

Análisis probabilístico de datos de escurrimientos estacionales. Casos: Ríos Conchos y San Pedro

MERCADO-ESCALANTE, José Roberto, GUIDO-ALDANA, Pedro, OJEDA-BUSTAMANTE, Waldo

J. Mercado, P. Guido, W. Ojeda

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, IMTA. P. Cuauhnáhuac # 8532, CP 62550, Jiutepec, Mor., México.
rmercado@tlaloc.imta.mx

D. Sepúlveda, F. Rérez, D. Sepúlveda, E. Figueroa, R. Salazar, L. Godínez (eds.) Matemáticas Aplicadas. Handbook T-I. -©ECORFAN, Texcoco de Mora-México, 2016.

Abstract

In this paper, the main objective is to solve the inverse problem of finding, from seasonal data, the differential equation for the characteristic function, with temporary parameter, of the probability distribution of historical runoff in two dams; one in the Conchos River and the other in the San Pedro River. Solutions of the differential equation provide a link between a percentage of the runoff probability and the water demand in its irrigation area. We also found the multifractal spectra of the runoff, which exhibit an essential singularity.

11 Introducción

Nuestra primera meta se dirige a establecer una correlación entre los escurrimientos estacionales históricos de un río en una presa y la probabilidad de contar con los volúmenes necesarios para abastecer una determinada área de riego. La segunda, es encontrar la ecuación diferencial que sintetiza la evolución y encripta los datos de los escurrimientos, para luego hallar una solución que nos aporte la función característica ligada a la función de distribución de probabilidades, cuya forma complementaria nos permita establecer la conexión entre las probabilidades y los escurrimientos. Dicha construcción la realizamos por dos caminos: el primero, para datos agrupados en clases; y el segundo, para datos no agrupados, sirviéndonos el primero de ellos como parámetro de control.

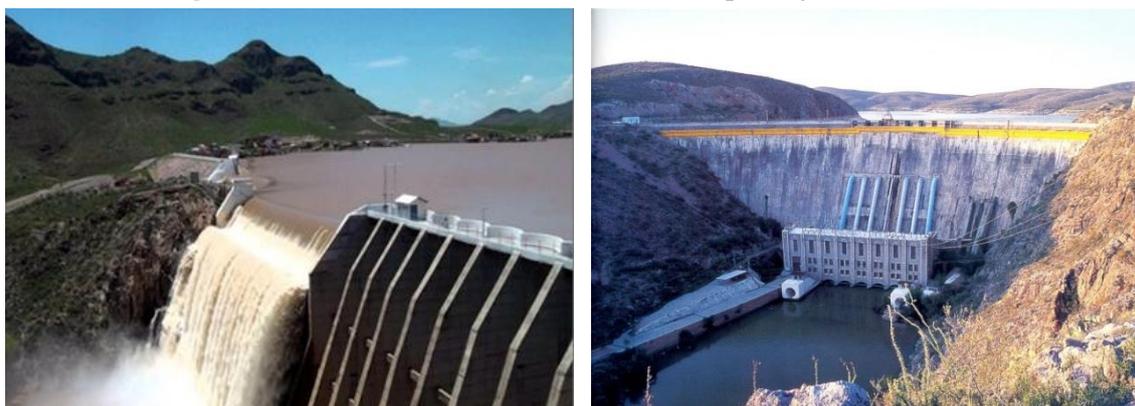
Para ello, disponemos de los datos desde 1935 hasta 2014 para dos ríos: el Conchos, en la presa La Boquilla, y el San Pedro, en la presa F. I. Madero o las Vírgenes. Primero realizamos un estudio estadístico con datos agrupados, hasta encontrar la correlación entre probabilidad y escurrimiento. Luego, realizamos el estudio para datos no agrupados, para hallar el exponente de Hurst y con él determinar el orden de la evolución temporal.

Realizamos la construcción multifractal por dos caminos, la primera basada en la alta variabilidad de las fluctuaciones, la segunda, a través de una función de estructura, (Mercado et al., 2015).

11.1 Métodos

Caso Río Conchos

Contamos con los registros históricos de volúmenes mensuales escurridos por el río Conchos, afluente del río Bravo, y que son aportados al vaso de la presa de almacenamiento ‘La Boquilla’, en el distrito de riego 005 Delicias, Chihuahua. El registro que analizamos de estos caudales comprende el intervalo de 1935 a 2014, y nos permite construir los escurrimientos estacionales. En la Figura 1.1 se muestran fotografías de la presa de almacenamiento ‘La Boquilla’, a la izquierda; y ‘F.I. Madero’, a la derecha.

Figura 11 Presas de almacenamiento la Boquilla y F. I. Madero.

Fuente: Archivo histórico IMTA.

El análisis lo realizamos primero para datos agrupados. Para ello como es conocido, se conforman conjuntos de datos, llamados clases, de tamaño uniforme, y se estudia la distribución de todos los datos disponibles en esa colección uniforme de clases. El número de clases k lo escogemos de acuerdo a la regla de Sturges (1926) $2^{k-1} = n$, siendo n el tamaño de la muestra de datos, que para el caso presente es de 320 estaciones; a partir del cual se estima k como su más próximo entero, por lo que nos resultan 10 clases. Las frecuencias se determinan contando el número de datos en cada clase, lo que produce la columna de frecuencias observadas en la Tabla 1.1; y de ella se derivan las otras formas de registro de las frecuencias, como es el caso de las frecuencias relativas, lo que permite introducir la probabilidad como medida de pertenencia a uno de los conjuntos-clases. Los registros históricos de estos volúmenes estacionales los presentamos en la Tabla 1.1.

Tabla 11 Registros históricos correspondientes al Río Conchos y arreglo de datos

Número de clases	Conjuntos Clases, rangos	Centros de clases (Mm3)	Frecuencias Observadas	Frecuencias Acumuladas	Frecuencias Relativas	Frecuencias Rel. Acum.	Complement o Frec. Rel. Ac.
1	0-300	150	237	237	74.063	74.063	25.938
2	300-600	450	34	271	10.625	84.688	15.313
3	600-900	750	17	288	5.313	90.000	10.000
4	900-1200	1050	13	301	4.063	94.063	5.938
5	1200-1500	1350	7	308	2.188	96.250	3.750
6	1500-1800	1650	2	310	0.625	96.875	3.125
7	1800-2100	1950	7	317	2.188	99.063	0.938
8	2100-2400	2250	1	318	0.313	99.375	0.625
9	2400-2700	2550	0	318	0.000	99.375	0.625
10	2700-3000	2850	2	320	0.625	100	0

Fuente: Elaboración propia

Por otra parte, para datos no agrupados realizamos el análisis estadístico que permita encontrar una densidad de probabilidad que estructure los datos; después hallamos la función de distribución y luego su complemento. Como criterio de comparación y valoración de resultados usamos los resultados obtenidos por medio de los datos agrupados.

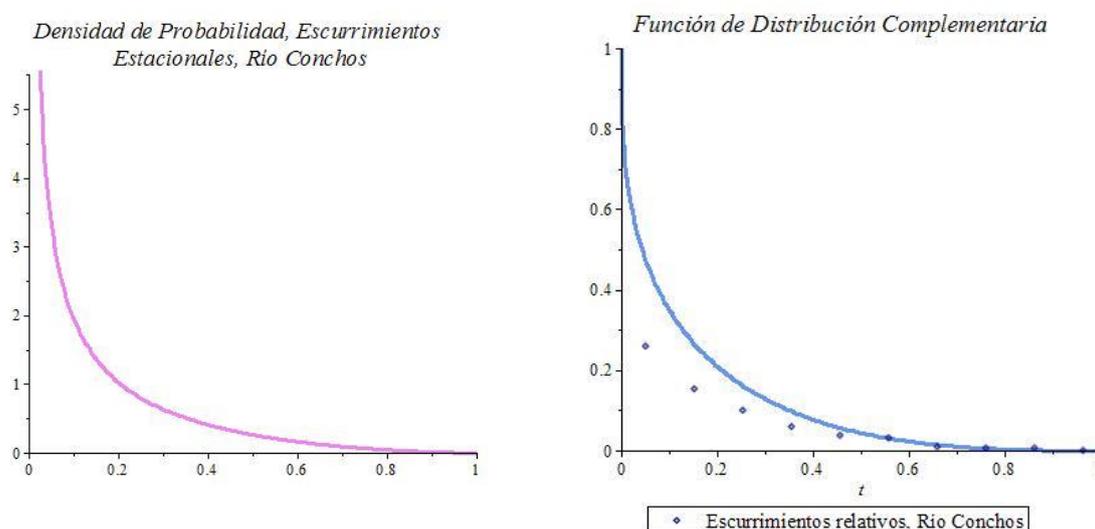
Buscamos los cuatro primeros momentos centrales y encontramos los siguientes valores: $[2.1810 \cdot 10^5, 2.7570 \cdot 10^8, 5.2952 \cdot 10^{11}]$, y asumimos que el primero de ellos es cero por lo que no se muestra. A continuación, buscamos los parámetros de simetría (*skewness*) y de curtosis, mismos que resultan ser respectivamente: $[0.71274, 1.8847]$, por lo que se anticipa que se trata de una densidad de distribución asimétrica de colas más gruesas a la derecha y bastante mesocúrtica, ya que es menor que la curtosis de la gaussiana, por lo que la distribución buscada se aleja bastante de la normal. Tampoco se acerca a la Gumbel, con curtosis de $12/5$ o 2.4 , aunque por el lado de su asimetría su valor es $1.14\dots$, y puede considerarse del mismo orden que la encontrada. Señalamos que estas dos distribuciones se acostumbran usar para el análisis de este tipo de datos (De la Peña, 2008).

Buscamos a continuación los parámetros de clasificación y encontramos: $[-4.6351 \cdot 10^6, -1.4374]$; y por sus signos inferimos que se trata de una densidad tipo Beta. Luego, los parámetros de forma de la densidad Beta son: $[-0.65825, 1.6035]$, y por el signo del primero corresponde a una cola fractal.

Posteriormente, calculamos el exponente de Hurst y la dimensión fractal de la gráfica de escurrimientos, mismos que resultan respectivamente: $[0.82912, 1.1709]$, en donde la semisuma de los dos debe ser la unidad; por tanto, representan una competencia entre dos de suma cero, por lo que la ganancia de uno se traduce en la pérdida del otro, para garantizar que la suma de las dos sea cero. Pero además, por ser $H > 1/2$ la serie de datos temporales se clasifica como persistente.

A continuación, teniendo la clasificación como densidad Beta y sus parámetros de forma, encontramos la gráfica de la densidad de probabilidad, la cual se muestra en la Figura 2.1, en el lado izquierdo; mientras en el lado derecho, mostramos la función de distribución complementaria ligada a la densidad acabada de citar. Se observa que la densidad es una cola fractal ligada a una densidad Beta, por lo que no es una densidad normal o gaussiana pero sí es una generalización o aproximación a ésta. En tanto, la gráfica de la derecha sirve como una función inversa, en el sentido de que dada una probabilidad se puede encontrar cuál es el escurrimiento relativo que le corresponde, y por tanto cuál es el escurrimiento probable obtenible.

Figura 11.1 Densidad y Complemento de la Función de Distribución de Probabilidad, desde Invierno/1935 hasta Otoño/2014, para el Río Conchos.



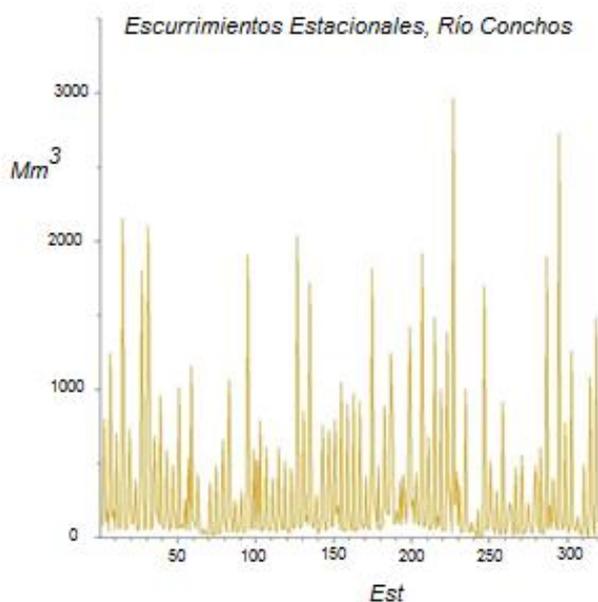
Fuente: Elaboración propia.

Por otra parte, a partir de los parámetros obtenidos de los datos de los escurrimientos del río Conchos, podemos realizar la construcción multifractal, al menos con dos opciones: fBm (movimiento Browniano fraccional) o función de estructura. En la primera, el estudio se enfoca en las variaciones que muestran los gráficos de los volúmenes de escurrimientos. Para el río Conchos, los datos de escurrimientos estacionales entre los años 1935 y 2014, se presentan en la Figura 3.1; en la que resaltamos su gran irregularidad, por lo que carece de sentido el concepto geométrico de sus pendientes, en tanto valor límite de las variaciones relativas a los incrementos de sus argumentos.

Consideramos, entonces, los movimientos Brownianos fraccionales (fBm) definidos a partir de sus variaciones o fluctuaciones. Esas fluctuaciones son estacionarias, con dos estadísticos independientes del índice (intemporales): la media y el variograma, su distribución es gaussiana y además, son estadísticamente autoafines, lo cual se manifiesta como “efecto Hurst”. La función de auto covarianza de las fluctuaciones depende solo de los incrementos o *lags*. Así que para grandes *lags*, la función de correlación se aproxima a una del tipo anterior, y por tanto, nuevamente con base en los datos, se estima el exponente Hurst, al que se le puede considerar como una medida de independencia de las series de tiempo y una manera de distinguir series fractales (Hurst, 1951), (Bras & Rodríguez-Iturbe, 1993).

Pero además, se observa que su apariencia es similar a un mango horizontal con diversas púas o dientes verticales con diferentes longitudes, en el que predominan las relaciones de aspecto bastante lejanas a la unidad, si se piensan como rectángulos y se calcula el cociente de sus longitudes entre sus anchos; al que llamaríamos peine del hidrólogo, por ser cualitativamente similar al espacio peine o peine del topólogo.

Figura 11.2 Escurrimientos estacionales, Río Conchos



Fuente: Elaboración propia

Caso Río San Pedro

Contamos también con los registros históricos de los volúmenes mensuales y anuales escurridos por el río San Pedro, y que son captados por la presa de almacenamiento ‘Francisco I. Madero’, Distrito de Riego 005, cerca de Ciudad Delicias, Chihuahua (a 6 km), con capacidad 450 Mm^3 . La presa también conocida como las Vírgenes, por las esculturas exhibidas en sus compuertas.

El registro que analizamos de estos caudales escurridos abarca un período de 264 estaciones, desde el Invierno/1949 a Otoño/2014. Los registros históricos de los volúmenes estacionales del río San Pedro los presentamos a continuación en la Tabla 2.1.

Para datos agrupados, nuevamente se conforman las clases de tamaño uniforme. El número de clases lo escogemos de acuerdo a la regla de Sturges, en este caso siendo el tamaño de la muestra de datos de 264 estaciones, nos resultan 10 clases. Contamos el número de datos en cada clase, y conformamos la columna de frecuencias observadas en la Tabla 2.1, de la cual derivamos las frecuencias relativas. En particular, obtenemos la octava columna, la cual nos permite construir el gráfico de puntos de la Figura 4.1, en la derecha, de manera normalizada por su máximo 937.10 .

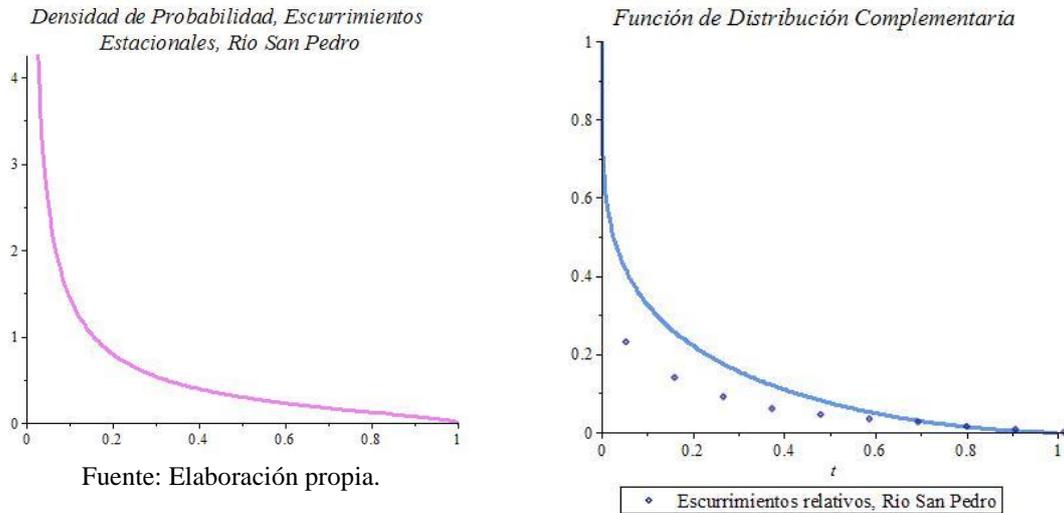
Tabla 11.1 Registros históricos correspondientes al Río San Pedro y arreglo de datos

Número de clases	Conjuntos Clases, rangos	Centros de clases (Mm3)	Frecuencias Observadas	Frecuencias Acumuladas	Frecuencias Relativas	Frecuencias Rel. Acum.	Complemento Frec. Rel. Acum.
1	0-100	50	203	203	76.894	76.894	23.106
2	100-200	150	24	227	9.091	85.985	14.015
3	200-300	250	13	240	4.924	90.909	9.091
4	300-400	350	8	248	3.030	93.939	6.061
5	400-500	450	4	252	1.515	95.455	4.545
6	500-600	550	3	255	1.136	96.591	3.409
7	600-700	650	2	257	0.758	97.348	2.652
8	700-800	750	3	260	1.136	98.485	1.515
9	800-900	850	2	262	0.758	99.242	0.758
10	900-1000	950	2	264	0.758	100	0
			264		100.00		

Fuente: Elaboración propia

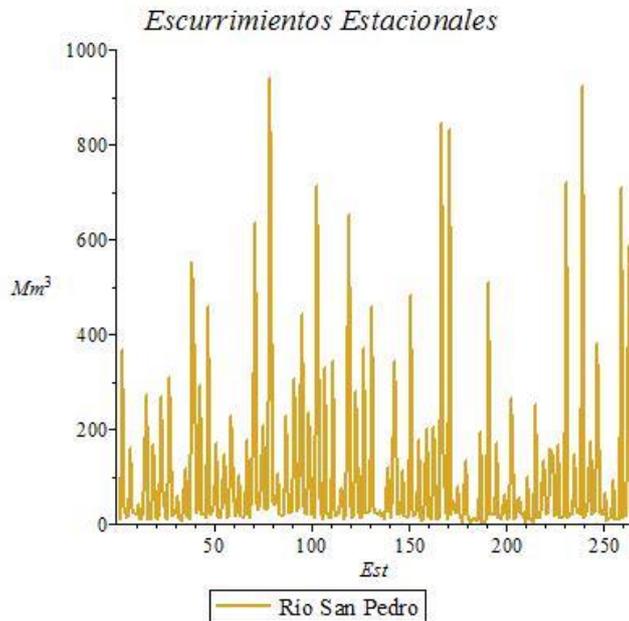
Por otra parte, para datos no agrupados, buscamos los 4 primeros momentos centrales, suponemos nulo el primero, y los otros tres resultan: $[28023., 1.3648 \cdot 10^7, 9.2705 \cdot 10^9]$, en tanto que los parámetros de simetría (skewness) y curtosis nos producen: $[2.9095, 11.851]$, por lo que la densidad debe tener la apariencia asimétrica a la derecha y leptocúrtica. Calculamos posteriormente, los parámetros de clasificación y encontramos: $[-1.0096 \cdot 10^7, -1.2582]$, por lo que corresponde a una densidad Beta con parámetros de forma dados por $[-0.77230, 0.57725]$.

Figura 11.3 Densidad y Complemento de la Función de Distribución desde Invierno/1935 hasta Otoño/2014, para el Río San Pedro



En la Figura 5.1, se presentan datos de escurrimientos estacionales entre los años 1949 y 2014. En tanto, movimiento Browniano fraccional destacamos el número de Hurst encontrado de los datos por: $(1-m)/2$; y la dimensión fractal por su complemento hasta 2; así resultan: $[0.88615, 1.1138]$; y por ser $H > 1/2$ se califica al movimiento Browniano de persistente. Se observa también su apariencia de peine del hidrólogo, similar al peine del topólogo ya mencionado.

Figura 11.4 Ecurrimientos estacionales, Río San Pedro



Los procesos de escurrimientos están gobernados por leyes probabilísticas y encuentran su imagen abstracta en la modelación estocástica. Para ello, conformamos la ecuación de evolución dada por medio de la ecuación diferencial (1), (Mercado & Brambila, 2001),

$$D_t \psi(t) = -\lambda^{-\sigma} D_t^{1-\gamma} \psi(t) \tag{11}$$

Donde se postula que el sistema dinámico evoluciona con una velocidad proporcional a una derivada fraccional de orden dependiente de γ ; y en particular, para el orden $\gamma=1$ la evolución coincide con la de una exponencial decreciente. Por otra parte, $\lambda^{-\sigma}$ es una constante de proporcionalidad que depende generalmente del comportamiento espacial del fenómeno. Para el río Conchos el orden se especifica por $\gamma=0.82912$, en tanto para el río San Pedro es $\gamma=0.88615$. La ecuación (1) admite también la forma alternativa (2),

$$D_t^\gamma(1-\psi(t))=\lambda^{-\sigma}\psi(t) \quad (11.1)$$

Tenemos ahora por lo menos dos caminos: 1., no hay manifestación espacial por lo que es un constante, en cuyo caso podría ser $\sigma=\gamma$ y $\lambda=t_r$ como tiempo de referencia o de tipo unitario; y 2., sí hay manifestación espacial y surge la ecuación (4).

En el primer caso, una solución se expresa por $\psi(t)=E_{1,\gamma}(-t/t_r)^\gamma$, la cual corresponde a la función Mittag-Leffler de parámetro $\gamma=H$, que se exhibe en la ecuación (3), (Metzler y Klafter, 2000). La función Mittag-Leffler está normalizada en $t=0$ por el valor 1 y es convexa decreciente; así que en el límite es cero, con pendiente cero. A continuación, definimos la función característica complementaria por medio de la función 1-Mittag-Leffler, ahora tenemos una curva de crecimiento con saturación que está normalizada en cero por 0, que es cóncava creciente y en el límite vale 1, con pendiente cero.

$$E_{1,\gamma}(-t/t_r)^\gamma=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-t/t_r)^\gamma)^j}{\Gamma(1+\gamma\cdot j)} \quad (11.2)$$

En el segundo caso, la $\lambda^{-\sigma}$ puede estar relacionada con la variable dual a la posición espacial que se acostumbra denotar $\|k\|^\sigma$, por lo que el término se interpreta como: $\lambda^{-\sigma}\psi(t)\mapsto\|k\|^\sigma\psi(k,t)$, que corresponde a la transformada de Fourier de $P(x,t)$, que a su vez es la transformada de la derivada fraccional $D_{|x|}^\sigma P(x,t)$, con signo cambiado, en su forma derivada de Riesz: $-F(D_{|x|}^\sigma P(x,t))(k)=\|k\|^\sigma\psi(k,t)$. Por lo que la forma alterna (2) queda: $D_t^\gamma(1-\psi(k,t))=-F(D_{|x|}^\sigma P(x,t))$, y con la transformada inversa de Fourier resulta: $D_t^\gamma(-\delta(x)+P(x,t))=D_{|x|}^\sigma P(x,t)$, la cual es la ecuación de Fokker-Planck fraccional (4), (Saichev & Zaslavsky, 1997),

$$D_t^\gamma P(x,t)=D_{|x|}^\sigma P(x,t)+D_t^\gamma(1\delta(x)) \quad (11.3)$$

Por tanto, la función obtenida es la función característica, con parámetro temporal, de la probabilidad de paso o transición de la ecuación de Fokker-Planck fraccional, cuyo orden temporal depende del exponente de Hurst obtenido de los datos de escurrimientos estacionales, y cuyo orden, espacial, podría identificarse con la dimensión fractal 1.1709 para el Conchos y de 1.1138 para el San Pedro.

En cuanto a la segunda opción de las citadas, la función de estructura. Recordamos, brevemente, que se trata de conjuntos como el caso de variaciones que se muestran esparcidas e irregulares. Para la construcción multifractal, también cubrimos con un mallado uniforme de cubos, pero de tamaño ajustable, llamado la resolución y simbolizada por h .

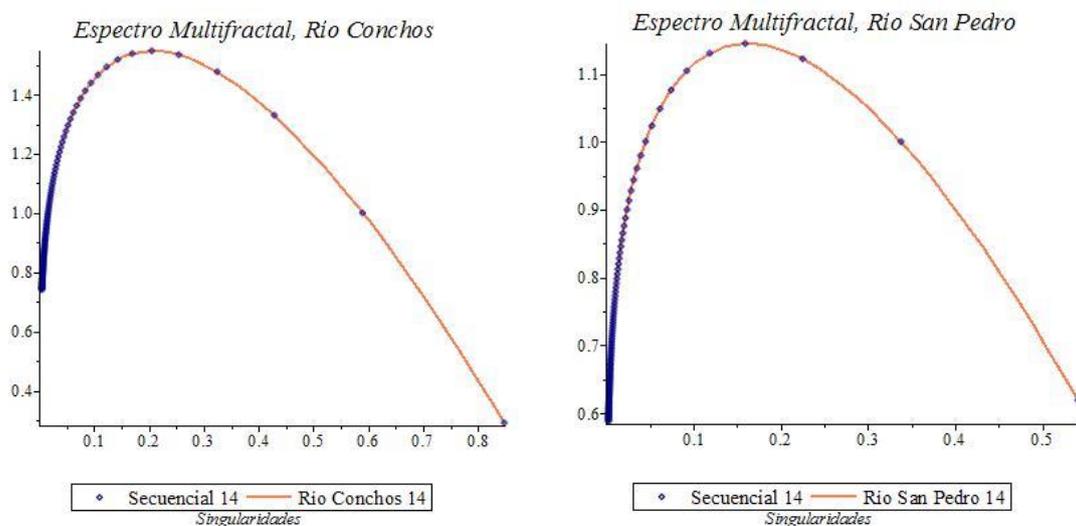
Definimos la función de partición como la suma total de las macro-configuraciones disponibles del sistema. La suma se extiende sobre todos aquellos cubos que intersectan el soporte de la medida microscópica. Esa suma se comporta como una potencia de la resolución h , y la potencia que representa a la función de partición se le conoce como función de estructura $\tau(s)$; para nuestro caso se introduce a la función Kummer, con los dos parámetros siguientes $[a, b]$, dependientes de los de forma: $[0.34175, 2.9452]$ para el río Conchos; y $[0.22770, 1.8050]$ para el río San Pedro.

$$\tau(s) = {}_1F_1(a, b, -s) \quad (11.4)$$

Por tanto, para los dos ríos que estamos considerando, se introducen las funciones de estructura, cuya característica resaltante se expresa en ser decreciente con tasas decrecientes, o bien decreciente y convexa; y además normalizada en cero por el valor 1. Así que cuando crece la variable de escala decrece el valor de la función, siendo su decrecimiento progresivamente más pequeño hasta que eventualmente se hace nulo. Ese decrecimiento es concomitante con la progresiva pequeñez de los rasgos del proceso multifractal.

Dualmente, a los dos ríos: Conchos y San Pedro, también se le puede asignar un espectro tanto puntual como continuo o implícito. Pero, ahora se trata de una función cóncava, que cuando decrece la singularidad decrece también el valor de la función y eventualmente llegará a cero. Nuevamente este comportamiento es concomitante del proceso multifractal en donde los rasgos son progresivamente más pequeños. Y refleja un proceso de cascada desde el vértice a medida que decrece la singularidad decrece el valor del espectro. Sin embargo, el decrecimiento del valor del espectro no se da a partir del valor de la escala igual a cero, sino desde el valor que designa la cúspide, $s = 3$ aproximadamente; y la singularidad esencial se observa, a la izquierda de las dos curvas, con el crecimiento del parámetro de escala, que puede interpretarse como crecimiento de la frecuencia, el valor del espectro tiende a cero. Los espectros se muestran en la Figura 6.1.

Figura 11.5 Espectros multifractales para los Ríos Conchos y San Pedro



Fuente: Elaboración propia

11.2 Conclusiones

Los datos de escurrimientos estacionales de los dos ríos presentan la apariencia que hemos denominado: *peine del hidrólogo*. Los datos nos producen el orden de evolución de la ecuación diferencial; y su solución nos aporta la función característica que nos permite inferir la relación entre el porcentaje de probabilidad y el escurrimiento previsible, relación controlable por el resultado obtenido por medio de los datos agrupados.

Estos resultados se pueden extrapolar para el caso en que no se tengan datos suficientes o confiables, caso en que se presentaría a la función característica como una exponencial decreciente.

11.3 Referencias

Bras R. L. and Rodríguez-Iturbe I. (1993). Random functions and hydrology. Chapter 5, Long-term Persistence in Hydrologic Modeling. Dover Pub., New York, 561p.

De la Peña de la Torre, Ildefonso, (2008). Manual de operación del distrito de riego del Valle del Yaqui. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Jiutepec Morelos, pp. 80. ISBN 978-968-9513-05-6.

Hurst, H. (1951). The long-term storage capacity of reservoirs Transactions of American Society Civil Engineer, 116 - 195.

Mercado J. R., P. Guido, W. Ojeda. (2015). "Cascade process and Pareto rule: application to runoff data of two Mexican rivers (Conchos and Nazas)". Int. Journal of Engineering Research and Applications www.ijera.com ISSN: 2248-9622, Vol. 5, Issue 7, (Part - 4) July 2015, pp. 74-81.

Mercado E. J. R., F. Brambila P., (2001). Problemas Inversos en las Ecuaciones de Fokker-Planck, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 29, 201-222, SMM.

Metzler R., Klafter J. (2000). The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach, Phys. Rep. 339, 1-77.

Saichev A. I., Zaslavsky G. M. (1997). Fractional kinetic equations. Chaos 7 (4), 753-764.