13...) en orden ascendente, se puede dividir entre un número primo más de una vez. Sólo sirven los que dan una división exacta. Por ejemplo 12, en la tabla de abajo, se va descomponiendo en 2, 2 y 3 y el 18 se descompone en 2, 3 y 3.

12	2		18	2
6	2		9	3
3	3		3	3
1			1	

- De los factores primos, se seleccionan los números comunes (los repetidos en ambos números 12 y 18) de menor exponente y se multiplican. En este caso, el MCD = 2 x 3 = 6.

Otro método para obtener el MCD es el siguiente:

Se elabora una tabla similar al mínimo común múltiplo, y se procede a realizar divisiones sucesivas, pero a diferencia del mínimo común múltiplo, no hay que llegar a 1.

Para hacer las divisiones entre números primos, todos los números deben ser divisibles entre el número primo que se elige, para el ejemplo anterior:

12	18	
		2

El primer número primo que se utiliza es el 2, porque todos los números tienen mitad exacta.

12	18	
6	9	2

Los números que quedaron no se pueden volver a dividir ambos de forma exacta entre 2, pero si entre 3 por lo que se procede a realizar la división entre este último.

12	18	
6	9	2
2	3	3

Ya no existe otro número primo que pueda dividir de forma exacta al 2 y 3 al mismo tiempo, por lo tanto ha concluido el procedimiento, y para obtener el MCD se multiplican los números que se utilizaron como divisores, MCD = 2 x 3 = 6.

Ejemplos:

Calcula el máximo común divisor para los siguientes números:

1. 18, 30, 24

18	30	24	
9	15	12	2
3	5	4	3

El MCD es 2 x 3 = **6**

2. 50, 70, 30

50	70	30	
25	35	15	2
5	7	3	5

El MCD es 2 x 5 = **10**

3. 100, 45

100	45	
20	9	5

El MCD es **5**

4. 5, 6, 10

No existe ningún número primo que pueda dividir exactamente al 5, 6 y 10, por tanto, el MCD es **1**.

5. 2, 4, 8

2	4	8	
1	2	4	2

El MCD es **2**

Ejercicios 1.5

Obtener el máximo común divisor de los siguientes números:

1. 8, 12
2. 15, 25
3. 18, 24
4. 28, 42
5. 36, 48
6. 9, 27, 47
7. 20, 30, 40
8. 7, 14, 21, 28
9. 16, 24, 32, 40
10. 11, 22, 33,44

1.6. Jerarquía de las operaciones

La jerarquía de las operaciones, también conocida como el orden de las operaciones, es una regla fundamental en matemáticas que dicta el orden en el que debes realizar diferentes operaciones matemáticas cuando se presentan juntas en una expresión o ecuación. Estas reglas se utilizan para asegurar que las operaciones se realicen de manera consistente y que se obtenga el resultado correcto. La jerarquía de las operaciones se sigue generalmente en el siguiente orden:

1. **Paréntesis:** Las operaciones dentro de paréntesis deben realizarse primero. Dentro de los paréntesis, se sigue la misma jerarquía de operaciones nuevamente.

2. **Exponentes:** Después de resolver las operaciones dentro de los paréntesis, debes realizar las operaciones de potenciación o exponentes. Esto incluye operaciones como elevar un número a una potencia.

3. **Multiplicación y División:** Después de manejar los paréntesis y los exponentes, debes realizar las operaciones de multiplicación y división en el orden en que aparecen de izquierda a derecha en la expresión.

4. **Suma y resta:** Finalmente, debes realizar las operaciones de adición y sustracción en el orden en que aparecen de izquierda a derecha en la expresión.

Es importante seguir estas reglas para garantizar que se realicen las operaciones en orden y se obtenga el resultado correcto en expresiones matemáticas complejas.

Ejemplos:

1. $(3 + 5) \text{ x } 6 + 8^2 - (6 \text{ x } 5) + 7^3$

– Primero se realizan las operaciones entre paréntesis

$8 \text{ x } 6 + 8^2 - 30 + 7^3$

- A continuación, los exponentes

  $8 \text{ x } 6 + 64 - 30 + 343$

- Posteriormente, las multiplicaciones y divisiones

  $48 + 64 - 30 + 343$

- Finalmente, sumas y restas

  425

2. $(2 \text{ x } 3)+(3-5)+[(2 \text{ x } 1.5)(6+8)]\div 2$

- Primero se realizan las operaciones entre paréntesis

  $6+(-2)+[(3)(14)]\div 2$

  $6-2+42\div 2$

- Posteriormente, como no se tienen exponentes se continua con las multiplicaciones y divisiones

  $6-2+21$

- Finalmente, sumas y restas

  25

3. $8/2^2 + (6-3) \text{ x } 5$

- Primero se realizan las operaciones entre paréntesis

  $8/2^2 + 3 \text{ x } 5$

- A continuación, los exponentes

  $8/4 + 3 \text{ x } 5$

- Posteriormente, las multiplicaciones y divisiones

  $2 + 15$

- Finalmente, sumas y restas

  17

4. $6 \text{ x } (2^2 + 3 \text{ x } 5) - 4$

- Primero se realizan las operaciones entre paréntesis. Dentro de los paréntesis, se sigue la misma jerarquía de operaciones nuevamente

  $6 \text{ x } (4 + 3 \text{ x } 5) - 4$

  $6 \text{ x } (4 + 15) - 4$

  $6 \text{ x } 19 - 4$

– Debido a que no hay más exponentes, se realizan las multiplicaciones y divisiones

$114 - 4$

– Finalmente, sumas y restas

110

5. $(2^3 + 7) \ / \ (4 - 1)$

– Primero se realizan las operaciones entre paréntesis

$(8 + 7) \ / \ 3$

$15 \ / \ 3$

– Debido a que no hay más exponentes, se realizan las multiplicaciones y divisiones

5

Ejercicios 1.6

Resolver las siguientes operaciones:

1. $(3 + 4) \text{ x } (5 - 2)^2$
2. $2^3 \text{ x } 6 \div 2 \ + \ 5$
3. $8 + 6 \div 2^2 + 1$
4. $(4^2 - 3) \text{ x } (10/2)$
5. $9 - (2^2 + 5 \text{ x } 3)$
6. $(7 \text{ x } 2 + 5)/(3^2 - 4)$
7. $2 \text{ x } (9 - 3)^2/3 + 1$
8. $(5 + 1)^2 - (4 \text{ x } 3)$
9. $2^{(3-1)} \text{ x } (4 + 2)$
10. $(10 - 3)^2 + 4 \text{ x } 2$

1.7. Fracciones

Las fracciones son una parte fundamental de las matemáticas y se utilizan para representar números que no son enteros. Una fracción consta de dos partes principales: el numerador y el denominador, y se representa en la forma a/b, donde "a" es el numerador y "b" es el denominador.

1. **Numerador:** El numerador es el número que se encuentra en la parte superior de la fracción. Representa la cantidad de partes que tenemos o que estamos considerando.

2. **Denominador:** El denominador es el número que se encuentra en la parte inferior de la fracción. Representa el número total de partes en una unidad completa o en el conjunto.

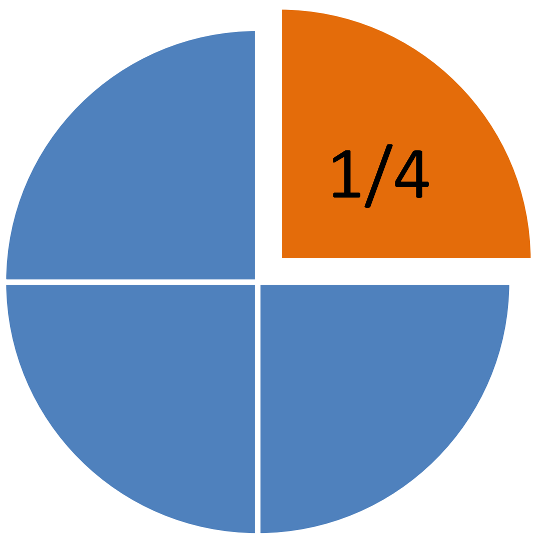
Por ejemplo, en la fracción $\frac{3}{4}$:

- El numerador es 3, lo que significa que tenemos 3 partes de algo.

- El denominador es 4, lo que significa que la unidad completa o el conjunto se divide en 4 partes iguales.

Por lo tanto, la fracción 3/4 representa tres cuartas partes de algo. Se puede pensar en ello como si hubieras dividido algo en 4 partes iguales y tomado 3 de esas partes. En la Figura 1.2, el círculo se ha dividido en 4 partes iguales, el área en color azul representa 3/4 del círculo, mientras el área en color naranja representa 1/4 del círculo.

Figura 1.2 Representación gráfica de una fracción



Simplificación de Fracciones

La simplificación de fracciones es el proceso de reducir una fracción a su forma más simple o más reducida. Una fracción simplificada tiene el mismo valor que la fracción original, pero su numerador y su denominador son más pequeños. Para simplificar una fracción se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Encontrar el Máximo Común Divisor (MCD) entre el numerador y el denominador, es decir, el número más grande que puede dividir exactamente tanto al numerador como al denominador.

2. Dividir Numerador y Denominador por el MCD, esto asegura que la fracción se reduzca a su forma más simple.

A continuación, un ejemplo de simplificación de fracciones:

Supongamos que tenemos la fracción $\frac{24}{36}$ y deseamos simplificarla.

1. Encontrar el MCD de 24 y 36

24	36	
12	18	2
6	9	2
2	3	3

En este caso, el MCD de 24 y 36 es 2 x 2 x 3 = 12.

2. Dividir numerador y denominador por el MCD

$$\frac{24}{36} = \frac{24 \div 12}{36 \div 12} = \frac{2}{3}$$

Entonces, la fracción 24/36 simplificada es 2/3.

Suma de fracciones

La suma de fracciones implica combinar dos o más fracciones para obtener una sola fracción que represente su suma total.

La suma de fracciones con el mismo denominador es bastante simple, simplemente se suman los numeradores y se mantiene el mismo denominador, y de ser posible se simplifica la fracción resultante.

Ejemplos:

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Para sumar fracciones con diferentes denominadores, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Encontrar el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores originales. Por ejemplo, si se desea sumar 3/4 y 5/8, su mcm es 8.

2. Se divide el mcm entre cada denominador y el resultado se multiplica por el numerador correspondiente. Para el ejemplo anterior, sumar 1/4 y 1/8, se divide primero el mcm 8 entre el denominador 4 y el resultado se multiplica por el numerador obteniéndose 8/4*3=6,el procedimiento se repite para la siguiente fracción 8/8*5=5.

3. El resultado de la suma tendrá como denominador el mcm y como numerador la suma de los resultados obtenidos en el paso anterior. Para finalizar, de ser posible, se simplifica la fracción obtenida. Para el ejemplo que estamos tratando:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{6+5}{8} = \frac{11}{8}$$

A continuación, se presentan otros ejemplos de suma de fracciones:

1. $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9+2}{12}=\frac{11}{12}$

2. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1+2}{4}=\frac{3}{4}$

3. $\frac{1}{7}+\frac{2}{3}=\frac{3+14}{21}=\frac{17}{21}$

4. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{6+4+3}{12}=\frac{13}{12}$

5. $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}=\frac{45+24+10}{60}=\frac{79}{60}$

Resta de fracciones

La resta de fracciones se realiza de manera similar a la suma de fracciones, pero en lugar de sumar los numeradores se restan.

Ejemplos:

1. $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1-2}{4}=\frac{-1}{4}$

3. $\frac{1}{7}-\frac{2}{3}=\frac{3-14}{21}=\frac{11}{21}$

4. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$

5. $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{15-8}{20}=\frac{7}{20}$

Ejercicios 1.7

Realice las siguientes sumas y restas de fracciones:

1. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

2. $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$

3. $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$

4. $\frac{2}{7}+\frac{5}{9}$

5. $\frac{1}{6}+\frac{4}{5}$

6. $\frac{5}{6}-\frac{2}{9}$

7. $\frac{4}{9} - \frac{1}{3}$

8. $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$

9. $\frac{7}{8} - \frac{3}{7}$

10. $\frac{9}{10} - \frac{2}{5}$

Multiplicación de fracciones

La multiplicación de fracciones se realiza multiplicando los numeradores de las fracciones entre sí para obtener el nuevo numerador y multiplicando los denominadores de las fracciones entre sí para obtener el nuevo denominador. De ser posible, se simplifica la fracción obtenida.

Ejemplos:

1. $\frac{2}{3} \text{x} \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

2. $\frac{2}{3} \text{x} \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

3. $\frac{1}{7} \text{x} \frac{2}{3} = \frac{2}{21}$

4. $\frac{1}{2} \text{x} \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

5. $\frac{3}{4} \text{x} \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

División de fracciones

La división de fracciones se realiza multiplicando la primera fracción por el inverso multiplicativo (recíproco) de la segunda fracción. El recíproco de una fracción es simplemente invertir el numerador y el denominador. De igual forma que con las operaciones anteriores, el resultado se simplifica de ser posible.

Ejemplos:

1. $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \text{x} \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$

2. $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \text{x} \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

3. $\frac{1}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{7} \text{x} \frac{3}{2} = \frac{3}{14}$

4. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \text{x} \frac{3}{1} = \frac{3}{2}$

5. $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \text{x} \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$

Ejercicio 1.8

Realice las siguientes multiplicaciones y divisiones de fracciones:

1. $\frac{1}{3} \text{x} \frac{1}{4}$

2. $\frac{2}{5} \text{x} \frac{3}{7}$

3. $\frac{3}{8} \text{x} \frac{1}{8}$

4. $\frac{2}{7} \text{x} \frac{5}{9}$

5. $\frac{1}{6} \text{x} \frac{4}{5}$

6. $\frac{5}{6} \div \frac{2}{9}$

7. $\frac{4}{9} \div \frac{1}{3}$

8. $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$

9. $\frac{7}{8} \div \frac{3}{7}$

10. $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5}$

1.8. Evaluación

A continuación, se proponen una serie de ejercicios para evaluar lo aprendido en el presente capítulo:

1. Obtener el mcm de 25, 35
2. Obtener el MCD de 25, 35
3. $(4 \text{ x } 3^2) + (5 - 2) \text{x } 2^3$
4. $(9 - 3^2) \text{ x } (7/2 + 1)$
5. $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$
6. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$
7. $\frac{2}{5} - \frac{2}{15}$
8. $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$
9. $\frac{4}{9} \text{x} \frac{1}{3}$
10. $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$

1.9. Solución de ejercicios impares

En esta sección se proporcionan los resultados de los ejercicios impares y de la evaluación:

Ejercicios 1.1

1. $-6 < 6$
3. $+2 > -7$
5. $-4 > -7$
7. $-5 < 1$
9. $-6 < +4$

Ejercicios 1.2

1. 8
3. 3
5. -7
7. -3
9. -12

Ejercicios 1.3

1. 6
3. -56
5. 56
7. 3
9. 4

Ejercicios 1.4

1. 12
3. 60
5. 120
7. 84
9. 96

Ejercicios 1.5

1. 4
3. 6
5. 12
7. 10
9. 8

Ejercicios 1.6

1. 63
3. 10.5
5. -10
7. 25
9. 24

Ejercicios 1.7

1. ${}^{7}/_{12}$
3. ${}^{1}/_{2}$
5. ${}^{29}/_{30}$
7. ${}^{1}/_{9}$
9. ${}^{25}/_{56}$

Ejercicios 1.8

1. ${}^{1}/_{12}$
3. ${}^{3}/_{64}$
5. ${}^{2}/_{15}$
7. ${}^{4}/_{3}$
9. ${}^{9}/_{4}$

Evaluación

1. 175
2. 5
3. 60
4. 0
5. $^{11}/_{15}$
6. 2
7. $^{4}/_{15}$
8. $^{11}/_{12}$
9. $^{4}/_{27}$
10. $^{3}/_{2}$

2. Leyes de los Exponentes (Enteros y radicales)

Las leyes de los exponentes con enteros y radicales son fundamentales en matemáticas y, en particular, en el campo de la ingeniería y tecnología; permite simplificar expresiones algebraicas y reducir cálculos complicados a formas más sencilla; aunque pueden parecer abstractas al principio, su relevancia es clara e importante. Ya que a través de expresiones algebraicas se modelan sistemas dinámicos para comprender su comportamiento físico, para ello es necesario simplificar a una expresión algebraica más sencilla para la simulación antes de llevar a la construcción del prototipo.

2.1. Introducción

Exponente, es un término empleado en matemáticas para indicar el *número* de *veces* que una *base* se ha de *multiplicar* por *sí misma*. Un exponente se puede escribir normalmente en la parte superior derecha de la base como un pequeño número o letra, como se puede observar en la ecuación 2.1. La expresión x, puede ser leída como “x " a la *n-ésima* potencia, eso significa que la base x se multiplica por sí mismo *n* veces la base, *n* debe ser un entero positivo ($n > 0$) y *x* debe ser $x \geq 0$.

$$\underbrace{x}_{\text{base}}^{\mathrm{n}} \longleftarrow \text{exponente} \tag{2.1}$$

También se puede tener expresiones $(x + y)^4$, puede ser leída como “$x + y$", a la cuarta potencia eso significa que la base $(x + y)$ es multiplicado por sí mismo cuatro veces la base, es decir: $(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$, como se muestra en la ecuación 2.2.

$$\underbrace{(x + y)}_{\text{base}}^{4} \longleftarrow \text{exponente} \tag{2.2}$$

Además, se puede tener expresiones como $cos^3(x)$, que puede ser leída como “$cos\ de\ x$" a la tercera potencia y expresa que el $cos(x)$ debe multiplicarse por sí mismo tres veces: $cos(x)cos(x)cos(x)$.

Representación exponencial

La potenciación es el término utilizado para referirse de manera abreviada a la operación matemática que consiste en multiplicar factores iguales. El entero positivo ***n*** se denomina exponente y el número real cualquiera ***a*** se llama base como se muestra en la ecuación 2.3; entonces la potencia ***n-ésima*** de ***a*** es

$$\underset{\text{base}}{\boldsymbol{a}}^{\overset{\text{exponente}}{\boldsymbol{n}}} = \underbrace{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \cdots \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}_{\text{“}n\text{” número de veces}} \tag{2.3}$$

Es importante resaltar que si ***n*** es un entero positivo, entonces una expresión como $5a^n$ significa $5(a^n)$, no $(5a)^n$. El número real 5 es el coeficiente de a^n en la expresión 5. De la misma manera, $-5a^n$ significa $(-5)a^n$, no $(-3a)^n$. En este mismo sentido, la diferencia entre $(-2)^4$ y -2^4 es la siguiente; en $(-2)^4$el exponente se aplica a –2 y el resultado es +16; en la segunda expresión -2^4 el exponente se aplica a 2 y el resultado es –16.

Ejemplos:

Desarrollo de notaciones exponenciales

1. $4^3 = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{\text{3 veces}} = 16 \cdot 4 = 64$

2. $m^n = \underbrace{m \cdot m \cdot m \cdots m}_{\text{“}n\text{” veces}}$

3. $x^5 = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{5 veces}}$

4. $(w + x + y + z)^3 = \underbrace{(w + x + y + z) \cdot (w + x + y + z) \cdot (w + x + y + z)}_{\text{3 veces}}$

5. $7 \cdot 2^5 = 7 \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{5 veces}} = 7 \cdot 32 = 224$

6. $8(-3)^2 = 8\underbrace{[(-3) \cdot (-3)]}_{\text{2 veces}} = 8 \cdot 9 = 72$

7. $2(-3)^3 = 2\underbrace{[(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)]}_{\text{3 veces}} = 2 \cdot (-27) = -54$

8. $-3^4 = -\underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{\text{4 veces}} = -81$

9. $(m + n)^4 = \underbrace{(m + n) \cdot (m + n) \cdot (m + n) \cdot (m + n)}_{\text{4 veces}}$

10. $3 \cdot 5^2 = 3 \cdot \underbrace{(5 \cdot 5)}_{\text{2 veces}} = 3 \cdot 25 = 75$

Ejercicios 2.1

Desarrollar las siguientes notaciones exponenciales.

1. $m^4 =$

2. $(x + y)^5 =$

3. $x^m =$

4. $(1 + 2)^4 =$

5. $3^3 =$

6. $5 \cdot 2^4 =$

7. $9(-2)^4 =$

8. $6(-4)^3 =$

9. $-2^4 =$

10. $8 \cdot 6^2 =$

2.2. Leyes de los exponentes Enteros

Las leyes de los exponentes son reglas matemáticas que ayudan a simplificar y manipular expresiones algebraicas que involucran exponentes. A continuación se muestran las principales leyes de los exponentes.

2.2.1. Primera Ley de los Exponentes

Si multiplicamos dos potencias de la misma base, se obtiene la misma base con la suma los exponentes, ver ecuación 2.4. Considera que a y b son enteros positivos se tiene:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b} \tag{2.4}$$

Ejemplos:

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

1. $x^4 \cdot x^6 = x^{4+6} = x^{10}$

2. $(6x^3y^7)(3xy^{-5}) = 18x^{3+1}y^{7-5} = 18x^4y^2$

3. $(x+y)^2(x+y)^3 = (x+y)^{2+3} = (x+y)^5$

4. $(8x^3y^2)(3x^2y^{-5})(2x^{-5}y^{-3}) = (8 \cdot 3 \cdot 2)x^{3+2-5}y^{2-5-3} = 48x^0y^{-6} = 48y^{-6}$

5. $7x^{m+1}y^{3n+2} \cdot 4x^{2m+2}y^{n+3} = (7 \cdot 4)x^{m+1+2m+2}y^{3n+2+n+3} = 28x^{3m+3}y^{4n+5}$

6. $m^2n^3 \cdot 5m^4n^5 = 5m^{2+4}n^{3+5} = 5m^6n^8$

7. $(9m^4n^3)(5mn^{-2}) = 45m^{4+1}n^{3-2} = 45m^5n$

8. $m^{x+2}n^{x+3} \cdot 9m^{x+4}n^{x-5} = 9m^{x+x+2+4}n^{x+x+3-5} = 9m^{2x+6}n^{2x-2}$

9. $(m+n)^2 \cdot 2(m+n)^3 \cdot 3(m+n)^4 = (1 \cdot 2 \cdot 3)(m+n)^{2+3+4} = 6(m+n)^9$

10. $m^{2x}n^{3x} \cdot 8m^{4x}n^{5x} = 8m^{2x+4x}n^{3x+5x} = 8m^{6x}n^{8x}$

Ejercicios 2.2

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

1. $x^7 \cdot x^8 =$

2. $(8x^8y^8)(6x^{-2}y^{-6}) =$

3. $(x+y)^2(x+y)^3(x+y)^4 =$

4. $(7x^4y^3)(4x^3y^{-3})(3x^{-7}y^2) =$

5. $3x^{2m+4}y^{3n+5} \cdot 8x^{m+5}y^{3n+2} =$

6. $9m^3n^4 \cdot 3m^3n^4 =$

7. $(8m^5n^6)(-5m^4n^{-3}) =$

8. $m^{2x+1}n^{2x+3} \cdot 6m^{3x+4}n^{2x-5} =$

9. $4(2m+3n)^2 \cdot 3(2m+3n)^3 \cdot 5(2m+3n)^4 =$

10. $m^{4x}n^{5x} \cdot 4m^{6x}n^{5x} =$

2.2.2. Segunda Ley de los Exponentes

Para dividir dos potencias con la misma base, se obtiene la misma base con la resta de los exponentes, ver ecuación 2.5. Considera que a y b son enteros positivos se tiene:

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \tag{2.5}$$

Ejemplos:

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

1. $\frac{x^9}{x^5} = \frac{(x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{(x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x)} = x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$

2. $\frac{6x^3y^7}{3xy^{-5}} = 2x^{3-1}y^{7-(-5)} = 2x^2y^{12}$

3. $\frac{(x+y)^5}{(x+y)^2} = (x+y)^{5-2} = (x+y)^3$

4. $\frac{8x^3y^2}{2x^{-5}y^{-3}} = \left(\frac{8}{2}\right) x^{3-(-5)}y^{2-(-3)} = 4x^8y^5$

5. $\frac{12x^{2m+1}y^{3n+2}}{4x^{m+2}y^{n+3}} = \left(\frac{12}{4}\right) x^{2m+1-(m+2)}y^{3n+2-(n+3)} = 3x^{m-1}y^{2n-1}$

6. $\frac{5m^4n^5}{2m^2n^3} = \frac{5}{2}m^{4-2}n^{5-3} = \frac{5}{2}m^2n^2$

7. $\frac{25m^4n^3}{5mn^{-2}} = \left(\frac{25}{5}\right) m^{4-1}n^{3-(-2)} = 5m^3n^5$

8. $\frac{9m^{2x+4}n^{3x-5}}{3m^{x+2}n^{x+3}} = \left(\frac{9}{3}\right) m^{2x+4-(x+2)}n^{3x-5-(x+3)} = 3m^{x-2}n^{2x-8}$

9. $\frac{18(m+n)^7}{2(m+n)^3} = \left(\frac{18}{2}\right) (m+n)^{7-3} = 9(m+n)^4$

10. $\frac{8m^{4x}n^{5x}}{4m^{2x}n^{3x}} = \left(\frac{8}{4}\right) m^{4x-2x}n^{5x-3x} = 2m^{2x}n^{2x}$

Ejercicios 2.3

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

1. $\frac{x^{\mathbf{12}}}{x^{\mathbf{8}}} =$

2. $\frac{12x^5y^9}{3x^2y^{-5}} =$

3. $\frac{(x+y)^8}{(x+y)^5} =$

4. $\frac{18x^4y^3}{6x^{-2}y^{-3}} =$

5. $\frac{22x^{3m+4}y^{3n+5}}{11x^{m+2}y^{n+7}} =$

6. $\frac{18m^5n^6}{6m^3n^4} =$

7. $\frac{27m^5n^5}{3mn^{-3}} =$

8. $\frac{18m^{3x+5}n^{6x-1}}{4m^{2x+8}n^{4x+7}} =$

9. $\frac{36(m+n)^9}{16(m+n)^5} =$

10. $\frac{45m^{5x}n^{7x}}{5m^{2x}n^{4x}} =$

2.2.3. Tercera Ley de los Exponentes

Para elevar una potencia a una nueva potencia, se multiplican los exponentes como se muestra en la ecuación 2.6.

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n} \tag{2.6}$$

Ejemplos:

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

1. $(x^4)^2 = x^{4\cdot 2} = x^8$

2. $(x^{-4})^2 \cdot [(x^5)^3]^2 = x^{(-4)\cdot 2} \cdot x^{(5)\cdot 3\cdot 2} = x^{-8} \cdot x^{30} = x^{-8+30} = x^{22}$

3. $[(x+y)^2]^3 = (x+y)^{2\cdot 3} = (x+y)^6$

4. $4(y^{-5})^3 = 4y^{(-5)\cdot 3} = 4y^{-15}$

5. $9(x^{7m+3})^2 = 9x^{(7m+3)\cdot 2} = 9x^{14m+6}$

6. $-2(m^3)^5 = -2m^{3\cdot 5} = -2m^{15}$

7. $-3(m^4)^4 = -3m^{(4)\cdot 4} = -3m^{16}$

8. $5(m^{2x+4})^6 = 5m^{(2x+4)\cdot 6} = 5m^{12x+24}$

9. $a[(m+n)^2]^3 \cdot 2[(m+n)^4]^5 = a(m+n)^6 2(m+n)^{20} = 2a(m+n)^{26}$

10. $4\left(\frac{m^{7x}}{m^{2x}}\right)^3 = 4(m^{7x-2x})^3 = 4(m^{5x})^3 = 4m^{5x\cdot 3} = 4m^{15x}$

Ejercicios 2.4

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

1. $(x^9)^2 =$

2. $(x^{-4})^3 \cdot [(x^5)^3]^2 =$

3. $8[(x+y)^7]^4 =$

4. $13(y^{-5})^{-4} =$

5. $-3(x^{6m+5})^3 =$

6. $4(m^8)^{-2} =$

7. $-9(m^{4x})^5 =$

8. $12(m^{3x+5})^4 =$

9. $17a[(m+n)^{-2}]^4 \cdot 3[(m+n)^3]^4 =$

10. $5x(m^{6x+2})^5 =$

2.2.4 Cuarta Ley de los Exponentes

Para elevar un producto a una potencia, se eleva cada factor a la potencia como se muestra en la ecuación 2.7.

$$(xy)^n = x^n y^n \tag{2.7}$$

Ejemplos:

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

1. $(x^4y)^2 = x^{4\cdot 2} \cdot y^2 = x^8y$

2. $(x^{-4}y^2)^2 \cdot [(x^5y^2)^3]^2 = x^{(-4)\cdot 2}y^{2\cdot 2} \cdot x^{(5)\cdot 3\cdot 2}y^{2\cdot 3\cdot 2} = x^{-8}y^4 \cdot x^{30}y^{12} = x^{22}y^{16}$

3. $[a(x+y)^4]^3 = a^3(x+y)^{4\cdot 3} = a^3(x+y)^{12}$

4. $(-2x^3y^{-5})^3 = (-2)^3x^{3\cdot 3}y^{(-5)\cdot 3} = -8x^9y^{-15}$

5. $(4x^{2m+2}y^{n+3})^2 = (4\cdot 4)x^{(2m+2)\cdot 2}y^{(n+3)\cdot 2} = 16x^{4m+4}y^{2n+6}$

6. $(-2m^2n^3)^5 = (-2)^5m^{2\cdot 5}n^{3\cdot 5} = -32m^{10}n^{15}$

7. $(-3m^{-4}n^3)^4 = (-3)^4m^{(-4)\cdot 4}n^{3\cdot 4} = 81m^{-16}n^{12}$

8. $(2m^{x+4}n^{2x+3})^6 = 2^6m^{(x+4)\cdot 6}n^{(2x+3)\cdot 6} = 64m^{6x+24}n^{12x+18}$

9. $[a(m+n)^2]^3 \cdot 2[(m+n)^4]^5 = a^3(m+n)^6 2(m+n)^{20} = 2a^3(m+n)^{26}$

10. $6(m^{5x-2}n^{7x-4})^3 = 6m^{(5x-2)\cdot 3}n^{(7x-4)\cdot 3} = 6m^{15x-6}n^{21x-12}$

Ejercicios 2.5

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

1. $[a(x^4)^2]^3 =$

2. $(ax^{-5})^{-2} \cdot a^4(x^2)^{-3} =$

3. $\{m[(a+b)^3]^7\}^2 =$

4. $[(-2a^3b^{-2})^3]^2 =$

5. $(5x^{3m+1}y^{2n+2})^3 =$

6. $[(-3m^2n^3)^2]^2 =$

7. $(-4m^{-5}n^{-4})^3 =$

8. $[(2a^{2x+3}b^{3x+4})^2]^3 =$

9. $10\{a[(m+2n)^2]^3\}^4 \cdot 2[(m+2n)^4]^6 =$

10. $3(m^{8x-4}n^{6x-9})^2 =$

2.2.5. Quinta Ley de los Exponentes

Para elevar un cociente a una potencia, se eleva tanto el numerador como el denominador a la potencia, como se muestra en la ecuación 2.8.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \tag{2.8}$$

Ejemplos:

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

1. $\left(\frac{x}{2y}\right)^2 = \frac{x^2}{(2y)^2} = \frac{x^2}{2y^2}$

2. $\left(\frac{2x^3y^7}{3mn^{-5}}\right)^3 = \frac{(2x^3y^7)^3}{(3mn^{-5})^3} = \frac{8x^9y^{21}}{27m^3n^{-15}} = \frac{8n^{15}x^9y^{21}}{27m^3}$

3. $\left[\frac{(x+y)^5}{(a+b)^2}\right]^m = \frac{(x+y)^{5m}}{(a+b)^{2m}}$

4. $\left(\frac{2x^3y^2}{3z^{-5}}\right)^4 = \frac{(2x^3y^2)^4}{(3z^{-5})^4} = \frac{16x^{12}y^8}{81z^{-20}} = \frac{16}{81}x^{12}y^8z^{20}$

5. $\left(\frac{3x^{2m+1}y^{3n+2}}{4z^{m+2}}\right)^3 = \frac{(3x^{2m+1}y^{3n+2})^3}{(4z^{m+2})^3} = \frac{27x^{6m+3}y^{9n+6}}{64z^{3m+6}}$

6. $\left(\frac{4m^4n^5}{2a^{-3}}\right)^4 = 2^4\frac{(m^4n^5)^4}{(a^{-3})^4} = 16\frac{m^{16}n^{20}}{a^{-12}} = 16a^{12}m^{16}n^{20}$

7. $\left(\frac{3a^{-4}b^{-3}}{5c^{-2}}\right)^n = \frac{3^n(a^{-4}b^{-3})^n}{(5c^{-2})^n} = \frac{3^n a^{-4n}b^{-3n}}{5^n c^{-2n}} = \frac{3^n c^{2n}}{5^n a^{4n}b^{3n}}$

8. $\left(\frac{u^{2x+3}v^{4x-3}}{w^{x+4}}\right)^5 = \frac{(u^{2x+3}v^{4x-3})^5}{(w^{x+4})^5} = \frac{u^{10x+15}v^{20x-15}}{w^{5x+20}}$

9. $\left(\frac{18(m+n)^7}{2(a+b)^3}\right)^x = \frac{18^x(m+n)^{7x}}{2^x(a+b)^{3x}}$

10. $\left(\frac{u^{2x}v^{3x}}{w^{4x}}\right)^a = \frac{(u^{2x}v^{3x})^a}{(w^{4x})^a} = \frac{u^{2ax}v^{3ax}}{w^{4ax}}$

Ejercicios 2.6

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

1. $\left(\frac{2x}{5y}\right)^3 =$

2. $\left(\frac{2x^2y^6}{3m^2n^{-2}}\right)^4 =$

3. $\left[\frac{(2x+y)^{-5}}{(a+3b)^{-2}}\right]^m =$

4. $\left(\frac{3x^4y^5}{2z^{-2}}\right)^5 =$

5. $\left(\frac{3x^{2m+1}y^{3n+2}}{4z^{m+2}}\right)^3 =$

6. $\left(\frac{8m^{-2}n^{-7}}{2a^3}\right)^3 =$

7. $\left(\frac{a^{m-6}b^{m-7}}{c^{m+2}}\right)^n =$

8. $\left(\frac{u^{2x+4}v^{5x-4}}{w^{3x+2}}\right)^6 =$

9. $\left(\frac{20(m+n)^8}{4(a+b)^{-3}}\right)^{2x} =$

10. $\left(\frac{u^{2x-3}v^{3x-5}}{w^{7x-9}}\right)^a =$

2.2.6. Sexta Ley de los Exponentes

Para mover del numerador al denominador o de denominador al numerador un número elevado a una potencia, se cambia el signo del exponente, como se muestra en la ecuación 2.9.

$$\frac{x^{-n}}{y^{-n}} = \frac{y^n}{x^n} \tag{2.9}$$

Caso particular, cuando la potencia elevada a exponente 0 es igual a 1, si $x \neq 0$ es un número real, como se observa en la ecuación 2.10.

$$x^0 = 1 \tag{2.10}$$

Otro caso particular, es cuando número elevado al ***exponente* 1** es igual a su base, ver la ecuación 11.

$$(x + y)^1 = (x + y) \tag{2.11}$$

Ejemplos 2.7 Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

1. $\frac{x^{-3}}{(4y)^{-2}} = \frac{(4y)^2}{x^3} = \frac{16y^2}{x^3}$

2. $\frac{28x^8y^{-2}}{7m^3n^{-5}} = \frac{4n^5\,x^8}{m^3y^2}$

3. $\frac{(x+2y)^{-5m}}{(a+3b)^{-2m}} = \frac{(a+3b)^{2m}}{(x+2y)^{5m}}$

4. $\left[\left(\frac{x^{m+3}y^{m+2}}{3z^{m-5}}\right)^{m+2}\left(\frac{3x^{2m+1}y^{3n+2}}{4z^{m+2}}\right)^2\right]^0 = 1$

5. $\left(\frac{7x^{8m+10}y^{3n+5}}{9z^{4m+3}}\right)^0\left(\frac{x^{m+3}y^{m+2}}{3z^{m-5}}\right) = 1\cdot\frac{x^{m+3}y^{m+2}}{3z^{m-5}} = \frac{x^{m+3}y^{m+2}}{3z^{m-5}}$

6. $\left(\frac{125m^{-4}n^{-5}}{25a^{-7}}\right)^3 = 5^3\,\frac{(m^{-4}n^{-5})^3}{(a^{-7})^3} = 125\,\frac{m^{-12}n^{-15}}{a^{-21}} = \frac{125a^{21}}{m^{12}n^{15}}$

7. $\left(\frac{3a^{-4}b^{-3}}{5c^{-2}}\right)^1 = \frac{3a^{-4}b^{-3}}{5c^{-2}} = \frac{3c^2}{5a^4b^3}$

8. $\left(\frac{u^{2x+3}v^{4x-3}}{w^{x+4}}\right)^{-1} = \frac{(u^{2x+3}v^{4x-3})^{-1}}{(w^{x+4})^{-1}} = \frac{w^{x+4}}{u^{2x+3}v^{4x-3}}$

9. $\frac{69(2m+3n)^{3x}}{23(4a+5b)^{-5x}} = 3(2m+3n)^{3x}(4a+5b)^{5x}$

10. $\frac{(u^{2x}v^{3x})^0}{(w^{7x})^1} = \frac{1}{w^{7x}}$

Ejercicios 2.7 Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

1. $\frac{x^{-5}}{(3y)^{-3}} = \frac{(3y)^3}{x^5} =$

2. $\frac{35x^{-8}y^{-3}}{7m^6n^{-3}} =$

3. $\frac{(3x+9y)^{-5(0)}}{(4a+5b)^{-2}} =$

4. $\left(\frac{17a^{-9}b^{-5}}{12c^{-3}}\right)^{-1} =$

5. $\left\{\left[\left(\frac{125m^{-4}n^{-5}}{25a^{-7}}\right)^3 \left(\frac{u^{2x-3}v^{3x-5}}{w^{7x-9}}\right)^a\right]^0\right\}^5 =$

6. $\left(\frac{35x^{-8}y^{-3}}{7m^6n^{-3}}\right)^0 \left(\frac{5y^{-3}}{x^{-5}}\right) =$

7. $\frac{\left(m^{-4}n^{-5}\right)^{-3}}{(a^{-7})^{-2}} =$

8. $\frac{26(2m+5n)^{3x}}{13(2m+5n)^{3x}} =$

9. $\left(\frac{2u^{2x-7}v^{5x-3}}{8w^{3x+5}}\right)^{-1} =$

10. $\left\{\left[\left(\frac{2m+3n}{4a+5b}\right)^{5x-3}\right]^2\right\}^0 =$

2.3. Leyes de los exponentes Radicales

De la ecuación de 2.1 se tiene que x^n, x es la base que se multiplica por sí mismo *n* veces la base, *n* es el exponente debe ser un entero positivo ($n > 0$). Ahora se estudia el caso cuando el *exponente* es un número *racional*, *fracción ó radical* también es conocido como *potencia de exponentes fraccionarios*, ver la ecuación 2.12.

Definición de la raíz n-ésima (Caso particular)

$$\sqrt[n]{x} \tag{2.12}$$

es leída como la raíz ***n-ésima principal*** de $\boldsymbol{x}$, el símbolo √ significa “la raíz de”. y puede ser expresada también como en la ecuación 2.13

$$x^{\frac{1}{n}} \tag{2.13}$$

donde $\boldsymbol{n}$ es un entero positivo ($\boldsymbol{n > 0}$) y $\boldsymbol{x}$ debe ser $\boldsymbol{x \geq 0}$ ya que los números negativos no están definidos.

Definición de la raíz n-ésima (Caso general)

Se tienen expresiones tales como en la ecuación 2.14

$$\boldsymbol{x^{\frac{a}{b}}} \tag{2.14}$$

donde $\frac{a}{b}$ es la potencia del exponente y es número fraccional, *b* es el *denominador* de la fracción y es el índice del radical; *a* es el *numerador* de la fracción es el exponente el radicando y puede ser expresada también como la ecuación 2.15

$$\boldsymbol{\sqrt[b]{x^a}} \tag{2.15}$$

Ejemplos:

Escribe los siguientes radicales como potencia de exponente fraccionario o viceversa según sea el caso.

1. $\sqrt[2n]{x} = x^{\frac{1}{2n}}$

2. $x^{\frac{3}{5n}} = \sqrt[5n]{x^3}$

3. $\sqrt[2]{x^7} = x^{\frac{7}{2}}$

4. $a^{\frac{8m}{2n}} = a^{\frac{4m}{n}} = \sqrt[n]{a^{4m}}$

5. $\sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}$

6. $8^{\frac{6}{18}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

7. $\sqrt[4]{x^8} = x^{\frac{8}{4}} = x^2$

8. $25^{\frac{2}{4}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25} = 5$

9. $\sqrt[18]{m^{12}} = m^{\frac{12}{18}} = m^{\frac{2}{3}}$

10. $9^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9^2} = \sqrt[3]{81}$

Ejercicios 2.8

Escribe los siguientes radicales como potencia de exponente fraccionario o viceversa según sea el caso.

1. $m^{\frac{7}{4a}} =$

2. $3^{\frac{4}{3}} =$

3. $\sqrt[7]{x} =$

4. $x^{\frac{9m}{3n}} =$

5. $\sqrt[2]{3^4} =$

6. $a^{\frac{8m}{2n}} =$

7. $6^{\frac{24}{18}} =$

8. $\sqrt[6]{a^4} =$

9. $125^{\frac{3}{9}} =$

10. $\sqrt[15]{8^{10}} =$

2.3.1. Primera Ley de los Radicales

La *raíz n-ésima de un producto* es igual al *producto de las raíces n-ésimas de los factores*, como se observa en la ecuación (2.16).

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \tag{2.16}$$

Ejemplos:

Desarrolla las raíces n-ésima de un producto.

1. $\sqrt[2]{ab} = \sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[2]{b}$

2. $\sqrt[2]{4a} = \sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{a} = 2\sqrt[2]{a}$

3. $\sqrt[3]{125a} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{a} = 5\sqrt[2]{a}$

4. $\sqrt[3]{27 \cdot -8} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{(-2)^3} = 3 \cdot -2 = -6$

5. $\sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6$

6. $\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{b}$

7. $\sqrt[3]{8a^2} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{a^2} = 2\sqrt[3]{a^2}$

8. $\sqrt[4]{256a^4} = \sqrt[4]{256} \cdot \sqrt[4]{a^4} = 4a$

9. $\sqrt[3]{-8 \cdot 125} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{(-2)^3} \cdot \sqrt[3]{125} = -2 \cdot 5 = -10$

10. $\sqrt[2]{16 \cdot 81} = \sqrt[2]{16} \cdot \sqrt[2]{81} = 4 \cdot 9 = 36$

Ejercicios 2.9

Desarrolla las raíces n-ésima de un producto.

1. $\sqrt[4]{ab} =$

2. $\sqrt[3]{8a} =$

3. $\sqrt[4]{81a} =$

4. $\sqrt[2]{9 \cdot 25} =$

5. $\sqrt[3]{-8 \cdot 64} =$

6. $\sqrt[3]{a^2b} =$

7. $\sqrt[3]{27a^7} =$

8. $\sqrt[4]{81a^8} =$

9. $\sqrt[3]{-27 \cdot 64} =$

10. $\sqrt[5]{32 \cdot 243} =$

2.3.2. Segunda Ley de los Radicales

La *raíz n-ésima de un cociente* es igual al *cociente de las raíces n-ésimas del dividendo y del divisor*, como se observa en la ecuación 2.17.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \tag{2.17}$$

Ejemplos:

Desarrolla las raíces n-ésima de un cociente.

1. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

2. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$

3. $\sqrt[4]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{y}}$

4. $\sqrt[4]{\frac{16x}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16x}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2\sqrt[4]{x}}{3}$

5. $\sqrt[2m]{\frac{a^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[2m]{a^2}}{\sqrt[2m]{b^3}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[2m]{b^3}}$

6. $\sqrt[3]{\frac{8a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{8a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

7. $\sqrt[3]{\frac{8}{64m^6}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64m^6}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}\sqrt[3]{m^6}} = \frac{2}{4m^2} = \frac{1}{2m^2}$

8. $\sqrt[4]{\frac{m^3}{n^5}} = \frac{\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt[4]{n^5}}$

9. $\sqrt[4]{\frac{81}{m^4}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{m^4}} = \frac{3}{m}$

10. $\sqrt[3m]{\frac{a^4}{b^6}} = \frac{\sqrt[3m]{a^4}}{\sqrt[3m]{b^6}} = \frac{\sqrt[3m]{a^4}}{\sqrt[m]{b^2}}$

Ejercicios 2.10

Desarrolla las raíces n-ésima de un cociente.

1. $\sqrt[3m]{\frac{a^6}{b^9}} =$

2. $\sqrt[5]{\frac{a}{b}} =$

3. $\sqrt[4]{\frac{16}{256}} =$

4. $\sqrt[3]{\frac{7x}{27y}} =$

5. $\sqrt[2]{\frac{36x}{25}} =$

6. $\sqrt[5m]{\frac{a^{10}}{b^{15}}} =$

7. $\sqrt[5]{\frac{ab^{10}c}{de}} =$

8. $\sqrt[4]{\frac{81m^8}{n^{12}}} =$

9. $\sqrt[3]{\frac{8x}{27y^6}} =$

10. $\sqrt[2]{\frac{49x}{36}} =$

2.3.3. Tercera Ley de los Radicales

La *raíz n-ésima de una potencia* es igual a la raíz de la base y luego se eleva el resultado a la potencia dada, como se observa en la ecuación 2.18.

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^p = \sqrt[m]{a^p} \tag{2.18}$$

Ejemplos:

Desarrolla las raíces n-ésima de un cociente.

1. $\left(\sqrt[3]{a}\right)^5 = \sqrt[3]{a^5}$

2. $\left(\sqrt[2]{4}\right)^3 = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{64} = 8$

3. $\left(\sqrt[3]{8a}\right)^2 = \sqrt[3]{(8a)^2} = \sqrt[3]{64a} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{a} = 4\sqrt[3]{a}$

4. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{64}{25}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[2]{64}}{\sqrt[2]{25}}} = \sqrt[3]{\frac{8}{5}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

5. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{125}} = \sqrt[5]{5}$

6. $\left(\sqrt[3]{a}\right)^6 = \sqrt[3]{a^6} = a^2$

7. $\left(\sqrt[3]{2a^3}\right)^4 = \sqrt[3]{(2a^3)^4} = \sqrt[3]{16a^{12}} = \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{a^{12}} = \sqrt[3]{16} \cdot a^4 = a^4 \cdot \sqrt[3]{16}$

8. $\left(\sqrt[3]{8a^2}\right)^2 = \sqrt[3]{(8a^2)^2} = \sqrt[3]{64a^4} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{a^4} = 4\sqrt[3]{a^4}$

9. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{64a^2}{25b^6}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[2]{64a^2}}{\sqrt[2]{25b^6}}} = \sqrt[3]{\frac{8a}{5b^3}} = \frac{\sqrt[3]{8a}}{\sqrt[3]{5b^3}} = \frac{2\sqrt[3]{a}}{b\sqrt[3]{5}}$

10. $\sqrt[5]{32a^{10}\sqrt[3]{64b^{15}}} = \sqrt[5]{32a^{10} \cdot 4b^5} = \sqrt[5]{32a^{10}} \cdot \sqrt[5]{4b^5} = 2a^2b \cdot \sqrt[5]{4} = 2\sqrt[5]{4}a^2b$

Ejercicios 2.11 Desarrolla las raíces n-ésima de un cociente

1. $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} =$

2. $\left(\sqrt[5]{2a}\right)^3 =$

3. $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 =$

4. $\left(\sqrt[3]{64a^4}\right)^{\frac{1}{2}} =$

5. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{125}{81}}} =$

6. $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64a^{12}}} =$

7. $\left(\sqrt[7]{3a}\right)^4 =$

8. $\left(\sqrt[3]{8a^3}\right)^2 =$

9. $\left(\sqrt[3]{729a^8}\right)^{\frac{1}{2}} =$

10. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{8a^{24}}{27b^9}}} =$

2.4. Evaluación

A continuación, se propone una serie de ejercicios para evaluar lo aprendido en el presente capítulo:

1. $m^{7x}n^{6x} \cdot 5m^{2x}n^{3x} =$

2. $\frac{99m^{8x}n^{7x}}{11m^{5x}n^{5x}} =$

3. $\frac{1}{2}a[(m+n)^2]^{-5} \cdot 10b[(m+n)^3]^6 =$

4. $2\{a[b(4m+n)^5]^3\}^2 \cdot 4[(4m+n)^4]^{-6} =$

5. $\left(\frac{u^{3a+4}v^{7a-4}}{w^{4a+3}}\right)^3 =$

6. $\left\{\left[\left(\frac{7m+8n}{4a+\frac{5}{9}b}\right)^{5x-3}\right]^0\right\}^{\frac{7}{14}} =$

7. $(64a)^{\frac{4}{12}} =$

8. $\sqrt[2]{\frac{121x^4}{3y}} =$

9. $\left(\sqrt[3]{64a^{16}b^{12}}\right)^{\frac{1}{2}} =$

10. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{a^{48}}{b^{36}}}} =$

2.5. Solución de ejercicios impares

En esta sección se proporcionan los resultados de los ejercicios impares y de la evaluación:

Ejercicios 2.1

1. $m^4 = \underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot m}_{\text{4 veces}}$

3. $x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{\text{“}m\text{” veces}}$

5. $3^3 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{3 veces}} = 27$

7. $9(-2)^4 = 9\underbrace{[(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)]}_{\text{4 veces}} = 9 \cdot 16 = 144$

9. $-2^4 = -\underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{4 veces}} = -16$

Ejercicios 2.2

1. $x^7 \cdot x^8 = x^{7+8} = x^{15}$

3. $(x+y)^2(x+y)^3(x+y)^4 = (x+y)^{2+3+4} = (x+y)^9$

5. $3x^{2m+4}y^{3n+5} \cdot 8x^{m+5}y^{3n+2} = (3 \cdot 8)x^{2m+4+m+5}y^{3n+5+3n+2} = 24x^{3m+9}y^{6n+7}$

7. $(8m^5n^6)(-5m^4n^{-3}) = -40m^{5+4}n^{6-3} = -40m^9n^3$

9. $4(2m+3n)^2 \cdot 3(2m+3n)^3 \cdot 5(2m+3n)^4 = (4 \cdot 3 \cdot 5)(2m+3n)^{2+3+4} = 6(m+n)^9$

Ejercicios 2.3

1. $\frac{x^{12}}{x^8} = \frac{(x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x)\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}{(x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x)} =\cdot\, x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$

3. $\frac{(x+y)^8}{(x+y)^5} = (x+y)^{8-5} = (x+y)^3$

5. $\frac{22x^{3m+4}y^{3n+5}}{11x^{m+2}y^{n+7}} = \left(\frac{22}{11}\right)x^{3m+4-(m+2)}y^{3n+5-(n+7)} = 2x^{2m+2}y^{2n-2}$

7. $\frac{27m^5n^5}{3mn^{-3}} = \left(\frac{27}{3}\right)m^{5-1}n^{5-(-3)} = 9m^4n^8$

9. $\frac{36(m+n)^9}{16(m+n)^5} = \left(\frac{36}{16}\right)(m+n)^{9-5} = \frac{9}{4}(m+n)^4$

Ejercicios 2.4

1. $(x^9)^2 = x^{9\cdot 2} = x^{18}$

3. $8[(x+y)^7]^4 = 8(x+y)^{7\cdot 4} = 8(x+y)^{28}$

5. $-3(x^{6m+5})^3 = -3x^{(6m+5)\cdot 3} = -3x^{18m+15}$

7. $-9(m^{4x})^5 = -9m^{(4x)\cdot 5} = -9m^{20x}$

9. $17a[(m+n)^{-2}]^4 \cdot 3[(m+n)^3]^4 = 17a(m+n)^{-8}3(m+n)^{12} = 51a(m+n)^4$

Ejercicios 2.5

1. $[a(x^4)^2]^3 = a^3x^{4\cdot 2\cdot 3} = a^3x^{24}$

3. $\{m[(a+b)^3]^7\}^2 = m^2(a+b)^{3\cdot 7\cdot 2} = m^2(a+b)^{42}$

5. $(5x^{3m+1}y^{2n+2})^3 = (5\cdot 5\cdot 5)x^{(3m+1)\cdot 3}y^{(2n+2)\cdot 3} = 125x^{9m+3}y^{6n+6}$

7. $(-4m^{-5}n^{-4})^3 = (-4)^3m^{(-5)\cdot 3}n^{-4\cdot 3} = -64m^{-15}n^{-12}$

9. $10\{a[(m+2n)^2]^3\}^4 \cdot 2[(m+2n)^4]^6 = 10a^4(m+2n)^{24}2(m+2n)^{24} = 20a^4(m+2n)^{48}$

Ejercicios 2.6

1. $\left(\frac{2x}{5y}\right)^3 = \frac{(2x)^3}{(5y)^3} = \frac{8x^3}{125y^3}$

3. $\left[\frac{(2x+y)^{-5}}{(a+3b)^{-2}}\right]^m = \frac{(2x+y)^{-5m}}{(a+3b)^{-2m}} = \frac{(a+3b)^{2m}}{(2x+y)^{5m}}$

5. $\left(\frac{3x^{2m+1}y^{3n+2}}{4z^{m+2}}\right)^3 = \frac{(3x^{2m+1}y^{3n+2})^3}{(4z^{m+2})^3} = \frac{27x^{6m+3}y^{9n+6}}{64z^{3m+6}}$

7. $\left(\frac{a^{m-6}b^{m-7}}{c^{m+2}}\right)^n = \frac{(a^{m-6}b^{m-7})^n}{(c^{m+2})^n} = \frac{a^{n(m-6)}b^{n(m-7)}}{c^{n(m+2)}}$

9. $\left(\frac{20(m+n)^8}{4(a+b)^{-3}}\right)^{2x} = 5^{2x}\frac{(m+n)^{16x}}{(a+b)^{-6x}} = 5^{2x}(m+n)^{16x}(a+b)^{6x}$

Ejercicios 2.7

1. $\frac{x^{-5}}{(3y)^{-3}} = \frac{(3y)^3}{x^5} = \frac{27y^3}{x^5}$

3. $\frac{(3x+9y)^{-5(0)}}{(4a+5b)^{-2}} = \frac{1}{(4a+5b)^{-2}} = (4a+5b)$

5. $\left\{\left[\left(\frac{125m^{-4}n^{-5}}{25a^{-7}}\right)^3\left(\frac{u^{2x-3}v^{3x-5}}{w^{7x-9}}\right)^a\right]^0\right\}^5 = 1^5 = 1$

7. $\frac{(m^{-4}n^{-5})^{-3}}{(a^{-7})^{-2}} = \frac{(a^{-7})^2}{(m^{-4}n^{-5})^3} = \frac{a^{-14}}{m^{-12}n^{-15}} = \frac{m^{12}n^{15}}{a^{14}}$

9. $\left(\frac{2u^{2x-7}v^{5x-3}}{8w^{3x+5}}\right)^{-1} = \frac{(2u^{2x-7}v^{5x-3})^{-1}}{(8w^{3x+5})^{-1}} = \frac{8w^{3x+5}}{2u^{2x-7}v^{5x-3}} = \frac{4w^{3x+5}}{u^{2x-7}v^{5x-3}}$

Ejercicios 2.8

1. $m^{\frac{7}{4a}} = \sqrt[4a]{m^7}$

3. $\sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}}$

5. $\sqrt[2]{3^4} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 81$

7. $6^{\frac{24}{18}} = 6^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{6^4}$

9. $125^{\frac{3}{9}} = 125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$

Ejercicios 2.9

1. $\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b}$

3. $\sqrt[4]{81a} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{a} = 3\sqrt[2]{a}$

5. $\sqrt[3]{-8 \cdot 64} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{64} = -2 \cdot 4 = -8$

7. $\sqrt[3]{27a^7} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{a^7} = 3\sqrt[3]{a^7}$

9. $\sqrt[3]{-27 \cdot 64} = \sqrt[3]{-27} \cdot \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{(-3)^3} \cdot \sqrt[3]{64} = -3 \cdot 4 = -12$

Ejercicios 2.10

1. $\sqrt[3m]{\frac{a^6}{b^9}} = \frac{\sqrt[3m]{a^6}}{\sqrt[3m]{b^9}} = \frac{\sqrt[m]{a^2}}{\sqrt[m]{b^3}}$

3. $\sqrt[4]{\frac{16}{256}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{256}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

5. $\sqrt[2]{\frac{36x}{25}} = \frac{\sqrt[2]{36x}}{\sqrt[2]{25}} = \frac{\sqrt[2]{36} \cdot \sqrt[2]{x}}{\sqrt[2]{25}} = \frac{6\sqrt[2]{x}}{5}$

7. $\sqrt[5]{\frac{ab^{10}c}{de}} = \frac{\sqrt[5]{b^{10}} \cdot \sqrt[5]{ac}}{\sqrt[5]{de}} = \frac{b^2 \cdot \sqrt[5]{ac}}{\sqrt[5]{de}}$

9. $\sqrt[3]{\frac{8x}{27y^6}} = \frac{\sqrt[3]{8x}}{\sqrt[3]{27y^6}} = \frac{2\sqrt[3]{x}}{3y^2}$

Ejercicios 2.11

1. $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2]{4} = 2$

3. $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

5. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{125}{81}}} = \sqrt[4]{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{3}}$

7. $\left(\sqrt[7]{3a}\right)^4 = \sqrt[7]{(3a)^4} = \sqrt[7]{81a^4}$

9. $\left(\sqrt[3]{729a^8}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{729a^8}} = \sqrt[3]{27a^4} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{a^4} = 3\sqrt[3]{a^4}$

Autoevaluación

1. $m^{7x}n^{6x} \cdot 5m^{2x}n^{3x} = 5m^{7x+2x}n^{6x+3x} = 5m^{9x}n^{9x}$

2. $\frac{99m^{8x}n^{7x}}{11m^{5x}n^{5x}} = \left(\frac{99}{11}\right)m^{8x-5x}n^{7x-5x} = 9m^{3x}n^{2x}$

3. $\frac{1}{2}a[(m+n)^2]^{-5} \cdot 10b[(m+n)^3]^6 = \frac{1}{2}a(m+n)^{-10} \cdot 10b(m+n)^{18} = 5ab(m+n)^8$

4. $2\{a[b(4m+n)^5]^3\}^2 \cdot 4[(4m+n)^4]^{-6} = 8a^2b^3(4m+n)^{30}(4m+n)^{-24} = 8a^2b^3(4m+n)^6$

5. $\left(\frac{u^{3a+4}v^{7a-4}}{w^{4a+3}}\right)^3 = \frac{(u^{3a+4}v^{7a-4})^3}{(w^{4a+3})^3} = \frac{u^{9a+12}v^{21a-12}}{w^{12a+9}}$

6. $\left\{\left[\left(\frac{7m+8n}{4a+\frac{5}{9}b}\right)^{5x-3}\right]^0\right\}^{\frac{7}{14}} = 1$

7. $(64a)^{\frac{4}{12}} = (64)^{\frac{1}{3}} \cdot (a)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} \cdot a^{\frac{1}{3}} = 4 \cdot a^{\frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{a}$

8. $\sqrt[2]{\frac{121x^4}{3y}} = \frac{\sqrt[2]{121x^4}}{\sqrt[2]{3y}} = \frac{\sqrt[2]{121} \cdot \sqrt[2]{x^4}}{\sqrt[2]{3y}} = \frac{11x^2}{\sqrt[2]{3y}}$

9. $\left(\sqrt[3]{64a^{16}b^{12}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{64a^{16}b^{12}}} = \sqrt[3]{8a^8b^6} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{a^8} \cdot \sqrt[3]{b^6} = 2b^2\sqrt[3]{a^8}$

10. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{a^{48}}{b^{36}}}} = \sqrt[4]{\frac{a^{16}}{b^{12}}} = \frac{a^4}{b^3}$

3. Operaciones algebraicas

3.1. Introducción

El álgebra es una rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de las estructuras abstractas, generalmente representadas mediante símbolos y letras, y las relaciones matemáticas que se establecen entre ellas. En lugar de trabajar con números concretos, el álgebra utiliza variables y expresiones algebraicas para describir patrones y reglas generales.

El álgebra es una herramienta poderosa y fundamental en muchas áreas de la ciencia, ingeniería y matemáticas. Permite resolver problemas de manera más general y abstracta, lo que facilita el desarrollo de teorías y el estudio de estructuras matemáticas subyacentes.

En el presente capítulo se describe la terminología utilizada en álgebra, así como el procedimiento que se realiza en las cuatro operaciones algebraicas, suma, resta, multiplicación y división.

3.2. Terminología algebraica

Una expresión algebraica está formada por: signos, coeficientes, literales y exponentes, sin contener una igualdad. Las expresiones algebraicas pueden simplificarse, factorizarse o manipularse mediante reglas algebraicas para obtener resultados más específicos o para resolver ecuaciones.

coeficiente

exponente

$$-7x^4 \tag{1}$$

signo literal

Un término algebraico es una expresión algebraica que consta de una combinación de constantes, literales y coeficientes numéricos, multiplicados entre sí, no separados por el signo + ó −. Ejemplos:

x

$3x^5$

$-4xy$

$\frac{6x^3}{y^4}$

Una expresión algebraica es una combinación de números, literales, operaciones matemáticas y símbolos que puede incluir sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces, pero sin contener una igualdad.

$-4x^6 + 3xy - z$

$3ab + a - b$

$\frac{-2x^3 + 5}{3y^4 - 7}$

3.3. Clasificación de las expresiones algebraicas

De acuerdo al número de términos que poseen las expresiones algebraicas se clasifican como:

Monomio: expresión algebraica que consta de un sólo término, ejemplos:

$5x$

$-3y^9$

$\frac{xz^2}{6y}$

Polinomio: expresión algebraica de dos o más términos, ejemplos:

$8xz + 6x^5y$

$-9xy + 2x^3z$

$\frac{4}{3}x - \frac{2}{8}y^2 + \frac{7}{5}z^3$

Dentro de los polinomios se encuentran los:

Binomio: expresión algebraica de dos términos, ejemplos:

$\frac{xz}{y} - y^2z$

$\frac{2}{3}ab - \frac{4}{5}\sqrt{c}$

Trinomio: expresión algebraica de tres términos, ejemplos

$x + y^2 + z^3$

$ab\sqrt{c} + c^2 - 3$

El grado absoluto de un polinomio corresponde al grado más alto de los términos que lo conforman, para determinar el grado absoluto de un polinomio, se deben seguir estos pasos:

1. Identificar todas las variables presentes en el polinomio.

2. En cada término del polinomio, sumar los exponentes de todas sus variables.

3. Elegir el grado más alto entre los términos.

Por ejemplo: el polinomio $x^8y - 6x^4y^2 + 3x^2 - x$ es de noveno grado debido a que la suma de los exponentes del primer término es nueve.

El grado con relación a una variable se refiere al exponente más alto que aparece en esa variable en el polinomio. En otras palabras, es el grado más alto de la potencia de esa variable presente en el polinomio.

Por ejemplo: el polinomio $x^5y + 7x^4y^4 - 8x^2y^6 - 4x$ es de quinto grado con relación a la variable x y de sexto grado con relación a la variable y.

3.4. Reducción de términos semejantes

Para que dos o más términos sean considerados semejantes, deben tener las siguientes características:

Las mismas variables: Los términos deben tener las mismas variables, por ejemplo, "$3x$" y "$5x$" tienen la variable "x", por lo que son semejantes.

Los mismos exponentes: Las variables en los términos deben tener los mismos exponentes, por ejemplo, "$2x^2$" y "$4x^2$" tienen el mismo exponente "2" en la variable "x", por lo que son semejantes.

Ejemplos de términos semejantes:

- "4x" y "5x" son semejantes porque tienen la misma variable "x" con el mismo exponente 1.
- "$3x^2$" y "$7x^2$" son semejantes porque tienen la misma variable "x" con el mismo exponente 2.
- "-$4y^3$" y "$2y^3$" son semejantes porque tienen la misma variable "y" con el mismo exponente 3.

Ejemplos de términos no semejantes:

- Al combinar o simplificar expresiones algebraicas, se agrupan los términos semejantes para facilitar los cálculos y obtener resultados más simples y claros.
- Los términos $x^5y^3,\quad x^2y^3,\quad x^5y^2$, no son semejantes ya que aunque en los tres se tienen las mismas variables x, y, estas no están elevadas a los mismos exponentes.
- Cuando se tienes dos o más términos semejantes en una misma expresión algebraica éstos se pueden reducir a uno sólo. Identificando primero aquellos términos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes, posteriormente sumar o restar los coeficientes de los términos semejantes para así obtener una expresión algebraica simplificada.

Ejemplos:

1. $3xy + 2xy = 5xy$
2. $-4xy^2 - 5xy^2 = -9xy^2$
3. $3a^3b^2 - a^3b^2 = 2a^3b^2$
4. $2x^5 - 5x^5 = -3x^5$
5. $2ab^2 + 3a^2b + ab^2 + 5a^2b + 3ab^2 - 1a^2b = 6ab^2 + 5a^2b$
6. $-3x^3\,y^2 + 6x^3y^2 - 4x^3\,y^2 + 11x^3y^2 - 8x^3\,y^2 + 7x^3\,y^2 - 15x^3\,y^2 = -6x^3\,y^2$
7. $3y^2 + 2y + y^2 + 5 + 4y + 3 + 2y^2 + 4 = 6y^2 + 6y + 12$

Ejercicios 3.1

Reducir:

1. $-12x + 5x$
2. $-10y - 2y$
3. $\frac{5}{2}a + \frac{2}{3}a$

4. $x^2y - 4x^2y + \frac{2}{3}x^2y$

5. $mn + 2mn - mn + 8ab - mn$

6. $\frac{1}{4}ab^2 + \frac{2}{3}c^7 - ab^2 - \frac{1}{6}c^7$

7. $10x^{1/2}y - 5x^{1/2}y$

8. $-3mn + 9pq + 12mn - 8pq$

9. $2a^2 + 3a - 2a^2 + 2a$

10. $-9a^x + 2a^x$

3.5. Suma

La suma algebraica es una operación que involucra la adición de términos algebraicos. En matemáticas, se utiliza para combinar términos semejantes en una expresión algebraica y simplificarla.

Para realizar una suma algebraica, se siguen estos pasos:

1. Identifica todos los términos en la expresión algebraica que deseas sumar.

2. Agrupa los términos semejantes. Los términos semejantes son aquellos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes.

3. Suma los coeficientes numéricos de los términos semejantes.

4. Escribe el resultado como una nueva expresión algebraica.

Generalmente, se colocan los polinomios unos debajo de los otros de modo que los términos semejantes queden en columna y se hace la reducción de éstos.

Ejemplos:

1. Sumar $5a + b,\ 2a - 3b - c$ y $-2a + 6b$

$(5a + b) + (2a - 3b - c) + (-2a + 6b)$

$$
\begin{array}{r}
5a + b \phantom{{}- c} \\
2a - 3b - c \\
-2a + 6b \phantom{{}- c} \\
\hline
5a + 4b - c
\end{array}
$$

2. Sumar $8x^2 - 4xy + 2y^2,\ 5xy + 6x^2 - 3y^2$ y $6y^2 - 8xy - 4x^2$

$(8x^2 - 4xy + 2y^2) + (5xy + 6x^2 - 3y^2) + (6y^2 - 8xy - 4x^2)$

Para facilitar el análisis y la manipulación de los polinomios, es recomendable ordenarlos con relación a una variable.

En este caso se ordenan de forma descendente con relación a la variable x

$$
\begin{array}{r}
8x^2 - 4xy + 2y^2 \\
6x^2 + 5xy - 3y^2 \\
-4x^2 - 8xy + 6y^2 \\
\hline
10x^2 - 7xy + 5y^2
\end{array}
$$

3. Sumar $3x - 2y + 4,\ 6y + z - 5,\ 8y - 6$ y $x - y - 4z$

$(3x - 2y + 4) + (6y + z - 5) + (\ 8y - 6\ ) + (x - y - 4z)$

$$\begin{array}{l} 3x \quad -2y \qquad +4 \\ \qquad\ \ 6y + z \ -5 \\ \qquad\ \ 8y \qquad -6 \\ \ \ x \quad -y - 4z \\ \hline 4x + 11y - 3z - 7 \end{array}$$

4. Sumar $\frac{5}{6}x^3 + 2y^3 - \frac{2}{5}x^2y + 4,\ -\frac{1}{5}x^2y + \frac{1}{4}xy^2 - \frac{3}{7}y^3,\ -\frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{8}xy^2 - 3$

$(\frac{5}{6}x^3 + 2y^3 - \frac{2}{5}x^2y + 4) + (-\frac{1}{5}x^2y + \frac{1}{4}xy^2 - \frac{3}{7}y^3) + (-\frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{8}xy^2 - 3)$

$$\begin{array}{l} \frac{5}{6}x^3 - \frac{2}{5}x^2y \qquad\qquad + 2y^3 + 4 \\ \qquad -\frac{1}{5}x^2y + \frac{1}{4}xy^2 - \frac{3}{7}y^3 \\ \qquad\qquad\qquad \frac{1}{8}xy^2 - \frac{1}{2}y^3 - 3 \\ \hline \frac{5}{6}x^3 - \frac{3}{5}x^2y + \frac{3}{8}xy^2 + \frac{15}{14}y^3 + 1 \end{array}$$

5. Sumar $\frac{1}{9}a^3 - \frac{1}{6}ax^2 - \frac{1}{3}x^3;\ -\frac{3}{2}a^2x - \frac{7}{8}ax^2 - \frac{1}{9}x^3;\ \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2x - \frac{1}{4}ax^2$

$\left(\frac{1}{9}a^3 - \frac{1}{6}ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + \left(-\frac{3}{2}a^2x - \frac{7}{8}ax^2 - \frac{1}{9}x^3\right) + \left(\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2x - \frac{1}{4}ax^2\right)$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{9}a^3 \qquad\qquad -\frac{1}{6}ax^2 - \quad \frac{1}{3}x^3 \\ \qquad -\frac{3}{2}a^2x - \frac{7}{8}ax^2 \quad -\frac{1}{9}x^3 \\ \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2x - \frac{1}{4}ax^2 \\ \hline \frac{4}{9}a^3 - a^2x - \frac{31}{24}ax^2 \quad -\frac{4}{9}x^3 \end{array}$$

Ejercicios 3.2

Sumar:

1. $x^3 - y^3;\ 5x^2y - 4xy^2;\ x^3 - 7xy^2 - y^3.$

2. $2x^3 + xy^2 + y^3;\ 5x^2y + x^3 - y^3; 2x^3 - 6xy^2 - 5y^3.$

3. $-6m^2n + 4n^3;\ m^3 + 7mn^2 - n^3;\ m^3 + 7m^2n + 3n^3.$

4. $a^4 - a^2 + a;\ a^3 - 4a^2 + 5;\ 7a^2 - 4a + 6.$

5. $2a^4 + a^6 + 6;\ 3a^5 - 8a^3 + 8; a^3 - a^2 - 1.$

6. $\frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{4}y^2;\ -\frac{2}{5}xy + \frac{1}{8}y^2;\ \frac{3}{10}xy + \frac{1}{8}y^2.$

7. $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}xy - \frac{1}{2}y^2;\ \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{10}xy + \frac{1}{6}y^2;\ -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{20}xy - \frac{1}{3}y^2.$

8. $-\frac{5}{6}x^2 - \frac{2}{8}y^2 + \frac{3}{4}xy;\ \frac{1}{2}xy - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{8}y^2;\ \frac{5}{6}xy - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{16}y^2.$

9. $6a^3 - \frac{1}{2}ab^2 + b^3;\ \frac{5}{4}a^2b - \frac{3}{8}ab^2 - b^3;\ \frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{2}a^2b + \frac{3}{5}b^3.$

10. $4x^4 - x^2 + 5;\ \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{8}x + 3;\ -\frac{3}{5}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{4}x.$

11. $\frac{5}{3}m^3 - \frac{1}{4}mn^2 + \frac{6}{5}n^3;\ \frac{1}{6}m^2n - \frac{1}{4}mn^2 - \frac{3}{5}n^3;\ 2m^3 - \frac{1}{2}n - n^3$

3.6. Resta

La resta algebraica es una operación matemática que implica la sustracción de términos algebraicos. Es una forma de combinar y simplificar expresiones algebraicas que contienen variables y constantes mediante la eliminación de términos semejantes.

Para realizar una resta algebraica, se siguen estos pasos:

1. Identifica todos los términos en la expresión algebraica que deseas restar.

2. Agrupa los términos semejantes. Los términos semejantes son aquellos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes.

3. Resta los coeficientes numéricos de los términos semejantes.

4. Escribe el resultado como una nueva expresión algebraica.

Al realizar la resta algebraica, el objetivo es obtener una expresión más simplificada y organizada, lo que facilita el análisis y la resolución de problemas matemáticos más complejos.

Ejemplos:

El proceso de la resta es similar a la suma; se escribe el minuendo con sus propios signos y a continuación el sustraendo con los signos cambiados y se reducen los términos semejantes, si los hay.

1. De $-4a^2b$ restar $2a^2b$.

Sustraendo

Minuend

$(-4a^2b) - (2a^2b) = -4a^2b - 2a^2b = -6a^2b$

2. De $-\frac{1}{8}ab$ restar $-\frac{5}{4}ab$.

$$-\frac{1}{8}ab - (-\frac{5}{4}ab) = -\frac{1}{8}ab + \frac{5}{4}ab = \frac{9}{8}ab$$

3. De $(6x - 8y + 4z)$ restar $(2x + 5z - 1)$

$(6x - 8y + 4z) - (2x + 5z - 1)$

En la práctica comúnmente se coloca el sustraendo debajo del minuendo con los signos opuestos, de manera que los términos similares se alineen en columnas y luego se realiza la operación de resta.

$$\begin{array}{lllll}
6x & -8y & +4z & \\
-2x & & -5z & +1 \\
\hline
4x & -8y & -z & +1
\end{array}$$

4. De $(x^6 + 3x^4y^2 - 4x^2y + 6xy^5)$ restar $(4x^5y - 2x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + 3y^6)$

$(x^6 + 3x^4y^2 - 4x^2y + 6xy^5)$ - $(4x^5y - 2x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + 3y^6)$

Colocando el sustraendo debajo del minuendo con los signos cambiados y ordenando de forma descendente con respecto a la literal x.

$$\begin{array}{lllllll}
x^6 & & +3x^4y^2 & & -4x^2y & +6xy^5 & \\
 & +4x^5y & & -2x^3y^3 & +x^2y^4 & +xy^5 & +3y^6 \\
\hline
x^6 & +4x^5y & +3x^4y & -2x^3y^3 & -3x^2y^4 & +7xy^5 & +3y^6
\end{array}$$

5. De $(4a^3 + 8a^2x + 4ax^2 - 4)$ Restar $(-9a^2x - 6 + 5ax^2 - x^3)$

$(4a^3 + 8a^2x + 4ax^2 - 4) - (-9a^2x - 6 + 5ax^2 - x^3)$

Colocando el sustraendo debajo del minuendo con los signos cambiados y ordenando de forma descendente con respecto a la literal x.

$$\begin{array}{lllll}
 & 4ax^2 & +8a^2x & +4a^3 & -4 \\
x^3 & -5ax^2 & +9a^2x & & +6 \\
\hline
x^3 & -\ ax^2 & +17a^2x & +4a^3 & +2
\end{array}$$

Ejercicios 3.3

De:

1. $3x^2y$ restar $-5x^2y$.

2. $-7x^2y$ restar $-7x^2y$.

3. $3a^{a+1}$ restar $5b^{a+2}$.

4. $-6a^{a+2}$ restar 5.

5. $6a^x$ restar $-5a^x$.

6. $x^6 - 8x^4y + 21x^2y + 8 - 6xy^5$ restar $23x^5y + 14x^3y^3 - 24xy^5 + 8y^6 - 14$.

7. $-4a^5b + 3b^3 + 8ab^5 - 2$ restar $-9a^6 + 9b^6 - 17a^4b^2 - 16a^2b^4$.

8. $3x^7 - 6x + 6x^5 - 3x^2 - 5$ restar $8x^6 + 2x^4 - 8x^3 + 5x - 19$.

9. $5a^x + 7a^{x+1} - a^{x+2}$ restar $5a^x - a^{x+1} + 6a^{x+2}$.

10. $3m^a + 6m^{a-1} + 3m^{a-2}$ restar $3m^{a+1} - m^a + 5m^{a-2} + 7m^{a-3}$.

3.7. Multiplicación

Es una operación matemática que implica la combinación de términos algebraicos, que pueden incluir variables y coeficientes numéricos. Cuando multiplicamos expresiones algebraicas, aplicamos las reglas del álgebra para obtener un nuevo polinomio o expresión algebraica.

Para realizar una multiplicación algebraica se siguen estos pasos:

1. Identifica las expresiones a multiplicar. Estas expresiones pueden ser monomios (un solo término) o polinomios (expresiones con varios términos).

2. Aplica la propiedad distributiva para multiplicar cada término de la primera expresión por cada término de la segunda expresión. Esto implica multiplicar todos los términos de una expresión por todos los términos de la otra.

3. Después de realizar todas las multiplicaciones, combina y simplifica los términos semejantes. Los términos semejantes son aquellos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes.

4. Escribe la expresión resultante. La expresión resultante de la multiplicación algebraica es el producto de las dos o más expresiones originales.

El número que estamos multiplicando, llamado multiplicando, junto con el número por el cual lo estamos multiplicando, llamado multiplicador, son conocidos como los elementos que componen el resultado de la multiplicación, que es el producto. En la multiplicación, el orden en el cual se colocan estos elementos no cambia el valor del producto. Esto significa que, si estamos multiplicando "a" por "b", el resultado es el mismo que si multiplicamos "b" por "a". De manera más general, cuando multiplicamos varios números, como "a", "b" y "c", el orden en que los multiplicamos no afecta al producto. Esto se conoce como la Ley Conmutativa de la multiplicación, ecuación

$$abc = bac = bca = cba \tag{3.2}$$

La propiedad asociativa de la multiplicación es una de las propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas. Esta propiedad establece que, al multiplicar tres o más números, el resultado es el mismo sin importar cómo se agrupen los números. En otras palabras, puedes agrupar los números que estás multiplicando de diferentes maneras y aún obtendrás el mismo producto, ecuación

$$abcd = a(bcd) = (ab)(cd) = (abc)d \tag{3.3}$$

En la multiplicación algebraica, se aplican las siguientes reglas para determinar el signo del producto resultante, dependiendo de los signos de los factores involucrados:

(+) por (+) = (+)
(-) por (-) = (+)
(+) por (-) = (-)
(-) por (+) = (-)

Cuando se multiplican dos números con el mismo signo, el resultado es positivo, y cuando se multiplican dos números con signos diferentes, el resultado es negativo.

En el caso de multiplicación de más de dos factores, el signo es negativo cuando se tiene un número impar de factores negativos.

$$(-a)(-b)(-c) = -abc \tag{3.4}$$

La ley de los exponentes en la multiplicación se refiere a las reglas que se aplican cuando multiplicamos dos o más términos algebraicos que tienen exponentes en las mismas variables.

Cuando multiplicas dos términos con la misma base, y cada término tiene un exponente en esa base, puedes simplificar la multiplicación sumando los exponentes. La ley se expresa de la siguiente manera:

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{3.5}$$

Donde a es la base, y m y n son los exponentes.

En resumen, cuando multiplicas dos números con el mismo signo, el resultado es positivo, y cuando multiplicas dos números con signos diferentes, el resultado es negativo. Estas reglas son fundamentales en la multiplicación algebraica y se aplican a los términos con signos en las expresiones algebraicas.

$$(-a)(-b)(-c) = -abc \tag{3.6}$$

Ejemplos:

Multiplicación de monomios

Se lleva a cabo la multiplicación de los coeficientes numéricos considerando la regla de los signos, y luego se organizan las letras presentes en los factores en orden alfabético. Para cada letra, se asigna un exponente igual a la suma de los exponentes que tenía en los factores originales.

1. Multiplicar $-4a^2$ por $3a^5$

$(-4a^2)(3a^5) = (-4)(3)a^{2+5} = -12a^7$

2. Multiplicar $-4a^4b$ por $-2b^3x$

$(-4a^4b)(-2b^3x) = (-4)(-2)a^4b^{1+3}x) = 8a^4b^4x$

3. Multiplicar $-2ab^6$ por $5a^mb^nc^7$

$(-2ab^6)(5a^mb^nc^7) = (-2)(5)a^{1+m}b^{6+n}c^7) = -10a^{1+m}b^{6+n}c^7$

4. Multiplicar $\frac{2}{3}a^2b$ por $-\frac{3}{4}a^3m$

$\left(\frac{4}{3}a^3b\right)\left(-\frac{9}{4}a^7m\right) = \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{9}{4}\right)a^{3+7}bm = -\frac{36}{12}a^{10}bm = -\frac{18}{6}a^{10}bm = -\frac{9}{3}a^{10}bm = -3\,a^{10}bm$

Multiplicación de monomio por polinomio

Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, considerando en cada caso la regla de los signos, quedando los productos parciales separados con sus propios signos. Esta es la Ley Distributiva en la multiplicación.

5. Multiplicar $2ax^3$ por $5x^2 - 3x + 9$

Tendremos: $2ax^3(5x^2 - 3x + 9) = (2ax^3)(5x^2) - (2ax^3)(3x) + (2ax^3)(9)$

$=10ax^5 - 6ax^4 + 18ax^3$

Generalmente la operación también suele resolverse así:

$$\begin{array}{l} 5x^2 \qquad\qquad - 3x + 9 \\ \underline{2ax^3 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\ 10ax^5 - 6ax^4 + 18ax^3 \end{array}$$

6. Multiplicar $-3a$ por $a^m - a^{m-1} + a^{m-2}$

Tendremos: $-3a\,(a^m - a^{m-1} + a^{m-2}) = (-3a)(a^m) + (-3a)(-a^{m-1}) + (-3a)(a^{m-2})$

$=-3a^{m+1} + 3a^m - 3a^{m-1}$

Generalmente la operación también suele resolverse así:

$a^m - a^{m-1} + a^{m-2}$
$\underline{-3a \qquad\qquad\qquad\qquad}$
$-3a^{m+1} + 3a^m - 3a^{m-1}$

7. Multiplicar $\frac{2}{3}x^4y^2 - \frac{3}{5}x^2y^4 + \frac{5}{6}y^6$ por $-\frac{2}{9}a^2x^3y^2$.

$\frac{5}{3}x^4 + \frac{3}{4}x^2y^4 + \frac{5}{6}y^4$
$\underline{-\frac{6}{15}a^3x^3y^2 \qquad\qquad}$
$-\frac{2}{3}a^3x^7y^2 - \frac{3}{10}a^3x^5y^6 - \frac{1}{3}a^3x^3y^6$

Multiplicación de polinomio por polinomio

Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de términos del multiplicador, considerando la ley de los signos, y se reducen los términos semejantes en caso de que existan.

8. Multiplicar $a - 3$ por $a + 5$.

Los términos en la multiplicación se ordenan con relación a una misma letra

$a - 3$
$\underline{a + 5}$
$a^2 - 3a$
$\underline{\qquad 5a - 15}$
$a^2 + 2a - 15$

9. Multiplicar $2x - 3y + 4z$ por $x + 3y - 4z$.

$2x - 3y + 4z$
$\underline{x + 3y - 4z}$
$2x^2 - 3xy + 4xz$
$\qquad 6xy \qquad - 9y^2 + 12yz$
$\underline{\qquad\qquad -8xz \qquad + 12yz - 16z^2}$
$2x^2 + 3xy - 4xz - 9y^2 + 24yz - 16z^2$

10. Multiplicar $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y$ por $\frac{6}{5}x - \frac{4}{5}y$.

$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y$
$\underline{\frac{6}{5}x \quad - \frac{4}{5}y}$
$\frac{2}{5}x^4 - \frac{3}{5}x^3y$
$\underline{\qquad -\frac{4}{15}x^3y + \frac{2}{5}x^2y^2}$
$\frac{2}{5}x^4 - \frac{13}{15}x^3y + \frac{2}{5}x^2y^2$

11. Multiplicar $4a^{m+2} + 2a^m - a^{m+1}$ por $a^2 + 3a$.

$$\begin{array}{l} 4a^{m+2} - a^{m+1} + 2a^m \\ \underline{a^2 + 3a \qquad\qquad\qquad} \\ 4a^{m+4} - a^{m+3} + 2a^{m+2} \\ \underline{\qquad 12a^{m+3} - 3a^{m+2} + 6a^{m+1}} \\ 4a^{m+4} + 11a^{m+3} - a^{m+2} + 6a^{m+1} \end{array}$$

Ejercicios 3.4

Multiplicar:

1. $-4a^3b$ por $-3ab^5$.

2. $-x^3y$ por xy^3.

3. $2b^x$ por $-3ab^{x+1}$.

4. $-\frac{1}{12}m^3n^4$ por $-\frac{4}{5}a^8m^2n$

5. $5m^4 + 3m^2n^2 + 7n^4$ por $-4m^2x$.

6. $3x^3 - 3y + 7xy^2$ por ax^2y.

7. $\frac{4}{3}m^3 + \frac{1}{4}m^2n - \frac{5}{6}mn^2 - \frac{1}{3}n^3$ por $\frac{3}{4}m^2n^2$.

8. $6x^3 + 2x^2 + 3x - 3$ por $7x + 1$.

9. $7y^3 + 5 - 6y$ por $y^2 - 4$.

10. $5x^{a+2} - 2x^a + 2x^{a+1}$ por $x^{a+3} - 3x^{a+1}$.

3.8. División

La división algebraica es una operación matemática que implica dividir dos expresiones algebraicas. En otras palabras, se trata de encontrar cuántas veces una expresión (el divisor) está contenida en otra expresión (el dividendo) y si hay un residuo.

1. Divisor y Dividendo: El divisor es una expresión algebraica que se utiliza para dividir, y el dividendo es otra expresión algebraica que se divide.

2. Cociente: El resultado de la división se llama cociente y es también una expresión algebraica.

3. Residuo: En la división algebraica, es posible que haya un residuo, que es una expresión algebraica que queda cuando no se puede realizar una división exacta.

   En la división algebraica se aplican las siguientes leyes de los signos:

1. $+xy \div +x = \frac{+xy}{+x} = +y$ porque $(+x)\ (+y) = +xy$.

2. $-xy \div -x = \frac{-xy}{-x} = +y$ porque $(-x)\ (+y) = -xy$.

3. $+xy \div -x = \frac{+xy}{-x} = -y$ porque $(-x)\ (-y) = +xy$.

4. $-xy \div +x = \frac{-xy}{+x} = -y$ porque $(+x)\ (-y) = -xy$.

En base a lo anterior se puede resumir que:

(+) entre **(+)** = **(+)**

(-) entre **(-)** = **(+)**

(+) entre **(-)** = **(-)**

(-) entre **(+)** = **(-)**

Cuando divides dos términos con la misma base, y cada término tiene un exponente en esa base, puedes simplificar la multiplicación restando los exponentes. La ley se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (3.7)$$

Donde a es la base, y m y n son los exponentes.

Ejemplos:

División de monomios

Primero, se realiza la división de los coeficientes numéricos del dividendo y del divisor. Luego, se ordenan alfabéticamente las variables presentes en ambos términos, asignándoles exponentes igual a la diferencia entre los exponentes que tenían en el dividendo y el divisor. El signo del resultado sigue las reglas de la Ley de los Signos.

1. Dividir $8a^4b^4$ entre $-2ab$.

$$8a^4b^4 \div -2ab = \frac{8a^4b^4}{-2ab} = -4a^3b^3$$

2. Dividir $-25a^4b^3c$ entre $-5a^3b$.

$$-25a^4b^3 \div -5a^3b = \frac{-25a^4b^3}{-5a^3b} = 5ab^2$$

3. Dividir $-20ma^2b^3$ entre $4ab^3$.

$$-20ma^2b^3 \div 4ab^3 = \frac{-20ma^2b^3}{4ab^3} = -5ma$$

4. Dividir $-9x^4y^6z^a$ entre $3xy^2z^3$.

$$-9x^4y^6z^a \div 3xy^2z^3 = \frac{-9x^4y^6z^a}{3xy^2z^3} = -3x^3y^4z^{a-3}$$

5. Dividir $a^{x+8}b^{m+6}$ entre $a^{x+2}b^{m+1}$.

$$\frac{a^{x+8}b^{m+6}}{a^{x+2}b^{m+1}} = a^{x+8-(x+2)}b^{m+6-(m+1)} = a^{x+8-x-2}b^{m+6-m-1} = a^6b^5$$

6. Dividir $-3x^{4a+3}y^{3a-2}$ entre $-9x^{a-4}y^{3a-1}$.

$$\frac{-3x^{4a+3}y^{3a-2}}{-9x^{a-4}y^{3a-1}} = +\frac{3}{9}x^{4a+3-(a-4)}y^{3a-2-(3a-1)} = \frac{1}{3}x^{4a+3-a+4}y^{3a-2-3a+1} = \frac{1}{3}x^{3a+7}y^{-1} = \frac{x^{3a+7}}{3y}$$

7. Dividir $\frac{1}{3}a^5b^8c$ entre $-\frac{4}{9}a^5bc$.

$$\frac{\frac{1}{3}a^5b^8c}{-\frac{4}{9}a^5bc} = -\frac{3}{4}b^7$$

División de polinomios entre monomios

Cada uno de los términos del polinomio se divide individualmente por el monomio, y los resultados parciales se separan unos de otros con sus respectivos signos. Esta práctica se basa en la aplicación de la Ley Distributiva en la operación de división.

Sea $(a-b+c)\ \div d.$ Entonces:

$$(a-b+c) \div d = \frac{a-b+c}{d} = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

8. Dividir $9a^6 - 3a^5b + 9ab^6$ entre $3a$

$$(9a^6 - 3a^5b + 9ab^6) \div 3a = \frac{9a^6 - 3a^5b + 9ab^6}{3a} = \frac{9a^6}{3a} - \frac{3a^5b}{3a} + \frac{9ab^6}{3a}$$

$= 3a^5 - a^4b + 3b^6$

9. Dividir $2a^{x+2}b^y - 10a^{x+1}b^{y-1} - 3a^{x+2}b^{y-2}$ entre $-2ab^4$

$(2a^{x+2}b^y - 10a^{x+1}b^{y-1} - 3a^{x+2}b^{y-2}) \div -2ab^4$

$$-\frac{2a^{x+2}b^y}{2ab^4} + \frac{10a^{x+1}b^{y-1}}{2ab^4} + \frac{3a^{x+2}b^{y-2}}{2ab^4} = -a^{x+1}b^{y-4} + 5a^xb^{y-5} + \frac{3}{2}a^{x\mp1}b^{y-6}$$

10. Dividir $\frac{3}{4}x^8y - \frac{2}{8}x^6y^5 + \frac{5}{6}xy^6 - \frac{1}{2}y^8$ entre $\frac{5}{6}y$

$= \frac{3}{4}x^8y - \frac{2}{8}x^6y^5 + \frac{5}{6}xy^6 - \frac{1}{2}y^8 \div \frac{5}{6}y$

$= \frac{\frac{3}{4}x^8y}{\frac{5}{6}y} - \frac{\frac{2}{8}x^6y^5}{\frac{5}{6}y} + \frac{\frac{5}{6}xy^6}{\frac{5}{6}y} - \frac{\frac{1}{2}y^8}{\frac{5}{6}y}$

$= \frac{9}{10}x^8 - \frac{3}{10}x^6y + xy^5 - \frac{3}{5}y^7$

División de dos polinomios

Para realizar una división algebraica, se siguen los siguientes pasos:

– Se organizan las expresiones en función de sus grados descendentes o ascendentes (desde el término con el grado más alto hasta el grado más bajo o viceversa).

– Se divide el término de mayor grado en el dividendo por el término de mayor grado en el divisor (en caso en ordenar de forma descendente). Esto te da el primer término del cociente.

– Se multiplica el divisor completo por el término del cociente y se resta del dividendo. Esto se repite hasta que no se pueda dividir más.

– El resultado final es el cociente más cualquier residuo, que se coloca sobre el divisor en forma de fracción si es necesario.

11. Dividir $5x^2 + 3x - 4$ entre $x + 2$

$$
\begin{array}{r|r}
 & 5x - 7 \\ \cline{2-2}
x+2 & 5x^2 + 3x - 4 \\
 & -5x^2 - 10x \\ \cline{2-2}
 & -7x - 4 \\
 & 7x + 14 \\ \cline{2-2}
 & 10
\end{array}
$$

Resultado = $5x - 7 + \frac{10}{x+2}$

12. Dividir $a^2 - 20 + a$ entre $a + 5$

$$
\begin{array}{r|r}
 & a - 4 \\ \cline{2-2}
a+5 & a^2 + a - 20 \\
 & -a^2 - 5a \\ \cline{2-2}
 & -4a - 20 \\
 & 4a + 20 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

Resultado = $a - 4$

13. Dividir $28a^2 - 30b^2 - 11ab$ entre $4a - 5b$

$$
\begin{array}{r|r}
 & 7a + 6b \\ \cline{2-2}
4a-5b & 28a^2 - 11ab - 30b^2 \\
 & -28a^2 + 35ab \\ \cline{2-2}
 & 24ab - 30b^2 \\
 & -24ab + 30b^2 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

Resultado $= 7a + 6b$

Ejercicios 3.5

Dividir:

1. $-8a^5$ entre $-2a$

2. $\frac{1}{4}x^4$ entre $\frac{1}{8}x^2$

3. $-8x^2y^2$entre $2x^2$

4. $a^3b^4c^2$ entre a^2bc

5. $2x^3 - 4x^2 + 6x$ entre $-2x$
6. $-15x^6y^5$ entre $-3x^3y^4z^9$

7. $22a^{3m-3}b^{6m-1}$ entre 11 $a^{m-1}b^{2m}$

8. $\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x$ entre $\frac{1}{2}x$

9. $a^3 - b^3 entre\ a - b$

10. $15x^5 - 9x^3y^2 - 5x^4y + 3x^2y^3 + 3xy^4 - y^5\ entre\ 3x - y$

3.9 Evaluación

A continuación, se proponen una serie de ejercicios para evaluar lo aprendido en el presente capítulo:

1. Sumar $5x^3 + 6xy^2 + y^3$; $7x^2y - 2x^3 - y^3$; $2x^3 + 8xy^2 + y^3$.

2. Sumar $7x^4 + x^2 - 5$; $\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{8}x + 6$; $-\frac{3}{5}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{6}{4}x$.

3. Sumar $\frac{7}{5}x^2 - \frac{3}{4}y^2$; $-\frac{3}{10}xy + \frac{1}{8}y^2$; $\frac{3}{5}xy + \frac{6}{8}y^2$.

4. De $-5x^2y$ restar $-5x^2y$.

5. De $6a^x - 7a^{x+1} - 6a^{x+2}$ restar $a^x - 4a^{x+1} + 8a^{x+2}$.

6. De $2m^a + 7m^{a-1} + 3m^{a-2}$ restar $2m^{a+1} - 7m^a + 6m^{a-2} + 9m^{a-3}$.

7. Multiplicar $-3x^4y$ por $6xy^6$.

8. Multiplicar $-5x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ por $3x + 1$.

9. Dividir $3x^3 - 12x^2 + 36x$ entre $-6x$.

10. Dividir $2a^3 + 10a + 7a^2 + 8$ entre $a + 2$.

3.10. Solución de ejercicios impares

En esta sección se proporcionan los resultados de los ejercicios impares y de la evaluación:

Ejercicios 3.1

1. $-7x$
3. $\frac{19}{6}a$
5. $mn + 8ab$
7. $5x^{1/2}y$
9. $5a$

Ejercicios 3.2

1. $2x^3 + 5x^2y - 11xy^2 - 2y^3 - 2y^3$
3. $2m^3 + m^2n + 7mn^2 + 6n^3$
5. $a^6 + 3a^5 + 2a^4 - 7a^3 - a^2 + 13$
7. $\frac{4}{3}x^2 + \frac{3}{20}xy - \frac{2}{3}y^2$
9. $\frac{25}{4}a^3 + \frac{3}{4}a^2b - \frac{7}{8}ab^2 + \frac{3}{5}b^3$
11. $\frac{13}{3}m^3 + \frac{1}{6}m^2n - \frac{1}{2}mn^2 - \frac{2}{5}n^3$

Ejercicios 3.3

1. $8x^2y$
3. $3a^{a+1} - 5b^{a+2}$
5. $11a^x$
7. $9a^6 - 4a^5b + 17a^4b^2 + 16a^2b^4 + 8ab^5 - 9b^6 - 2$
9. $-7a^{x+2} + 8a^{x+1}$

Ejercicios 3.4

1. $12a^4b^6$
3. $-6ab^{2x+1}$
5. $-20m^6x - 12m^4n^2x - 28m^2n^4x$
7. $m^5n^2 + \frac{3}{16}m^4n^3 - \frac{5}{8}m^3n^4 - \frac{1}{4}m^2n^5$
9. $7y^5 - 34y^3 + 5y^2 + 24y - 20$

Ejercicios 3.5

1. $4a^4$

3. $-4y^2$

5. $-x^2 + 2x - 3$

7. $2a^{2m-2}b^{4m-1}$

9. $a^2 + ab + b^2$

Evaluación

1. $5x^3 + 7x^2y + 14xy^2 + y^3$

2. $\frac{32}{5}x^4 + \frac{3}{2}x^3 + x^2 + \frac{9}{8}x + 1$

3. $\frac{7}{5}x^2 + \frac{3}{10}xy + \frac{1}{8}y^2$

4. 0

5. $5a^x - 3a^{x+1} - 14a^{x+2}$

6. $2m^{a+1} + 9m^a + 7m^{a-1} - 3m^{a-2} - 9m^{a-3}$

7. $-18x^5y^7$

8. $-15x^4 + 16x^3 + 13x^2 - 7x - 3$

9. $-\frac{x^2}{2} + 2x - 6$

10. $2a^2 + 3a + 4$

4. Productos Notables

4.1 Introducción

Los productos notables son un conjunto de expresiones algebraicas que se presentan con frecuencia y que poseen características especiales que permiten simplificar y resolver problemas de manera más eficiente. Estos productos notables se derivan de patrones y reglas específicas en las operaciones algebraicas y son ampliamente utilizados. Estos hacen referencia a un procedimiento que puede ser sintetizado, obteniendo una multiplicación abreviada que generalmente se efectúa por “visualización” o inspección.

En este capítulo se presentan los productos notables más comunes, las reglas para desarrollarlos y algunos ejemplos de su utilización. Los productos notables a pesar de su aparente simplicidad, poseen una relevancia trascendental para el desarrollo de conceptos matemáticos más complejos y su posterior aplicación en problemas de ingeniería.

Los productos notables que se abordarán en este capítulo son: binomio al cuadrado, binomios conjugados, binomio al cubo y producto $(x+a)(x+b)$.

4.2. Binomio al cuadrado

Si se tiene la suma de dos términos a y b elevada al cuadrado, se puede desarrollar de la siguiente manera:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{4.1}$$

Este último resultado se puede definir por medio de una regla y utilizarse cada que se presente una expresión de este tipo sin importar que los términos sumados y elevados al cuadrado sean distintos de a y b.

Dicha regla se puede enunciar de la siguiente forma:

El cuadrado de la suma de dos términos cualesquiera es igual a:

- El cuadrado del primero: a^2
- Más el doble producto del primero por el segundo: $2ab$
- Más el cuadrado del segundo: b^2

A continuación, se desarrollan algunos ejemplos de la aplicación de este producto notable para calcular el resultado de binomios al cuadrado sin necesidad de realizar la multiplicación.

Ejemplos:

1. Para evaluar $(2x+y)^2$ se aplica directamente la regla:

– El cuadrado del primero:

$$(2x)^2 = 4x^2$$

– Más el doble producto del primero por el segundo:

$$2(2x)(y) = 4xy$$

– Más el cuadrado del segundo:

$(y)^2 = y^2$

Por lo tanto, el cuadrado del binomio es:

$(2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$

2. $(a^2 + 3b)^2$ se aplica directamente la regla:

– El cuadrado del primero:

$(a^2)^2 = a^4$

– Más el doble producto del primero por el segundo:

$2(a^2)(3b) = 6a^2b$

– Más el cuadrado del segundo:

$(3b)^2 = 9b^2$

Por lo tanto, el cuadrado del binomio es:

$(a^2 + 3b)^2 = a^2 + 6a^2b + 9b^2$

3. $\left(\sqrt{x} + 3\sqrt{y}\right)^2$ se aplica directamente la regla:

– El cuadrado del primero:

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

– Más el doble producto del primero por el segundo:

$2\left(\sqrt{x}\right)\left(3\sqrt{y}\right) = 6\sqrt{xy}$

– Más el cuadrado del segundo:

$\left(3\sqrt{y}\right)^2 = 9y$

Por lo tanto, el cuadrado del binomio es:

$\left(\sqrt{x} + 3\sqrt{y}\right)^2 = x + 6\sqrt{xy} + 9y$

4. $\left(\frac{3}{x} + \frac{2}{3}y\right)^2$ se aplica directamente la regla:

– El cuadrado del primero:

$$\left(\frac{3}{x}\right)^2 = \frac{9}{x^2}$$

– Más el doble producto del primero por el segundo:

$$2\left(\frac{3}{x}\right)\left(\frac{2}{3}y\right) = 4\frac{y}{x}$$

– Más el cuadrado del segundo:

$$\left(\frac{2}{3}y\right)^2 = \frac{4}{9}y^2$$

Por lo tanto, el cuadrado del binomio es:

$$\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{3}y\right)^2 = \frac{9}{x^2}+4\frac{y}{x}+\frac{4}{9}y^2$$

5. $(3^x+2^y)^2$ se aplica directamente la regla:

– El cuadrado del primero:

$$(3^x)^2 = 3^{2x}$$

– Más el doble producto del primero por el segundo:

$$2(3^x)(2^y) = 3^x 2^{y+1}$$

– Más el cuadrado del segundo:

$$(2^y)^2 = 2^{2y}$$

Por lo tanto, el cuadrado del binomio es:

$$(3^x+2^y)^2 = 3^{2x}+3^x 2^{y+1}+2^{2y}$$

Ejercicios 4.1

Encontrar el resultado de los siguientes binomios al cuadrado:

1. $(x+y)^2$
2. $(2x+3y)^2$
3. $(ab+c)^2$
4. $(2a^3+3b)^2$
5. $(2xy+y)^2$
6. $(2xy+b^2)^2$
7. $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y\right)^2$
8. $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)^2$
9. $(2mn^2+7m)^2$
10. $(x^a+y^2)^2$

De forma similar, si se tiene la resta de dos términos a y b elevada al cuadrado, se puede desarrollar como:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{4.2}$$

Este último resultado se puede definir por medio de una regla y utilizarse cada que se presente una expresión de este tipo sin importar que los términos restados y elevados al cuadrado sean distintos de a y b.

Dicha regla se puede enunciar de la siguiente forma:

El cuadrado de la resta de dos términos cualesquiera es igual a: – El cuadrado del primero: a^2 – Menos el doble producto del primero por el segundo: $-2ab$ – Más el cuadrado del segundo: b^2

A continuación, se desarrollan algunos ejemplos de la aplicación de este producto notable para calcular el resultado de binomios al cuadrado sin necesidad de realizar la multiplicación.

Ejemplos:

1. Para evaluar $(4x-5y)^2$ se aplica directamente la regla:

– El cuadrado del primero:

$$(4x)^2 = 16x^2$$

– Menos el doble producto del primero por el segundo:

$$-2(4x)(5y) = -40xy$$

– Más el cuadrado del segundo:

$$(5y)^2 = 25y^2$$

Por lo tanto, el cuadrado del binomio es:

$$(4x-5y)^2 = 16x^2 - 40xy + 25y^2$$

2. Para evaluar $(-5a^3+6)^2$, como uno de los términos es positivo y el otro negativo, si se reacomodan los términos se obtiene $(6-5a^3)^2$, a esta última expresión se aplica la regla:

– El cuadrado del primero:

$$(6)^2 = 36$$

– Menos el doble producto del primero por el segundo:

$$-2(6)(5a^3) = -60a^3$$

– Más el cuadrado del segundo:

$$(5a^3)^2 = 25a^6$$

Por lo tanto, el cuadrado del binomio es:

$(-5a^3 + 6)^2 = (6 - 5a^3)^2 = 36 - 60a^3 + 25a^3$

3. $\left(\sqrt{x} - 3\sqrt{y}\right)^2$ se aplica directamente la regla:

– El cuadrado del primero:

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

– Menos el doble producto del primero por el segundo:

$-2\left(\sqrt{x}\right)\left(3\sqrt{y}\right) = -6\sqrt{xy}$

– Más el cuadrado del segundo:

$\left(3\sqrt{y}\right)^2 = 9y$

Por lo tanto, el cuadrado del binomio es:

$\left(\sqrt{x} - 3\sqrt{y}\right)^2 = x - 6\sqrt{xy} + 9y$

4. $\left(\frac{2xy}{3} - \frac{4x^2}{y}\right)^2$ se aplica directamente la regla:

– El cuadrado del primero:

$$\left(\frac{2xy}{3}\right)^2 = \frac{4x^2y^2}{9}$$

– Menos el doble producto del primero por el segundo:

$$-2\left(\frac{2xy}{3}\right)\left(\frac{4x^2}{y}\right) = -\frac{16x^3}{3}$$

– Más el cuadrado del segundo:

$$\left(\frac{4x^2}{y}\right)^2 = \frac{16x^4}{y^2}$$

Por lo tanto, el cuadrado del binomio es:

$$\left(\frac{2xy}{3} - \frac{4x^2}{y}\right)^2 = \frac{4x^2y^2}{9} - \frac{16x^3}{3} + \frac{16x^4}{y^2}$$

5. $\left(\frac{x}{3y} - \frac{x^{3/2}}{4}\right)^2$ se aplica directamente la regla:

– El cuadrado del primero:

$$\left(\frac{x}{3y}\right)^2 = \frac{x^2}{9y^2}$$

– Menos el doble producto del primero por el segundo:

$$-2\left(\frac{x}{3y}\right)\left(\frac{x^{3/2}}{4}\right)=-\frac{x^{5/2}}{6y}$$

– Más el cuadrado del segundo:

$$\left(\frac{x^{3/2}}{4}\right)^2=\frac{x^3}{16}$$

Por lo tanto, el cuadrado del binomio es:

$$\left(\frac{x}{3y}-\frac{x^{3/2}}{4}\right)^2=\frac{x^2}{9y^2}-\frac{x^{5/2}}{6y}+\frac{x^3}{16}$$

Ejercicios 4.2

Encontrar el resultado de los siguientes binomios al cuadrado:

1. $(x-y)^2$
2. $(3x^2-2xy)^2$
3. $(a^2b-c)^2$
4. $(a^3-3ab^2)^2$
5. $\left(\frac{1}{2}xy-y\right)^2$
6. $\left(\frac{5x^2}{2}-xy\right)^2$
7. $(7a^2b-3abc)^2$
8. $\left(\frac{x^2}{2y}-\frac{x}{y}\right)^2$
9. $\left(7pq^x-\frac{p}{3q^x}\right)^2$
10. $\left(x^{1/3}-2x\right)^2$

El producto notable del binomio al cuadrado, ya sea suma ec. (4.1) o resta ec. (4.2), se puede agrupar en una sola fórmula:

$$(a\pm b)^2=(a\pm b)(a\pm b)=a^2\pm ab\pm ab+b^2$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2 \tag{4.3}$$

Este último resultado se puede definir por medio de una regla y utilizarse cada que se presente una expresión de este tipo sin importar que los términos sumados/restados y elevados al cuadrado sean distintos de a y b.

Dicha regla se puede enunciar de la siguiente forma:

El cuadrado de la suma/resta de dos términos cualesquiera es igual a:

- El cuadrado del primero: a^2
- Más/Menos el doble producto del primero por el segundo: $\pm 2ab$
- Más el cuadrado del segundo: b^2

4.3. Binomios conjugados

Otro producto notable ampliamente utilizado son los binomios conjugados, los cuales son expresiones algebraicas que consisten en dos binomios con la misma estructura, pero con un signo entre los términos opuesto. Es decir, si tenemos un binomio de la forma $(a + b)$, su binomio conjugado será $(a - b)$, y viceversa.

Al multiplicar un binomio por su binomio conjugado, el resultado siempre será un caso particular de los productos notables conocido como "diferencia de cuadrados".

La multiplicación de un binomio por su binomio conjugado resulta en la siguiente expresión:

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \tag{4.4}$$

Dicha regla se puede enunciar de la siguiente forma:

El producto de dos binomios conjugados es igual a:

- El cuadrado del primero: a^2
- Menos el cuadrado del segundo: $-b^2$

Esta propiedad es muy útil para factorizar expresiones y resolver ecuaciones. Al encontrarnos con una diferencia de cuadrados en una expresión algebraica, podemos utilizar esta propiedad para simplificarla y obtener una forma más manejable.

Los binomios conjugados tienen una importancia significativa en el álgebra y en varias ramas de las matemáticas, y se aplican en la simplificación de expresiones, en la resolución de ecuaciones y en otras áreas donde se requiere manipulación de fórmulas de manera eficiente.

Ejemplos:

1. Para calcular $(8x + 3y)(8x - 3y)$, se aplica directamente la regla:

- El cuadrado del primero:

$$(8x)^2 = 64x^2$$

- Menos el cuadrado del segundo:

$$-(3y)^2 = -9y^2$$

Por lo tanto:

$$(8x + 3y)(8x - 3y) = 64x^2 - 9y^2$$

2. $(m^x + n^x)(m^x - n^x)$, se aplica la regla:

– El cuadrado del primero:

$(m^x)^2 = m^{2x}$

– Menos el cuadrado del segundo:

$-(n^x)^2 = n^{2x}$

Por lo tanto:

$(m^x + n^x)(m^x - n^x) = m^{2x} - n^{2x}$

3. $\left(x^2 + \frac{1}{3}y\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}y\right)$, se aplica directamente la regla:

– El cuadrado del primero:

$(x^2)^2 = x^4$

– Menos el cuadrado del segundo:

$$-\left(\frac{1}{3}y\right)^2 = -\frac{1}{9}y^2$$

Por lo tanto:

$$\left(x^2 + \frac{1}{3}y\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}y\right) = x^2 - \frac{1}{9}y^2$$

4. $\left(2m^x + \frac{2}{5}n^{x+1}\right)\left(2m^x - \frac{2}{5}n^{x+1}\right)$, se aplica directamente la regla:

– El cuadrado del primero:

$(2m^x)^2 = 4m^{2x}$

– Menos el cuadrado del segundo:

$$-\left(\frac{2}{5}n^{x+1}\right)^2 = -\frac{4}{25}n^{2x+2}$$

Por lo tanto:

$$\left(2m^x + \frac{2}{5}n^{x+1}\right)\left(2m^x - \frac{2}{5}n^{x+1}\right) = 4m^{2x} - \frac{4}{25}n^{2x+2}$$

5. $\left(\frac{xz^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right)\left(\frac{xz^2}{2} - \frac{xy^3}{3}\right)$, se aplica directamente la regla:

– El cuadrado del primero:

$$\left(\frac{xz^2}{2}\right)^2 = \frac{x^2z^4}{4}$$

– Menos el cuadrado del segundo:

$$-\left(\frac{xy^3}{3}\right)^2 = -\frac{x^2y^6}{9}$$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{xz^2}{2}+\frac{xy^3}{3}\right)\left(\frac{xz^2}{2}-\frac{xy^3}{3}\right)=\frac{x^2z^4}{4}-\frac{x^2y^6}{9}$$

Ejercicios 4.3

Encontrar el resultado de los siguientes binomios conjugados:

1. $(x+y)(x-y)$
2. $(2x-5y)(2x+5y)$
3. $(x^3+5y^2)(x^3-5y^2)$
4. $\left(\frac{x^2}{y}+y^2\right)\left(\frac{x^2}{y}-y^2\right)$
5. $\left(\frac{2}{y}+3x^2\right)\left(\frac{2}{y}-3x^2\right)$
6. $(a^x+b^y)(a^x-b^y)$
7. $(2x^2+3y^3)(2x^2-3y^3)$
8. $\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}y^{-1}\right)\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}y^{-1}\right)$
9. $\left(nm^a+\frac{n^b}{3m}\right)\left(nm^a-\frac{n^b}{3m}\right)$
10. $\left(x^{1/3}+2y^{1/2}\right)\left(x^{1/3}-2y^{1/2}\right)$

4.4. Binomio al cubo

El binomio al cubo es una expresión algebraica que surge cuando un binomio (una expresión algebraica con dos términos) se eleva al cubo, es decir, se multiplica por sí mismo dos veces más. Esta es otra forma particular de los productos notables en el álgebra y sigue un patrón de distribución específico.

La forma general del binomio al cubo es la siguiente:

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)(a^2+ab+ab+b^2)$$

$$(a+b)^3=a^3+a^2b+a^2b+ab^2+a^2b+ab^2+ab^2+b^3$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (4.5)$$

Donde a y b son términos algebraicos cualesquiera.

Esta regla se puede enunciar de la siguiente forma:

El cubo de la suma de dos términos cualesquiera es igual a:

- El cubo del primero: a^3
- Más el triple del producto del cuadrado del primero por el segundo: $3a^2b$
- Más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo: $3ab^2$
- Más el cubo del segundo: b^3

El binomio al cubo genera cuatro términos distintos en el resultado final, cada uno de los cuales se obtiene mediante la combinación de términos en el binomio y siguiendo las reglas de distribución en la multiplicación.

Es importante notar que el binomio al cubo es otro ejemplo de productos notables, y como tal, presenta una forma específica y predecible que permite simplificar expresiones y resolver problemas de manera más eficiente.

Ejemplos:

1. $(2xy + 3)^3$ se aplica directamente la regla:

– El cubo del primero:

$(2xy)^3 = 8x^3y^3$

– Más el triple del producto del cuadrado del primero por el segundo:

$3(2xy)^2(3) = 36x^2y^2$

– Más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo:

$3(2xy)(3)^2 = 54xy$

– Más el cubo del segundo:

$(3)^3 = 27$

Por lo tanto, el cubo del binomio es:

$(2xy + 3)^3 = 8x^3y^3 + 36x^2y^2 + 54xy + 27$

2. $(x^3y^2 + 6xyz)^3$ se aplica directamente la regla:

– El cubo del primero:

$(x^3y^2)^3 = x^9y^6$

– Más el triple del producto del cuadrado del primero por el segundo:

$3(x^3y^2)^2(6xyz) = 18x^7y^5z$

– Más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo:

$3(x^3y^2)(6xyz)^2 = 108x^5y^4z^2$

– Más el cubo del segundo:

$(6xyz)^3 = 216x^3y^3z^3$

Por lo tanto, el cubo del binomio es:

$(x^3y^2 + 6xyz)^3 = x^9y^6 + 18x^7y^5z + 108x^5y^4z^2 + 216x^3y^3z^3$

3. $\left(2a^2 + \frac{1}{3}a\right)^3$ se aplica directamente la regla:

– El cubo del primero:

$(2a^2)^3 = 8a^6$

– Más el triple del producto del cuadrado del primero por el segundo:

$3(2a^2)^2\left(\frac{1}{3}a\right) = 4a^5$

– Más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo:

$3(2a^2)\left(\frac{1}{3}a\right)^2 = \frac{2}{3}a^4$

– Más el cubo del segundo:

$\left(\frac{1}{3}a\right)^3 = \frac{1}{27}a^3$

Por lo tanto, el cubo del binomio es:

$\left(2a^2 + \frac{1}{3}a\right)^3 = 8a^6 + 4a^5 + \frac{2}{3}a^4 + \frac{1}{27}a^3$

4. $\left(\frac{x^3}{y^2} + x^{-1}y\right)^3$ se aplica directamente la regla:

– El cubo del primero:

$\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^3 = \frac{x^9}{y^6}$

– Más el triple del producto del cuadrado del primero por el segundo:

$3\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2(x^{-1}y) = 3\frac{x^5}{y^3}$

– Más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo:

$3\left(\frac{x^3}{y^2}\right)(x^{-1}y)^2 = 3x$

– Más el cubo del segundo:

$(x^{-1}y)^3 = x^{-3}y^3$

Por lo tanto, el cubo del binomio es:

$$\left(\frac{x^3}{y^2}+x^{-1}y\right)^3=\frac{x^9}{y^6}+3\frac{x^5}{y^3}+3x+x^{-3}y^3$$

5. $\left(\frac{2a^x}{3b^y}+\frac{3}{2}a^yb^x\right)^3$ se aplica directamente la regla:

– El cubo del primero:

$$\left(\frac{2a^x}{3b^y}\right)^3=\frac{8a^{3x}}{27b^{3y}}$$

– Más el triple del producto del cuadrado del primero por el segundo:

$$3\left(\frac{2a^x}{3b^y}\right)^2\left(\frac{3}{2}a^yb^x\right)=6a^{2x+y}b^{x-2y}$$

– Más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo:

$$3\left(\frac{2a^x}{3b^y}\right)\left(\frac{3}{2}a^yb^x\right)^2=\frac{9a^{x+2y}}{2b^{y-2x}}$$

– Más el cubo del segundo:

$$\left(\frac{3}{2}a^yb^x\right)^3=\frac{27}{8}a^{3y}b^{3x}$$

Por lo tanto, el cubo del binomio es:

$$\left(\frac{2a^x}{3b^y}+\frac{3}{2}a^yb^x\right)^3=\frac{8a^{3x}}{27b^{3y}}+6a^{2x+y}b^{x-2y}+\frac{9a^{x+2y}}{2b^{y-2x}}+\frac{27}{8}a^{3y}b^{3x}$$

Ejercicios 4.4

Encontrar el resultado de los siguientes binomios al cubo:

1. $(x+3)^3$
2. $(2x+3y)^3$
3. $(ab+c)^3$
4. $(3x^3+2y)^3$
5. $(xy+4y)^3$
6. $(2ab+b^2)^3$
7. $\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y\right)^3$
8. $\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)^3$
9. $(ab^2+2b)^3$

10. $(x^a + y^b)^3$

De igual forma, si se tiene la resta de dos términos a y b elevada al cubo, se puede desarrollar como:

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = (a-b)(a^2 - ab - ab + b^2)$$

$$(a+b)^3 = a^3 - a^2b - a^2b + ab^2 - a^2b + ab^2 + ab^2 - b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad (4.6)$$

Este último resultado se puede definir por medio de una regla que se puede enunciar de la siguiente forma:

El cubo de la resta de dos términos cualesquiera es igual a:

- El cubo del primero: a^3
- Menos el triple del producto del cuadrado del primero por el segundo: $-3a^2b$
- Más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo: $3ab^2$
- Menos el cubo del segundo: $-b^3$

Ejemplos:

1. $(xy - 2y)^3$ se aplica directamente la regla:

– El cubo del primero:

$$(xy)^3 = x^3y^3$$

– Menos el triple del producto del cuadrado del primero por el segundo:

$$-3(xy)^2(2y) = -6x^2y^3$$

– Más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo:

$$3(xy)(2y)^2 = 12xy^3$$

– Menos el cubo del segundo:

$$-(2y)^3 = -8y^3$$

Por lo tanto, el cubo del binomio es:

$$(xy - 2y)^3 = x^3y^3 - 6x^2y^3 + 12xy^3 - 8y^3$$

2. $(2x^2y^3 - 3xyz)^3$ se aplica directamente la regla:

– El cubo del primero:

$$(2x^2y^3)^3 = 8x^6y^9$$

– Menos el triple del producto del cuadrado del primero por el segundo:

$$-3(2x^2y^3)^2(3xyz) = -36x^5y^7z$$

– Más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo:

$3(2x^2y^3)(3xyz)^2 = 54x^4y^5z^2$

– Menos el cubo del segundo:

$-(3xyz)^3 = -27x^3y^3z^3$

Por lo tanto, el cubo del binomio es:

$(2x^2y^3 - 3xyz)^3 = 8x^6y^9 - 36x^5y^7z + 54x^4y^5z^2 - 27x^3y^3z^3$

3. $\left(m^2 - \frac{2}{3}n\right)^3$ se aplica directamente la regla:

– El cubo del primero:

$(m^2)^3 = m^6$

– Menos el triple del producto del cuadrado del primero por el segundo:

$$-3(m^2)^2\left(\frac{2}{3}n\right) = -2m^4n$$

– Más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo:

$$3(m^2)\left(\frac{2}{3}n\right)^2 = \frac{4}{3}m^2n^2$$

– Menos el cubo del segundo:

$$-\left(\frac{2}{3}n\right)^3 = -\frac{8}{27}n^3$$

Por lo tanto, el cubo del binomio es:

$$\left(m^2 - \frac{2}{3}n\right)^3 = m^6 - 2m^4n + \frac{4}{3}m^2n^2 - \frac{8}{27}n^3$$

4. $\left(2\frac{x^2}{y^3} - x^2y\right)^3$ se aplica directamente la regla:

– El cubo del primero:

$$\left(2\frac{x^2}{y^3}\right)^3 = 8\frac{x^6}{y^9}$$

– Menos el triple del producto del cuadrado del primero por el segundo:

$$-3\left(2\frac{x^2}{y^3}\right)^2(x^2y) = -12\frac{x^6}{y^5}$$

– Más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo:

$$3\left(2\frac{x^2}{y^3}\right)(x^2y)^2 = 6\frac{x^6}{y}$$

– Menos el cubo del segundo:

$$-(x^2y)^3 = -x^6y^3$$

Por lo tanto, el cubo del binomio es:

$$\left(2\frac{x^2}{y^3} - x^2y\right)^3 = 8\frac{x^6}{y^9} - 12\frac{x^6}{y^5} + 6\frac{x^6}{y} - x^6y^3$$

5. $\left(\frac{a^x}{b^y} - \frac{2}{3}a^yb^x\right)^3$ se aplica directamente la regla:

– El cubo del primero:

$$\left(\frac{a^x}{b^y}\right)^3 = \frac{a^{3x}}{b^{3y}}$$

– Menos el triple del producto del cuadrado del primero por el segundo:

$$-3\left(\frac{a^x}{b^y}\right)^2\left(\frac{2}{3}a^yb^x\right) = -2a^{2x+y}b^{x-2y}$$

– Más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo:

$$3\left(\frac{a^x}{b^y}\right)\left(\frac{2}{3}a^yb^x\right)^2 = 4a^{x+2y}b^{2x-y}$$

– Menos el cubo del segundo:

$$-\left(\frac{2}{3}a^yb^x\right)^3 = -\frac{8}{27}a^{3y}b^{3x}$$

Por lo tanto, el cubo del binomio es:

$$\left(\frac{a^x}{b^y} - \frac{2}{3}a^yb^x\right)^3 = \frac{a^{3x}}{b^{3y}} - 2a^{2x+y}b^{x-2y} + 4a^{x+2y}b^{2x-y} - \frac{8}{27}a^{3y}b^{3x}$$

-

Ejercicios 4.4

Encontrar el resultado de los siguientes binomios al cubo:

1. $(x-y)^3$
2. $(3x^2 - 2xy)^3$
3. $(a^2b - c)^3$
4. $(a^3 - 3ab^2)^3$
5. $\left(\frac{1}{2}xy - y\right)^3$
6. $\left(\frac{5x^2}{2} - xy\right)^3$
7. $(7a^2b - 3abc)^3$

8. $\left(\frac{x^2}{2y} - \frac{x}{y}\right)^3$

9. $\left(7pq^x - \frac{p}{3q^x}\right)^3$

10. $\left(x^{1/3} - 2x\right)^3$

El producto notable del binomio al cubo, ya sea suma ec. (4.5) o resta ec. (4.6), se puede agrupar en una sola fórmula:

$$(a \pm b)^3 = (a \pm b)(a \pm b)(a \pm b) = (a \pm b)(a^2 \pm ab \pm ab + b^2)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm a^2b \pm a^2b + ab^2 \pm a^2b + ab^2 + ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \tag{4.7}$$

Este último resultado se puede definir por medio de una regla y utilizarse cada que se presente una expresión de este tipo sin importar que los términos sumados/restados y elevados al cubo sean distintos de a y b.

Dicha regla se puede enunciar de la siguiente forma:

El cubo de la suma/resta de dos términos cualesquiera es igual a:

- El cubo del primero: a^3
- Más/Menos el triple del producto del cuadrado del primero por el segundo: $\pm 3a^2b$
- Más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo: $3ab^2$
- Más/Menos el cubo del segundo: $\pm b^3$

4.5. Producto $(\mathbf{x} + \mathbf{a})(\mathbf{x} + \mathbf{b})$

La expresión $(x + a)(x + b)$ es un producto de dos binomios con un término común. Para expandir esta expresión, podemos utilizar el método distributivo para multiplicar cada término del primer binomio por cada término del segundo binomio.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \tag{4.8}$$

Esta forma simplificada del trinomio puede ser de utilidad en diversas aplicaciones matemáticas, como la resolución de ecuaciones cuadráticas o la modelización de problemas en ciencias e ingeniería.

Ejemplos:

1. Para calcular $(x + 3)(x + 2)$, se aplica directamente la regla:

$$(x + 3)(x + 2) = x^2 + (3 + 2)x + (3)(2)$$

$$(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$$

2. $(x + 5)(x - 3)$, se aplica directamente la regla:

$$(x + 5)(x - 3) = x^2 + (5 - 3)x + (5)(-3)$$

$$(x + 5)(x - 3) = x^2 + 2x - 15$$

3. $(x-4)(x+2)$, se aplica directamente la regla:

$(x-4)(x+2)=x^2+(-4+2)x+(-4)(2)$

$(x-4)(x+2)=x^2-2x-8$

4. $(x-1)(x-6)$, se aplica directamente la regla:

$(x-1)(x-6)=x^2+(-1-6)x+(-1)(-6)$

$(x-1)(x-6)=x^2-7x+6$

5. $(x+7y)(x-4y)$, se aplica directamente la regla:

$(x+7y)(x-4y)=x^2+(7y-4y)x+(7y)(-4y)$

$(x+7y)(x-4y)=x^2+3yx-28y^2$

$(x+7y)(x-4y)=x^2+3xy-28y^2$

Ejercicios 4.6

Encontrar el resultado de los siguientes productos:

1. $(x+8)(x+2)$
2. $(x-8)(x+2)$
3. $(x+8)(x-2)$
4. $(x-8)(x-2)$
5. $(x-3y)(x-2y)$
6. $(x+5)(x+1)$
7. $(x+7)(x-6)$
8. $(x-6)(x+7)$
9. $(x-2)(x-2)$
10. $(x+2)(x-2)$

4.6. Resumen del capítulo

Los productos notables son expresiones algebraicas que se presentan con frecuencia y tienen patrones específicos que permiten simplificarlos de manera eficiente. Son herramientas poderosas en el álgebra y desempeñan un papel importante en la resolución de problemas y la manipulación de ecuaciones.

Estos productos notables son fundamentales en el álgebra y proporcionan atajos valiosos para simplificar expresiones y resolver ecuaciones. Con su conocimiento, es posible abordar problemas matemáticos de manera más rápida y eficiente, facilitando así el estudio de diversas áreas de las matemáticas, ciencias e ingeniería. Además, son la base para el desarrollo de conceptos más avanzados en el álgebra y otras ramas de las matemáticas.

En la Tabla 4.1, se presenta un resumen de los productos notables tratados en este capítulo. Es de gran utilidad tener a la mano esta tabla o bien memorizarla para poder aplicar esta herramienta matemática en los problemas de algebra, cálculo y otras aplicaciones en la ingeniería.

Tabla 4.1 Productos notables

Producto notable	Fórmula	Ec.
Binomio al cuadrado	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	(4.1)
	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	(4.2)
	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	(4.3)
Binomio conjugado	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	(4.4)
Binomio al cubo	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	(4.5)
	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	(4.6)
	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	(4.7)
Producto $(x+a)(x+b)$	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$	(4.8)

4.7. Evaluación

A continuación, se proponen una serie de ejercicios para evaluar lo aprendido en el presente capítulo:

1. $(2x + y)^2$
2. $(2x - 5y)^2$
3. $(x^3 + 5y^2)^2$
4. $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$
5. $(2y + 3x^2)(2y - 3x^2)$
6. $(x^2 - 5y^2)^3$
7. $(2x^2 + 3y^3)^3$
8. $\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}y\right)^3$
9. $(x + 9)(x - 1)$
10. $(x - 5)(x + 4)$

4.8. Solución de ejercicios impares

En esta sección se proporcionan los resultados de los ejercicios impares y de la evaluación:

Ejercicios 4.1:

1. $x^2 + 2xy + y^2$

3. $a^2b^2 + 2abc + c^2$

5. $4x^2y^2 + 4xy^2 + y^2$

7. $\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{1}{4}y^2$

9. $4m^2n^4 + 28m^2n^2 + 49m^2$

Ejercicios 4.2:

1. $x^2 - 2xy + y^2$

3. $a^4b^2 - 2a^2bc + c^2$

5. $\frac{1}{4}x^2y^2 - xy^2 + y^2$

7. $49a^4b^2 - 42a^3b^2c + 9a^2b^2c^2$

9. $49p^2q^{2x} - \frac{14}{3}p^2 + \frac{p^2}{9q^{2x}}$

Ejercicios 4.3:

1. $x^2 - y^2$

3. $x^6 - 25y^4$

5. $\frac{4}{y^2} - 9x^4$

7. $4x^4 - 9y^6$

9. $n^2m^{2a} - \frac{n^{2b}}{9m^2}$

Ejercicios 4.4:

1. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

3. $a^3b^3 + 3a^2b^2c + 3abc^2 + c^3$

5. $x^3y^3 + 12x^2y^3 + 48xy^3 + 64y^3$

7. $\frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^2y + \frac{4}{9}xy^2 + \frac{8}{27}y^3$

9. $a^3b^6 + 6a^2b^5 + 12ab^4 + 8b^3$

Ejercicios 4.5:

1. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

3. $a^6b^3c - 3a^4b^2c + 3a^2bc^2 - c^3$

5. $\frac{1}{8}x^3y^3 - \frac{3}{4}x^2y^3 + \frac{3}{2}xy^3 - y^3$

7. $a^6b^3 - 441a^5b^3c + 189a^4b^3c^2 - 27a^3b^3c^3$

9. $343p^3q^{3x} - 49p^3q^x + \frac{7p^3}{3q^x} - \frac{p^3}{27q^{3x}}$

Ejercicios 4.6:

1. $x^2 + 10x + 16$

3. $x^2 + 6x - 16$

5. $x^2 + 5xy + 6y^2$

7. $x^2 + x - 42$

9. $x^2 - 4x + 4$

Evaluación

1. $4x^2 + 4xy + y^2$

2. $4x^2 - 20xy + 25y^2$

3. $x^6 + 10x^3y^2 + 25y^4$

4. $x^4 - y^4$

5. $4y^2 - 9x^4$

6. $x^6 - 15x^4y^2 + 75x^2y^4 - 125y^6$

7. $8x^6 + 36x^4y^3 + 54x^2y^6 + 27y^9$

8. $\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}y\right)^3 \frac{8}{27}x^9 + \frac{4}{9}x^6y + \frac{2}{9}x^3y^2 + \frac{1}{9}y^3$

9. $x^2 + 8x - 9$

10. $x^2 - x - 20$

Referencias

Antonyan, N., Medina Herrera, L. y Wisniewski Piotr. (2003). Problemario de Precálculo (2da ed.). México: Cenage Learning.

Baldor A. (2019). Álgebra. México: Publicaciones Cultural.

Baldor, A. (2019). Aritmética. México: Publicaciones Cultural.

Davishahl, E., Wolff, A., Burnett, P., Booker, AF, Phung, TM, Luu, MP y Greendale, S. (junio de 2023). Trabajo en progreso: desarrollo de una comunidad de aprendizaje integrada basada en el lugar para estudiantes de ingeniería de primer año de nivel de precálculo. En 2023 Conferencia y exposición anual de ASEE.

Lehmann, C. (2001). Álgebra. México: Limusa.

Matelandia (s.f.). Curso de matemática básica: Aritmética. Recuperado 12 de junio de 2023 de www.matelandia.org/matematicabasica1.pdf

Spiegel Murray (1998). Manual de fórmulas y tablas matemáticas. México: Mc Graw Hill.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson S. (2012). Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (6ta ed.). México: Cenage Learning.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: CENGAGE Learning.

Universidad de Colima (2023). Recuperado el 14 de agosto de 2023 de https://www.ucol.mx/estudia-udec/oferta-superior-licenciatura,418.htm

Zill D., Dewar J. (2012). Álgebra y Trigonometría. Editorial Mc Graw Hill.

[Título en Times New Roman y Negritas No. 14 en Español e Inglés]

Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 1[er] Autor†*, Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 1[er] Coautor, Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 2[do] Coautor y Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 3[er] Coautor

Institución de Afiliación del Autor incluyendo dependencia (en Times New Roman No.10 y Cursiva)

<u>*International Identification of Science - Technology and Innovation*</u>

ID 1[er] Autor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 1er Autor: (Becario-PNPC o SNI-CONAHCYT) (No.10 Times New Roman)

ID 1[er] Coautor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 1er Coautor: (Becario-PNPC o SNI-CONAHCYT) (No.10 Times New Roman)

ID 2d[o] Coautor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 2do Coautor: (Becario-PNPC o SNI-CONAHCYT) (No.10 Times New Roman)

ID 3[er] Coautor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 3er Coautor: (Becario-PNPC o SNI-CONAHCYT) (No.10 Times New Roman)

(Indicar Fecha de Envío: Mes, Día, Año); Aceptado (Indicar Fecha de Aceptación: Uso Exclusivo de ECORFAN)

Citación: Primer letra (EN MAYUSCULAS) del Nombre del 1er Autor. Apellido, Primer letra (EN MAYUSCULAS) del Nombre del 1er Coautor. Apellido, Primer letra (EN MAYUSCULAS) del Nombre del 2do Coautor. Apellido, Primer letra (EN MAYUSCULAS) del Nombre del 3er Coautor. Apellido

Correo institucional [Times New Roman No.10]

Primera letra (EN MAYUSCULAS) del Nombre Editores. Apellidos (eds.) Título del Book [Times New Roman No.10], Temas Selectos del área que corresponde ©ECORFAN- Filial, Año.

Abstract

Texto redactado en Times New Roman No.12, espacio sencillo, en inglés.

Indicar (3-5) palabras clave en Times New Roman y Negritas No.12

Introducción

Texto redactado en Times New Roman No.12, espacio sencillo.

Explicación del tema en general y explicar porque es importante.

¿Cuál es su valor agregado respecto de las demás técnicas?.

Enfocar claramente cada una de sus características.

Explicar con claridad el problema a solucionar y la hipótesis central.

Explicación de las secciones del Capítulo.

Desarrollo de Secciones y Apartados del Capítulo con numeración subsecuente

[Título en Times New Roman No.12, espacio sencillo y Negrita]

Desarrollo de Capítulos en Times New Roman No.12, espacio sencillo.

Inclusión de Gráficos, Figuras y Tablas-Editables

En *el contenido del Capítulo* todo gráfico, tabla y figura debe ser editable en formatos que permitan modificar tamaño, tipo y número de letra, a efectos de edición, estas deberán estar en alta calidad, no pixeladas y deben ser notables aun reduciendo la imagen a escala.

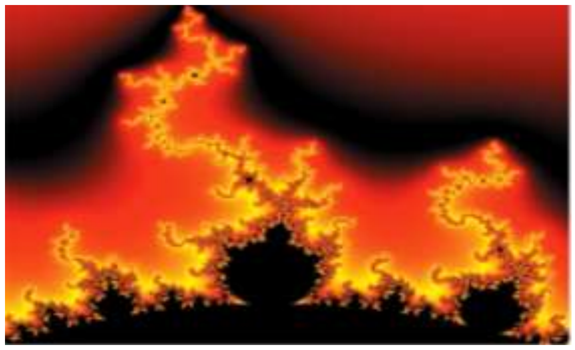
[Indicando el título en la parte Superior con Times New Roman No.12 y Negrita, señalando la fuente en la parte Inferior centrada con Times New Roman No. 10]

Tabla 1.1 Título

Variable	Descripción	Valor
P_1	Partición 1	481.00
P_2	Partición 2	487.00
P_3	Partición 3	484.00
P_4	Partición 4	483.50
P_5	Partición 5	484.00
P_6	Partición 6	490.79
P_7	Partición 7	491.61

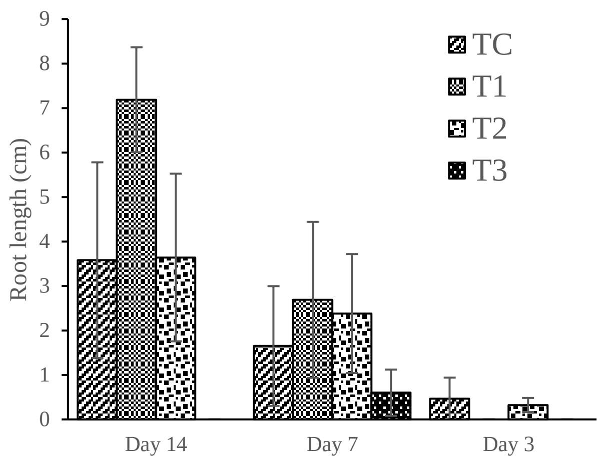
Fuente de Consulta:
(No deberán ser imágenes, todo debe ser editable)

Figura 1.1 Título



Fuente de Consulta:
(No deberán ser imágenes, todo debe ser editable)

Gráfico 1.1 Título



Fuente de Consulta:
(No deberán ser imágenes, todo debe ser editable)

Cada Capítulo deberá presentar de manera separada en 3 Carpetas: a) Figuras, b) Gráficos y c) Tablas en formato .JPG, indicando el número en Negrita y el Titulo secuencial.

Para el uso de Ecuaciones, señalar de la siguiente forma:

$$\int_{\boldsymbol{lim^{-1}}}^{\boldsymbol{lim^{1}}} = \int \frac{\boldsymbol{lim^{1}}}{\boldsymbol{lim^{-1}}} = \left[\frac{\mathbf{1}\,(-\mathbf{1})}{\boldsymbol{lim}}\right]^{\mathbf{2}} = \frac{(\mathbf{0})^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{lim}} = \sqrt{\boldsymbol{lim}} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \rightarrow \propto \tag{1}$$

Deberán ser editables y con numeración alineada en el extremo derecho.

Metodología a desarrollar

Dar el significado de las variables en redacción lineal y es importante la comparación de los criterios usados.

Resultados

Los resultados deberán ser por sección del Capítulo.

Anexos

Tablas y fuentes adecuadas.
Agradecimiento

Indicar si fueron financiados por alguna Institución, Universidad o Empresa.

Conclusiones

Explicar con claridad los resultados obtenidos y las posibilidades de mejora.

Referencias

Utilizar sistema APA. No deben estar numerados, tampoco con viñetas, sin embargo en caso necesario de numerar será porque se hace referencia o mención en alguna parte del Capítulo.

Ficha Técnica

Cada Capítulo deberá presentar en un documento Word (.docx):

Nombre del Book
Título del Capítulo
Abstract
Keywords
Secciones del Capítulo, por ejemplo:

1. *Introducción*
2. *Descripción del método*
3. *Análisis a partir de la regresión por curva de demanda*
4. *Resultados*
5. *Agradecimiento*
6. *Conclusiones*
7. *Referencias*

Nombre de Autor (es)
Correo Electrónico de Correspondencia al Autor
Referencias

Requerimientos de Propiedad Intelectual para su edición:

-Firma Autógrafa en Color Azul del Formato de Originalidad del Autor y Coautores.

-Firma Autógrafa en Color Azul del Formato de Aceptación del Autor y Coautores.

-Firma Autógrafa en Color Azul del Formato de Conflicto de Intereses del Autor y Coautores.

Reserva a la Política Editorial

ECORFAN Books se reserva el derecho de hacer los cambios editoriales requeridos para adecuar la Obra Científica a la Política Editorial del ECORFAN Books. Una vez aceptada la Obra Científica en su versión final, el ECORFAN Books enviará al autor las pruebas para su revisión. ECORFAN® únicamente aceptará la corrección de erratas y errores u omisiones provenientes del proceso de edición de la revista reservándose en su totalidad los derechos de autor y difusión de contenido. No se aceptarán supresiones, sustituciones o añadidos que alteren la formación de la Obra Científica.

Código de Ética – Buenas Prácticas y Declaratoria de Solución a Conflictos Editoriales

Declaración de Originalidad y carácter inédito de la Obra Científica, de Autoría, sobre la obtención de datos e interpretación de resultados, Agradecimientos, Conflicto de intereses, Cesión de derechos y distribución.

La Dirección de ECORFAN-México, S.C reivindica a los Autores de la Obra Científica que su contenido debe ser original, inédito y de contenido Científico, Tecnológico y de Innovación para someterlo a evaluación.

Los Autores firmantes de la Obra Científica deben ser los mismos que han contribuido a su concepción, realización y desarrollo, así como a la obtención de los datos, la interpretación de los resultados, su redacción y revisión. El Autor de correspondencia de la Obra Científica propuesto requisitara el formulario que sigue a continuación.

Título de la Obra Científica:

- El envío de una Obra Científica a ECORFAN Books emana el compromiso del autor de no someterlo de manera simultánea a la consideración de otras publicaciones seriadas para ello deberá complementar el Formato de Originalidad para su Obra Científica, salvo que sea rechazado por el Comité de Arbitraje, podrá ser retirado.

- Ninguno de los datos presentados en esta Obra Científica ha sido plagiado ó inventado. Los datos originales se distinguen claramente de los ya publicados. Y se tiene conocimiento del testeo en PLAGSCAN si se detecta un nivel de plagio Positivo no se procederá a arbitrar.

- Se citan las referencias en las que se basa la información contenida en la Obra Científica, así como las teorías y los datos procedentes de otras Obras Científicas previamente publicados.

- Los autores firman el Formato de Autorización para que su Obra Científica se difunda por los medios que ECORFAN-México, S.C. en su Holding México considere pertinentes para divulgación y difusión de su Obra Científica cediendo sus Derechos de Obra Científica.

- Se ha obtenido el consentimiento de quienes han aportado datos no publicados obtenidos mediante comunicación verbal o escrita, y se identifican adecuadamente dicha comunicación y autoría.

- El Autor y Co-Autores que firman este trabajo han participado en su planificación, diseño y ejecución, así como en la interpretación de los resultados. Asimismo, revisaron críticamente el trabajo, aprobaron su versión final y están de acuerdo con su publicación.

- No se ha omitido ninguna firma responsable del trabajo y se satisfacen los criterios de Autoría Científica.

- Los resultados de esta Obra Científica se han interpretado objetivamente. Cualquier resultado contrario al punto de vista de quienes firman se expone y discute en la Obra Científica.

Copyright y Accesso

La publicación de esta Obra Científica supone la cesión del copyright a ECORFAN-Mexico, S.C en su Holding México para su ECORFAN Books, que se reserva el derecho a distribuir en la Web la versión publicada de la Obra Científica y la puesta a disposición de la Obra Científica en este formato supone para sus Autores el cumplimiento de lo establecido en la Ley de Ciencia y Tecnología de los Estados Unidos Mexicanos, en lo relativo a la obligatoriedad de permitir el acceso a los resultados de Investigaciones Científicas.

Título de la Obra Científica:

Nombre y apellidos del Autor de contacto y de los Coautores	Firma
1.	
2.	
3.	
4.	

Principios de Ética y Declaratoria de Solución a Conflictos Editoriales

Responsabilidades del Editor

El Editor se compromete a garantizar la confidencialidad del proceso de evaluación, no podrá revelar a los Árbitros la identidad de los Autores, tampoco podrá revelar la identidad de los Árbitros en ningún momento.

El Editor asume la responsabilidad de informar debidamente al Autor la fase del proceso editorial en que se encuentra el texto enviado, así como de las resoluciones del arbitraje a Doble Ciego.

El Editor debe evaluar los manuscritos y su contenido intelectual sin distinción de raza, género, orientación sexual, creencias religiosas, origen étnico, nacionalidad, o la filosofía política de los Autores.

El Editor y su equipo de edición de los Holdings de ECORFAN® no divulgarán ninguna información sobre la Obra Científica enviado a cualquier persona que no sea el Autor correspondiente.

El Editor debe tomar decisiones justas e imparciales y garantizar un proceso de arbitraje por pares justa.

Responsabilidades del Consejo Editorial

La descripción de los procesos de revisión por pares es dado a conocer por el Consejo Editorial con el fin de que los Autores conozcan cuáles son los criterios de evaluación y estará siempre dispuesto a justificar cualquier controversia en el proceso de evaluación. En caso de Detección de Plagio a la Obra Científica el Comité notifica a los Autores por Violación al Derecho de Autoría Científica, Tecnológica y de Innovación.

Responsabilidades del Comité Arbitral

Los Árbitros se comprometen a notificar sobre cualquier conducta no ética por parte de los Autores y señalar toda la información que pueda ser motivo para rechazar la publicación de la Obra Científica. Además, deben comprometerse a mantener de manera confidencial la información relacionada con la Obra Científica que evalúan.

Cualquier manuscrito recibido para su arbitraje debe ser tratado como documento confidencial, no se debe mostrar o discutir con otros expertos, excepto con autorización del Editor.

Los Árbitros se deben conducir de manera objetiva, toda crítica personal al Autor es inapropiada.

Los Árbitros deben expresar sus puntos de vista con claridad y con argumentos válidos que contribuyan al que hacer Científico, Tecnológica y de Innovación del Autor.

Los Árbitros no deben evaluar los manuscritos en los que tienen conflictos de intereses y que se hayan notificado al Editor antes de someter la Obra Científica a evaluación.

Responsabilidades de los Autores

Los Autores deben garantizar que sus Obras Científicas son producto de su trabajo original y que los datos han sido obtenidos de manera ética.

Los Autores deben garantizar no han sido previamente publicados o que no estén siendo considerados en otra publicación seriada.

Los Autores deben seguir estrictamente las normas para la publicación de Obra Científica definidas por el Consejo Editorial.

Los Autores deben considerar que el plagio en todas sus formas constituye una conducta no ética editorial y es inaceptable, en consecuencia, cualquier manuscrito que incurra en plagio será eliminado y no considerado para su publicación.

Los Autores deben citar las publicaciones que han sido influyentes en la naturaleza de la Obra Científica presentado a arbitraje.

Servicios de Información

Indización - Bases y Repositorios

RESEARCH GATE (Alemania)
MENDELEY (Gestor de Referencias bibliográficas)
GOOGLE SCHOLAR (Índices de citaciones-Google)
REDIB (Red Iberoamericana de Innovación y Conocimiento Científico- CSIC)

Servicios Editoriales

Identificación de Citación e Índice H
Administración del Formato de Originalidad y Autorización
Testeo de Books con PLAGSCAN
Evaluación de Obra Científica
Emisión de Certificado de Arbitraje
Edición de Obra Científica
Maquetación Web
Indización y Repositorio
Publicación de Obra Científica
Certificado de Obra Científica
Facturación por Servicio de Edición

Política Editorial y Administración

Parque Pedregal Empresarial 3580 - Boulevard Adolfo Ruiz Cortines, CP-01900. San Jerónimo Aculco Álvaro Obregón - Ciudad de México. Tel: +52 1 55 6159 2296, +52 1 55 1260 0355, +52 1 55 6034 9181; Correo electrónico: contact@ecorfan.org www.ecorfan.org

ECORFAN®

Editor en Jefe
VARGAS-DELGADO, Oscar. PhD

Directora Ejecutiva
RAMOS-ESCAMILLA, María. PhD

Director Editorial
PERALTA-CASTRO, Enrique. MsC

Diseñador Web
ESCAMILLA-BOUCHAN, Imelda. PhD

Diagramador Web
LUNA-SOTO, Vladimir. PhD

Asistentes Editoriales
SORIANO-VELASCO, Jesús. BsC

Filóloga
RAMOS-ARANCIBIA, Alejandra. BsC

Publicidad y Patrocinio

(ECORFAN®- Mexico- Bolivia- Spain- Ecuador- Cameroon- Colombia- El Salvador- Guatemala- Nicaragua- Peru- Paraguay- Democratic Republic of The Congo- Taiwan), sponsorships@ecorfan.org

Licencias del Sitio

03-2010-032610094200-01-Para material impreso, 03-2010-031613323600-01-Para material electrónico, 03-2010-032610105200-01-Para material fotográfico, 03-2010-032610115700-14-Para Compilación de Datos, 04 -2010-031613323600-01-Para su página Web, 19502-Para la Indización Iberoamericana y del Caribe, 20-281 HB9-Para la Indización en América Latina en Ciencias Sociales y Humanidades, 671-Para la Indización en Revistas Científicas Electrónicas España y América Latina, 7045008-Para su divulgación y edición en el Ministerio de Educación y Cultura-España, 25409-Para su repositorio en la Biblioteca Universitaria-Madrid, 16258-Para su indexación en Dialnet, 20589-Para Indización en el Directorio en los países de Iberoamérica y el Caribe, 15048-Para el registro internacional de Congresos y Coloquios. financingprograms@ecorfan.org

Oficinas de Gestión

Parque Pedregal Empresarial 3580 - Boulevard Adolfo Ruiz Cortines, CP-01900. San Jerónimo Aculco Álvaro Obregón - Ciudad de México
21 Santa Lucía, CP-5220. Libertadores -Sucre – Bolivia.
38 Matacerquillas, CP-28411. Moralzarzal –Madrid-España.
18 Marcial Romero, CP-241550. Avenida, Salinas l - Santa Elena-Ecuador.
1047 Avenida La Raza -Santa Ana, Cusco-Perú.
Boulevard de la Liberté, Immeuble Kassap, CP-5963.Akwa- Douala-Camerún.
Avenida Suroeste, San Sebastian - León-Nicaragua.
31Kinshasa 6593- Republique Démocratique du Congo.
Avenida San Quentin, R 1-17 Miralvalle - San Salvador-El Salvador.
16 kilómetros, carretera estadounidense, casa Terra Alta, D7 Mixco Zona 1-Guatemala.
105 Alberdi Rivarola Capitán, CP-2060. Luque City- Paraguay.
69 Calle Distrito YongHe, Zhongxin. Taipei-Taiwán.
43 Calle # 30 -90 B. El Triunfo CP.50001. Bogotá-Colombia.

ISBN 978-607-8948-17-8

www.ecorfan.org