Modelos microscópicos y macroscópicos para captura de agua y nutrientes por la raíz de la planta

SEPÚLVEDA-JIMÉNEZ, Daniel, LOERA-MARTÍNEZ, Jesús y SEPÚLVEDA-ROBLES, Daniel Eduardo

D. Sepúlveda´, J. Loera´´ y D. Sepúlveda´'

´ Centro de Investigación en Economía y Matemáticas Aplicadas de la Uach.
´´ División de Ciencias Económico-Administrativas.
sepjim700@yahoo.com.mx

E D. Sepúlveda, F. Rérez, D. Sepúlveda, E. Figueroa, R. Salazar, L. Godínez (eds.) Matemáticas Aplicadas. Handbook T-I. -©ECORFAN, Texcoco de Mora-México, 2016.

Abstract

La captura de agua y nutrientes es uno de los procesos más importantes que se llevan a cabo en la parte sub-superficial de la tierra. La absorción de agua y nutrientes se puede evaluar por medio de una ecuación deferencial para el transporte y difusión en suelos, acoplada con cinética de absorción por las raíces, estos son los modelos mecanicistas o microscópicos. En los modelos macroscópicos, se calcula el flujo de agua hacia las raíces por medio de la solución de la ecuación no lineal de Richar's incluyendo un termino de captura de agua por las raíces, si se quiere evaluar la absorción de nutrientes es necesario acoplar a la ecuación de Richar's una ecuación para el transporte de solutos, la cual también presenta una función sumidero para la captura de nutrientes por la raíz. En este trabajo se analiza el modelo microscópico de Barber y Cushman, los supuestos y los parámetros y su comparación con una generalización del mismo a fronteras móviles. También se analizan brevemente el sistema de ecuaciones diferenciales con los términos sumidero para el agua y los nutrientes. En la literatura científica se encuentran que hay muchas funciones de extracción usadas en los modelos macroscópicos pero no hay mucha diferencia entre el uso de estos dentro del modelo.

3 Introducción

Los modelos matemáticos para captura de agua y nutrientes por las raíces de las plantas se dividen en general en dos grandes categorías: modelos "microscópicos" y modelos macroscópicos. En los primeros se modela la raíz como un cilindro de longitud infinita de radio uniforme, con propiedades de absorción de agua y nutrientes. La razón de captura de un nutriente depende de la concentración de este nutriente en la solución del suelo en la superficie de la raíz. La relación entre la concentración y la razón de captura se describe cuantitativamente por medio de cinética de Michaelis-Menten. El transporte de nutrientes desde el suelo a las raíces de las plantas es por flujo másico y por difusión, uno de los trabajos pioneros en este tipo de modelos es el de Gardner (Gardner, 1960). La importancia de la heterogeneidad del suelo, la morfología y plasticidad fisiológica de la raíz considerando un modelo microscópico, son tomadas en cuenta en el trabajo de Jackson y Caldwell, (Jackson. R. B. y Caldwell. M. M. 1996), un trabajo más reciente de captura de agua por las raíces de las plantas donde se describe la geometría del sistema de raíces, es el debido a Raats, (Raats, P. A. C. 2007), también T. Roose y Fowler analizan la captura de agua y nutrientes considerando la geometría de las raíces de las plantas, (Roose. T. y Fowler. A. C., 2004). Un estudio más reciente se debe a Manoj K. T. y colaboradores (Manoj. K. T. Kashyap. D. y Gairola. A., 2013) quienes proponen un modelo microscópico basado en principios físicos para transporte y difusión de humedad y posterior captura por las raíces de las plantas.

Los modelos macroscópicos para modelar el transporte y la absorción de agua usan la ecuación de Richar's con un término adicional, "un sumidero"; se acopla con esta ecuación para el transporte de los solutos, una ecuación de convección difusión (dispersión), y el proceso de captura de nutrientes por las raíces, se cuantifica también a través de un sumidero.

Los modelos macroscópicos, como el de Hillel (Hillel D, 1980), describen el flujo del agua del suelo a través de las fronteras de un volumen unitario del suelo.

Los cambios en el volumen se atribuyen a la captura del agua por todas las raíces en dicho volumen por medio de un término sumidero. Steve R. Green y col., (Steve. R. G., Kirkham. M. B. y Clothier B. E. 2006), presentan un modelo macroscópico para captura de agua, transpiración y riego sostenible; un caso de estudio para transporte simultaneo de agua y solutos bajo condiciones de flujo no estacionario en suelos no saturados fue presentado por Purandara B. K. y col., (Purandara. B. K., Varadarajan. N. y Venkatesh. B. 2008). Simunek y Hopmans, (Simunek. J. y Hopmans. J. W. 2008), analizaron un modelo macroscópico compensatorio para captura de agua y nutrientes por la raíz.

Ninguno de los modelos que aparecen en la literatura tanto microscópicos como macroscópicos son de validez suficiente para determinar los parámetros necesarios para especificar un cultivo sobre un suelo en particular y usar estos parámetros para predicciones de captura de agua y nutrientes en otros cultivos y en otros tipos de suelos y en otras épocas del año. Estas severas limitaciones hacen necesario en primer lugar, el análisis y sistematización de los modelos matemáticos tanto microscópicos como macroscópicos para captura de agua y nutrientes por las raíces de las plantas y en segundo lugar la extensión de los modelos existentes. También es necesario el análisis de los procesos físicos y químicos que se llevan a cabo en esta captura y que deberán de ser considerados en los modelos matemáticos propuestos.

La extracción de agua y nutrientes por las raíces de las plantas involucran procesos de transporte en la interacción suelo-planta en diferentes escalas espaciales y temporales y hay necesidad de enlazar estos procesos de una manera formal. Específicamente, la arquitectura y características fisiológicas del sistema radical, también como la heterogeneidad del suelo se han tomado muy pobremente en cuenta en los estudios de captura de agua y nutrientes por las raíces de las plantas, por lo que es conveniente llevar a cabo trabajos con la finalidad de analizar esta captura y sus mecanismos en la escala de una sola raíz y en la escala donde se considera la arquitectura de la raíz, las propiedades hidráulicas del suelo y la variación de la reducción de nutrientes y agua alrededor de las raíces.

En este trabajo se analiza el modelo microscópico mecanicista de Barber y Cushman (Barber y Cushman, 1981 y Barber, 1984) y su extensión usando fronteras móviles basadas en los trabajos de Reginato J. C. y col. (Reginato J. C., Palumbo. M. C., Moreno. I. S., Bernardo. I. Ch. y Tarzi. D. A., 2000), también se presentan las ecuaciones matemáticas que se usan en los modelos macroscópicos de la literatura científica.

3.1 Materiales y Métodos

En la primera parte de este trabajo se presenta el modelo de Barber y Cushman que es un modelo microscópico de transporte de nutrientes hacia la raíz de una planta y posterior captura. Este modelo considera que el transporte de los nutrientes es por flujo másico y difusión, también se toma en cuenta el principio de conservación de solutos. Posteriormente se analiza la generalización del modelo de Barber y Cushman a fronteras móviles, se presentan los supuestos de estos modelos y las ecuaciones matemáticas que tienen que ser resueltas para encontrar el total de nutrientes absorbidos por la raíz. Con datos de la literatura se muestran los resultados obtenidos para tres variedades de maíz. Por lo altamente no lineal de los modelos es necesario de métodos numéricos en la solución de estos. En la parte final se presenta brevemente el sistema de ecuaciones diferenciales parciales para el agua, solutos y químicos y que en general usan los modelos macroscópicos. Cabe destacar en estos modelos la inclusión de un término “sumidero” en la ecuación de transporte de agua y también un término sumidero en la ecuación de transporte de solutos y químicos.

Existen muchas formas funcionales del término sumidero para captura de agua, los parámetros que aparecen en estas propuestas, se pueden determinar a partir de datos de evapotranspiración.

Movimiento de nutrientes hacia la raíz y captura

Movimiento de nutrientes hacia la raíz. Para que se produzca la absorción de nutrientes, el ion del nutriente debe estar en posición adyacente a la raíz. Este proceso de posicionamiento se produce a través de tres formas básicas.

Intercepción directa por la raíz. A medida que la raíz crece, se ubica en estratos de suelo en los que encuentra a los nutrientes disponibles para la planta. La cantidad de nutrientes que intercepta en forma directa la raíz se encuentra relacionada con la cantidad de nutrientes disponibles en el suelo ocupado por la raíz y el porcentaje de suelo explorado por la raíz. En general solo una pequeña cantidad del total de nutrientes absorbido por la raíz llega por esta vía.

Movimiento por difusión y flujo másico de los nutrientes. El mayor porcentaje de los nutrientes se mueve desde el suelo antes de ser absorbido por la raíz. Los mecanismos de transporte involucrados en el movimiento de los nutrientes en el suelo hasta su llegada a la superficie de la raíz son la difusión y el flujo másico.

El flujo másico es el movimiento de agua y de los nutrientes que se encuentra disuelto en la masa líquida que llega hasta la raíz como resultado del proceso de transpiración de la planta, la cantidad de nutrientes que llega por este movimiento está relacionado con la concentración del mismo en la solución del suelo y con el volumen de agua que absorbe la planta, los nutrientes como el nitrato, calcio y azufre llegan a la raíz por este mecanismo. En la Tabla 1 se puede observar la cantidad de cada nutriente que llega a la superficie de la raíz por los distintos mecanismos.

La difusión se presenta cuando la raíz absorbe nutrientes y se crea un gradiente de concentración de nutrientes entre el suelo y la raíz, el resultado de este gradiente es un movimiento de nutrientes hacia las cercanías de la raíz por difusión. La cantidad de nutrientes transportadas por este mecanismo está relacionado con el gradiente de concentración y con el coeficiente de difusión del nutriente, el cual varía con el tipo de suelo y la movilidad del nutriente en el suelo, los nutrientes como el fosforo y el potasio son absorbidos fuertemente por el suelo y solamente pequeñas cantidades en la solución del suelo se mueven a la raíz por difusión. En la tabla 2 se muestran los coeficientes de difusión para diferentes iones y distintos tipos de suelos.

Tabla 3 Porcentaje de nutrientes que llegan hasta la cercanía de la raíz en un cultivo de maíz por los distintos mecanismos

Nutriente	**Intercepción directa**	**Flujo másico**	**Difusión**
nitrógeno	1	80	19
fósforo	2	5	93
potasio	2	18	80
calcio	29	71	0
magnesio	13	87	0
azufre	2	98	0

Elaboración propia con datos de Barber, S.A. 1984. Soil Nutrient Bioavailibility. Wiley, New York.

Tabla 3.1 Valores para el coeficiente de difusión ($m^2.s^{-1}$) de diferentes iones para distintos suelos

Ion	Coeficiente de difusión
NO_3^-	$1.0\ x10^{-10}$
K^+	$1.0 – 28.0\ x10^{-12}$
Cl^-	$2.0 – 29.0x10^{-10}$
$H_2PO_4^-$	$0.3 – 3.3x10^{-13}$
SO_4	$1.0 – 2.0x10^{-10}$

Elaboración propia con datos de Clarkson, D.T. 1981. Nutrient interception and transport by roots sytem. In: “Physiological factors limiting plant productivity. C:B: Johnson (ed). Butterworths, London, pp: 307-314.

Captura de nutrientes. Una vez que el agua se toma para apoyar la transpiración, los nutrientes se pueden mover hacia la superficie de la raíz a través de flujo másico, pero estos no pueden entrar directamente dentro de la raíz, la membrana plasmática del endodermo bloquea el movimiento de los iones al interior de la raíz. En este punto es necesario un proceso de captura activo, el cual requiere energía que se usa para mover los nutrientes al interior de la raíz y el xilema para el transporte a los tejidos en crecimiento. Una proteína transportadora específica se utiliza para enlazar con un ion de nutrientes y llevarlo a través de la membrana.

Este proceso de captura es un proceso selectivo, la raíz discrimina y sólo gasta energía para absorber los nutrientes que necesita. Por lo tanto la absorción de nutrientes no es proporcional a las relaciones de los nutrientes en la solución del suelo. Así que iiones en gran cantidad en la solución del suelo, tales como el calcio y el azufre, se pueden acumular cerca de la raíz

Una implicación importante de la capacidad de escoger y elegir los nutrientes de la solución del suelo es la poca importancia relativa de la proporción de los nutrientes en la solución del suelo. Mientras un determinado nutriente se suministra a la superficie de la raíz a una concentración suficientemente alta como para satisfacer las demandas de la absorción de nutrientes, normalmente se cumplirán las exigencias de crecimiento y desarrollo. Por ejemplo, la relación de calcio y magnesio en los sitios de intercambio catiónico del suelo y en la solución del suelo tiene poco efecto sobre la relación de estos nutrientes en la planta. La planta selecciona los iones que necesita, y permite que los restantes se acumulen en la solución del suelo en la superficie de la raíz.

El concepto de concentraciones críticas, en general, ha demostrado ser más eficiente que la alteración de suelo para proporcionar proporciones de nutrientes equivalentes a las proporciones a la que los nutrientes se encuentran en las plantas.

3.2 Resultados y análisis

Modelos microscópicos

Modelo de Barber y Cushman, (Barber y Cushman, 1981). Los modelos mecánicos para absorción de nutrientes por la raíz consideran difusión y flujo másico actuando simultáneamente para suministro de nutrientes hacia la superficie de la raíz. Los parámetros de las plantas que determinan absorción de nutrientes incluyen aquellos que describen cambios en la geometría de la raíz debido a su crecimiento y otros que describen la cinética del proceso de absorción de los nutrientes. Los modelos mecánicos generalmente suponen que la captura de nutrientes se produce de manera uniforme a lo largo de la raíz que esta uniformemente distribuida en suelos homogéneos e isotrópicos. Uno de los principales modelos mecánicos es debido a Barber y Cushman y en este apartado se describirá brevemente.

Los supuestos del modelo de Barber y Cushman son los siguientes:

- El suelo es homogéneo e isotrópico.
- Las condiciones del agua del suelo se mantienen esencialmente constantes. No hay un gradiente de agua del suelo apreciable perpendicular a la raíz.
- La absorción de nutrientes se produce sólo de nutrientes de la solución en la superficie de la raíz.
- Los exudados de la raíz o actividad microbiana sobre la superficie de la raíz no influyen en el flujo de los nutrientes.
- Los nutrientes se mueven hacia la raíz por una combinación de flujo másico y difusión.
- La relación entre el influjo neto y la concentración se puede describir por cinética de Michaelis-Menten.
- Las raíces se supone que son cilindros lisos y sin pelos radiculares o micorrizas
- De y b se suponen independientes de la concentración.
- Las características de la afluencia no cambian por la edad de la raíz o por la edad de la planta.
- La afluencia es independiente de la tasa de absorción de agua.

Si se considera que la difusión y el flujo másico actúan simultáneamente para el suministro de nutrientes hacia la superficie de la raíz y la conservación de soluto, se puede plantear la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rD_e\frac{\partial C_1}{\partial r} + \frac{r_0 v_0 C_1}{b}\right) \quad (3)$$

Para integrar esta ecuación se plantean las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$t = 0,\ \ r > r_0,\ \ C_1 = C_0 \quad (3.1)$$

$$t > 0,\ \ r = r_0,\ \ D_e b\frac{\partial C_1}{\partial r} + v_0 C_1 = J_r \quad (3.2)$$

$$t > 0,\ \ r = r_1,\ \ D_e b\frac{\partial C_1}{\partial r} + \frac{r_0}{r_1} v_0 C_1 = 0 \quad (3.3)$$

Donde D_e es el coeficiente de difusión efectivo en suelo, r es la distancia radial desde el eje de la raíz, C_1 es la concentración de iones del nutriente en la solución del suelo, r_0 es el radio de la raíz, r_1 es la distancia media entre las raíces, v_0 es el flujo de agua hacia la raíz, b es la capacidad de amortiguación del suelo y t es el tiempo. El primer término dentro del paréntesis corresponde a la difusión y el segundo representa el flujo másico.

Una vez que la concentración del nutriente en la raíz ha sido determinada, la absorción (captura) del nutriente se calcula con la cinética de Michaelis-Menten:

$$J_r = \frac{I_{max}(C_1 - C_{min})}{K_m + (C_1 - C_{min})} \quad (3.4)$$

Donde C_1 es la concentración de nutrientes en la superficie de la raíz, J_r es el flujo de nutrientes neto hacia la raíz, I_{max} es la máxima afluencia de iones dentro de la raíz, C_{min} es la concentración de la solución donde la absorción neta de la solución es cero y K_m es la concentración de la solución donde la afluencia es igual a $0.5xI_{max}$. La absorción de nutrientes neta se calcula entonces basada en la absorción de nutrientes local para ambas raíces nuevas y existentes.

$$T = 2\pi r_0 L_0 \int_0^{t_m} J_r(r_0, S)\,dS + 2\pi r_0 \int_0^{t_m} \frac{df}{dt} \int_0^{t_m - t} J_r(r_0, S)\,dS\,dt \qquad (3.5)$$

Donde T es la captura neta total de nutrientes en el tiempo t_m, L_0 es la longitud inicial de la raíz, df/dt es la razón de crecimiento de la raíz y $J_r(r_0,S)$ es la captura neta de nutrientes para un área de diámetro y superficie de la raíz dada.

Modelo de fronteras Móviles, (Reginato y Col, 2000). Este es un modelo unidimensional, se considera que se tiene una sola raíz cilíndrica en el suelo donde se supone que las condiciones de la mezcla, luz y temperatura son controladas. Con estos supuestos, se plantea un modelo de fronteras móviles para la absorción de nutrientes, se considera una sola fase y coordenadas cilíndricas. Las ecuaciones que gobiernan el sistema son las siguientes:

$$D\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + D(1+\varepsilon_0)\frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

$$s_0 < r < R(t); \quad 0 < t < T \qquad (3.6)$$

$$C(r,0) = \varphi(r); \quad s_0 \le r \le R_0 \qquad (3.7)$$

$$-Db\frac{\partial}{\partial r}C(R(t),t)) + v_0 C(R(t),t) = 0; \quad 0 < t < T \qquad (3.8)$$

$$Db\frac{\partial}{\partial r}C(s_0,t) + v_0 C(s_0,t) = \frac{K_a[C(s_0,t) - C_u]}{1 + \frac{K_a[C(s_0,t) - C_u]}{Jm}} \qquad (3.9)$$

$$R(t) = R_0\sqrt{\frac{l_0}{l(t)}}; \quad 0 < t < T \qquad (3.10)$$

Donde r es la distancia radial desde el eje de la raíz (m), t es el tiempo (s); T es el máximo tiempo para el cual el sistema tiene solución (s): C_u es la concentración para la cual la afluencia neta es nula (mol cm^{-1}); v_0 es la velocidad media efectiva de la solución en el suelo en la superficie de la raíz [m s^{-1}]; b es la potencia del amortiguamiento, D es el coeficiente de difusión efectivo [m^2 s^{-1}]; k_a ($=J_m/K_m$) es la potencia de absorción del nutriente [m s^{-1}]; J_m es la máxima afluencia en infinito de la concentración [mol m^{-2} s^{-1}]; K_m es la concentración en la cual la afluencia es $J_m/2$ [mol m^{-3}]; R(t) es la variable a la mitad de la distancia del eje de la raíz al tiempo t(m), φ(r) es la concentración inicial definida en [s_0, R(t)] (mol cm^{-1}), R_0 es la mitad de la distancia inicial entre el eje de la raíz (m), s_0 es el radio de la raíz (m), l(t) es la longitud de la raíz al tiempo (m), y l_0 es la longitud inicial de la raíz (m). El parámetro ε_0 es ($=v_0 s_0/Db$) (sin dimensiones). En este modelo todos los coeficientes se suponen constantes.

La ecuación (4) representa el transporte de iones en el suelo. La condición (5) corresponde a la concentración inicial, la condición (6) es la condición de frontera y representa el flujo nulo en la frontera móvil R(t) que es a priori una función desconocida del tiempo. La condición (7) representa el balance de masa en la superficie de la raíz donde llegan los iones incorporándose a través de una cinética de absorción. La ecuación (8) da el movimiento de R(t) como una función de la longitud instantánea l(t), la cual es conocida a priori. Esta expresión se obtiene suponiendo un volumen fijo de suelo y relacionando R(t) con la longitud instantánea de la raíz, la cual es una función especial de acuerdo al método usado para estimar la longitud de la raíz; lineal, exponencial, sigmoidea, etc. La ecuación (8) caracteriza la aproximación de fronteras móviles. La absorción total de nutrientes se puede obtener a partir de la siguiente fórmula (Reginato y col):

$$U = 2\pi s_0 l_0 \int_0^{t_{max}} J_c(t)dt + 2\pi s_0 \int_0^{t_{max}} \left[\int_t^{t_{max}} J_c(t)dt\right] \dot{l}(t)dt \qquad (3.11)$$

$$J_c(t) = \frac{K_a[C(s_0,t)-C_u]}{1+\frac{K_a[C(s_0,t)-C_u]}{Jm}} \qquad (3.12)$$

Tabla 3.2 Parámetros de suelo y planta usados en el modelo de fronteras móviles para tres hibridos de maíz

Hibridos			
Parámetros	Capitan Ciba	DeKalb 762	Tikara Funks
k (s^{-1})	1.066×10^{-6}	9.63×10^{-7}	8.59×10^{-7}
v_0 ($m\ s^{-1}$)	1.26×10^{-8}	2.24×10^{-8}	1.15×10^{-8}
s_0 (m)	5×10^{-4}	3.8×10^{-4}	3.4×10^{-4}
l_0 (m)	1.8	2.41	2.05
R_0 (m)	1.27×10^{-2}	1.14×10^{-2}	1.24×10^{-2}
b (a dimensional)	11.6	11.6	11.6
D ($m^2\ s^{-1}$)	6.827×10^{-12}	6.827×10^{-12}	6.827×10^{-12}
J_m ($mol\ m^{-2}\ s^{-1}$)	1.316×10^{-6}	6.752×10^{-6}	4.744×10^{-6}
k_a (s^{-1})	1×10^{-6}	3.57×10^{-6}	2.584×10^{-6}
C_u ($mol\ m^{-3}$)	2.183×10^{-2}	1.5×10^{-3}	9.9×10^{-4}
C_R ($mol\ m^{-3}$)	8.4	8.4	8.4

Elaboración propia con datos de Reginato J. C. y col. Modeling nutrient uptake using a moving boundary approach: Comparison with the Barber Cushman model., Soil Sci. Soc. Am. J. 64:1363-1367 (2000).

Tabla 3.3 Captura de potasio por tres hibridos de maíz: observado contra calculado con el modelo de fronteras móviles (mmol pot^{-1})

Hibridos	Observado	Calculado
Dekalb 762	0.1685	0.213
Tikara Funks	0.293	0.325
Capitán Ciba	0.304	0.287

Elaboración propia con datos de Reginato J. C. y col. Modeling nutrient uptake using a moving boundary approach: Comparison with the Barber Cushman model., Soil Sci. Soc. Am. J. 64:1363-1367 (2000).

Tabla 3.4 Absorción de Magnesio, potasio y fósforo por la raíz de plántulas de pino: Observada contra calculada por los modelos de Barber-Cushman y fronteras móviles (mmol pot^{-1})

Nutriente	Absorción observada	Modelo de Barber-Cushman, calculada	Modelo de fronteras móviles, calculada
Mg	1.617	0.625	0.680
K	6.663	6.285	6.653
P	1.332	1.185	1.302

Elaboración propia con datos de Kelly. J. M. y col. Modeling magnesium, phosphorus, and potassium uptake by loblolly pine seedling using a Barber-Cushman approach. Plant and Soil 218:139-209. (1992).

Modelos macroscópicos para el flujo de agua, químicos y solutos en la zona no saturada del suelo

Ecuación de flujo de agua. La ecuación de Richard describe el flujo de humedad en suelos no saturados. Se agrega un término de sumidero volumétrico en la ecuación de Richard para tomar en cuenta la captura de humedad por las raíces. Para flujo vertical unidimensional en suelos cultivados, la forma mezclada de la ecuación de Richard con un término de sumidero está dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[K(h)\frac{\partial h}{\partial z}\right] + \frac{\partial K(h)}{\partial z} + S(z,t) \qquad (3.13)$$

Donde h es la carga de presión, θ es el contenido de humedad volumétrico, K la conductividad hidráulica, S(z,t) la captura (absorción) de agua por las raíces expresada como volumen de agua por unidad de volumen de suelo por unidad de tiempo, t es el tiempo y z es la distancia vertical medida positiva hacia arriba. La ecuación (i) es altamente no lineal, ya que K y θ son funciones no lineales de la variable dependiente h.

Para resolver la ecuación de Richard en cualquiera de sus formas es necesario conocer relaciones constitutivas entre el contenido volumétrico del agua θ, la recarga hidráulica h y la conductividad K, estas están dadas por funciones experimentales que describen las propiedades del suelo. Tres tipos usuales de relaciones constitutivas, $K=K(h)$ y $\theta=\theta(h)$, pueden ser utilizadas para caracterizar diferentes suelos. El primer y segundo tipo fueron utilizados por Haverkamp y col. (1977) para arena y para el suelo Yolo Light Clay, mientras que el tercer tipo ha sido utilizado por Van Genuchten (1980) para el suelo Glendale Clay Loam.

Tipo 1

$$K(h) = K_s \frac{A}{A + |h|^{\phi}}; \qquad \theta(h) = \frac{\lambda(\theta_s - \theta_r)}{\lambda + |h|^{\psi}} + \theta_r \qquad (3.14)$$

Tipo 2

$$K(h) = K_s \frac{A}{A + |h|^{\phi}}; \qquad \theta(h) = \frac{\lambda(\theta_s - \theta_r)}{\lambda + (\ln h)^{\psi}} + \theta_r \qquad (3.15)$$

Tipo 3

$$K(S_e) = K_s S_e^{1/2}\left[1-(1-S_e^{1/\mu})\right]^2; \qquad \theta(S_e) = S_e(\theta_s - \theta_r) + \theta_r \qquad (3.16)$$

Donde:

$$S_e(h) = \left[1 + (\rho h)^{\eta}\right]^{-\mu}; \qquad \mu = 1 - \eta^{-1} \qquad (3.17)$$

Donde A, ϕ, λ, ψ, η, μ son parámetros adimensionales, ρ [L^{-1}] es una medida de la función de densidad del tamaño del poro, θ_r [L^3/L^3] es el contenido de humedad residual, y S_c es la saturación efectiva.

Para la función de extracción para representar o calcular la absorción de agua por las raíces de las plantas no es nueva, sin embargo, todas las diversas funciones de extracción propuestas en la literatura son más o menos empíricas.

La diferencia más importante entre los diferentes modelos de extracción del agua por la raíz, es la distribución del patrón seleccionado para la absorción para la función de extracción. A continuación se muestran algunas de las funciones de extracción usadas por diversos investigadores. Los símbolos empleados se corresponden con las referencias originales. Algunas de las notaciones que son utilizadas en estos modelos y son comunes son: K es la conductividad hidráulica no saturada, L la longitud de raíces por unidad de volumen de suelo, T la tasa de transpiración por unidad de área de superficie del suelo, t el tiempo, z la profundidad debajo de la superficie del suelo, z_r la profundidad de la raíz, v la profundidad de la zona de la raíz, θ la humedad contenida por el suelo, θ_s o θ_{sat} el contenido de humedad de saturación, ψ la carga de presión, T_p la tasa de transpiración de la planta, f(h) o α(h) es una función de la humedad del suelo y de la carga de presión, S_{max} es la tasa máxima de extracción de agua por la raíz y E_{pl} es la transpiración real. Dos de los modelos encontrados en la literatura científica son:

Ojha y Rai (1996). $S_{max} = \alpha\left[1-\left(\frac{z}{z_{rj}}\right)\right]^{\beta}$ $0 \leq z \leq z_{rj}$ donde: α está dada por: $\alpha = \frac{T_j(\beta+1)}{z_{rj}}$ $S(h) = f(h)S_{max}$ donde α y β son parámetros del modelo y z_{rj} es la profundidad de la raíz en el j-ésimo día.

Kang y colaboradores (2001). $S(z,t) = f(\theta)T_p(t)\frac{1.8e^{-1.8z/z_r}}{(1-e^{-1.8})z_r}$, donde: f(θ) es un término sin dimensiones que varía entre 0 y 1, como una función del contenido de agua del suelo, $T_p(t)$ es la razón del potencial de transpiración, z_r es la profundidad en la zona efectiva de la raíz.

Ecuaciones para el transporte de solutos y de químicos, (CHEMFLO™, 2000)

La ecuación que gobierna el transporte de sustancias químicas considerando movimiento y degradación de químicos es la ecuación de convección-dispersión siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta c+\rho s)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta D\frac{\partial c}{\partial x}-qc\right)-\alpha\theta c-\rho\beta s+\gamma\theta-r_n(\theta,c) \tag{3.18}$$

Donde:
C = C(x,t) es la concentración de químicos en la fase líquida.
S = S(x,t) es la concentración de químicos en la fase sólida.
D = D(x,t) es el coeficiente de dispersión
$\theta=\theta(x,t)$ es el contenido de agua.
q = q(x,t) es el flujo de agua.
$\rho=\rho(x)$ es la densidad de cuerpo sólido.
$\alpha=\alpha(x)$ es la razón constante de degradación de primer orden en la fase líquida.
$\beta=\beta(x)$ es la razón constante de degradación de primer orden en la fase sólida.
$\gamma=\gamma(x)$ es la razón constante de producción de orden cero en la fase líquida.
$r_n= r_n(\theta,c)$ representa la captura de nutrientes por parte de las raíces de las plantas.

Si se supone que:
$s(x,t)=k(x)c(x,t)$

Donde k(x) se conoce como coeficiente de partición entonces, la ecuación de convección-dispersión se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta Rc) = \frac{\partial}{\partial x}(\theta D\frac{\partial c}{\partial x} - qc) - (\alpha\theta - \rho\beta k) + \gamma\theta - r_n(\theta, c) \tag{3.19}$$

Donde R es un factor de retardo para los químicos en el suelo y está dado por: $R = 1 + \frac{\rho k}{\theta}$

Para analizar el movimiento de agua y sustancias químicas en la dirección horizontal o en la dirección vertical se deberá de resolver la ecuación diferencial de Richard's, acoplada con la ecuación de convección-dispersión ecuación (17) con las respectivas condiciones iniciales y de frontera para el agua y para el químico.

3.3 Conclusiones

En este trabajo se analizan modelos matemáticos para absorción de agua y nutrientes por las raíces de las plantas. Estos modelos están divididos en dos grandes grupos: modelos microscópicos y modelos macroscópicos. Se analiza el modelo de Barber y Cushman para captura de nutrientes, el modelo comienza con una descripción del flujo de nutrientes hacia la raíz. La primera ecuación incluye la difusión y el flujo másico de nutrientes hacia la superficie de la raíz. Una vez que se ha determinado la concentración de nutrientes, la captura o absorción de nutrientes se calcula por medio de cinética de Michael-Menten, ecuación (2), finalmente se calcula la captura total de nutrientes por medio de la ecuación (3). Se analiza también una generalización del modelo de Barber y Cushman debida a Reignato y colaboradores, donde se incluyen fronteras móviles. En la Tabla 3 se muestran los 11 parámetros de suelo y planta usados en el modelo de fronteras móviles para tres híbridos de maíz. En la tabla 4 se presentan los resultados que se obtienen para la captura de potasio por tres híbridos de maíz: observado contra calculado con el modelo de fronteras móviles. En la tabla 5, se muestra la absorción de Magnesio, potasio y fósforo por la raíz de plántulas de pino, observada contra calculada por los modelos de Barber-Cushman y fronteras móviles, todavía se encuentran diferencias significativas entre los dos modelos y contra los resultados experimentales.

Finalmente se presenta brevemente el sistema de ecuaciones diferenciales parciales para el agua, solutos y químicos y que en general usan los modelos macroscópicos. Estas ecuaciones incluyen un término sumidero en la ecuación de transporte de agua y también un término similar en la ecuación de transporte de solutos y químicos. Por la no linealidad que presenta este sistema de ecuaciones es necesario el uso de relaciones constitutivas. En la literatura científica existen muchas formas funcionales del término sumidero para captura de agua. Los parámetros que aparecen en estas propuestas, se pueden determinar a partir de datos de evapotranspiración.

3.4 Referencias

Barber. S. A. (1984). Soil Nutrient Bioavailability. A Mechanistic Approach. A Wiley-Interscience Publication, New York.

Barber, S. A. y Cushman, J. H. (1981). Nitrogen uptake model for agronomic crops. Modeling Waste Water Renovation- Land Treatment (ed. I. K. Iksander),Wiley-Interscience, New York. pp. 382-409.

Gardner, W.R., (1960). Dynamic aspects of water availability to plants. Soil Science, 89, pp. 63–73.

CHEMFLO, (2000). Interactive Software for Simulating Water and Chemical Movement in Unsaturated Soils by D.L. Nofziger and Jinquan Wu, Department of Plant and Soil Sciences, Oklahoma State University, Stillwater, OK 74078

Hillel, D. (1980). Applications of Soil Physics. Academic Press, New York. pp. 385

Jackson, R. B. y Caldwell, M. M., (1996). Integrating resource heterogeneity and plan plasticity: modeling nitrate and phosphate uptake in a patchy soil environment. Journal of Ecology, 84, pp. 891-903.

Kang, S., Zhang, F., and Zhang, J., (2001). A simulation model of water dynamics in winter wheat field and its application in a semiarid region. Agricultural Water Management, 49, pp. 115–129.

Manoj, K. T., Deepak, K. y Gariola, A., (2013). A Physical Based Microscopic Model of Root-Water Uptake., Journal of Agricultural Engineering and Biotechnology, Vol, 1, pp. 54-67.

Ojha, C.S.P., and Rai, A.K., (1996). Nonlinear root water uptake model. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 122, pp. 198–202.

Purandara, B. K., Varandarajan, N. y Venkatesh, B. (2008). Simultaneous transport of wáter and solutes under transient unsaturated flow conditions- A case study., J. Earth Sys. Sci. 117., pp. 477-487.

Simunek, J. y Hopmans, J. W. (2008). Modelling compensated root water and nutrient uptake. Ecological Modelling.

Steve, R. G., Kirkham, M. B. y Clthier B. E. (2006). Root uptake and transpiration: From measurements and models to sustainable irrigation. Agricultural water management, 86.,pp. 165-176.

Raats, P. A. C., (2007). Uptake of wáter from soils by plant roots. Transp Porous Med, 68, pp. 5-28.

Reginato, J. C., Palumbo, M. C., Moreno, I. S., Bernardo, I. Ch. y Tarzia, D. A. (2000). Modelling nutrient uptake using a moving boundary approach: Comparison with the Barber-Cushman model. Soil Sci. Soc. Am. J. 64. pp. 1363-1367.

Roose, T. y Fowler, A. C., (2003). A mathematical model for water and nutrient uptake by plant root systems. Journal of theoretical Biology, 228, pp. 173-184.