



Title: Estabilidad y diseño de un controlador LQR para un sistema Bola-Viga

Authors: TELLEZ-CUEVAS, Pedro, HERNÁNDEZ-LUNA, Aldo y CRUZ-LUNA Manuel

Editorial label ECORFAN: 607-8695
BCIERMMI Control Number: 2020-04
BCIERMMI Classification (2020): 211020-0004

Pages: 20
RNA: 03-2010-032610115700-14

ECORFAN-México, S.C.
143 – 50 Itzopan Street
La Florida, Ecatepec Municipality
Mexico State, 55120 Zipcode
Phone: +52 1 55 6159 2296
Skype: ecorfan-mexico.s.c.
E-mail: contacto@ecorfan.org
Facebook: ECORFAN-México S. C.
Twitter: @EcorfanC

www.ecorfan.org

Holdings		
Mexico	Colombia	Guatemala
Bolivia	Cameroon	Democratic
Spain	El Salvador	Republic
Ecuador	Taiwan	of Congo
Peru	Paraguay	Nicaragua

Introduction

Methodology

Results

Annexes

Conclusions

References



ECORFAN®

ECORFAN® *No-* **International** -*Congress or Colloquim* *Thematic*

Introduction

El control de un sistema Bola-Viga es uno de los más interesantes para la ingeniería de control ya que es un sistema dinámico altamente no lineal, el cual consiste en una viga que rota en donde una bola se mueve libremente cambiando de posición mientras rueda en la viga. Los objetivos se centran en el rendimiento del sistema usando un control LQR para diferentes perturbaciones así mismo obtener los planos de fase.



ECORFAN®

ECORFAN® *No-* **International** -*Congress or Colloquim* *Thematic*

Methodology

El modelado es el primer paso en el diseño de un lazo de control. La configuración mecánica del sistema bola-viga se muestra en la figura 1, consiste de dos brazos mecánicos, una caja de engranes y un servomotor de CD. La bola se coloca en la viga, donde rueda libremente a lo largo de su plano horizontal. El brazo de palanca está unido a la viga en un extremo y el servo engranaje en el otro.



ECORFAN®

ECORFAN® No- International -Congress or Colloquim Thematic

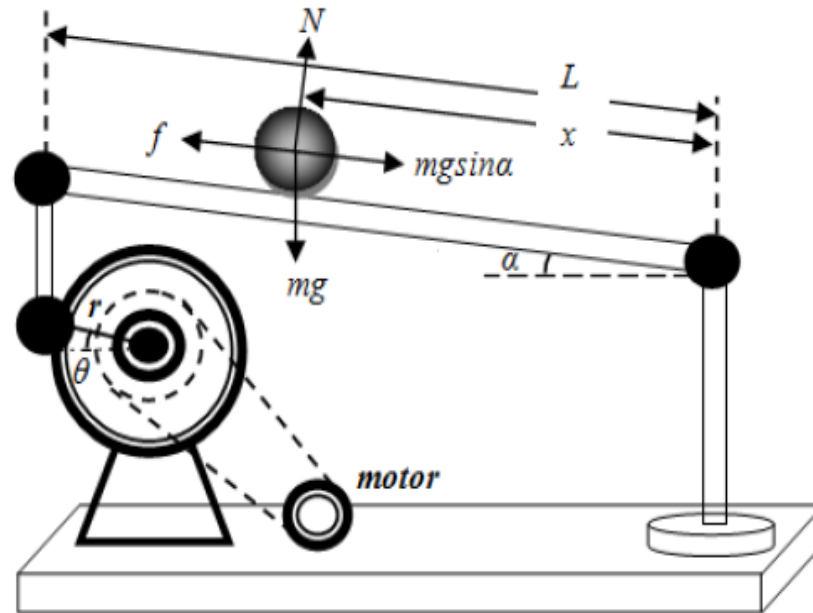


Figura 1



ECORFAN®

ECORFAN® No- International -Congress or Colloquim Thematic

El modelo del motor queda descrito como:

$$V_{in} = \frac{R_m J_m}{K_m K_g} \ddot{\theta} + \left(K_b + \frac{R_m B_m}{K_m K_g} \right) \dot{\theta}$$

Para obtener el modelo matemático del sistema bola viga utilizamos las ecuaciones de Euler-Lagrange, considerando que el sistema no tiene perturbaciones y no hay fricción quedando.

$$L = \frac{1}{2} \left[(J_1 + mr^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{7}{5} m \dot{r}^2 \right] - \left(mgr + \frac{L}{2} Mg \right) \sin \alpha$$



ECORFAN®

ECORFAN® No- International -Congress or Colloquim Thematic

El lagrangiano H resume la dinámica del sistema. Puesto que no hay fuerza externa sobre la bola, las ecuaciones de movimiento de Lagrange se dan en las ecuaciones:

$$(J_1 + mr^2)\ddot{\alpha} + 2mrr\dot{\alpha} + \left(mgr + \frac{L}{2}Mg\right)\cos\alpha = \tau$$

$$\frac{7}{5}\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2 + g\sin\alpha = 0$$



ECORFAN®

ECORFAN® No- International -Congress or Colloquim Thematic

Considerando que sin fricción el ángulo de la viga conduce a que $g \sin \alpha \approx g\alpha$, entonces al linealizarse estas ecuaciones se puede estimar cuando sistema se aproxima a un punto de equilibrio. En este punto $\dot{\alpha} \approx 0$ entonces $-r\dot{\alpha}^2 \approx 0$ y las ecuaciones:

$$(mr^2 + K_1)\ddot{\alpha} + (2mr\dot{r} + K_2)\dot{\alpha} + \left(mgr + \frac{L}{2}Mg\right) \cos \alpha = \tau$$

$$K_4\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2 + g\alpha = 0$$



ECORFAN®

ECORFAN® No- International -Congress or Colloquim Thematic

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{K_4} x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m x_1^2 + K_1} \left[K_3 V_{in} - (2 m x_1 x_2 - K_2) x_4 - \left(m g x_1 + \frac{L}{2} M g \right) \cos x_3 \right]$$

La variable $x_1 = r$ (m) es la posición de la bola en la viga, $x_2 = \dot{r}$ (m/s) representa la velocidad de la bola, $x_3 = \alpha$ (rad) indica la posición angular de la viga y $x_4 = \dot{\alpha}$ (rad/s) es la velocidad de la viga.



ECORFAN®

ECORFAN® No- International -Congress or Colloquim Thematic

Despejando, obtenemos que el punto de equilibrio resulta

$$x_{eq} = \left[-\frac{L M}{2 m} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]$$

Para este trabajo se consideran los siguientes datos del sistema $L=0.7$ m; $M=18.848 \times 10^{-3}$ Kg; $m=0.5$ Kg; $g=9.81$ m/s²; $J_1=7.35 \times 10^{-4}$ Kg m²; $d=0.075$ m; $B_m=0.4 \times 10^{-6}$ N m-s; $K_b=0.022$ V/rad/s; $K_m=0.022$ N m/A; $R_m=9.4\Omega$; $\tau=0.0163$ Nm; $J_m=8.5 \times 10^{-7}$ Kg m²; $I_m=0.76$ A; sustituyendo datos se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.0014 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1140.9 & 0 & 0 & -48.25 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 233.148 \end{bmatrix}$$



ECORFAN®

ECORFAN® No- International -Congress or Colloquim Thematic

DISEÑO DEL CONTROLADOR LQR

El control LQR se plantea como la necesidad de calcular la mejor entrada $u(t)$, que permita llevar el sistema de un estado inicial $x(t_o)$, a un estado final $x(t_f)$ en un tiempo $t_f - t_o$. Para calcular la ganancia de realimentación K es siguiendo el criterio de optimización minimizando el funcional cuadrático.

$$J = \int_0^{t_\infty} [x^T(t) + Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt$$



ECORFAN®

ECORFAN® *No-* International -*Congress or Colloquim* *Thematic*

Se definen las matrices Q y R, con ellas se determina la importancia relativa del error y el gasto de energía de la señal de control por tanto:

$$Q = \begin{bmatrix} 50000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R = [0]$$



ECORFAN®

ECORFAN® *No-* International -*Congress or Colloquim* *Thematic*

SIMULACION Y RESULTADOS

La simulación del sistema péndulo invertido con controlador se desarrolla sobre el software MATLAB/SIMULINK. El obtener la matriz K, analíticamente no es tarea fácil, MATLAB cuenta con la función $K=lqr(A,B,Q,R)$. Para ello es necesario ajustar Q y R hasta obtener el desempeño deseado,

se sustituye en la matriz A y B y la matriz Q y R respectivamente con lo que se obtuvo:

$$K = [-228.553 \quad -239.47 \quad 114.978 \quad 2.248]$$

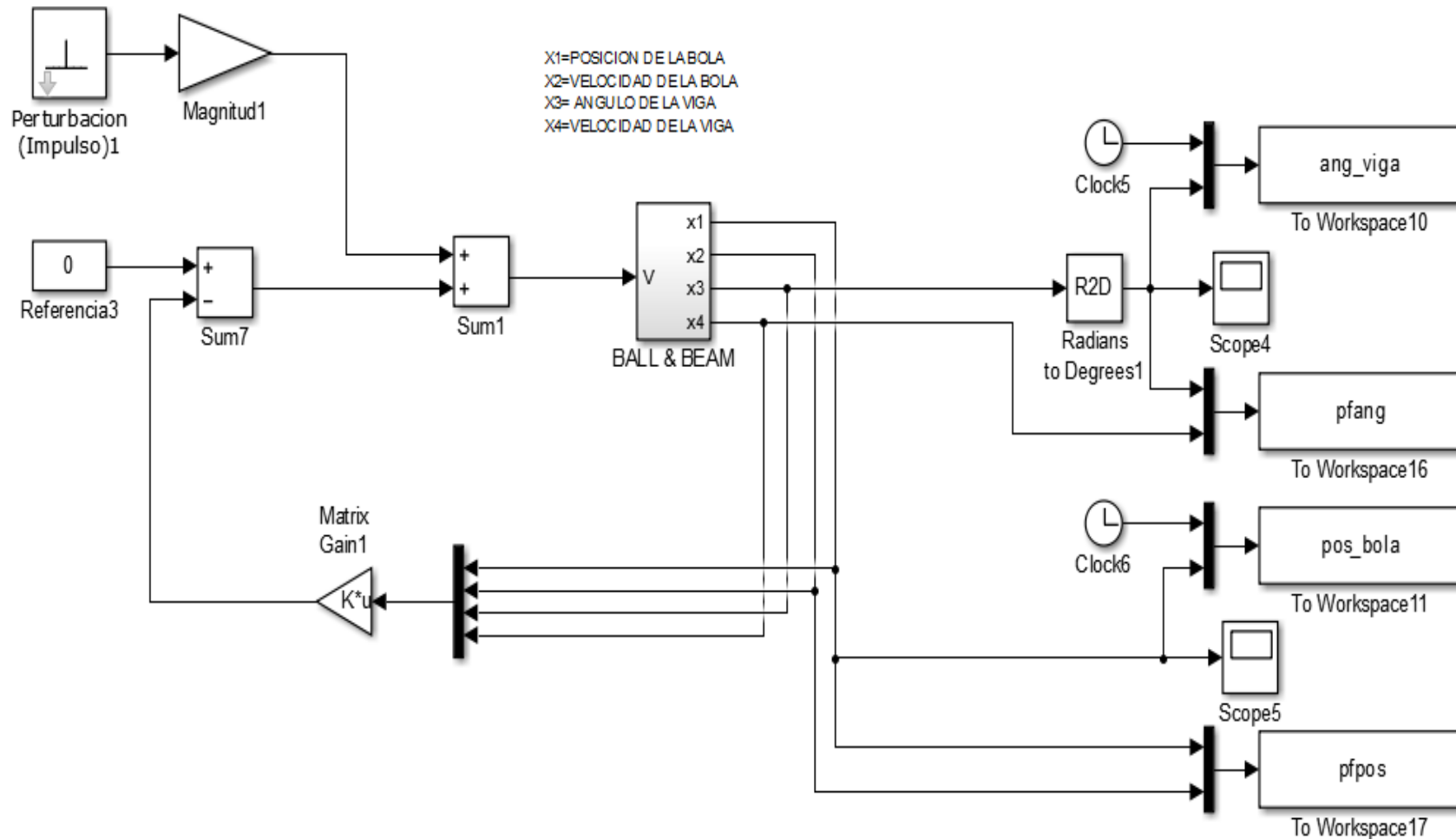


ECORFAN®

ECORFAN® No- International -Congress or Colloquim

Thematic

Diagrama LQR representado en simulink/matlab

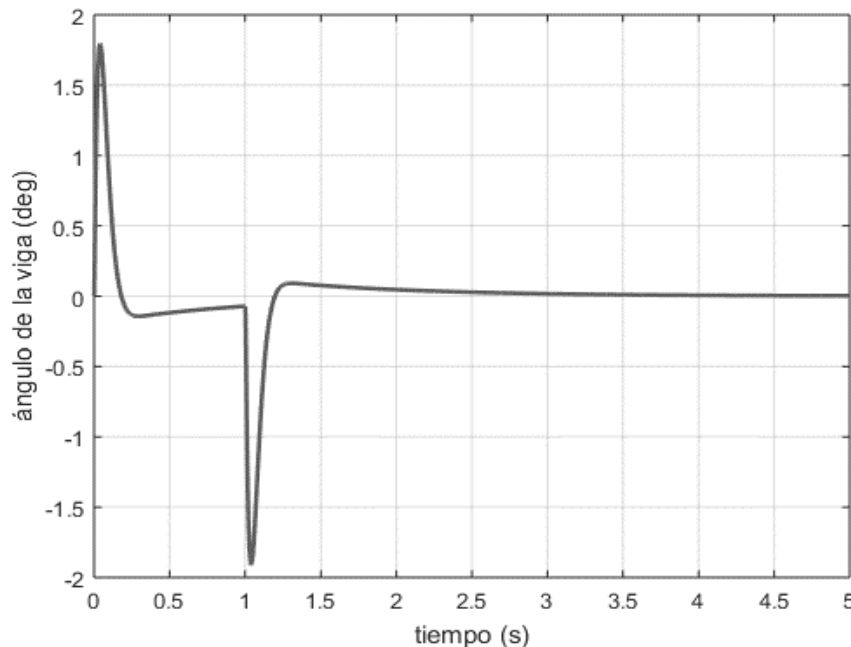




ECORFAN®

ECORFAN® No- International -Congress or Colloquim Thematic

Los resultados de la simulación para el control de seguimiento se ilustran en la Fig. 3 para el caso de una perturbación impulso cuya magnitud es de 5N con una referencia 0° . La respuesta que se grafica corresponde a la posición angular de la viga con respecto a la horizontal, se observa que tiene dos sobreelongaciones una de $\pm 1.7^\circ$ y un tiempo de asentamiento de 3s.





ECORFAN®

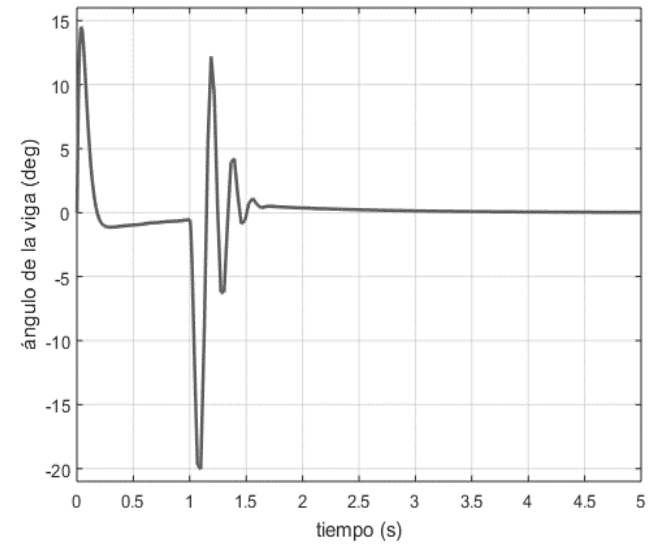
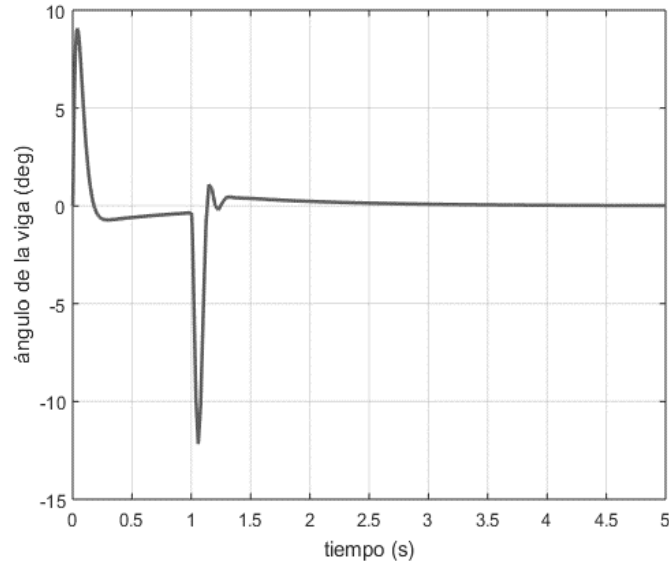
ECORFAN® *No-* International -*Congress or Colloquim* *Thematic*

La Fig. 4 y la Fig. 5 muestran el comportamiento del sistema con unas perturbaciones de 25N y 50N respectivamente en donde se observa que la salida sigue con éxito la trayectoria de referencia, proporcionan un buen rendimiento ambas con un tiempo de asentamiento para el caso de ambas figuras de 3s, pero en el caso de la respuesta de la Fig. 3 se tienen sobreelongaciones de 8° , -12° y dos pequeños picos de $\pm 1^\circ$. La respuesta de la Fig. 4 muestra que alcanza unas sobreelongaciones de 15° , 12° , 4° , 1° , -20° , $-6^\circ - 0.5^\circ$, hasta que alcanza el valor de referencia.



ECORFAN®

ECORFAN® No- International -Congress or Colloquim Thematic





ECORFAN®

ECORFAN® *No-* **International** -*Congress or Colloquim* *Thematic*

Para verificar la estabilidad del sistema por medio del análisis gráfico con el plano de fase en el que se grafica la posición angular (eje x) contra la velocidad angular (eje y) de la respuesta del sistema.

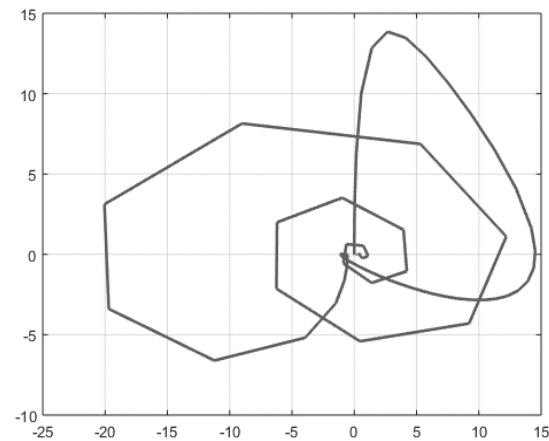
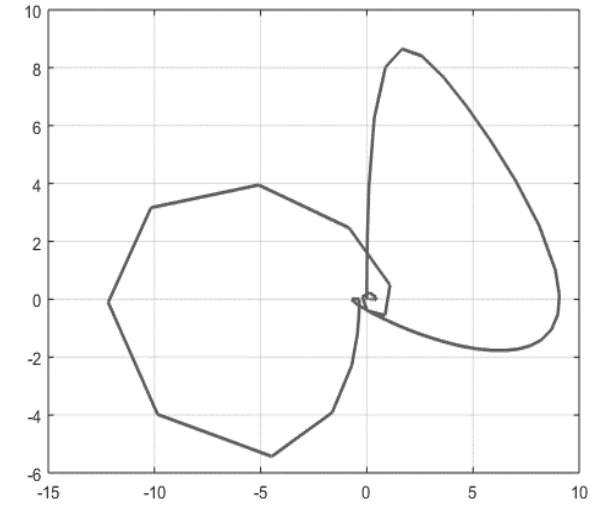
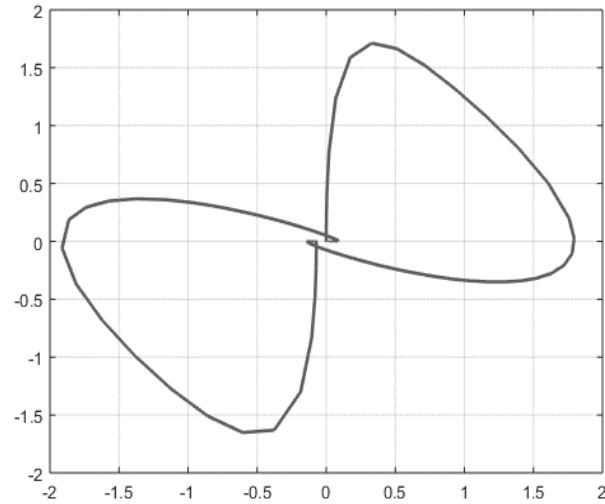
Las Fig. 6, muestra la trayectoria en el plano de fase del sistema, en ella se observa que la trayectoria parte desde un punto establecido por las condiciones iniciales, que en este caso son cero, y después de cierto tiempo llega al punto esperado ya que se ha perturbado con un impulso de 5N.

En la Fig. 7 se observa que la trayectoria es muy parecida a las de la Fig. 6, solo con pequeñas variaciones en su trayectoria y la Fig. 8 describe una trayectoria más irregular debido a las sobreelongaciones pero alcanza el punto deseado, en ambas trayectorias para las diferentes perturbaciones las respuestas convergen al mismo valor de referencia.



ECORFAN®

ECORFAN® *No-* International -Congress or Colloquim *Thematic*





ECORFAN®

ECORFAN® *No-* **International** -*Congress or Colloquim* *Thematic*

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se desarrolla un controlador LQR para un sistema bola viga, el cual es representado por un modelo no lineal.

Se obtiene el comportamiento dinámico del sistema con una referencia de 0 y diferentes perturbaciones impulsos, la respuesta obtenida muestra que el sistema responde rápido con pequeñas sobreelongaciones para perturbaciones magnitudes pequeñas y en caso de magnitudes grandes tiene picos mayores con respecto con los de menor magnitud pero en ambos caso alcanza el valor deseado.



ECORFAN®

ECORFAN® *No-* **International** -*Congress or Colloquim* *Thematic*

Para la estabilidad por medio de plano de fase, las trayectorias de la respuesta del sistema no lineal con el controlador LQR, las respuestas convergen al mismo valor de referencia. Finalmente, este estudio proporciona un rendimiento dinámico con precisión de la posición angular de la viga.



ECORFAN®

© ECORFAN-Mexico, S.C.

No part of this document covered by the Federal Copyright Law may be reproduced, transmitted or used in any form or medium, whether graphic, electronic or mechanical, including but not limited to the following: Citations in articles and comments Bibliographical, compilation of radio or electronic journalistic data. For the effects of articles 13, 162,163 fraction I, 164 fraction I, 168, 169,209 fraction III and other relative of the Federal Law of Copyright. Violations: Be forced to prosecute under Mexican copyright law. The use of general descriptive names, registered names, trademarks, in this publication do not imply, uniformly in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protector in laws and regulations of Mexico and therefore free for General use of the international scientific community. BCIERMMI is part of the media of ECORFAN-Mexico, S.C., E: 94-443.F: 008- (www.ecorfan.org/ booklets)