

Capítulo 2 Control de fuerza aplicado al dispositivo háptico OMNI PHANTOM® en lazo abierto

Chapter 2 Force control applied to the OMNI PHANTOM® haptic device in an open loop

AGUILAR-SANCHEZ, Iván†, HERNÁNDEZ-BARÓN, Eduardo*, DURAN-FONSECA, Miguel y GUDIÑO-LAU, Jorge

Universidad de Colima, Facultad de Ingeniería Electromecánica, Km. 20.5 Carretera Manzanillo-Barra de Navidad, C.P. 28869, Manzanillo, Colima, México

ID 1^{er} Autor: *Ivan, Aguilar-Sanchez* / **ORC ID:** 0000-0003-1364-0333

ID 1^{er} Coautor: *Eduardo, Hernández-Barón* / **ORC ID:** 0000-0001-5600-0075

ID 2^{do} Coautor: *Miguel, Duran-Fonseca* / **ORC ID:** 0000-0002-0780-6192

ID 3^{er} Coautor: *Jorge, Gudiño-Lau* / **ORC ID:** 0000-0002-0585-908X

DOI: 10.35429/H.2021.10.23.44

I. Aguilar, E. Hernández, M. Durán y J. Gudiño

* eduardo_hernandez1@ucol.mx

J. Gudiño, E. Hernández, S. Charre, J. Alcalá y M. Duran (AA. VV.). *Proyectos de Ingeniería Aplicada, Ciencia y Tecnología* ©ECORFAN- México, 2021.

Resumen

En este trabajo de investigación se describe el modelo cinemático de un dispositivo manipulador de tres grados de libertad, para el análisis cinemático directo se emplea el algoritmo Denavit-Hartenberg y para el análisis de cinemática inversa se emplea el método geométrico. Para el análisis de fuerza se analiza la estabilidad de los robots empleando la Función candidata de Lyapunov.

Cinemática, Dispositivo háptico, Fuerza, Trayectoria, Ortogonal

Abstract

This research paper describes the kinematic model of a manipulative device of three degrees of freedom, for the direct kinematic analysis the Denavit-Hartenberg algorithm is used and for the inverse kinematic analysis the geometric method is used. For the force analysis, the stability of the robots is analyzed using the Lyapunov Candidate Function.

Kinematics, Haptic device, Strength, Trajectory, Orthogonal

1. Introducción

Los robots manipuladores se han vuelto más comunes dentro de las distintas industrias debido a su flexibilidad y versatilidad. El eficaz cumplimiento de tareas repetitivas por parte de las máquinas y la automatización de los trabajos agotadores ayuda a alejar a las personas de los daños y los roles que implican juicio y razonamiento, que ningún robot o programa puede replicar.

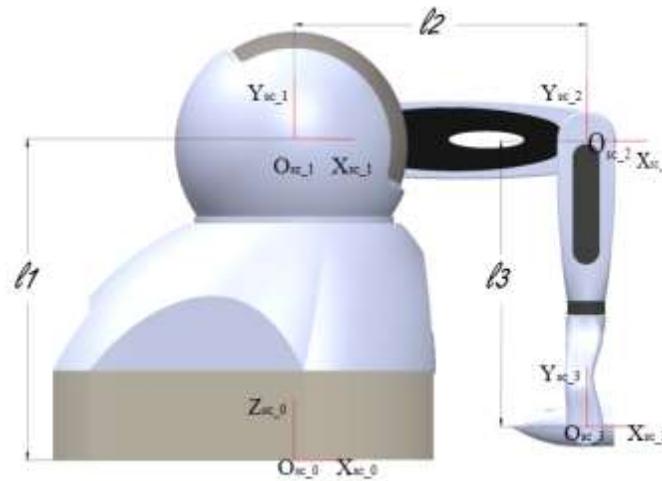
Sin embargo, el principal desafío para este tipo de tecnología está en las operaciones de mecanizado, en su falta de absoluta precisión. El problema de precisión de posicionamiento durante el mecanizado se debe a la falta de rigidez del robot, el cual es el criterio estudiado y optimizado en el presente trabajo, también se tiene el problema de la planificación de trayectoria y el control de la fuerza. Además, otro reto extra del mecanizado robótico es el proceso de programación complejo y que requiere mucho tiempo.

El termino ROBOT aparece en la literatura ingles en 1921, (Karel Capek “Rossum Universal Robots”) a partir de la palabra checa Robbota, que significa servidumbre o trabajo forzado. Si bien, actualmente podemos encontrar variedad de definiciones en cuanto a la palabra “Robot”, las cuales se presentarán en el apartado del marco teórico para un adentramiento más específico y mencionando solo las definiciones más aceptadas en el campo de la investigación.

2. Cinemática y dinámica del manipulador.

El sistema de coordenadas (O_{sci}) mostrada en la Figura 1 es asignado al robot manipulador. (Chavez, Gudiño, Alcalá, & Charre-Ibarra, 2018)

Figura 1 Asignación de sistemas de coordenadas



El dispositivo háptico tiene una particularidad en su eslabón 2, debido a que cuando esta gira, el sistema de coordenadas ($Osc2$) se mantiene en la misma orientación, lo cual únicamente sufre traslación.

Por lo que las matrices de transformación ${}^{i-1}A_i$ para las articulaciones 1 y 3 se obtienen a partir de la ecuación (1), mientras que para la articulación 2 sólo se aplica una matriz de traslación. Para fines de simplificar las ecuaciones se tiene que $\cos(q_i) = Cq_i$ y $\sin(q_i) = Sq_i$, así como utilizando la propiedad trigonométrica $\cos(q_3 - 90^\circ) = \sin(q_3)$ y $\sin(q_3 - 90^\circ) = -\cos(q_3)$.

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} Cq_1 & 0 & Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & 0 & -Cq_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} Sq_3 & Cq_3 & 0 & l_3Sq_3 \\ -Cq_3 & Sq_3 & 0 & -l_3Cq_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El cálculo de matriz de traslación de la articulación 2 sobre el eje x está dado por la ecuación (2)

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2Cq_2 \\ 0 & 1 & 0 & l_2Sq_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

La matriz de transformación homogénea que relaciona el extremo final con el sistema de coordenadas de referencia resulta de la multiplicación de las matrices de las ecuaciones (1) y (2), $T = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3$ donde $l = l_1 = l_2 = l_3$.

$$T = \begin{bmatrix} Cq_1 & 0 & Sq_1 & 0 & Sq_3 & Cq_3 & 0 & l_3Sq_3 & 1 & 0 & 0 & l_2Cq_2 \\ Sq_1 & 0 & -Cq_1 & 0 & -Cq_3 & Sq_3 & 0 & -l_3Cq_3 & 0 & 1 & 0 & l_2Sq_2 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

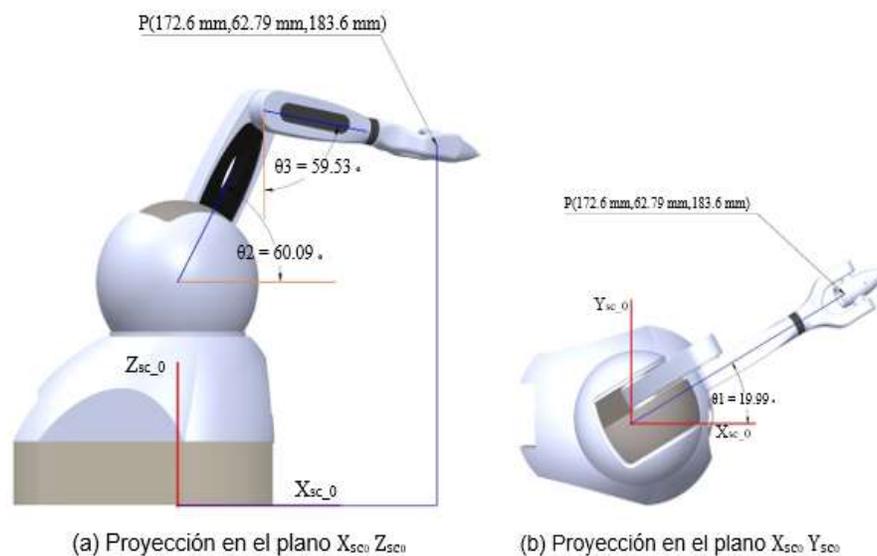
$$T = \begin{pmatrix} Cq_1Sq_3 & Cq_1Cq_3 & Sq_1 & l(Cq_1Sq_3 + Cq_1Cq_2) \\ Sq_1Sq_3 & Sq_1Cq_3 & -Cq_1 & l(Sq_1Sq_3 + Sq_1Cq_2) \\ -Cq_3 & Sq_3 & 0 & l(-Cq_3 + Sq_2 + 1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{h} \end{matrix} \quad (4)$$

De la ecuación (4) en la última columna podemos determinar la posición del efector final del manipulador quedando de la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} x &= l(Cq_1Sq_3 + Cq_1Cq_2) \\ y &= l(Sq_1Sq_3 + Sq_1Cq_2) \\ z &= l(-Cq_3 + Sq_2 + 1) \end{aligned} \quad (5)$$

La validación experimental de la ecuación (5) que representa la posición cartesiana del efector final proyectada en el sistema de coordenadas O_{sc0} se muestra en la Figura (2). Los ángulos de las articulaciones están dados por $q_1 = 19.99^\circ$ $q_2 = 60.09^\circ$ $q_3 = 59.53^\circ$

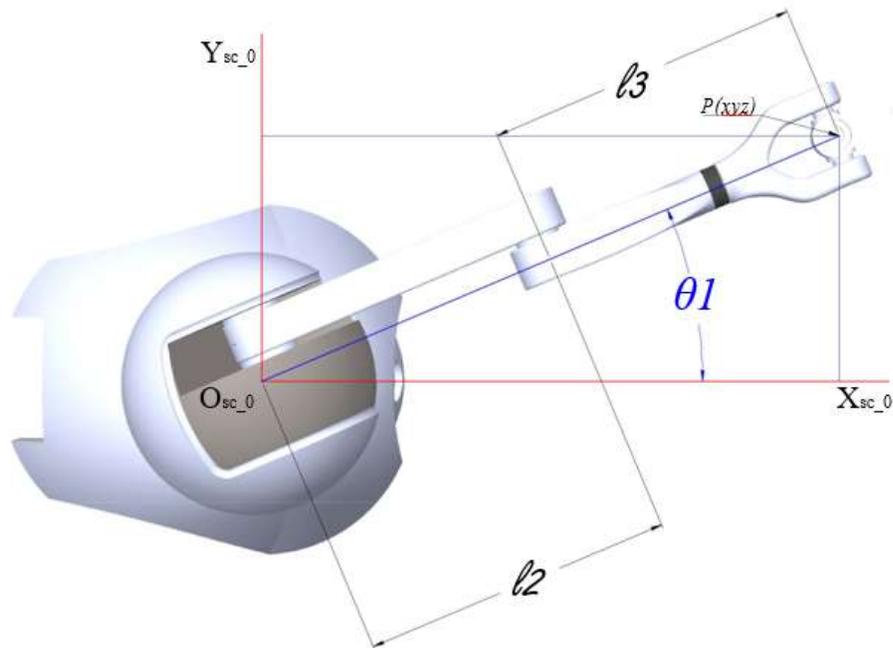
Figura 2 Validación de la cinemática directa del OMNI PHANTOM



3. Cinemática inversa de posición

Uno de los métodos más utilizados para resolver el problema de cinemática inversa en los manipuladores es el método gráfico. Su característica principal se basa en encontrar un número suficiente de relaciones geométricas (principalmente triángulos) en las que las coordenadas cartesianas del extremo del manipulador $P(x_{sc0}, y_{sc0}, z_{sc0})$ sus coordenadas articulares y las dimensiones de sus eslabones se relacionen entre sí (Barrientos, Peñín, Balaguer, & Aracil, 1999)

La Figura 3 se puede observar una vista superior del manipulador proyectando $P(x_{sc0}, y_{sc0}, z_{sc0})$ sobre el plano (x_{sc0}, y_{sc0}) el cual forma un triángulo rectángulo para encontrar el valor de q_1 .

Figura 3 vista superior del manipulador

Resolviendo por propiedades trigonométricas para encontrar el valor de q_1

$$q_1 = \text{tg}^{-1} \frac{\frac{\partial y_{sc0}}{\partial x_{sc0}}}{\frac{\partial z_{sc0}}{\partial x_{sc0}}} \quad (6)$$

Con apoyo de la vista lateral del dispositivo como se muestra en la figura (4), donde sólo se consideran los eslabones 2 y 3 que se encuentran en el plano (x_{sc0}, z_{sc0}) . Debido a la configuración mecánica del dispositivo háptico se analiza en la configuración de codo arriba misma que se observa en la figura. El valor de q_2 está dado por el valor de los ángulos auxiliares como es el caso de α y β .

Para el cálculo del ángulo a se considera el triángulo rectángulo formado por los vectores $(r, R, z_{sc0} - l_1)$ donde r es el vector formado por $P(x_{sc0}, y_{sc0}, z_{sc0})$ proyectado sobre el plano (x_{sc0}, y_{sc0})

$$r = \sqrt{(x_{sc0})^2 + (y_{sc0})^2} \quad (7)$$

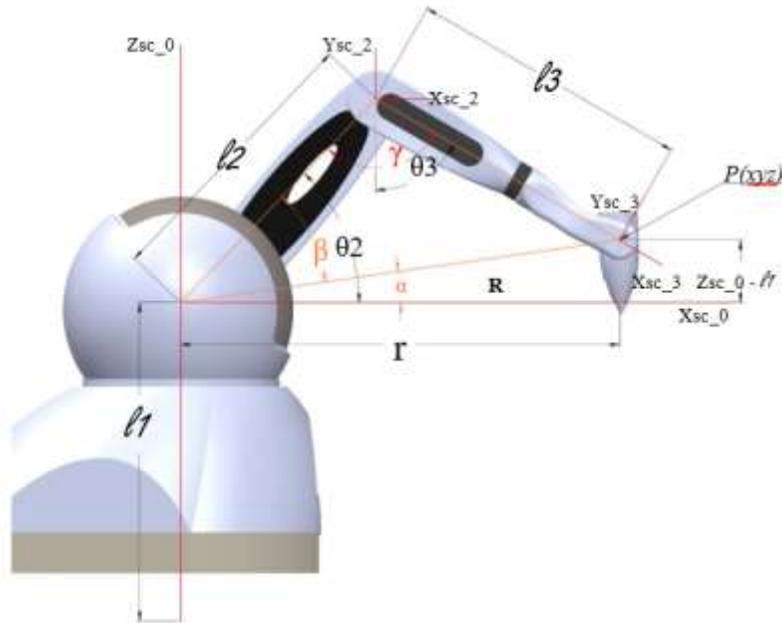
El vector R de la ecuación (7) es la resultante del punto $P(x_{sc0}, y_{sc0}, z_{sc0})$ con el origen $z_{sc0} - l$

$$R = \sqrt{(r)^2 + (z_{sc0} - l)^2} \quad (8)$$

Una vez calculados los valores de los vectores formados en el triángulo rectángulo se calcula el valor del ángulo a

$$a = \text{tg}^{-1} \frac{(z_{sc0} - l)}{r} \quad (9)$$

Figura 4 Vista lateral del manipulador



Para el cálculo del ángulo b se considera el triángulo formado por los vectores de (l_2, l_3, R) y por la ley de los cosenos se tiene la siguiente ecuación:

$$b = \cos^{-1} \frac{\alpha R}{2l_2} \quad (10)$$

Por lo tanto el ángulo q_2 es la sumatoria de a y b de las ecuaciones (9) y (10)

$$q_2 = a + b \quad (11)$$

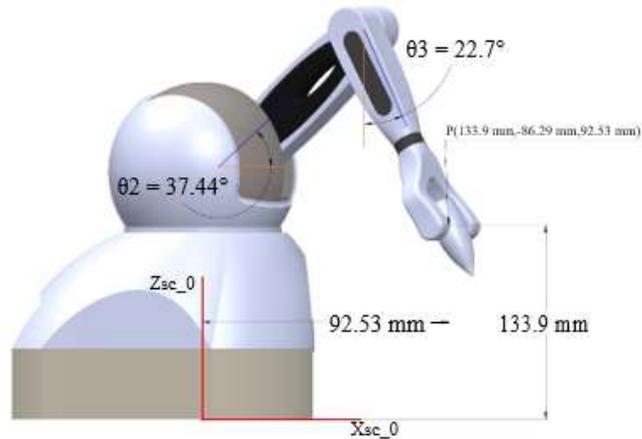
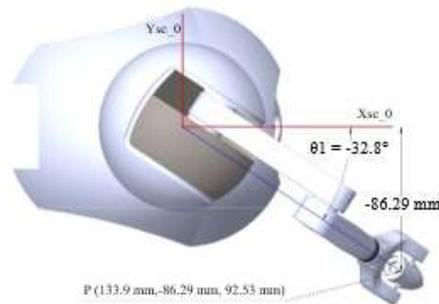
Para encontrar el ángulo q_3 se considera el mismo triángulo anterior y considerando un ángulo de 90° entre el eje y_{sc2} negativo y el eje x_{sc2} positivo se puede deducir la siguiente ecuación.

$$q_3 = g + q_2 - 90 \quad (12)$$

donde

$$g = \cos^{-1} \frac{\alpha 2l^2 - R^2}{2l^2} \quad (13)$$

Para validar el modelo cinemático inverso de posición se ingresan los valores de $x_{sc0} = 133.9 \text{ mm}$, $y_{sc0} = -86.29 \text{ mm}$ y $z_{sc0} = 92.53 \text{ mm}$ del efector final respecto al sistema de coordenadas de origen, con ayuda del modelo hecho en SolidWorks se verifican los valores que deben tomar los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 , tal como se muestra en la Figura

Figura 5 Validación de la cinemática inversa(a) Proyección en el plano $X_{sc0} Z_{sc0}$ (b) Proyección en el plano $X_{sc0} Y_{sc0}$

4. Modelo cinemático de velocidad

Cuando se habla de control de un manipulador se debe conocer además de la relación de posición del extremo final del robot respecto al sistema de referencia en la base de este, la relación que existe en la velocidad que el robot debe enviar a cada actuador, para conseguir llegar de un punto a otro a una velocidad deseada. A la relación que existe entre las velocidades articulares y velocidades cartesianas del manipulador, se le conoce como matriz jacobiana. De aquí surgen dos problemas; problema cinemático directo e inverso de velocidad. (Mark & Vidyasagar, 1989)

Análisis de velocidad angular

El método directo para calcular la matriz Jacobiana (J) (ecuación 14) es obtener las derivadas parciales correspondientes a la cinemática directa (ecuación 4)

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$J = \begin{bmatrix} -lSq_1(Sq_3 + Cq_2) & -lCq_1Sq_2 & lCq_1Cq_3 \\ lCq_1(Sq_3 + Cq_2) & -lSq_1Sq_2 & lSq_1Cq_3 \\ 0 & lCq_2 & lSq_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Cinemática directa de velocidad

El problema cinemático directo de velocidad se resuelve usando la siguiente ecuación

$$\dot{x} = J\dot{q} \quad (16)$$

donde \dot{x} representa la velocidad lineal de las articulaciones del manipulador, J es la matriz jacobiana y \dot{q} la velocidad angular.

Sustituyendo los parámetros de la ecuación (16) se obtiene la ecuación (17) que representa el modelo cinemático directo de velocidad

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -lS_1(S_3+C_2) & -lC_1S_2 & lC_1C_3 \\ lC_1(S_3+C_2) & -lS_1S_2 & lS_1C_3 \\ 0 & lC_2 & lS_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Cinemática inversa de velocidad

Por otra parte la cinemática inversa de velocidad se obtiene al despejar el valor de \dot{q} la ecuación (16)

$$\dot{q} = J^{-1}\dot{x} \quad (18)$$

De este modo se verifica que la matriz J tenga inversa, por lo que se debe cumplir la igualdad: $\det(J) \neq 0$, si esta se cumple se obtiene la matriz Jacobiana inversa como se muestra en la ecuación (19)

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{S_1}{l(S_3+C_2)} & -\frac{C_1}{l(S_3+C_2)} & 0 \\ \frac{C_1S_3}{l(C_3C_2+S_2S_3)} & -\frac{S_1S_3}{l(C_3C_2+S_2S_3)} & \frac{C_3}{l(C_3C_2+S_2S_3)} \\ \frac{C_2C_1}{l(C_3C_2+S_2S_3)} & \frac{C_2S_1}{l(C_3C_2+S_2S_3)} & \frac{S_2}{l(C_3C_2+S_2S_3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Sustituyendo la ecuación (19) en la ecuación (18), se tiene la ecuación (20) que representa el modelo cinemático inverso de velocidad.

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{S_1}{l(S_3+C_2)} & -\frac{C_1}{l(S_3+C_2)} & 0 \\ \frac{C_1S_3}{l(C_3C_2+S_2S_3)} & -\frac{S_1S_3}{l(C_3C_2+S_2S_3)} & \frac{C_3}{l(C_3C_2+S_2S_3)} \\ \frac{C_2C_1}{l(C_3C_2+S_2S_3)} & \frac{C_2S_1}{l(C_3C_2+S_2S_3)} & \frac{S_2}{l(C_3C_2+S_2S_3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Modelo cinemático de aceleración

La cinemática directa de aceleración representa un importante aspecto en el control de fuerza del manipulador a lo largo de una trayectoria, y permite determinar el estado de aceleración de la herramienta (compuesto por tres aceleraciones lineales y tres aceleraciones angulares).

La cinemática directa de aceleración busca conocer el efecto que tiene, en el movimiento de la herramienta, la aceleración de cada una de las articulaciones para cada punto de una trayectoria. El problema se puede plantear como: conocidos los ángulos de las articulaciones, la posición y velocidad del efector final, las velocidades de las articulaciones, estado de velocidad del efector final, conocer el comportamiento de la aceleración del efector final.

La cinemática directa de aceleración se obtiene al derivar la ecuación (18)

$$\ddot{x} = \dot{J}\dot{q} + J\ddot{q} \quad (21)$$

donde \dot{J} se obtiene de las derivadas parciales de la matriz Jacobiana (ecuación 15)

(22)

Cinemática inversa de aceleración

En la cinemática inversa de aceleración se desea conocer las aceleraciones de las articulaciones actuadas en función del estado de aceleración del efector final. El problema puede plantearse como: conocidos los ángulos de posición del manipulador, la posición y orientación del efector final, las velocidades de articulaciones, la velocidad del efector final y las aceleraciones angulares del efector final, la aceleración lineal del efector final y las aceleraciones angulares. Para poder encontrar la cinemática inversa de aceleración se aplica el método de la transpuesta del Jacobiano.

$$\ddot{q} = J^{-1} \dot{J} \ddot{x} - \dot{J} \dot{q} \dot{q} \quad (23)$$

5. Modelo dinámico

En el control de manipuladores es necesario conocer las ecuaciones que describen su comportamiento dinámico, dichas formulaciones matemáticas relacionan el movimiento del robot y las fuerzas implicadas en el mismo. El estudio dinámico depende en gran parte de los parámetros del robot (masa y geometría de sus eslabones, inercias, etc.) así como las fuerzas aplicadas en cada una de sus articulaciones este se puede obtener a partir de leyes físicas (newtoniana y lagrangiana). El presente trabajo se desarrolló por el método de Euler-Lagrange, el cual se realiza paso por paso en los párrafos siguientes. Las masas de los eslabones se obtuvieron a partir del modelo del manipulador diseñado en SolidWorks, las geometrías de los eslabones se tomaron como figuras regulares.

Formulación de Euler-Lagrange

Este método parte de la información cinemática del elemento como se analizó en el apartado 1, y se emplea la técnica dinámica lagrangiana para obtener las ecuaciones dinámicas del robot. El algoritmo de Euler-Lagrange (E-L) para obtener la dinámica de un manipulador con n grados de libertad (gdl) se basa en los siguientes puntos:

1. La matriz de transformación de coordenadas homogéneas $4 \times 4, {}^{i-1}A_i$ que describe la relación espacial entre los sistemas de coordenadas del elemento i -ésimo y el elemento $(i-1)$ ésimo. Relaciona un punto fijado en el elemento i expresado en coordenadas homogéneas con respecto al sistema de coordenadas i -ésimo en el sistema de coordenadas $(i-1)$ ésimo.
2. La ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad (24)$$

donde

$L = K(q, \dot{q}) - P(q)$ Función lagrangiana

$K =$ Energía cinética total del brazo

$P =$ Energía potencial del brazo

$q_i =$ Coordenada generalizada del brazo

La energía cinética $K(q, \dot{q})$ de un robot manipulador de n -gdl se expresa en función de la velocidad articular.

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \quad (25)$$

Donde $H(q)$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ a la que se le conoce como matriz de inercia. Por otro lado, la energía potencial $P(q)$ tiene una dependencia del vector velocidad q debido a que considera campos conservatorios como la fuerza gravitacional.

La ecuación (24) puede representarse como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} P(q) = t \quad (26)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \right) = H(q) \dot{q}$$

$$\frac{d}{dt} \left(H(q) \dot{q} \right) = H(q) \ddot{q} + \dot{H}(q) \dot{q}$$

Apartir de la ecuación (26) y las expresiones anteriores la ecuación que describe la dinámica de los manipuladores:

$$H(q) \ddot{q} + \dot{H}(q) \dot{q} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \right)}_{C(q, \dot{q}) \dot{q}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial q} P(q)}_{g(q)} = t \quad (27)$$

generalizando la ecuación anterior en forma matricial se puede representar como

$$t = H(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) \quad (28)$$

6. Modelo dinámico del OMNI PHANToM

El modelo dinámico de la ecuación (28) que describe el comportamiento del manipulador OMNI PHANToM® se obtiene mediante el método de Euler - Lagrange. Para calcular la matriz de inercias del manipulador es importante determinar las velocidades articulares.

Matriz de tensor inercial

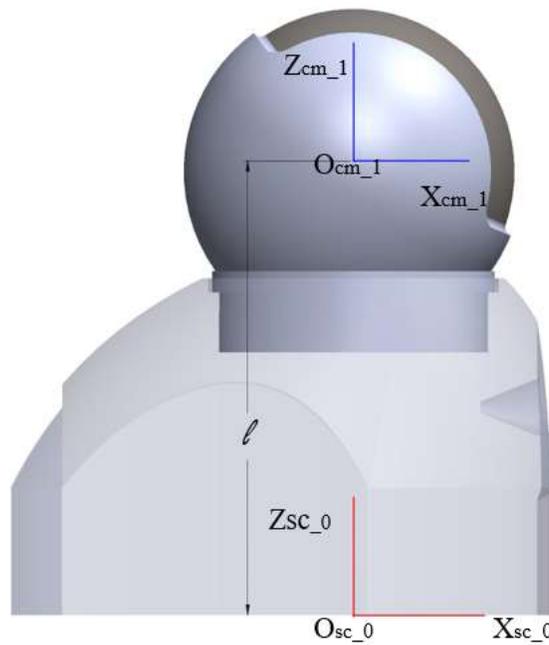
La matriz de tensor inercial se obtiene mediante la ecuación (29), depende de la geometría y masa de la articulación i , misma que debe ser expresada en el sistema de coordenadas del elemento i -ésimo

$$J_i = \begin{pmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & m_i \bar{x}_i \\ I_{xy} & \frac{I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}}{2} & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{pmatrix} \quad (29)$$

Articulación 1

En la Figura 6 se muestra el primer eslabón que forma la cadena cinemática del robot manipulador, para este trabajo y con la finalidad de simplificar los cálculos, la geometría de cada uno de los eslabones se aproxima a una figura regular, para esta primera articulación se modela como una esfera sólida.

Figura 6 Sistemas de coordenadas de eslabón 1



Cuando el eje de coordenadas de referencia está en el centro de masas O_{cm-1} de la esfera sólida, la ecuación (30) representa su momento de inercia, en la Figura (6) se muestra este sistemas de coordenadas.

$$\begin{aligned} \bar{I}_x = \bar{I}_y = \bar{I}_z &= \frac{2}{5} m_i l^2 \\ \bar{I}_{xy} = \bar{I}_{xz} = \bar{I}_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Sin embargo, los momentos de inercia deben expresarse en el sistema de coordenadas O_{sc-1} donde se aplica el movimiento. Es fácil notar que, para este primer eslabon se aplica en el sistemas de coordenadas O_{sc-0} . El vector 1r_1 que representa el sistema de coordendas centro de masas está dado por la ecuacion:

$${}^1r_1 = \begin{pmatrix} \hat{e}_x 0 \\ \hat{e}_y 0 \\ \hat{e}_z -l \\ 1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Ahora bien, por el teorema de los ejes paralelos se tienene los momentos de inercia del eslabón 1

$$\begin{aligned}
 I_{xx} = I_{yy} &= \frac{7}{5} m_1 l^2 \\
 I_{zz} &= \frac{2}{5} m_1 l^2 \\
 I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

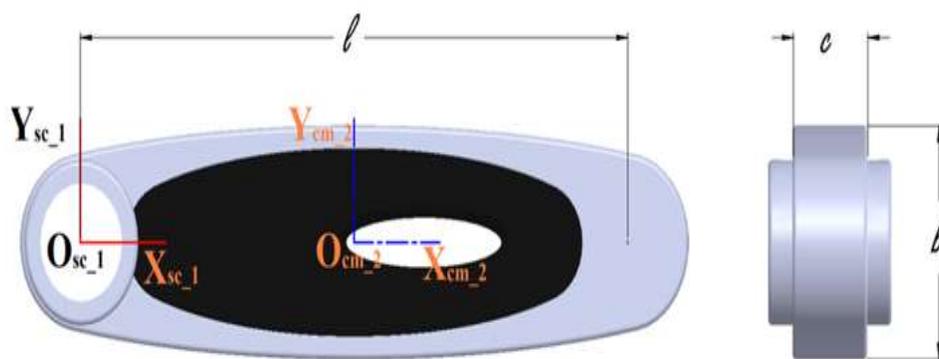
Por lo tanto la matriz de tensor de inercia correspondiente al primer eslabón es:

$$J_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} m_1 l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} m_1 l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} m_1 l^2 & -m_1 l \\ 0 & 0 & -m_1 l & m_1 \end{pmatrix}
 \tag{33}$$

Articulación 2

La Figura 7 muestra la geometría del segundo eslabón, mismo que se analiza como un prisma rectangular.

Figura 7 Sistema de centro de masas del eslabón 2.



La ecuación 34 muestra el momento de inercia de un prisma rectangular cuando el eje de referencia se encuentra en el centro de masa O_{cm_2} .

$$\begin{aligned}
 I_x &= \frac{1}{12} m_2 (b^2 + c^2) \\
 I_y &= \frac{1}{12} m_2 (c^2 + l^2) \\
 I_z &= \frac{1}{12} m_2 (l^2 + b^2) \\
 I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

7. Dispositivo háptico y sensor de fuerza

El dispositivo háptico Geomagic Touch™ (OMNI PHANTOM) proporciona una auténtica navegación tridimensional y retroalimentación de fuerza e integran el sentido del tacto en los sistemas de modelado 3D, así como en aplicaciones comerciales y de investigación. Este dispositivo háptico de 3D Systems puede medir de forma precisa la posición espacial 3D (a lo largo de los ejes (X,Y,Z)) y la orientación (giro, inclinación y dirección) del lápiz de mano. Utiliza motores para crear las fuerzas de retorno en la mano del usuario para simular el tacto y la interacción con objetos virtuales, es decir, proporcionar una retroalimentación de fuerza de 4 grados de libertad (DOF).

Figura 8 Dispositivo háptico



En la tabla 1 se muestran las especificación del dispositivo háptico OMNI PHANToM

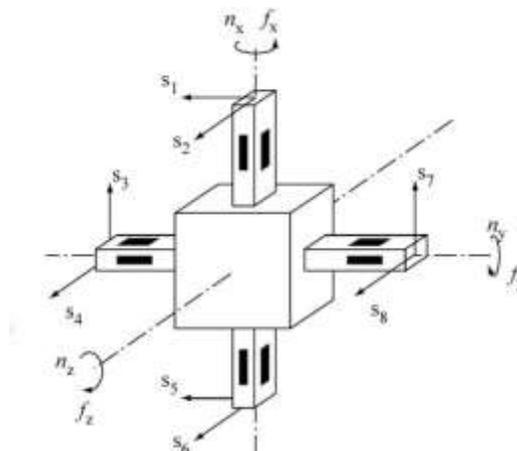
Tabla 1 Parametros del manipulador OMNI PHANToM

Área de trabajo	160 An x 120 Al x 70 P mm
Rango de movimiento	Movimiento de la mano con giro de la muñeca
Resolución nominal	0.055mm
Fuerza máxima	3.3 N
Retroalimentación de fuerza	X,y,z
Interfaz	Puerto Ethernet conforme a RJ45

8. Sensor Fuerza/Torsion Gamma

Los sensores de fuerza y par utilizan sensores piezorresistivos que presentan una resistencia variable a la deformación sufrida

Figura 9 Sensor de fuerza



La medición de fuerza y torsión es utilizada para el estudio de materiales, medidas de peso, fijación de tornillos, diagnósticos médicos, pruebas automotrices, entre otros. Los sensores basados en galgas extensiométricas permiten medir estas variables físicas, transformando las variables físicas en señales eléctricas.

Una galga extensiométrica es un dispositivo que se basa en el efecto piezorresistivo, el cual es una propiedad de algunos materiales, que cambian la resistencia eléctrica cuando se someten a ciertos esfuerzos o se deforman en dirección de los ejes mecánicos. Las galgas se basan en la propiedad física de conductancia eléctrica y depende de la geometría del conductor. Cuando un conductor eléctrico se estira, cuando un conductor es comprimido, este se vuelve más ancho y corto, disminuyendo así su resistencia eléctrica.

Midiendo la resistencia eléctrica de la galga, se puede entonces calcular el valor de la tensión aplicada. El cambio de resistencia es medido a través de un puente de Wheatstone balanceando los brazos de un circuito puente. El puente consiste en cuatro resistencias que forman un circuito cerrado, siendo una de ellas la resistencia bajo medida (R_x).

9. Sensor de F/T Modelo GAMMA y componentes

El sistema del sensor de fuerza/torque ATI de multi ejes (Ver figura) mide los seis componentes de fuerza y torque. El sistema consiste en transductor, cable flexible recubierto y sistema de adquisición de dato, interfaz Ethernet/DeviceNet. Este tipo de sensores se utiliza en la industria para la prueba de productos, montaje robótico, trituración y pulido. En el campo de la investigación se utiliza en procesos quirúrgicos robóticos, tecnología háptica, rehabilitación, neurología entre otras aplicaciones. (Automation, 2018)

Figura 10 Sensor de fuerza F/T Modelo GAMMA



El sistema completo asociado al sensor está formado por los siguientes componentes:

- Transductor
- Cable del transductor
- Controlador

Especificaciones técnicas de sensor ATI GAMMA

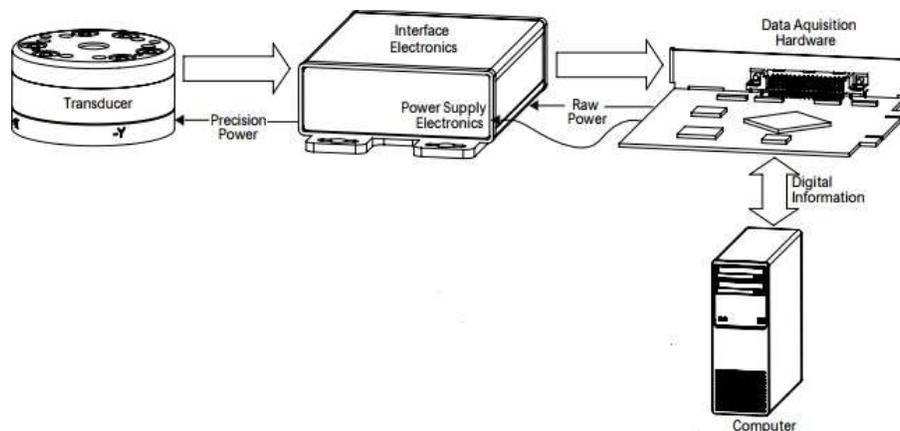
En la Tabla se muestran las especificaciones técnicas del sensor.

Tabla 2 Especificaciones técnicas del sensor ATI GAMMA

Sobrecarga de eje único	
F_{xy}	$\pm 1200N$
F_z	$\pm 4100N$
T_{xy}	$\pm 79N$
T_z	$\pm 82N$
Rigidez calculada	
Fuerza de eje x; Fuerza eje y (Kx,Ky)	$9.1 \cdot 10^6 N / m$
Fuerza del eje z (Kz)	$1.8 \cdot 10^7 N / m$
Torque del eje x; fuerza del eje y (Ktx,Kty)	$1.1 \cdot 10^4 N / rad$
Torque del eje z (Ktz)	$1.6 \cdot 10^4 N / rad$
Frecuencia resonante	
F_x, F_y, T_z	1400Hz
F_z, T_x, T_y	2000Hz
Especificaciones físicas	
Peso	0.25 Kg
Diámetro	75.4mm
Altura	33.3mm

10. Adquisición de Datos

En la figura se muestra el diagrama de conexión del sensor con la computadora y los componentes necesarios.

Figura 11 Diagrama de conexión

11. Técnicas de control

Los robots en algunas ocasiones se clasifican tomando en cuenta los movimientos que efectúan de su espacio de trabajo, al realizar una tarea. Una de estas clasificaciones se presenta cuando el robot realiza una tarea sin llevar a cabo una interacción especializada con su medio, es decir, el robot manipulador únicamente cambia de una a otra coordenada espacial en su espacio de trabajo, tal clasificación en teoría de control es conocida como regulación, debido a que su finalidad es la de llevar las ecuaciones de error del sistema a cero. Matemáticamente $\tilde{x} = 0$, donde \tilde{x} es el error, $\tilde{x} = x - x_d$, x son los estados del sistema y x_d es una posición deseada del sistema. La regulación sucesiva de coordenadas espaciales constituye una tarea de movimiento coordinado, usualmente empleada en procesos de manufactura flexible (Ordaz Oliver, J. Patricio y Alejandro, 2009). Otra clasificación otorgada a robots es el seguimiento de trayectorias, generalmente basada en ecuaciones paramétricas, lo cual implica una interacción más especializada con su medio. Para esta clasificación, al igual que en regulación se pretende llevar las ecuaciones de error a cero, es decir. (Reyes Cortez, 2011)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) - q_d(t) \approx 0 \quad (35)$$

Otra de las clasificaciones del control es la de seguimiento en la que el manipulador interactúa con su medio, es decir, cuando el manipulador aplica fuerza sobre una superficie para ejecutar tareas como barrenado, soldadura, pintura, etc. Distintas técnicas de control de posición y fuerza corresponden a un control híbrido en que la fuerza y posición pueden construir una tarea de regulación o seguimiento.

12. Control de seguimiento

El algoritmo de control de posición en movimiento libre (sin restricciones). La finalidad es mover el manipulador de la posición inicial hasta tocar la superficie donde existan restricciones, posteriormente regresar a la posición inicial una vez terminada la tarea en el entorno.

Considerando un manipulador en movimiento libre, el cual su dinámica viene dada por la siguiente expresión

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = t \quad (36)$$

Para asegurar el control se tiene que definir los errores

$$\tilde{q} = q - q_d \quad (37)$$

Otro error es el error residual deslizante el cual asegura la convergencia y la acotación de q y \dot{q} dado por

$$s = \dot{q} - \dot{q}_r \quad (38)$$

$$\dot{q}_r = \dot{q} - L\tilde{q} \quad (39)$$

La velocidad de referencia \dot{q}_r dada por la velocidad deseada en consecuencia al error de posición, garantiza la convergencia del error a cero.

El controlador propuesto para el control de posición sin restricciones está dado por

$$t = H(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q}_r)\dot{q}_r + g(q) + K_R\dot{q}_r \quad (40)$$

Donde $K_R \hat{=} R^{n \times n}$ es una matriz diagonal positiva.

Substituyendo la en la ecuación, se puede calcular la dinámica del manipulador en lazo cerrado como:

$$H(q)(\ddot{q} - \ddot{q}_r) + C(q, \dot{q})\dot{q} - C(q, \dot{q}_r)\dot{q}_r = K_R\dot{q}_r \quad (41)$$

Substituyendo el error de la velocidad de referencia, la dinámica en lazo cerrado del manipulador queda como:

$$H(q)\dot{s} = C(q, \dot{q}_r)\dot{q}_r - C(q, \dot{q})\dot{q} + K_R\dot{q}_r \quad (42)$$

donde el término $C(q, \dot{q})\dot{q} - C(q, \dot{q}_r)\dot{q}_r$ se ha manipulado

$$\begin{aligned}
C(q, \dot{q}_r) \dot{q}_r - C(q, \dot{q}) \dot{q} &= C(q, \dot{q}_r) \dot{q}_r - C(q, \dot{q}) \dot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q}_r - C(q, \dot{q}) \dot{q}_r \\
&= -C(q, \dot{q}) (\dot{q} - \dot{q}_r) - C(q, \dot{q} - \dot{q}_r) \dot{q}_r \\
&= -C(q, \dot{q}) s - C(q, \dot{q}_r) s
\end{aligned} \tag{43}$$

Por lo que la dinámica del manipulador en lazo cerrado queda como

$$H(q) \dot{s} = -C(q - \dot{q}) s - C(q, \dot{q}_r) s + K_R \dot{q}_r \tag{44}$$

Para demostrar la estabilidad del modelo se emplea la estabilidad en sentido de Lyapunov, donde se propone una función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} s^T H(q) s \tag{45}$$

que se interpreta como el total de la energía asociada con el sistema de lazo cerrado.

Derivando la función candidata de Lyapunov se tiene que

$$\dot{V} = s^T H(q) \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{H}(q) s \tag{46}$$

Substituyendo las ecuaciones se tiene

$$\dot{V} = s^T \{-C(q - \dot{q}) s - C(q, \dot{q}_r) s + K_R \dot{q}_r\} + \frac{1}{2} s^T \dot{H}(q) s \tag{47}$$

Utilizando la propiedad $\frac{1}{2} s^T \dot{H}(q) s - s^T C(q, \dot{q}_r) s = 0$, la ecuación anterior queda como

$$\dot{V} = -s^T C(q - \dot{q}) s + s^T K_R \dot{q}_r \tag{48}$$

Como se puede observar la ecuación anterior se tiene un término positivo por lo cual tiene que acotar por normas para que pueda cumplir con la estabilidad de Lyapunov, si s está acotado por s_{\max} y tiende a cero, entonces el error de la posición \tilde{q} y la velocidad del error $\dot{\tilde{q}}$ debe permanecer acotados, por lo tanto, tienden a cero.

$$m_1 = \max \|C(q, \dot{q})\| \tag{49}$$

$$\|x\| \leq x_{\max} \tag{50}$$

$$X_D = x_{\max}(D) \tag{51}$$

$$X_d = x_{\min}(D) \tag{52}$$

Entonces la derivada de la función candidata de Lyapunov se tienen como

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -m_1 \|s\|^2 \|x^2 - x_d\| \|s^2\| + x_{\max}(K_R) \|s\|^2 \\
\dot{V} &\leq -(m_1 + x_d - x_{\max}(K_R)) \|s\|^2
\end{aligned} \tag{53}$$

Donde:

$$x_{\max}(K_R) \leq m_1 + x_d \quad (54)$$

De acuerdo con la definición de Lyapunov se establece que la función candidata de Lyapunov cumple con la condición adad. $K_R \hat{I} R$ es una matriz propuesta como ganancia del controlador.

Por lo tanto, se obtiene que el control dado por la ecuación () es un controlador sin restricciones, y el error de la posición tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito.

13. Control de posición y fuerza

En este apartado se analizará el problema de control de fuerza. Para el análisis del controlador se posición y fuerza, además de los errores de seguimiento de posición se definen los siguientes errores.

$$D\dot{p} = \dot{p} - \dot{p}_d \quad (55)$$

$$Dl = l - l_d \quad (56)$$

$$Dp = p - p_d \quad (57)$$

donde p_d es la posición deseada restringida la cual satisface $j(q) = 0, l_d$ es la fuerza deseada aplicada sobre la superficie. Para explotar el echo de que el principio de ortogonalización se establece en el espacio articular a nivel de velocidad, se propone una señal de referencia \dot{q}_r a nivel de velocidad, llamada referencia nominal. Ya que las variables de posición y fuerza son físicamente ortogonales y deben ser controladas, entonces \dot{q}_r debe ser calculada en función de referencias nominales ortogonales en posición y fuerza.

Otra definición es la señal de referencia q_r se puede obtener como

$$\dot{q}_r = Q(q)(\dot{q}_d + L(q_d)) + J_j^+ (\dot{p} - bD_p + xDF) \quad (58)$$

Donde $L = kI \hat{I} R$ con $k > 0$, es una matriz diagonal definida positiva, b y x son constantes positivas. DF se obtiene de

$$DF = \int_0^t D dt \quad (59)$$

dado en (JGLau,2004)

$$\begin{aligned} s &= \dot{q} - \dot{q}_r \\ &= Q(q)(\dot{\tilde{q}} + D\tilde{q}_d) \\ &= J_j^+(q)(D\dot{p} + bD_p - xDF) \end{aligned} \quad (60)$$

Como la ecuacion () esta dividida en dos espacios ortogonales se puede definir como:

$$s = s_p + s_f \quad (61)$$

Donde s_p y s_f son vectores que representan la posición y fuerza respectivamente del sistemas

Derivando la señal de referencia dada por la ecuación () se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r @ Q(q)(\ddot{q} + L\dot{q}_d) + J_j^+(q)(\ddot{p}_d - b(\dot{p} - \dot{p}_d) + xDF) \\ + \dot{Q}(q)(\dot{q} + Lq_d) + J_j^+(q)(\dot{p}_d - b(D\dot{p}) + xDF) \end{aligned} \quad (62)$$

14. Controlador para movimiento restringido

El modelo dinámico de un manipulador con restricciones está dado por

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = t + J_j^+(q)l \quad (63)$$

Por lo que la ley de control que se propone es

$$t = H(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q}_r)\dot{q}_r + K_R\dot{q}_r + J_j^+(-l_d + k_F DF) + g(q) \quad (64)$$

Substituyendo la ecuación (64) en (63) se obtiene la dinámica del manipulador en lazo cerrado

$$\begin{aligned} H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = & H(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q}_r)\dot{q}_r \\ & + K_R\dot{q}_r + J_j^+(-l_d + k_F DF) \\ & + g(q) + J_j^+(q)l \end{aligned} \quad (65)$$

Agrupando términos y substituyendo los errores ya definidos, se obtiene el modelo dinámico del manipulador en lazo cerrado con control de posición t fuerza:

$$H(q)s + C(q, \dot{q})\dot{q} - C(q, \dot{q}_r)\dot{q}_r = K_R\dot{q}_r + J_j^+(q)l(DI + k_F DF) \quad (66)$$

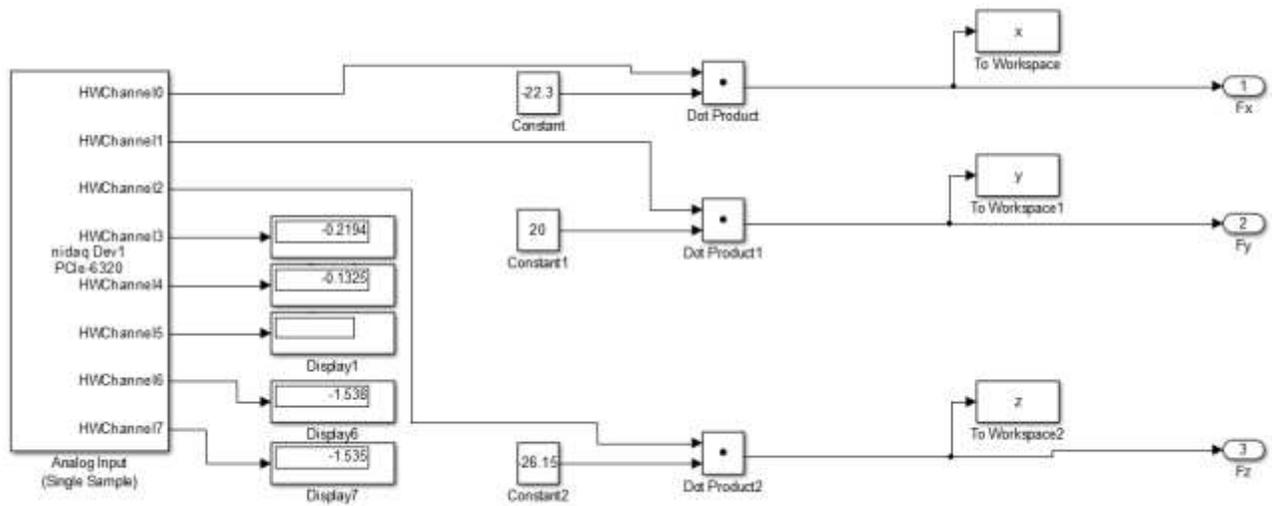
15. Resultados

Para realizar la lectura del sensor ATI se utilizó el programa Simulink de Matlab, teniendo como resultado la fuerza o torque del sensor. En la tabla se muestra los resultados utilizando solo los primeros tres canales que son los de fuerza en x,y,z y tomando en cuenta que el peso de la base también tiene un peso y está siendo medido por el sensor, se obtiene una expresión para convertir el voltaje que proporciona la tarjeta de adquisición de datos a fuerza (Newton). En la figura se muestra diagrama a bloques de la lectura de la Fuerza.

Tabla 3 Canales de salida Fuerza/Torque

	G0	G1	G2	G3	G4	G5
F_x	1	0	0	0	0	0
F_y	0	1	0	0	0	0
F_z	0	0	1	0	0	0
T_x	0	0	0	1	0	0
T_y	0	0	0	0	1	0
T_z	0	0	0	0	0	1

Figura 12 Diagrama a bloques de conexiones



Para comprobar el estudio de la fuerza se hicieron tres experimentos:

El primer experimento se llevó a cabo midiendo la fuerza mientras el efector final no hace contacto con la superficie a una distancia de 65 mm de la posición final. En la Figura 13 se muestra el código de programación que en un tiempo de

Figura 13 Programación de la trayectoria a una distancia de 65 mm de la superficie

```

zp = 3*ax331*(tt^2) + 4*ax341*(tt^3) + 5*ax351*(tt^4);
zpp = 6*ax331*tt + 12*ax341*(tt^2) + 20*ax351*(tt^3);

%% Circunferencia
elseif reloj > 5 && reloj <= 15

    ttt = 10;
    tt = reloj - 5;

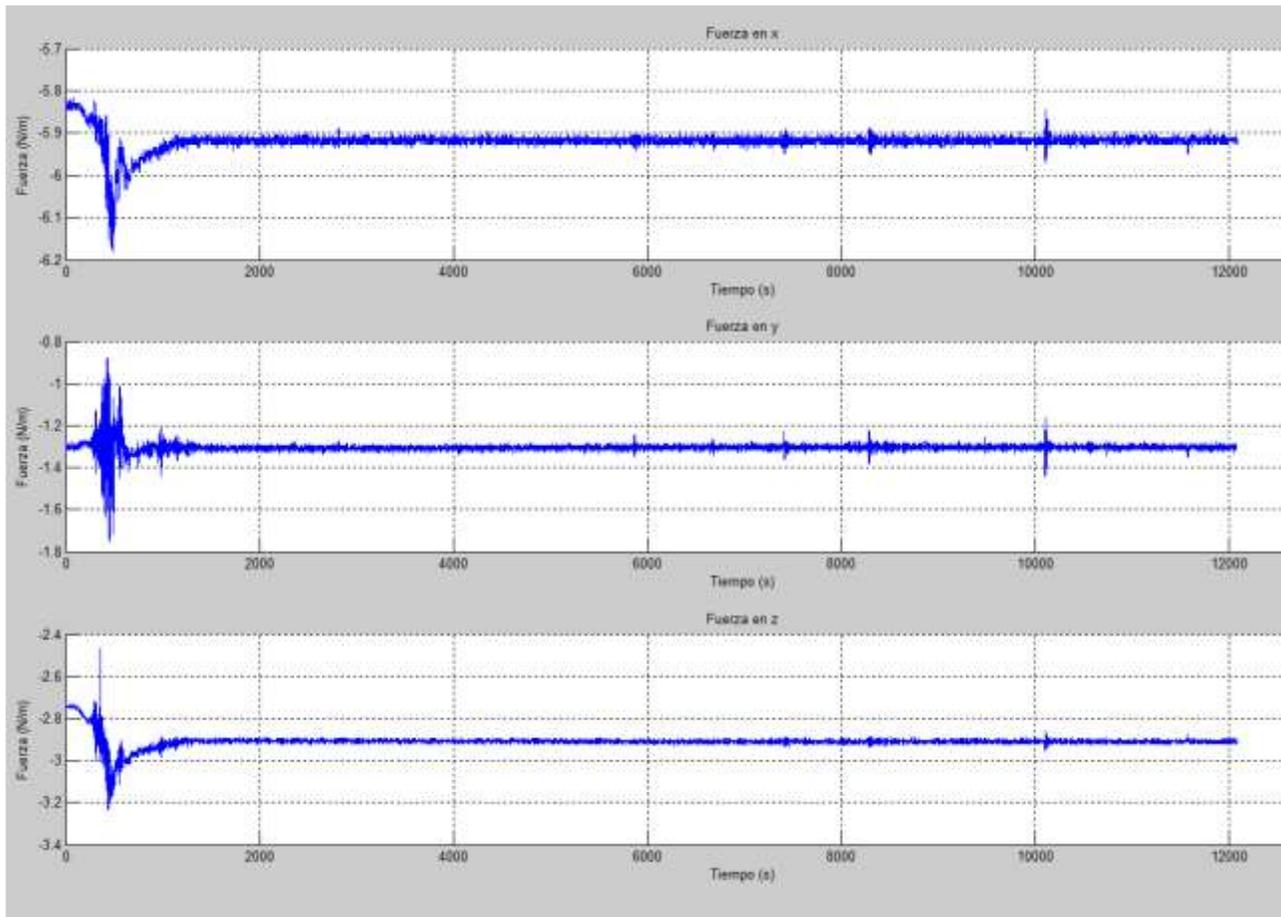
w0 = 0;           %Posicion Angular Inicial
w1 = 2*pi;       %Posicion Angular Final

radio = 25;
xa = 160;
yb = 0;
zc = 65; %ggg

```

En la Figura 14, se puede observar que la fuerza medida en el sensor es constante, esto se debe a que la trayectoria que realizó el Omni Phantom no estuvo en contacto con la superficies.

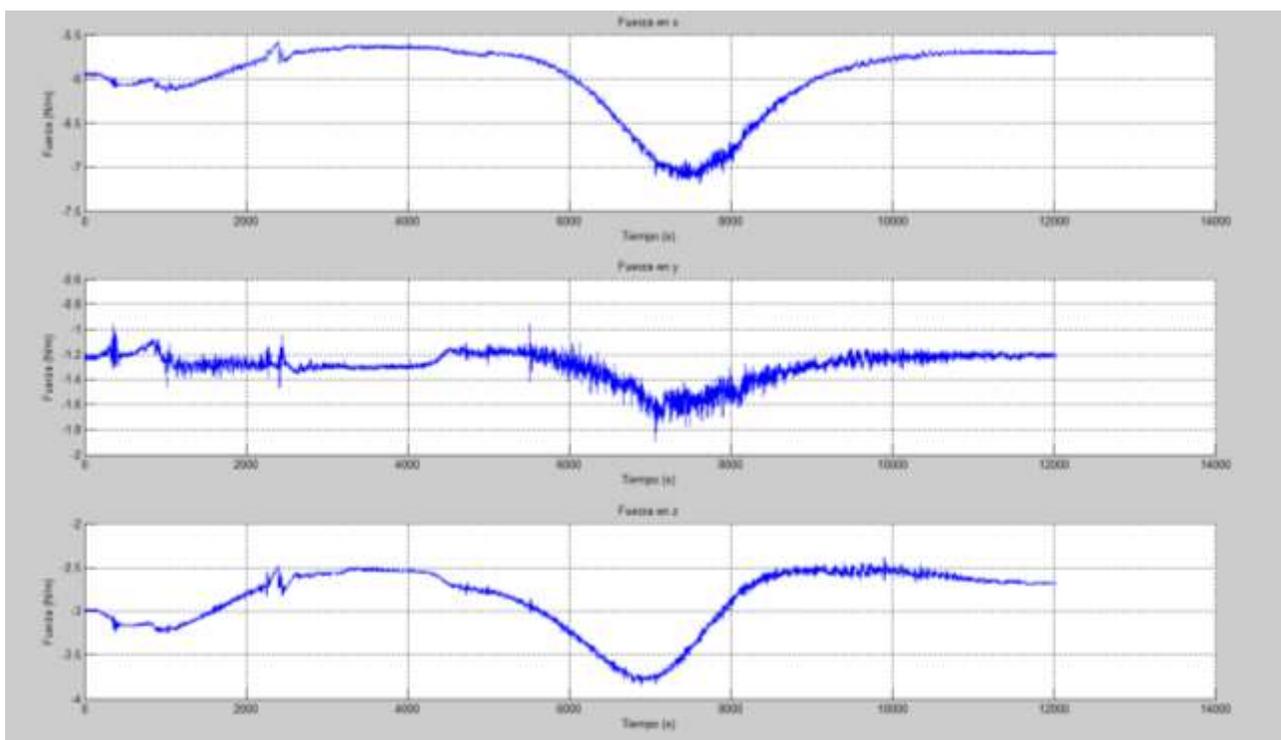
Figura 14 Fuerza graficada durante la trayectoria sin contacto con el sensor



Se realizó un segundo experimento desarrollando la trayectoria de una circunferencia sobre el plano (x, y) de radio de 25 mm, solo que en esta ocasión el efector final de manipulador estuvo en contacto con sensor ATI. La posición del efector final fue de 55 mm.

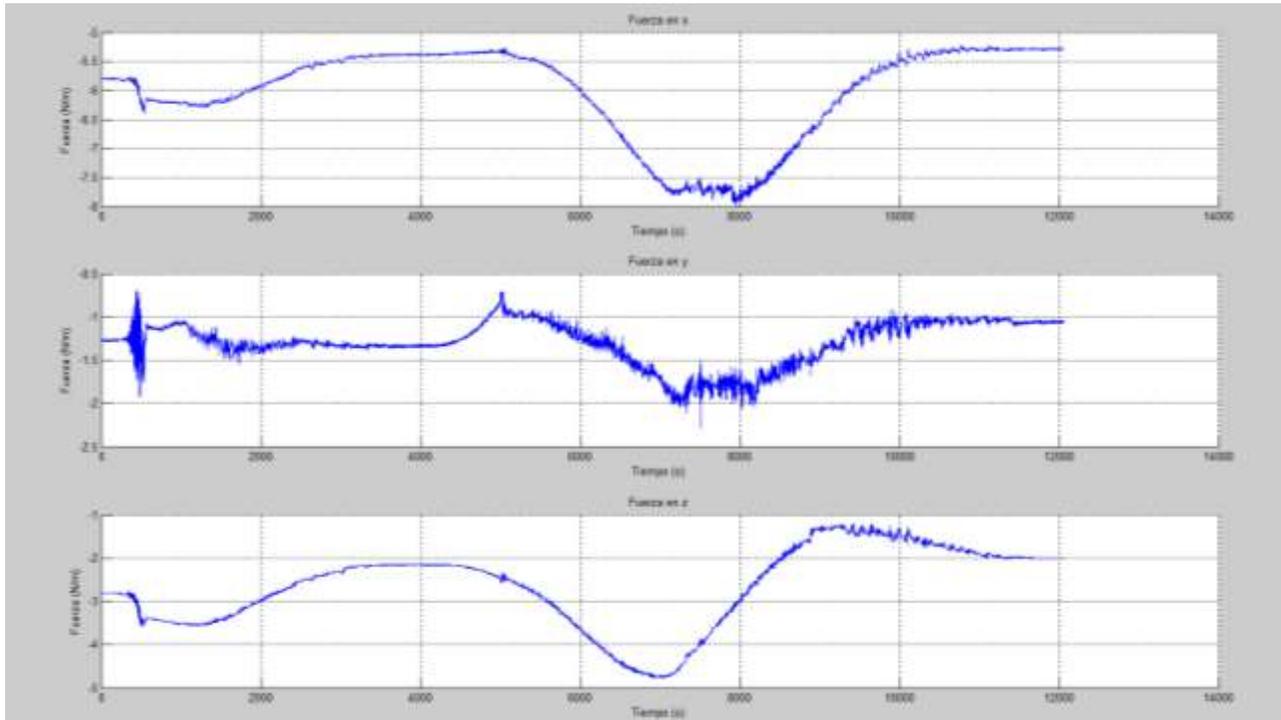
En la Figura 15 se muestran la grafica de las fuerzas generadas en cada uno de los ejes $F_x = -6Nm, F_y = -1.3Nm, F_z = -2.5Nm$.

Figura 15 Fuerza aplicada en la superficie a una distancia de 55 mm del efector final.



Un tercer experimento se desarrollo una trayectoria de circunferencia de radio de 25 mm sobre el plano (x, y) pero ahora la posición del efector final en el eje $z = 45\text{mm}$. Esto quiere decir que fajo 10 mm sobre la superficie. En la Figura 16 se muestra las fuerzas generadas por el manipulador en la superficie de trabajo.

Figura 16 Fuerza graficada durante la trayectoria un centímetro debajo del contacto con



Conclusiones

El presente trabajo describe el modelo cinemático de un manipulador de 6 gdl con validación experimental, lo que demuestra que tanto la cinemática directa e inversa fueron calculadas correctamente. Además, en esta tesis se demostró el modelo dinámico del robot manipulador empleando la formulación de Euler-Lagrange, se demostró con la propiedad de los robots y en simulación que el modelo dinámico tuvo una buena aproximación.

A parte de esto, se implementó un control de fuerza aplicado al robot de tipo descentralizado; es decir, se tomó en cuenta las restricciones de movimiento y se asumió que la dinámica del robot es conocida y dispone de la medición de fuerza estimada. Para corroborar el controlador se realizaron 3 diferentes experimentos con diferente fuerza y siendo comprobados.

Por lo que se puede decir que con el trabajo realizado es posible controlar robots manipuladores que tengan que realizar tareas sobre una superficie aplicando una fuerza deseada.

Referencias

- Automation, A. (12 de Abril de 2018). *ATI Industrial Automation*. Obtenido de ATI Industrial Automation: <http://www.atia.com/es-MX/index.aspx>
- Barrientos, A., Peñín, L., Balaguer, C., & Aracil, R. (1999). *Fundamentos de Robótica*. España: McGraw Hill.
- Chavez, F., Gudiño, J., Alcalá, J., & Charre-Ibarra, S. (2018). Modelo cinemático directo e inverso del OMNI PHANToM. *ECORFAN*, 25-32.
- Mark, S., & Vidyasagar, M. (1989). *Robot dynamics and control*. USA: John Wiley & sons.
- Reyes Cortez, F. (2011). *Robótica control de robots manipuladores*. México: Alfaomega.