

Obtención de la fuerza de empuje de una hélice y el control de su posición

Obtaining the thrust force of a propeller and control of its position

TORRES-SUAREZ, Francisco Emmanuel†, RESÉNDIZ-ROSAS, Celerino, PALACIOS-PINEDA, Luis Manuel y RAMÍREZ-VARGAZ, Ignacio

Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Pachuca

ID 1^{er} Autor: *Francisco Emmanuel, Torres-Suarez* / **ORC ID:** 0000-0003-4779-5085, **Researcher ID Thomson:** P-4870-2018, **Mendeley ID:** francisco-emmanuel-torres-suarez

ID 1^{er} Coautor: *Celerino, Reséndiz-Rosas* / **ORC ID:** 0000-0003-3197-2876, **Researcher ID Thomson:** P-6224-2018, **Mendeley ID:** celerino-resendiz-rosas

ID 2^{do} Coautor: *Luis Manuel, Palacios-Pineda* / **ORC ID:** 0000-0001-5297-2950

ID 3^{er} Coautor: *Ignacio, Ramirez-Vargaz* / **ORC ID:** 0000-0003-1887-8949

Recibido: Septiembre 05, 2018; Aceptado: Diciembre 06, 2018

Resumen

Se propuso una plataforma para limitar los grados de libertad de un helicóptero montado en ella, dejando como único grado de libertad la altura. Mediante un planteamiento teórico se determinaron: la fuerza de empuje realizada por la hélice, la velocidad del viento que fluye a través de los álabes y la potencia requerida para desplazarlo. Se compararon estos resultados con una simulación realizada en ANSYS Fluent con fines de validación. El diseño contempló una hélice impresa en 3D, un motor sin escobillas y un controlador electrónico de velocidad (ESC). Para el planteamiento se propuso que la fuerza de empuje esté en función de la velocidad de flujo, la velocidad de flujo en función de la potencia requerida por el motor, y a su vez, esta potencia sea una función de la aceleración. Mediante la ecuación de Euler-Lagrange se modeló el comportamiento del sistema, obteniéndose así una ecuación diferencial de segundo orden que al resolverla proporcionó la posición, velocidad y aceleración del helicóptero en su movimiento vertical. Se consiguió de esta manera determinar la fuerza de empuje para esta hélice, objetivo de este trabajo.

Fuerza de empuje, ANSYS Fluent, Control de lazo abierto

Abstract

A platform was proposed to limit the degrees of freedom of a helicopter mounted on it, letting height as the unique degree of freedom. Through a theoretical approach the thrust force performed by the propeller, the velocity of the wind that flows through the blades and the power required to move it were determined. These results were compared with a simulation performed in ANSYS Fluent for validation purposes. The design included a 3D printed propeller, a brushless motor and an electronic speed controller (ESC). For this it was proposed that the thrust force is a function of the flow velocity, the flow velocity is a function of the power required by the motor, and in turn, this power is a function of the acceleration. Using the Euler-Lagrange equation the behavior of the system was modelled, giving a second-order differential equation that, when solved, provided the position, velocity and acceleration of the helicopter in its vertical motion. In this way, it was possible to determine the thrust force for this propeller, goal of this work.

Thrust force, ANSYS Fluent, Open loop control

Citación: TORRES SUAREZ, Francisco Emmanuel, A RESÉNDIZ ROSAS, Celerino, PALACIOS PINEDA, Luis Manuel y RAMÍREZ VARGAS, Ignacio. Obtención de la fuerza de empuje de una hélice y el control de su posición. Revista de Tecnología e Innovación. 2018. 5-17: 18-28.

† Investigador contribuyendo como primer autor.

Introducción

El propósito de este proyecto es el diseño de un helicóptero no tripulado con una sola hélice de un grado de libertad, capaz de mantenerse invariante en su posición durante el tiempo que dure en operación. Esto debido a los diferentes factores ambientales que entorpecen su funcionamiento, siendo las ráfagas de viento las más comunes.

A partir de este análisis se pueden desarrollar aplicaciones más específicas para la industria, o generalizando, aplicaciones en desastres naturales, búsqueda y rescate, vigilancia, inspección de instalaciones, estructuras, tuberías, entre otras (Ollero y Maza, 2007).

Las aplicaciones de los vehículos aéreos no tripulados (VANT) se han extendido tanto que es necesario mejorar su funcionamiento. Actualmente se han desarrollado varios trabajos enfocados en el control de la dinámica de VANT tipo Quadrotor (Curi et al., 2014; Guerrero et al., 2015; Lara et al., 2017; Lencinas et al., 2016; Parra et al., 2013; Reinoso et al., 2016; Rubio et al., 2014; Rubio et al., 2015). Sin embargo, se ha desatendido en mayor medida el estudio de helicópteros, que son de los vehículos aéreos actualmente más utilizados.

El objetivo principal de esta investigación es modelar y controlar la dinámica no-lineal de un helicóptero, restringido en el espacio por una plataforma, de manera que solo tenga movimiento vertical.

Un sistema linealizado puede representar a un sistema no-lineal alrededor de un punto. Una vez que se aleja de ese punto no hay garantía de que el sistema esté siendo representado con fidelidad. La linealización de un sistema no-lineal en expansión en series de Taylor ha sido utilizada comúnmente para el análisis de estabilidad y para la sintonización de controladores lineales (Carrillo et al., 2015), sin embargo, existen diversos métodos de linealización.

De esta manera, se obtienen resultados que son aproximados, pero representan el comportamiento del sistema no-lineal, y una vez contando con el sistema linealizado se aplican las técnicas de control lineal.

La entrada al sistema es la fuerza de empuje proporcionada por la rotación de la hélice, que es dependiente de la potencia del rotor. Una variante importante para la velocidad proporcionada por la hélice es la geometría de los alabes. Esta puede diseñarse en un software CAD y posteriormente analizarse en un software de DFC (Dinámica de Flujo Computacional).

Metodología

Modelo del sistema

La obtención de un modelo matemático es esencial para describir el comportamiento de un sistema, en este caso un helicóptero. Dependiendo de las variables consideradas se puede predecir posición, velocidad y aceleración del movimiento vertical del helicóptero, así como el tiempo en realizar la operación, velocidad angular de la hélice, potencia requerida por el motor, etc. Para obtener el modelo existen diversos métodos. En este trabajo se usó el método de Euler-Lagrange descrito a continuación.

a) Dinámica por Euler-Lagrange

Este método consiste en encontrar primeramente el Lagrangiano del sistema. Este se calcula restando la energía cinética total con la energía potencial del sistema (Ibáñez, s.f.), de la siguiente forma

$$\mathcal{L} = E_c - E_p. \quad (1)$$

En (1) \mathcal{L} es el Lagrangiano del sistema, E_c y E_p son energía cinética y potencial, respectivamente. Por otra parte, la ecuación de Euler-Lagrange (Ibáñez, s.f.) está definida como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

En (2) \dot{x} y x son las coordenadas generalizadas del sistema y t el tiempo. El análisis del sistema es el siguiente: un flujo másico de aire pasa a través de los álabes generando una fuerza de sustentación o de empuje lo cual provocará, al romperse el equilibrio, la elevación del helicóptero.

Un bosquejo del sistema es mostrado en la figura 1.

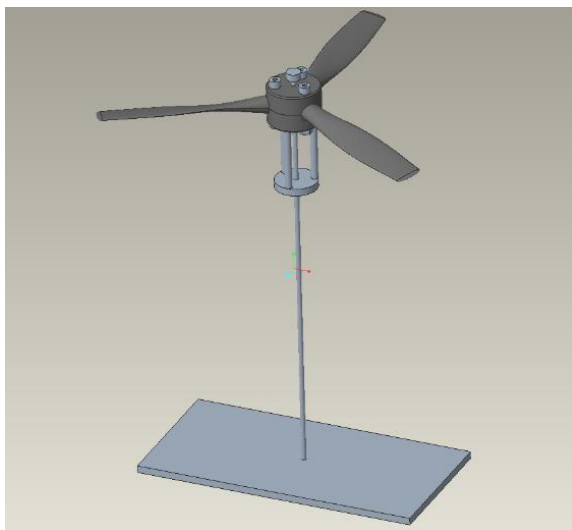


Figura 1 Bosquejo del sistema

b) Análisis del sistema

El sistema tendrá energía potencial al elevarse $E_p = mgx$ (Beer et al., 2010). De manera similar se genera una energía cinética igual a $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ (Beer et al., 2010), donde m la masa del helicóptero, g la aceleración de la gravedad terrestre, x la elevación del helicóptero y v la velocidad con la que asciende el helicóptero. El aire es el fluido que realizará el trabajo de generar la elevación, la energía cinética es entonces

$$E_{c,Aire} = \frac{1}{2}m_{Aire}v_{Aire}^2 \quad (3)$$

La masa se puede calcular (Wark y Richards, 2001) como

$$m_{Aire} = \rho V_{Aire} = \rho Ax \quad (4)$$

Siendo ρ la densidad del aire, V volumen y A el área del disco formado por la rotación de los álabes. Sustituyendo (4) en (3) se obtiene

$$E_{c,Aire} = \frac{1}{2}\rho Axv_{Aire}^2 \quad (5)$$

Debido a que la energía cinética del aire es la única causante de la elevación del helicóptero, y tomando en cuenta que $W = Fx$ (Wark y Richards, 2001), donde W es trabajo y F fuerza, entonces

$$F = \frac{1}{2}\rho Av_{Aire}^2 \quad (6)$$

La fuerza de empuje depende de la velocidad del aire, y ésta depende a su vez de la velocidad angular del rotor. Sabiendo que $W = Fv$ y que $W = M\omega$ para sistemas en rotación (Beer et al., 2010), (W es potencia, M es par motor y ω es velocidad angular) se tiene que

$$Fv_{Aire} = \frac{1}{2}\rho Av_{Aire}^3 = W, \quad (7)$$

Despejando se obtiene

$$v_{Aire} = \sqrt[3]{\frac{2W}{\rho A}} \quad (8)$$

Sustituyendo (8) en (6) se tiene

$$F = \sqrt[3]{\frac{\rho AW^2}{2}} \quad (9)$$

Contando con todos los datos necesarios, solo resta encontrar la ecuación diferencial que rige al sistema. Comenzando con el Lagrangiano y resolviendo la ecuación de Euler-Lagrange (sustituyendo $v = \dot{x}$)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\rho Axv_{Aire}^2 - mgx \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = \frac{1}{2}\rho Av_{Aire}^2 - mg \quad (12)$$

Entonces:

$$m\ddot{x} - \frac{1}{2}\rho Av_{Aire}^2 + mg = 0 \quad (13)$$

Sustituyendo la ecuación (9) en (13):

$$m\ddot{x} - \sqrt[3]{\frac{\rho AW^2}{2}} + mg = 0 \quad (14)$$

Se debe tomar en cuenta que W , sin ningún tipo de control, es independiente de t . Es decir, el motor otorgará toda su potencia en el vuelo. De esta manera todo en la ecuación sería constante y fácilmente integrable, de la siguiente forma:

$$x = \left(\sqrt[3]{\frac{\rho A \dot{W}^2}{16m^3}} - \frac{1}{2}g \right) t^2 + C_2 t + C_1 \quad (15)$$

Para determinar las constantes de integración deben aplicarse las condiciones iniciales. En el tiempo 0 la distancia será 0, la distancia de referencia.

Similarmente en el tiempo 0, la velocidad será la velocidad con la que empieza el vuelo, es decir 0. Una vez aplicado esto, la ecuación queda finalmente como

$$x = \left(\sqrt[3]{\frac{\rho A \dot{W}^2}{16m^3}} - \frac{1}{2}g \right) t^2. \quad (16)$$

Otro dato que nos brinda la ecuación (14) es el momento en que el helicóptero comienza su elevación. Cuando $\ddot{x} = 0$ se tienen dos significados, o está en reposo antes de comenzar a elevarse o se encuentra elevado en la posición deseada de forma estática, en ambos casos el sistema se encuentra en equilibrio.

Haciendo $\ddot{x} = 0$ en la ecuación (14) se obtiene

$$mg = \sqrt[3]{\frac{\rho A \dot{W}^2}{2}} = F. \quad (17)$$

Esto es consistente, debido a que las únicas fuerzas presentes son el peso del helicóptero y la fuerza de sustentación y al ser iguales el sistema se encuentra en equilibrio. De igual manera la ecuación (13), cuando $\ddot{x} = 0$, muestra la velocidad que debe alcanzar la hélice del helicóptero para estar a punto de despegar.

Simulación en DFC

Con el propósito de corroborar la certeza de los cálculos se realiza una simulación en ANSYS Fluent tanto en estado estacionario como en transitorio.

Se genera una malla para la parte giratoria (“enclosure”) y para el dominio, como se muestra en la figura 2.

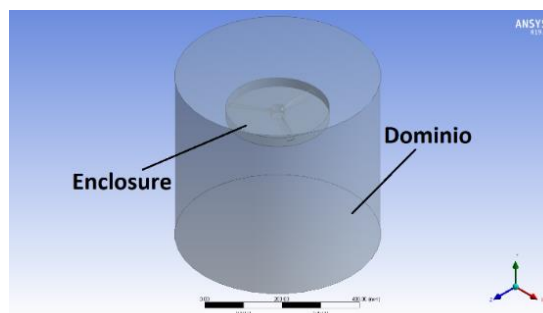


Figura 2 Sistema modelado en Ansys Fluent

En estado estacionario se utiliza un modelo de viscosidad k-épsilon, como se muestra en la figura 3

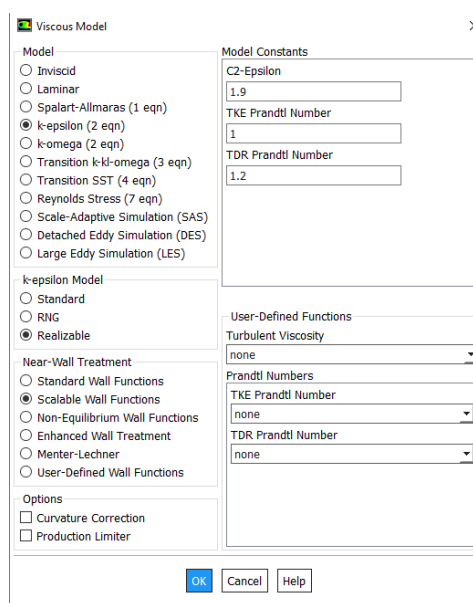


Figura 3 Modelo de viscosidad

Posteriormente se agrega una velocidad rotacional a la parte giratoria “enclosure” como se muestra en la figura 4. Finalmente se elige el método de solución, seleccionándose uno de segundo orden para una mayor exactitud.

Se usa una inicialización híbrida y se resuelve a 600 iteraciones o un criterio de 1×10^{-4} en el residual, como se puede ver en las figuras 5 y 6.

Para garantizar que la solución haya convergido se colocan tres monitores distribuidos radialmente, y uno al centro. Una vez que los valores monitoreados no cambien de valor en una medición especificada, como magnitud de velocidad, se habrá alcanzado una convergencia.

En la simulación transitoria se ve la evolución que tiene el sistema con respecto del tiempo.

Para esto se generan pasos de tiempo con tamaño en segundos y número de iteraciones de cada uno de estos. Cada paso de tiempo debe converger, esta configuración se ve en la figura 7 y es el único cambio con respecto a la simulación estacionaria.

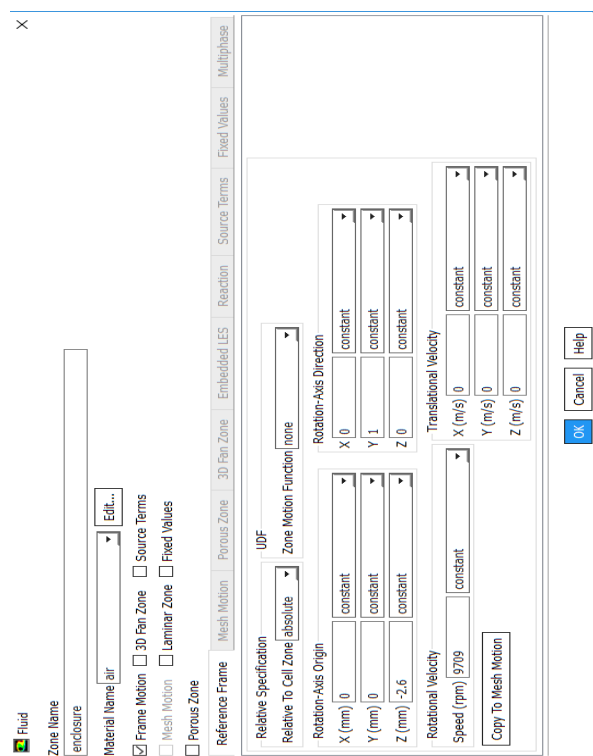


Figura 4 Configuración de la rotación de “enclosure”

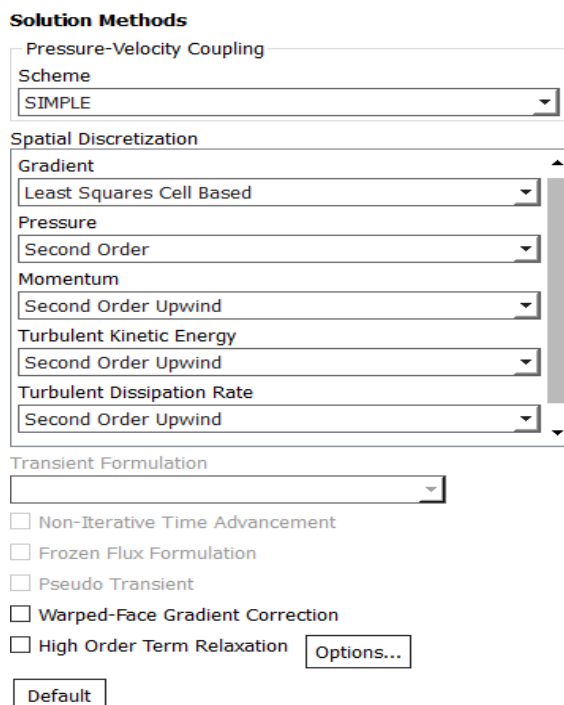


Figura 5 Método de solución

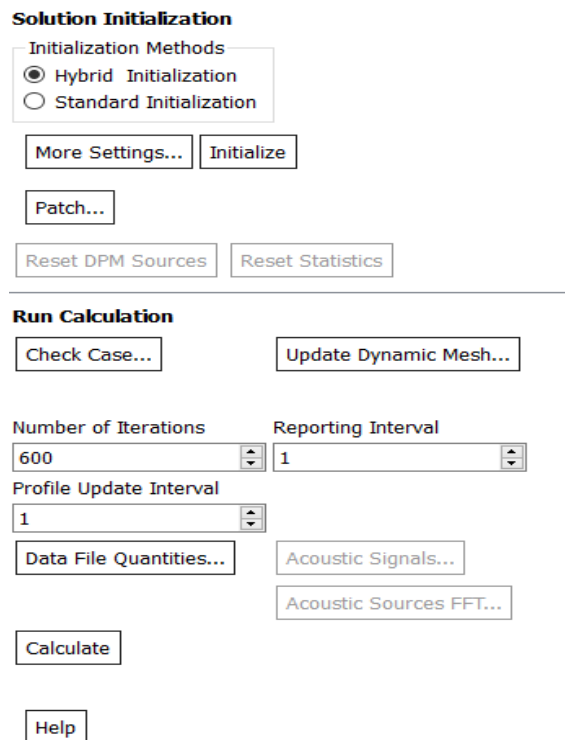


Figura 6 Inicialización y cálculo de la solución

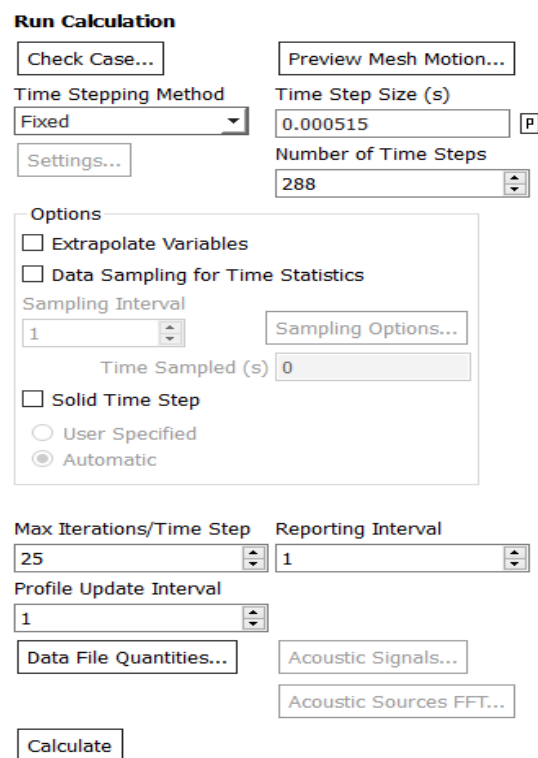


Figura 7 Cálculo de la solución transitoria

Resultados

Datos

Se desea tener un control sobre la posición del helicóptero, es decir, que no se eleve indefinidamente. Los datos utilizados son:

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$m = 0.874 \text{ kg}$$

$$\rho = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$A = 0.05477 \text{ m}^2$$

g y ρ son constantes típicas, mientras que el área del disco formado por las hélices fue obtenido de una hélice 10.5x5.5x3, que quiere decir que tiene un diámetro de 10.5 pulgadas, un paso de 5.5 pulgadas y un número de palas de 3.

La hélice se tomó en cuenta con un tamaño no convencional con el propósito de poder realizar un prototipo impreso en 3D con la impresora Mojo 3D Printer ubicada en el laboratorio de mecánica del Instituto Tecnológico de Pachuca.

Cálculos vs fabricante

La hoja técnica del motor a utilizar (Tom Cat Park P450, s.f.), indica una fuerza de levantamiento de entre 1.02 y 1.13 kg, un consumo eléctrico de 200.34 W con una alimentación de 11.1 V para una hélice tripala de 11 pulgadas de diámetro y un paso de 5.5 pulgadas.

Como lo indica la ecuación (9), la fuerza de sustentación depende del área del disco formado por la hélice. Sustituyendo estos valores en la ecuación (9) se tiene

$$F = \sqrt[3]{\frac{(1.225)(\pi(0.1397^2))(200.34^2)}{2}} \quad (18)$$

$$F = 11.47 \text{ N.}$$

Por lo que la fuerza teórica de sustentación da como resultado 11.47 N, y podrá levantar una carga de igual o menor peso, o lo que es lo mismo, podrá cargar una masa de 1.169 kg.

Esto representa en promedio una pérdida de fuerza de sustentación en 8.02%, y en el peor de los casos 12.73%.

Ahora usando la ecuación de la recta para determinar el consumo energético del motor a partir de la hoja técnica del fabricante, se obtiene que $y = 11.34x + 75.6$ donde x , en este caso, es el diámetro de la hélice en pulgadas. Usando el diámetro del modelo propuesto

$$F = \sqrt[3]{\frac{(1.225)(0.05477)(194.67^2)}{2}} \quad (19)$$

$$F = 10.83 \text{ N.}$$

Se puede apreciar que al reducir media pulgada en el diámetro la pérdida en fuerza de sustentación fue del 5.51%, y considerando una pérdida de 12.73% la masa máxima que podrá cargar la hélice será de 0.9637 kg, es decir, 9.454 N.

Una vez teniendo los datos definidos, se calcula la velocidad del aire que pasa a través de los alabes mediante la ecuación (8):

$$v_{\text{Aire}} = \sqrt[3]{\frac{2(194.67)}{(1.225)(0.05477)}} = 17.97 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (20)$$

Cálculos vs DFC

Además de comparar los resultados obtenidos contra los datos del fabricante, se realiza una simulación en ANSYS Fluent.

a) Estado estacionario

Se obtiene un residual del orden de 10^{-4} con 600 iteraciones. Se considera además que la simulación convergió al ser mínima la medición de la variación en velocidad en los cuatro puntos considerados, como se muestra en la figura 8.

Los valores finales obtenidos en cada punto son: Punto C = 12.971, Punto 1 = 18.855, Punto 2 = 19.509 y Punto 3 = 19.166, todos en m/s.

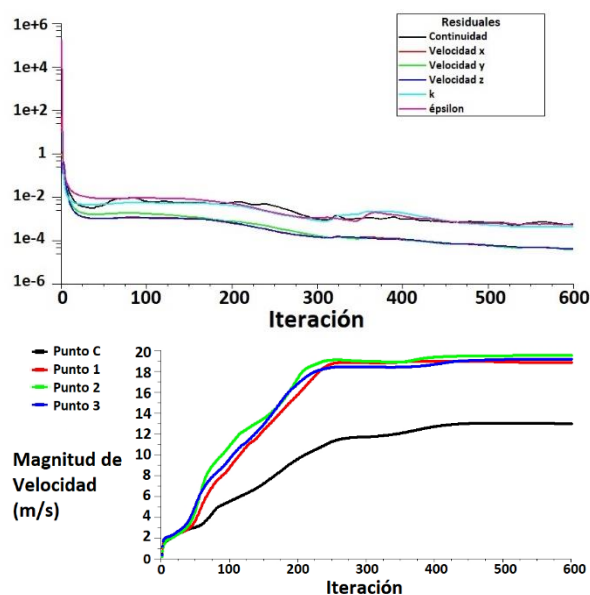


Figura 8 Residuales y medición de velocidad en puntos

Dentro de la pestaña de “Postprocesing” de Fluent se puede obtener la fuerza en sus componentes, y en el postprocesador “CFD Post” (dentro de ANSYS) se genera una representación de volumen para la velocidad. Estos datos se muestran en la figura 9.

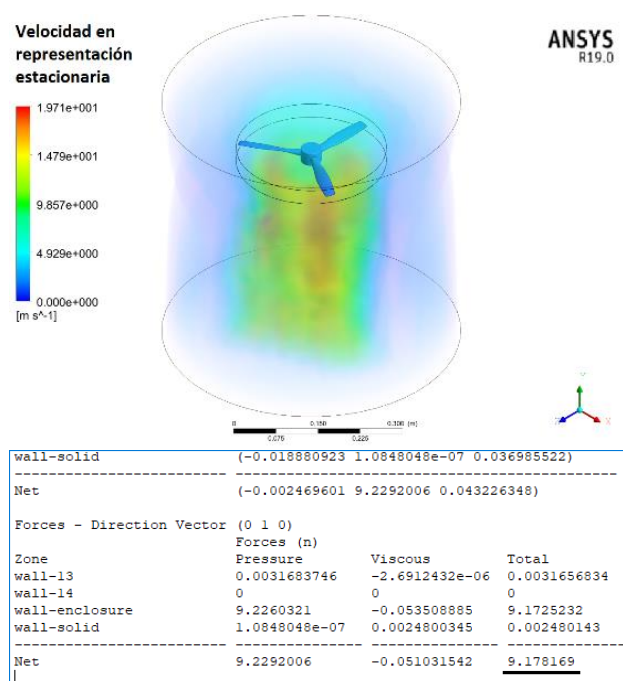


Figura 9 Representación en volumen de velocidad y fuerza en el componente y, análisis estacionario

La mayor magnitud de velocidad obtenida es de 19.71 m/s y una fuerza de sustentación de 9.178 N , en comparación con la velocidad de 17.97 m/s y la fuerza de sustentación de 9.454 N calculadas en la sección II.

Se puede observar una diferencia de 2.92% en la fuerza y de 9.68% con respecto del máximo valor obtenido en velocidad.

b) Estado transitorio

En estado transitorio se busca convergencia en cada paso de carga. Se simularon 24 vueltas a una velocidad de 9709 rpm, es decir, se consigue una vuelta cada 0.00618 s.

Se define el paso de tiempo en 0.000515 s para completar una vuelta en 12 pasos. Esto quiere decir que se necesitan 288 pasos de tiempo para simular las 24 vueltas en un tiempo de 0.14832 s, y se definen 25 iteraciones por cada paso de tiempo.

En la figura 10 se observa la evolución de la velocidad con respecto del tiempo, los valores finales para cada punto son: Punto C = 10.494, Punto 1 = 16.527, Punto 2 = 16.775 y Punto 3 = 16.776, todos en m/s .

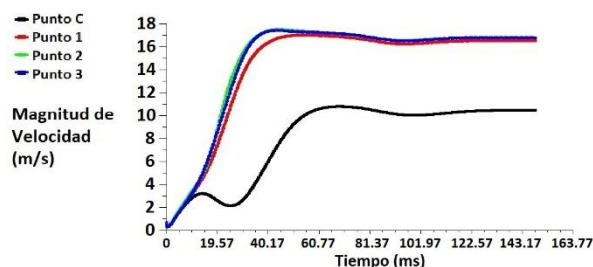


Figura 10 Medición de velocidad en puntos

De igual manera se puede encontrar el valor de la fuerza en ese último instante y en CFD Post la representación de volumen, pero en este caso se generó la información para cada paso de tiempo y por tanto se genera una animación.

En la figura 11 se puede observar la representación de volumen del último paso de tiempo y la fuerza de sustentación en ese instante.

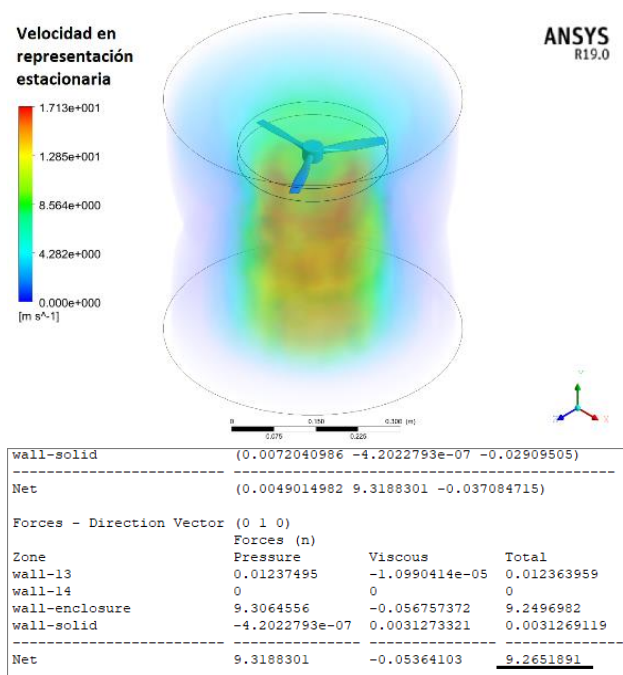


Figura 11 Representación en volumen de velocidad y fuerza en el componente y, análisis transitorio

La mayor magnitud de velocidad obtenida es de 17.13 m/s y una fuerza de sustentación de 9.265 N. Comparando estos resultados con los obtenidos en la sección II se tiene una diferencia de 2% en la fuerza y de 4.67% con respecto del máximo valor obtenido en velocidad.

Cuadro comparativo

Tomando en cuenta el margen de error, determinado en la sección II, los resultados obtenidos pueden resumirse en la tabla 1.

Dicho error puede traducirse como una constante de pérdidas aerodinámicas para futuros trabajos.

	Magnitud de velocidad (m/s)	Error (%)	Fuerza de sustentación (N)	Error (%)
Cálculos	17.97	-	9.454	-
DFC Estacionario	19.71	9.683	9.178	2.921
DFC Transitorio	17.13	4.674	9.265	2.001

Tabla 1 Cuadro comparativo de resultados

Se puede observar que el error en la magnitud de velocidad es apreciable mientras que en fuerza de sustentación la diferencia es mínima.

Sin embargo, en la figura 11 se nota un flujo más uniforme que en la figura 9 y, al ser un análisis transitorio, la exactitud es mayor debido a que se busca una convergencia para cada paso de tiempo y el paso de tiempo se considera pequeño. En la figura 10 se puede apreciar cómo es que la velocidad converge con el tiempo.

Control

Reemplazando valores y graficando la ecuación (16), permite ver el comportamiento del helicóptero, mostrado en la figura 12, sin ningún tipo de control de por medio.

$$x = \left(\sqrt[3]{\frac{(1.28)(0.0547)(194.67^2)}{16(0.874^3)}} - \frac{1}{2}(9.81) \right) t^2 \quad (21)$$

$$x = 1.03t^2$$

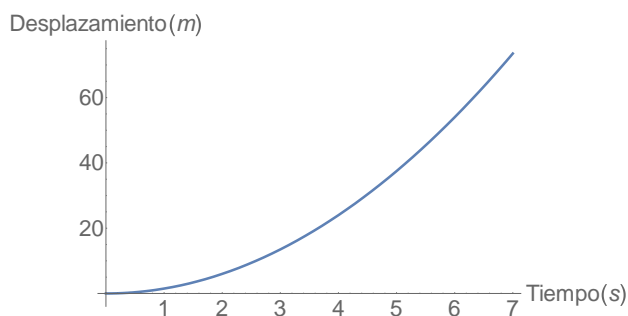


Figura 12 Desplazamiento sin control

Es claro que conforme el tiempo tienda a infinito, la distancia recorrida igualmente lo hará. Para implementar un control, se debe definir cuál es el comportamiento deseado. Se propone una curva de desplazamiento como la mostrada en la figura 13, y a partir de ésta se encuentran velocidad, aceleración y potencia requerida.

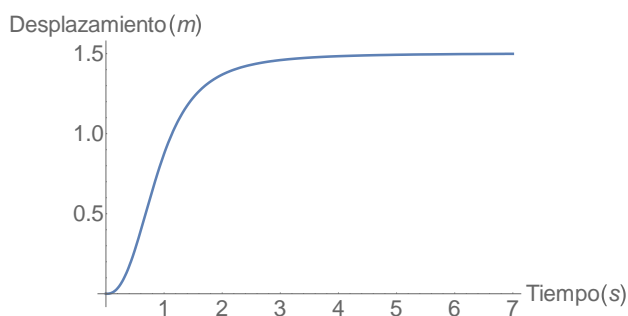


Figura 13 Desplazamiento con control

La ecuación que describe el comportamiento de la figura 13 es: $0.8743(1 + \frac{1}{t^3})^3 - 0.8743$, derivando con respecto a t se

obtiene: $0.8743(1 + \frac{1}{t^3})^3 (-\frac{3}{(1+\frac{1}{t^3})t} + 3t^2 \ln(1 + \frac{1}{t^3}))$. Derivando nuevamente:

$0.8743(1 + \frac{1}{t^3})^3 (-\frac{9}{(1+\frac{1}{t^3})^2 t^5} - \frac{6}{(1+\frac{1}{t^3})t^2} + 6\ln(1 + \frac{1}{t^3})) + 0.8743(1 + \frac{1}{t^3})^3 (-\frac{3}{(1+\frac{1}{t^3})t} +$

$3t^2 \ln(1 + \frac{1}{t^3}))^2$. Estas ecuaciones nos representan velocidad y aceleración con respecto del tiempo, las cuales se ilustran en las figuras 14 y 15.

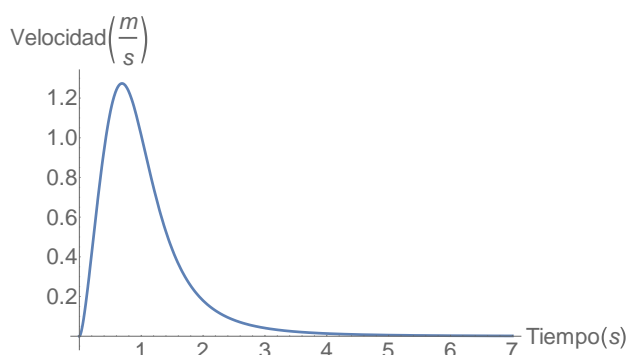


Figura 14 Velocidad Con Control

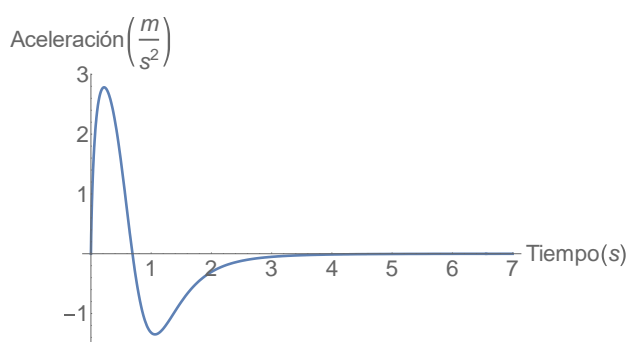


Figura 15 Aceleración Con Control

Ahora de la ecuación (14) se puede despejar W en función de la aceleración, y al graficar se obtiene al Figura 16. La expresión resultante al operar es bastante extensa, por lo que se procede a discretizar. En la figura 16 se observa una discretización en el dominio de 0 a 3.5, rango en donde aproximadamente se estabiliza el sistema. Usando el comando FIT del software Wolfram Mathematica se obtiene la siguiente función aproximada:

$$\begin{aligned} & -7795979.4' + 76038.7't + 972298.4't^2 \\ & -9598.2't^3 - 22354.7't^4 + 1425.3't^5 \quad (22) \\ & + 7796120.5'\text{Cos}(0.5t) - 75415.7'\text{Sin}(t) \end{aligned}$$

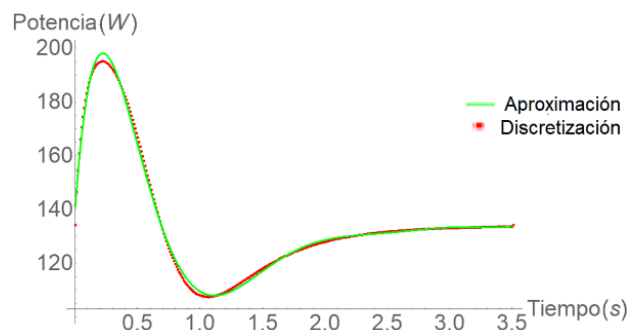


Figura 16 Aproximación vs Discretización

Para el control del sistema, se manipulará a través de una modulación por ancho de pulsos (PWM, por sus siglas en inglés). Sabiendo que la potencia máxima alcanzada por el motor es de 194.67 W, se dividirá por 1.9467 $W/\%$ y se obtendrá una gráfica del porcentaje suministrado por el PWM, como se muestra en la figura 17. Pasando de los 3.5 segundos, el PWM se mantendrá fijo para mantener el helicóptero en su posición.

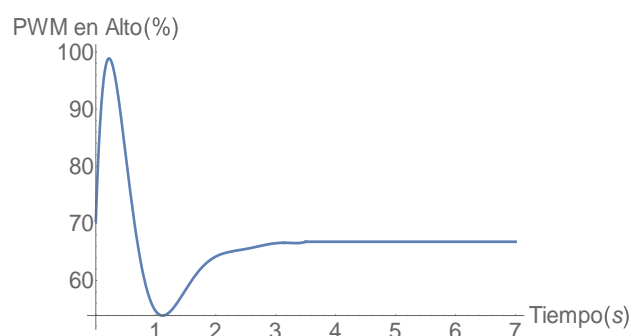


Figura 17 Porcentaje de tiempo en alto para PWM

Una vez definido el control, y por consecuente teniendo una definitiva curva de potencia suministrada, se encontrará la aceleración, velocidad y posición en ese orden. Con esta entrada de potencia el sistema no lineal no cuenta con solución exacta.

Debido a esto se resuelve numéricamente en Wolfram Mathematica mediante el comando NDSolve en un dominio de 0 a 3.5. En las figuras 18, 19 y 20 se observa el resultado obtenido contra lo propuesto.

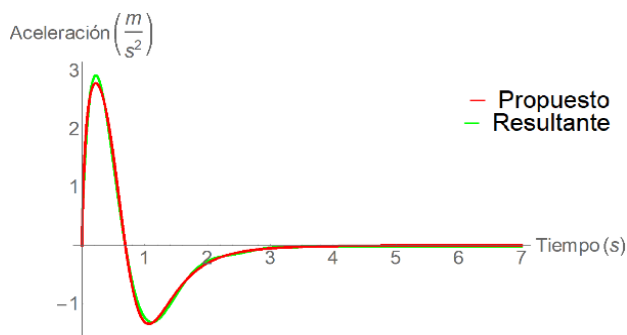


Figura 18 Comparativo Aceleración

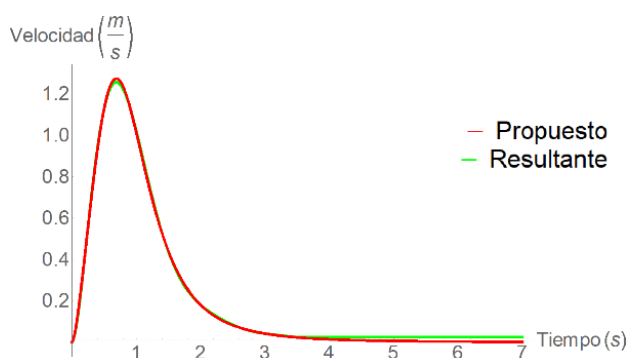


Figura 19 Comparativo Velocidad

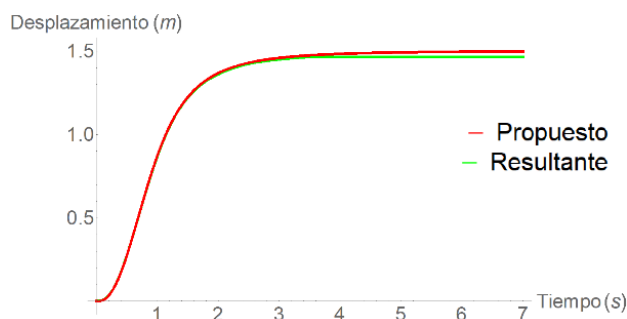


Figura 20 Comparativo Desplazamiento

Conclusiones

La fuerza de empuje de una hélice impresa en 3D ha sido obtenida mediante un planteamiento teórico y ha sido validada por una simulación CFD en ANSYS.

Para evitar el ascenso desmedido del helicóptero, se aplicó un control al motor por medio del ESC.

La ecuación diferencial resultante está en función de la potencia y finalmente, determinando un comportamiento de esta, se obtuvo el ascenso requerido. Al ser la función de potencia altamente compleja, se optó por crear una aproximación y encontrar la cinemática del helicóptero de forma numérica.

Por otra parte, se debe tener en cuenta que la geometría de los álabes no fue considerada a la hora del planteamiento analítico, dejando así la posibilidad de agregar un factor de pérdidas aerodinámicas que reduzca el error, además de acompañarlo de una prueba experimental. Finalmente, la fuerza de empuje ha sido determinada exitosamente, y a través de ésta se logra posicionar el helicóptero de manera eficaz en la forma prevista. Se puede así considerar los cálculos analíticos como una aproximación válida.

Referencias

Beer, F. P., Johnston, E. R., y Cornwell, P. J., (2010). *Mecánica Vectorial Para Ingenieros Dinámica*, Ciudad de México, México: Editorial McGraw-Hill.

Carrillo, J., Reynoso, G., Rodríguez G. D. C., y García M. A. (2015). Analysis of Bifurcation Parameters by Metric Representation Linearized of an Aeronautical System. *IEEE Latin America Transactions*, Vol. 13 No. 7, 2065-2070. DOI: 10.1109/TLA.2015.7273759

Curi, S., Mas, I., y Sánchez, R. (2014). Autonomus Fligth of a Comercial Quadrotor. *IEEE Latin America Transactions*, Vol. 12 No. 5, 853-858. DOI: 10.1109/TLA.2014.6872895

Guerrero, M. E., Lozano, R., y García, C. D. (2015). Control Basado en Pasividad para un Quadrotor UAV. *Congreso Nacional de Control Automático, AMCA 2015*, 81-86.

Ibañez, J., (sf). *Manual de mecánica teórica*, Pais Vasco, España: Editorial Argitalpen Zerbitzua.

Lara, B., Fagua, E., Salamanca, J., e Higuera, O. (2017). Diseño e implementación de un sistema de control de vuelo para un vehículo aéreo no tripulado tipo cuadricóptero. *Revista Tecnura*, Vol. 21 No. 53, 32-46. DOI: 10.14483/22487638.10256

Lencinas, J. D., Parodi, E., Van den Heede, B., y Heitzmann, L. (2016). Desarrollo y Contrucción de un vehículo Aéreo no Tripulado Aplicado a los Incendios Forestales. *3C Tecnología*, Vol. 5 No. 4, 27-35. DOI: <http://dx.doi.org/10.17993/3ctecno.2016.v5n4e20.27-35>

Ollero, A. y Maza I. (2007), Multiple Heterogeneous Unmanned Aerial Vehicules, Vol. 37/2007, Heidelberg Springer, Berlin.

Parra, M., Feitosa, E., y Alves, J. M. (2013). Modelamiento Matemático y control de un helicóptero de Cuatro Motores. Scientia et Technica Año XVIII, Vol. 18, No. 4, 672-781.

Reinoso, M., Minchala, L. I., Ortiz, J. P., Astudillo, D., y Verdugo, D. (2013). Trajectory Tracking of a Quadrotor Using Sliding Mode Control. IEEE Latin America Transactions, Vol. 14 No. 5, 2157-2166. DOI: 10.23919/ChiCC.2017.8028375

Rubio, J. J., Cruz, J. H. P., Zamudio, Z., y Salinas, A. J. (2014). Comparison of Two Quadrotor Dynamic Models. IEEE Latin America Transactions, Vol. 12 No. 4, 531-537. DOI: 10.1109/TLA.2014.6868851

Rubio, J. J., Zamudio, Z., Meda, J. A., y Moreno, M. A. (2015). Experimental Vision Regulation of a Quadrotor. IEEE Latin America Transactions, Vol. 13 No. 8, 2514-2523. DOI: 10.1109/TLA.2015.7331906

Tom Cat Park P450. Recuperado de <http://milehighrc.com/brushless%20TC%202816-940.html>

Wark, K., y Richards, D. E., (2001). Mecánica Vectorial Para Ingenieros Dinámica, Madrid, España: Editorial McGraw-Hill.