

Control Robusto \mathcal{H}_∞ en forma Global para Robot Manipulador**Global Robust Control \mathcal{H}_∞ for Robot Manipulator**

CHÁVEZ-GUZMÁN, Carlos†*, ESQUEDA-ELIZONDO, José, MERIDA-RUBIO, Jovan y COLORES-VARGAS, Juan Miguel

Universidad Autónoma de Baja California, Facultad de Ingeniería y Negocios

ID 1^{er} Autor: Carlos, Chávez-Guzmán / ORC ID: 0000-0002-2850-3676, CVU CONACYT ID: 94692

ID 1^{er} Coautor: José, Esqueda-Elizondo / ORC ID: 0000-0001-8710-8978, Researcher ID Thomson: I-2941-2017, CVU CONACYT ID: 90966

ID 2^{do} Coautor: Jovan, Merida-Rubio / ORC ID: 0000-0002-9355-4787, CVU CONACYT ID: 234759

ID 3^{er} Coautor: Juan Miguel, Colores-Vargas / ORC ID: 0000-0001-9336-2470, CVU CONACYT ID: 235164

DOI: 10.35429/JOES.2019.21.6.8.18

Recibido: 30 de Agosto, 2019; Aceptado 30 de Diciembre, 2019

Resumen

En este artículo se propone una solución al problema de control de movimiento \mathcal{H}_∞ en forma global, aplicado a robots manipuladores de l grados de libertad, completamente actuados, con articulaciones de tipo rotacional y sujeto a perturbaciones externas. La metodología empleada fué verificar la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs por medio de una función estricta de Lyapunov y establecer las condiciones suficientes bajo las cuales el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable en forma global mientras que el sistema perturbado tiene una ganancia \mathcal{L}_2 (espacio de Hilbert) menor o igual a una constante predeterminada. En la actualidad una de las desventajas del control \mathcal{H}_∞ , con respecto a otras técnicas de control, es la linealización del sistema alrededor de un punto de equilibrio, que convierte la desigualdad Hamilton-Jacobi-Isaacs en ecuaciones algebraicas de Riccati, que facilitan la solución del problema de control de movimiento \mathcal{H}_∞ , sin embargo, el controlador se vuelve local. La aportación es el diseño de un controlador robusto \mathcal{H}_∞ en forma global para resolver el problema de seguimiento de trayectorias en robots manipuladores. Se valida la teoría en un robot manipulador de ℓ grados de libertad.

Control robusto, Sistemas no lineales, Robot manipulador

Abstract

In this paper is proposed a solution to the tracking problem with robust \mathcal{H}_∞ global control, applied to robot manipulator completely actuated with rotational joint in presence of external disturbances. The Hamilton-Jacobi-Isaacs inequality is verified by a strict function of Lyapunov and enough conditions will be found under which the equilibrium point of the closed-loop system is asymptotically stable globally while the disturbed system has a gain \mathcal{L}_2 less than or equal to a predetermined constant. Currently, one of the disadvantages of the \mathcal{H}_∞ control, with respect to other control techniques, is the linearization of the system around a point of equilibrium, which converts the Hamilton-Jacobi-Isaacs inequality into algebraic of Riccati equations, which facilitate the solution to the motion control problem \mathcal{H}_∞ , however, the controller becomes local. Now, through a strict function of Lyapunov it was possible to verify that the Hamilton-Jacobi-Isaacs inequality is satisfied globally. The theory is validated in a robot manipulator with ℓ degree of freedom.

Robust control, Nonlinear systems, Manipulator robots

Citación: CHÁVEZ-GUZMÁN, Carlos, ESQUEDA-ELIZONDO, José, MERIDA-RUBIO, Jovan y COLORES-VARGAS, Juan Miguel. Control Robusto \mathcal{H}_∞ en forma Global para Robot Manipulador. Revista de Sistemas Experimentales. 2019. 6-21: 8-18

* Correspondencia del Autor (cchave@uabc.edu.mx)

† Investigador contribuyendo como primer autor.

Introducción

Desde hace varias décadas los procesos de manufactura han incrementado el uso de robots manipuladores en tareas cada vez más complejas, por consiguiente es imprescindible diseñar sistemas de control más sofisticados que mejoren la precisión y repetitividad en sus movimientos, por lo tanto es necesario minimizar los efectos inherentes a los sistemas mecánicos como el efecto de elasticidad en el acoplamiento mecánico entre el actuador y la articulación, la fricción, el juego angular entre los engranes, zona muerta provocado por el uso de engranajes, reductores *cyclo* y *Harmonic*, bandas dentadas, entre otros. Otros fenómenos que alteran el rendimiento de los sistemas de control son el ruido en las mediciones, las perturbaciones externas y las incertidumbres en el modelo.

Existen en la literatura excelentes trabajos que abordan estos problemas por separado, por ejemplo, en Arimoto (1996), Kelly y Santibañez (2005), Spong, Khorasani y Kokotovic (1987) y Spong y Vidyasagar (1989) donde se reportaron la síntesis de controladores que aseguran estabilidad asintótica en forma global para robots libre de perturbaciones.

En lo que concierne a los controladores robustos aplicados a robots manipuladores que operan bajo condiciones inciertas también se han investigado y reportado las condiciones de estabilidad asintótica en forma global y local en Orlov y Aguilar (2014), Utkin, Guldner y Shi (2009) y Sage, De Mathelin y Ostertag (1999).

Existen diversas metodologías que resuelven exitosamente los mencionados problemas que afectan a los robots, pero cada una trata las no linealidades mencionadas de manera diferente o independiente. Por ejemplo, el control adaptivo se usó para resolver el problema de regulación de posición en presencia de incertidumbre en los parámetros. El control por modos deslizantes en Utkin (1992) se ha usado con éxito cuando existen incertidumbres en los parámetros y para el rechazo a disturbios externos acoplados además de concluir estabilidad en tiempo finito, pero unos de sus inconvenientes es el efecto del *chattering* en la señal de control (Levant, 2010) y Utkin y Lee (2006).

El control \mathcal{H}_∞ se conoce por atenuar las perturbaciones acopladas y no acopladas, incluyendo el ruido, véase Acho, Orlov y Solis (2001), Ball, Helton y Walker (1993), Helton, James, 1999, Isidori y Astolfi (1992), Orlov y Aguilar (2014), Van der Schaft (1992) y Doyle, Glover y Khargonekar (1989) sin embargo en esas investigaciones se ha resuelto el problema de forma local. Para el caso global se debe resolver la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs que resulta en un problema de dimensiones infinitas Krstić y Deng (1998) y Subbotin (1995).

La estabilidad asintótica en forma global del punto de equilibrio para el problema de regulación de posición en un robot manipulador con compensación de fuerza gravitacional se ha demostrado en Kelly y Santibañez (2005) y Chung, Fu y Hsu (2008) y para ese mismo problema usando compensación de fuerza gravitacional con el control \mathcal{H}_∞ local se demostró en Orlov y Aguilar (2004). En Osuna, Montaña y Orlov (2015) extendieron el análisis de la ganancia \mathcal{L}_2 a sistemas mecánicos híbridos al resolver la desigualdad parcial de Hamilton-Jacobi en presencia de modos deslizantes y restricciones unilaterales y establecer las condiciones de estabilidad asintótica en forma global y garantizar que la ganancia \mathcal{L}_2 es menor que el nivel de atenuación del disturbio aplicado.

Respecto a los sistemas no lineales la dificultad de tratar con ecuaciones diferenciales parciales se puede evitar al resolver la ecuación diferencial o algebraica de Riccati para el modelo de la planta lineal para condiciones iniciales que se encuentren en una vecindad del punto de equilibrio lo que implica una solución local al problema del control \mathcal{H}_∞ no lineal (ver, e.g. Meza, Aguilar y Shiriaev, 2011, Orlov y Aguilar, 2004, Lukes, 1969 y Glad, 1987).

En este sentido el diseño de un regulador basado en un método numérico para solucionar la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs se propone en Aluyi (2003). Otro método numérico propuesto por Ferreira, Rocha y Sales (2008) consiste en reducir la ecuación de Hamilton-Jacobi-Isaacs en una secuencia infinita de ecuaciones diferenciales parciales lineales donde la solución se obtiene al aplicar el método de aproximación de Galerkin.

Soluciones con desigualdades matriciales lineales y no lineales en Boyd, Ghaoui, Feron y Balakrishnan (1994) y técnicas numéricas se han también propuesto para resolver el problema del control \mathcal{H}_∞ no lineal en Yim y Park (1999). Material adicional respecto a soluciones numéricas al problema del control \mathcal{H}_∞ no lineal se recomienda leer a Aluyi (2011) y Hardt, Helton y Kreutz (2000).

En este trabajo se propone una solución al problema del control de movimiento \mathcal{H}_∞ en forma global, aplicado a robots manipuladores completamente actuados con articulaciones de tipo rotacional y sujeto a perturbaciones externas. La hipótesis planteada es demostrar que la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs se cumple por medio de una función estricta de Lyapunov propuesta por Kelly, Santibáñez y Loria (2005), y establecer las condiciones suficientes bajo las cuales el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable en forma global mientras que el sistema perturbado tiene una ganancia \mathcal{L}_2 menor o igual a una constante predeterminada, esto permite diseñar el controlador robusto \mathcal{H}_∞ en forma global.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se proporciona el marco teórico del control \mathcal{H}_∞ no lineal para sistemas no lineales y variantes en el tiempo, la sección 3 se formula el problema de control de movimiento \mathcal{H}_∞ en forma global para robots manipuladores y se proporciona la condición de suficiencia para garantizar unicidad del punto de equilibrio, la sección 4 se proporciona el diseño del control de movimiento en forma global para robots manipuladores, la sección 5 se valida la teoría en un robot manipulador y la sección 6 se proporcionan las conclusiones.

Fundamentos teóricos

Teoría del control \mathcal{H}_∞ no lineal

El presente estudio se enfoca en los sistemas no lineales y variantes en el tiempo, modelados por las siguientes ecuaciones (Orlov y Aguilar, 2014):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + g_1(x, t)w(t) + g_2(x, t)u(t) \\ z &= h_1(x, t) + k_{12}(x, t)u(t), \\ y &= h_2(x, t) + k_{21}(x, t)w(t), \end{aligned} \right\} (1)$$

donde $t \in \mathbb{R}$ es el tiempo, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada de control, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ es el vector de disturbios desconocidos e incertidumbre en el modelo, $z(t) \in \mathbb{R}^s$ es el vector de la salida desconocida a ser controlada, y $y(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de salida disponibles para la medición del sistema. Se asume que el sistema (1) debe satisfacer las siguientes suposiciones:

Suposición 1 Las funciones vectoriales y matriciales

$f(t, x), g_1(t, x), g_2(t, x), h_1(t, x), h_2(t, x), k_{12}(t, x), k_{21}(t, x)$ se suponen continuas en t , continuamente diferenciables en x y de dimensiones apropiadas.

Suposición 2 $f(t, 0) = 0, h_1(t, 0) = 0, h_2(t, 0) = 0$ para toda t .

Suposición 3 $h_1^T(t, x)k_{12}(t, x) = 0, k_{12}^T(t, x)k_{12}(t, x) = I, k_{21}(t, x)g_1^T(t, x) = 0, k_{21}(t, x)k_{21}^T(t, x) = I$ se debe satisfacer para toda x y toda t .

La *suposición 1* garantiza que las dinámicas del sistema estén bien posicionadas, mientras el sistema es excitado con entradas exógenas. La *Suposición 2* asegura que el origen sea el único punto de equilibrio en ausencia de entradas ($u(t) = 0$) y disturbios ($w(t) = 0$) para el sistema dinámico (1). La *suposición 3* está relacionada con ventajas numéricas consideradas por el problema estándar del control \mathcal{H}_∞ .

La ley de control por retroalimentación de estados se define de la forma:

$$u(t) = K(t, x), \quad (2)$$

la cual se considera un controlador admisible en forma global por retroalimentación de estados, si el sistema en lazo cerrado (1) y (2) es asintóticamente estable en forma global siempre y cuando $w = 0$, y para un valor de $\gamma > 0$ dado la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema en lazo cerrado (1) y (2) es menor que γ si la respuesta de $z(t)$, resultante de $w(t)$ para cualquier estado inicial $x(t_0) = 0$ se satisface con la siguiente desigualdad:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|w(t)\|^2 dt, \quad (3)$$

para toda $t_1 > t_0$ y toda función continua a tramos $w(t)$.

Solución global

A continuación, se presenta la hipótesis bajo la cual se da la solución global al problema de control \mathcal{H}_∞ .

Hipótesis 1 (Orlov y Aguilar, 2014). Existe una función definida positiva $F(x)$ y una función suave definida positiva $V(t, x)$ tal que la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs (Orlov y Aguilar, 2014):

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) + \gamma^2 \alpha_1^T(t, x) \alpha_1(t, x) - \alpha_2^T(t, x) \alpha_2(t, x) + h_1^T(t, x) h_1(t, x) + F(x) \leq 0 \quad (4)$$

Se cumple, con:

$$\alpha_1(t, x) = \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T(t, x) \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T, \quad (5)$$

$$\alpha_2(t, x) = \frac{1}{2} g_2^T(t, x) \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T. \quad (6)$$

Con la *hipótesis 1* satisfecha, una solución del problema de control \mathcal{H}_∞ es postulado como sigue:

Teorema 1 (Orlov y Aguilar, 2014). Suponer que la *hipótesis 1* se cumple, entonces el problema de control no lineal \mathcal{H}_∞ para el sistema no lineal (1) se resuelve a través de la ley de control por retroalimentación de estados:

$$u(t) = \alpha_2(t, x), \quad (7)$$

con la *hipótesis 1* y el *teorema 1* declarados se tienen las bases para resolver el problema del control no lineal \mathcal{H}_∞ para robots manipuladores.

Modelado dinámico de robots manipuladores

Tomado de Kelly et al., (2005), el modelo dinámico del robot se obtiene por medio de la ecuación de movimiento de Lagrange o ecuación de movimiento de Euler-Lagrange, que se define como sigue:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau(t), \quad (8)$$

donde $q(t) \in \mathbb{R}^l$ es el vector de posiciones articulares, $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}^l$ es el vector de velocidades articulares, $\tau(t) \in \mathbb{R}^l$ es el vector de fuerzas y pares aplicados a las articulaciones, $t \in \mathbb{R}$ es el tiempo, y el Lagrangeano se define como:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q, \dot{q}), \quad (7)$$

donde $K \in \mathbb{R}^l$ es el vector de energía cinética y $U \in \mathbb{R}^l$ es el vector de energía potencial.

Al desarrollar las ecuaciones (8) y (9) se obtiene el siguiente modelo matemático compacto (Spong y Vidyasagar, 1989) del robot manipulador con enlaces rígidos y articulaciones rotacionales de l grados de libertad:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau(t) + w_m(t), \quad (10)$$

donde $M(q) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $g(q) \in \mathbb{R}^l$ es el vector de pares gravitacionales y $w_m(t) \in \mathbb{R}^l$ son perturbaciones admisibles acopladas que pertenecen al espacio \mathcal{L}_2 .

Se supone que las posiciones y las velocidades articulares se pueden medir. Las siguientes propiedades, tomadas de Spong y Vidyasagar (1989), son válidas solo para los sistemas mecánicos bajo consideración:

Propiedad 1 La matriz de inercia $M(q)$ es simétrica y definida positiva para toda $q(t)$. La matriz $M^{-1}(q)$ existe y es definida positiva para toda $q(t)$ también.

Propiedad 2 La matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(q, \dot{q})$ y la derivada temporal $\dot{M}(q)$ de la matriz de inercia satisface:

$$\dot{q}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} = 0, \quad (11)$$

para toda q y \dot{q} .

Propiedad 3 Existe una constante positiva K_{c1} tal que para toda $x, y, z \in \mathbb{R}^l$

$$\|C(x, y)z\| \leq K_{c1} \|y\| \|z\|. \quad (12)$$

Parámetros del robot Pegasus

El modelo dinámico del robot manipulador Pegasus de tres grados de libertad con articulaciones rotacionales y con el sistema de transmisión basado en un tornillo sinfín, una helicoidal y una cadena para las articulaciones q_1, q_2, q_3 , respectivamente y con los actuadores conectados a las transmisiones con motores equipados con su propia transmisión reductora con una resolución de 19.7:1 para q_1, q_2 y 127.8:1 para q_3 (ver figura 1) sus dinámicas son gobernadas por la ecuación (8).

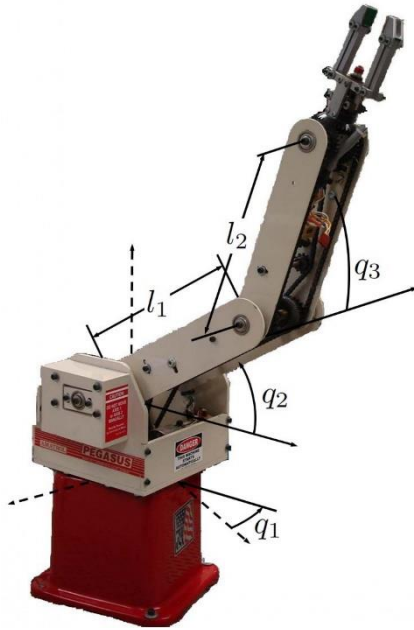


Figura 1 Robot manipulador de tres grados de libertad
Fuente: Elaboración Propia

Se definen los parámetros del robot Pegasus:

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11}(q) & 0 & 0 \\ 0 & m_{22}(q) & m_{23}(q) \\ 0 & m_{23}(q) & m_{33}(q) \end{bmatrix},$$

con:

$$\begin{aligned} m_{11}(q) &= m_2 l_1^2 \cos^2(q_2) + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) \cos(q_2 + q_3) + m_2 l_2^2 \cos^2(q_2 + q_3) + m_1 l_1^2 \cos^2(q_2) + I_1, \\ m_{22}(q) &= m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) + m_2 l_2^2 + I_2 + I_3, \\ m_{23}(q) &= m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) + m_2 l_2^2 + I_3, \\ m_{33}(q) &= m_2 l_2^2 + I_3, \end{aligned}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{11}(q, \dot{q}) & c_{12}(q, \dot{q}) & c_{13}(q, \dot{q}) \\ c_{21}(q, \dot{q}) & c_{22}(q, \dot{q}) & c_{23}(q, \dot{q}) \\ c_{31}(q, \dot{q}) & c_{32}(q, \dot{q}) & 0 \end{bmatrix},$$

con:

$$\begin{aligned} c_{11}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 S_2 C_{23} \dot{q}_2 - m_1 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 C_2 S_{23} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_2 l_2^2 S_{23} C_{23} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3), \\ c_{12}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_1 - m_2 l_1 l_2 S_{23} C_2 \dot{q}_1 - m_2 l_2^2 S_{23} C_{23} \dot{q}_1 - m_2 l_1 l_2 C_{23} S_2 \dot{q}_1 - m_1 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_1, \\ c_{13}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_2 S_{23} C_2 \dot{q}_1 - m_2 l_2^2 S_{23} C_{23} \dot{q}_1, \\ c_{21}(q, \dot{q}) &= m_2 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 S_{23} C_2 \dot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 S_2 C_{23} \dot{q}_1 + m_2 l_2^2 S_{23} C_{23} \dot{q}_1, \\ c_{22}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_2 S_2 \dot{q}_3, \\ c_{23}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_2 S_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3), \\ c_{31}(q, \dot{q}) &= m_2 l_1 l_2 S_{23} C_2 \dot{q}_1 + m_2 l_2^2 S_{23} C_{23} \dot{q}_1, \\ c_{32}(q, \dot{q}) &= m_2 l_1 l_2 S_3 \dot{q}_2, \end{aligned}$$

donde $S_i = \sin(q_i)$, $C_i = \cos(q_i)$, $S_{ij} = \sin(q_i + q_j)$, $C_{ij} = \cos(q_i + q_j)$; y finalmente

$$G(q) = g \begin{bmatrix} 0 \\ g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix},$$

con:

$$\begin{aligned} g_1(q) &= m_1 l_1 \cos(q_2) + m_2 l_1 \cos(q_2) + m_2 l_2 \cos(q_2 + q_3), \\ g_2(q) &= m_2 l_2 \cos(q_2 + q_3), \end{aligned}$$

los parámetros $m_i, l_i, i = 1, 2$ y $I_j, j = 1, 2, 3$ son dados en la tabla I.

Las perturbaciones acopladas consideradas son incertidumbre del modelo, variación en los parámetros, fricción del modelo dinámico del robot Pegasus.

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Longitud eslabón 1	l_1	0.297	m
Longitud eslabón 2	l_2	0.297	m
Masa eslabón 1	m_1	0.38	Kg
Masa eslabón 2	m_2	0.34	Kg
Inercia 1	I_1	0.243×10^{-3}	Kgm^2
Inercia 2	I_2	0.068×10^{-3}	Kgm^2
Inercia 3	I_3	0.015×10^{-3}	Kgm^2
Constante gravitacional	g	9.8	m/s^2

Tabla 1 Parámetros del robot Pegasus
Fuente: Elaboración Propia

Formulación del problema

Sea el sistema dinámico definido en (10) para el cual se propone el siguiente objetivo de control.

Objetivo de control

El problema de control de movimiento de la clase de robots manipuladores bajo estudio se formula de la siguiente manera: dada la ecuación dinámica y dado un conjunto de funciones vectoriales acotadas $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$ y $\ddot{q}_d(t)$ referidas como posiciones, velocidades y aceleraciones articulares deseadas respectivamente, encontrar la entrada de control $\tau(t)$, de tal forma que las posiciones $q(t)$ asociadas a las coordenadas articulares del robot sigan con precisión a $q_d(t)$, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|q(t) - q_d(t)\| = 0, \quad (14)$$

para una condición arbitraria $q(0)$ en presencia de disturbios externos.

Proposición 1 Se propone el siguiente controlador por pre-compensación, de la forma: (15)

$$\tau(t) = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + g(q_d) - K_p x_1 - K_v x_2 + u(t),$$

donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{l \times l}$ son matrices simétricas y definidas positivas, que llevan al robot manipulador a la posición deseada, la estructura del controlador también utiliza la dinámica del robot manipulador evaluada en el movimiento deseado y por último un atenuador de disturbios $u(t)$ de finido en (5).

Se define el vector de error de posición y el vector de error de velocidad como $x_1(t) = q(t) - q_d(t)$ y $x_2(t) = \dot{q}(t) - \dot{q}_d(t)$, respectivamente.

La representación del sistema en lazo cerrado (10) y (15), en términos del error $x = [x_1 \ x_2]^T$, es dado por: (16)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= M^{-1}(x_1 + q_d)[h_1(t, x) - h_2(t, x) + u + w_m], \end{aligned}$$

donde $w_m(t)$ es la perturbación acoplada, $h_1(t, x) = -C(x_1 + q_d, x_2 + \dot{q}_d)x_2 - K_p x_1 - K_v x_2$ y la dinámica residual se define como: $h_2(t, x) = [M(x_1 + q_d) - M(q_d)]\ddot{q}_d + [C(x_1 + q_d, x_2 + \dot{q}_d)]\dot{q}_d + g(x_1 + q_d) - g(q_d)$.

Propiedad 4 La norma de la dinámica residual satisface:

$$\|h(t, x)\| \leq K_{h1}\|x_2\| + K_{h2}\|\tanh(x_1)\|,$$

donde $\tanh(x) = [\tanh(x_1), \dots, \tanh(x_n)]^T$, con $\tanh(x) := \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}}$, K_{h1} y K_{h2} satisfacen:

$$\begin{aligned} K_{h1} &\geq K_{c1}\|\dot{q}_d\|_{\infty}, \\ K_{h2} &\geq \frac{\sigma_2}{\tanh\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)}, \end{aligned}$$

donde $\sigma_1 = K_g + K_M\|\ddot{q}_d\|_{\infty} + K_{c1}\|\dot{q}_d\|_{\infty}^2$, $\sigma_2 = 2[K' + K'_M\|\ddot{q}_d\|_{\infty} + K_{c1}\|\dot{q}_d\|_{\infty}^2]$,

se supone que las cotas máximas de las normas de velocidad y aceleración deseada ($\|\dot{q}_d\|_{\infty}, \|\ddot{q}_d\|_{\infty}$) se conocen.

Para la representación en espacios de estados del sistema en lazo cerrado (16) en la forma estándar de la estructura del control \mathcal{H}_{∞} dada en (1) es conveniente definir las salidas del sistema, por lo tanto, las mediciones del vector de posición y del vector de velocidad, están disponibles, es decir

$$y(t) = x(t) + w_y(t), \quad (17)$$

son corrompidas por ruido en los sensores $w_y(t) \in \mathbb{R}^n$. La salida objetivo a ser controlada se propone, como:

$$z(t) = [u(t) \ \rho \tanh(x_1) \ \rho x_2]^T, \quad (18)$$

con la constante ρ es positiva. Finalmente, la representación en espacio de estados es de la forma:

$$f(t, x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(t, x) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

con $f_2(t, x) = M^{-1}(x_1 + q_d)[-C(x_1 + q_d, x_2 + \dot{q}_d)x_2 - K_p x_1 - K_v x_2 - h(t, x)]$,

$$g_1(t, x) = \begin{bmatrix} 0_l & 0_{(l \times n)} \\ M^{-1}(x_1 + q_d) & 0_{(l \times n)} \end{bmatrix},$$

$$g_2(t, x) = \begin{bmatrix} 0_l \\ M^{-1}(x_1 + q_d) \end{bmatrix}, \quad h_1(t, x) = \begin{bmatrix} 0_l \\ \rho \tanh(x_1) \end{bmatrix}, \quad h_2(t, x) = x(t), \quad k_{12}(t, x) = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0_{(n \times l)} \end{bmatrix}, \quad k_{21}(t, x) = [I_l \quad 0_{(n \times l)}],$$

donde la matriz $0_{(n \times m)}$ se refiere a la matriz ceros de $\dim(n \times m)$ y el vector de perturbaciones se define como $w = [w_m \quad w_y]^T$.

Punto de equilibrio

Tomado de Kelly et al., (2005), se utiliza el teorema de contracción de mapas para determinar bajo que condición el origen es el único punto de equilibrio de la función $f(t, x)$ en el sistema en lazo cerrado (15) libre de perturbaciones y con $u(t) = 0$. Los puntos de equilibrios son vectores constantes $[x_1 \quad x_2]^T = [x_1^* \quad 0]^T$, $x_1^* \in \mathbb{R}^l$, donde x_1^* es una solución de la siguiente ecuación

$$K_p x_1^* + h(t, x_1^*, 0) = 0, \quad (20)$$

con $x_1^* = 0$ es una solución (solución trivial) que satisface la ecuación anterior, pero puede haber otras soluciones para el vector x_1^* dependiendo de los valores que tome la matriz K_p .

A continuación, se define la función

$$\eta(x_1^*) = K_p^{-1} h(t, x_1^*, 0), \vartheta, \varphi \in \mathbb{R}^l \quad (21)$$

Se analiza la condición de Lipschitz a la ecuación anterior, se sustituye la dinámica residual y se aplican las propiedades 1 a la 4, obtenemos:

$$\|\eta(\varphi) - \eta(\vartheta)\| \leq \frac{K_M \|\dot{q}_d\|_\infty - K_{c2} \|\dot{q}_d\|_\infty^2 + K_g}{\lambda_{\min}(K_p)} \|\varphi - \vartheta\|. \quad (22)$$

La constante de Lipschitz en (22) debe ser menor que uno para garantizar unicidad del punto de equilibrio, y por el teorema de contracción de mapas, tenemos que si la siguiente desigualdad

$$\lambda_{\min}(K_p) > K_M \|\dot{q}_d\|_\infty + K_{c2} \|\dot{q}_d\|_\infty^2 + K_g, \quad (23)$$

se satisface, entonces el origen es el único punto de equilibrio.

Análisis y diseño del regulador de movimiento global \mathcal{H}_∞

Para diseñar el regulador de movimiento global \mathcal{H}_∞ es necesario postular el siguiente teorema:

Teorema 2 Considérese las siguientes funciones:

$$V(t, x) = \frac{1}{2} x_1^T K_p x_1 + \frac{1}{2} x_2^T M(x_1 + q_d) x_2 + \beta \tanh(x_1)^T M(x_1 + q_d) x_2, \quad \beta > 0$$

$$F(x) = \epsilon \tanh(x_1)^T \tanh(x_1) + \epsilon x_2^T x_2$$

donde $V(x)$ será definida positiva para toda $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y para alguna $\beta > 0$ si la desigualdad:

$$\lambda_{\min}(K_p) > \frac{\beta^2 \lambda_{\max}^2(M)}{\lambda_{\min}(M)}, \quad (25)$$

se cumple, entonces la hipótesis se satisface si:

$$\lambda_{\min}(K_v) > K_{h1} + \beta(b - \rho^2 - \epsilon), \quad (26)$$

$$\lambda_{\max}(K_p) > \beta^2 \lambda_{\max}(M),$$

$$K_{h2} - \rho^2 - \epsilon > \lambda_{\min}(K_v) > \left(\frac{(a + \frac{1}{2} K_{h2})^2}{\frac{1}{\beta} (\lambda_{\min}(K_v) - K_{h1}) - b + \rho^2 + \epsilon} + K_{h2} - \rho^2 - \epsilon \right),$$

donde $a = \frac{1}{2} (\lambda_{\max}(K_v) + K_{c1} \|\dot{q}_d\|_\infty + K_{h1})$ y $b = \lambda_{\max}(M) + \sqrt{n} K_{c1}$ y $\epsilon > 0$ es una constante suficientemente pequeña.

Se cumplen.

Demostración. La desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs se separa para su análisis en dos partes:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$$

$$\text{donde}$$

$$\mathcal{H}_1 = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) + h_1^T(t, x) h_1(t, x) + F(x)$$

$$\mathcal{H}_2 = \gamma^2 \alpha_1^T(t, x) \alpha_1(t, x) - \alpha_2^T(t, x) \alpha_2(t, x)$$

Tenemos a \mathcal{H}_1 como:

$$\mathcal{H}_1 = -x_2^T K_v x_2 - x_2^T h(t, x) + \beta x_2^T M(x_1 + q_d) \text{sech}^2(x_1) x_2 + \beta \tanh^T(x_1) C(x_1 + q_d, x_2 + \dot{q}_d)^T x_2 - \beta \tanh^T(x_1) K_p x_1 - \beta \tanh^T(x_1) K_v x_2 - \beta \tanh^T(x_1) h(t, x) +$$

$$\rho^2 \tanh^T(x_1) \tanh(x_1) + \rho^2 x_2^T x_2 + \epsilon \tanh^T(x_1) \tanh(x_1) + \epsilon x_2^T x_2.$$

Aplicando las propiedades 1 - 4 en la ecuación anterior y representarlo en su forma matricial, se obtiene la siguiente expresión:

(27)

$$\mathcal{H}_1 < -\beta \begin{bmatrix} \|\tanh(x_1)\| \\ \|x_2\| \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} \|\tanh(x_1)\| \\ \|x_2\| \end{bmatrix},$$

donde:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{111} & -a - \frac{1}{2\beta} K_{h2} \\ -a - \frac{1}{2\beta} K_{h2} & q_{122} \end{bmatrix},$$

$$\text{y } q_{111} = \lambda_{\min}(K_p) - K_{h2} + \rho^2 + \epsilon,$$

$$q_{122} = \frac{1}{\beta} (\lambda_{\min}(K_v) - K_{h1}) - b + \rho^2 + \epsilon.$$

Si los elementos de las matrices K_p, K_v son seleccionados apropiadamente, de acuerdo con las siguientes desigualdades:

$$\lambda_{\min}(K_v) > K_{h1} + \beta(b - \rho^2 - \epsilon)$$

$$\lambda_{\min}(K_p) > K_{h2} - \rho^2 - \epsilon$$

$$\lambda_{\min}(K_p) > \left(\frac{(a + \frac{1}{2\beta} K_{h2})^2}{\frac{1}{\beta} (\lambda_{\min}(K_v) - K_{h1}) - b + \rho^2 + \epsilon} + K_{h2} - \rho^2 - \epsilon \right)$$

Entonces Q_1 será una matriz definida positiva para toda $q(t) \in \mathbb{R}^l$, esta condición es necesaria y suficiente para asegurar que (27) es una función definida negativa.

Para desarrollar \mathcal{H}_2 es necesario obtener las funciones $\alpha_1(t, x)$ y $\alpha_2(t, x)$ de las ecuaciones (5) y (6) utilizando el gradiente de la función de Lyapunov y sustituyendo el resultado en \mathcal{H}_2 se tiene que:

$$\mathcal{H}_2 = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\gamma^2}\right) x_2^T x_2 - \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2\gamma^2}\right) x_2^T \tanh(x_1) - \left(\frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{4\gamma^2}\right) \tanh^T(x_1) \tanh(x_1),$$

al aplicar las propiedades 1-4 y representarla en su forma matricial, obtenemos:

(28)

$$\mathcal{H}_2 \leq -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \begin{bmatrix} \|\tanh(x_1)\| \\ \|x_2\| \end{bmatrix}^T Q_2 \begin{bmatrix} \|\tanh(x_1)\| \\ \|x_2\| \end{bmatrix},$$

$$\text{con } Q_2 = \begin{bmatrix} \beta^2 & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix}.$$

Al seleccionar constantes $\gamma > 1$, $\beta > 0$ entonces la matriz Q_2 es semidefinida positiva, esto es una condición suficiente para garantizar que la función (28) es semidefinida negativa. La desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs es definida negativa si $\lambda_{\min}(Q_1) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \lambda_{\min}(Q_2) > 0$ se satisface. ■

Una vez satisfecha la hipótesis se postula el siguiente teorema para la solución al problema de control \mathcal{H}_∞ en forma global.

Teorema 3. En base al teorema 1 el problema de control no lineal \mathcal{H}_∞ para el sistema no lineal (17) a la (19) se resuelve a través de la ley de control por retroalimentación de estados:

$$u(t, x) = -\frac{1}{2} (\beta \tanh(x_1) + x_2), \quad (29)$$

estabiliza asintóticamente el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (17) a la (19) y (29) libre de perturbaciones y asegura que la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema en lazo cerrado (17) a la (19) y (29) para $w \neq 0$ sea menor que γ .

En la tabla 2 se muestran los parámetros del robot manipulador para el diseño del controlador.

Parámetros	Valor	Unidad
K_{c1}	2.2229	Kgm^2
K_{c2}	33.152	Kgm^2
K_M	2.1594	Kgm^2
K_g	18.511	Kgm^2
K'	3.0852	Kgm^2
K'_M	0.9224	Kgm^2
K_{h1}	8.3489	Kgm^2
K_{h2}	509.19	Kgm^2
$\lambda_{MAX}(M)$	0.9224	Kgm^2
$\lambda_{min}(M)$	0.243×10^{-3}	Kgm^2

Tabla 2 Parámetros del robot Pegasus involucradas en el diseño del controlador

Fuente: Elaboración Propia

Resultados

El experimento del regulador de movimiento se realizó en un robot manipulador (ver figura 1) marca AMATROL®. El brazo manipulador es requerido para que se desplace de la posición inicial $q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0$ rad y siga las trayectorias generadas por las siguientes funciones:

$$q_{d1} = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2t^3}) + \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2t^3})\sin(0.0006\pi t), \quad q_{d2} = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2t^3}) + \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2t^3})\sin(0.0004\pi t), \quad \text{y} \quad q_{d3} = \frac{\pi}{8}(1 - e^{-2t^3}) + \frac{\pi}{8}(1 - e^{-2t^3})\sin(0.0002\pi t),$$

con las condiciones iniciales para el vector de velocidad en $\dot{q}(0) \in \mathbb{R}^3$ igual a cero, se desarrolla la primera y segunda derivada temporal de la señal $q_d(t)$ y se obtienen sus respectivas normas $\|\dot{q}_d\|_\infty = 3$ y $\|\ddot{q}_d\|_\infty = 5.31$.

Las ganancias de las matrices de posición y velocidad propuestas son:

$$K_p = \text{diag}\{1689.6, 1685.6, 1684.6\}$$

$$K_v = \text{diag}\{5.9546, 4.9576, 3.9546\}$$

y los parámetros de diseño del control \mathcal{H}_∞ son: $\rho = 0.1, \beta = 1.1, \epsilon = 0.01$.

El objetivo de control (10) se satisface con el controlador propuesto como se observa en la figura 2-(a), sin embargo, la respuesta del sistema en lazo cerrado (ver figura 2-(a)) presenta un corrimiento para las articulaciones $q_1(t), q_2(t)$ de aproximadamente 4.5s, este fenómeno se debe a la alta relación de engranes que compone la transmisión de la planta y que no fueron consideradas en el modelo matemático del robot. La respuesta de $q_3(t)$ presenta una respuesta más rápida en comparación con las otras dos articulaciones esto se debe a la relación de la transmisión, la cual es menor a las otras dos.

En lo que respecta al experimento se observa (ver figura 2-(b)) que el vector de par aplicado en las articulaciones presenta ganancias altas en $q_1(t), q_2(t)$, con picos de 2500N-m, resultado de la ganancia elevada de la matriz K_p y sobre todo a la relación de vueltas en la transmisión acoplada a dichas articulaciones, en $\tau_3(t)$ se presenta un pico de par aplicado de 500N-m, la razón de esta cantidad de par aplicado es la baja relación de la transmisión entre el actuador y la articulación respecto a las otras dos articulaciones.

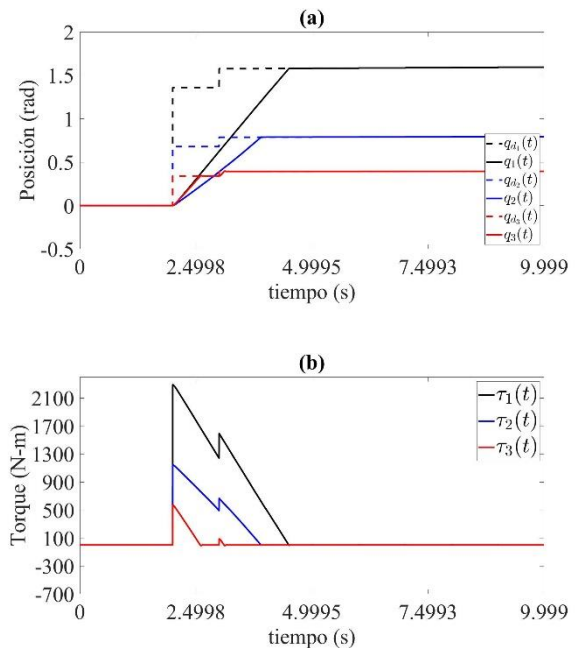


Figura 2 Resultados Experimentales del rendimiento del sistema en lazo cerrado con el regulador de movimiento global \mathcal{H}_∞ (4.3.2), donde a) es la posición articular $q(t)$, b) es el par aplicado $\tau(t)$

Fuente: *Elaboración Propia*

Conclusiones

En esta investigación se comprobó que la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs para el problema del control \mathcal{H}_∞ en sistemas no lineales y variantes en el tiempo y restringido al caso particular del problema de seguimiento de trayectorias aplicado a un sistema Euler-Lagrange completamente actuado y con articulaciones de tipo rotacional se satisface con las funciones $(V(x, t)$ y $F(x))$ propuestas. Para este fin se propuso un controlador PD con pre-compensación en combinación con un controlador \mathcal{H}_∞ .

La verificación de la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs para el control \mathcal{H}_∞ , fué posible gracias a la función estricta de Lyapunov Kelly et al. (2005), a la función definida positiva $F(x)$ y por último al diseño apropiado de la función definida positiva $h_1(x) = [0 \quad \rho \tanh(x_1) \quad \rho x_2]^T$ que ayudaron en el diseño del control \mathcal{H}_∞ , una aportación interesante surge de esta última función, porque de ella se desprende la salida objetivo a ser controlada y es la primera vez que se propone saturando uno de los estados de la planta con la función $\tanh(x)$. La finalidad de saturar el estado x_1 en la salida objetivo fué para demostrar que la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs fuera definida negativa, lo que resultó en un control \mathcal{H}_∞ saturado en el estado x_1 .

Respeto a la ganancia del controlador se observó que los valores de los parámetros involucrados con la ganancia residual son directamente proporcionales en la ganancia de la matriz K_p y por obvias razones influye en el comportamiento del sistema en lazo cerrado.

Referencias

- Arimoto, S. (1996). *Control Theory of Non-Linear Mechanical Systems: A Passivity-Based and Circuit-Theoretic Approach*. Nueva York, Estados Unidos de Norte América: Editorial Oxford University.
- Acho, L., Orlov Y. y Solis, V. (2001). Non-Linear measurement feedback \mathcal{H}_∞ -control of time-periodic systems with application to tracking control of robot manipulators. *International Journal of Control*, vol. 74 (2), 190-198.
- Aliyu, M. D. S. (2003). An approach for solving the Hamilton-Jacobi-Isaacs equation (HJIE) in nonlinear \mathcal{H}_∞ control. *Automatica*, Vol. 39 (5), 877-884.
- Aliyu, M. D. S. (2011). *Nonlinear \mathcal{H}_∞ Control, Hamiltonian Systems, and Hamilton Jacobi Equations*. Montreal, Canada: Editorial CRC.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. y Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Filadelfia, Estados Unidos de Norte América: Editorial SIAM.
- Ball, J., Helton, J. y Walker, M. (1993). \mathcal{H}_∞ control for nonlinear systems with output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38 (4), 546-559.
- Castaño, F. y Fridman, L. (2006). Analysis and Design of Integral Manifolds for Systems with Unmatched Perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51 (5), 853-858.
- Chung, W., Fu, L. y Hsu, S. (2008). *Handbook of Robotics: Motion Control*. Londres, Inglaterra: Editorial Springer.
- Ud Din, S., Khan, Q., ur Rehman, F. y Akmeliawati, R. (2016). Robust control of underactuated systems: higher order integral sliding mode approach. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2016. doi:10.1155/2016/5641478.
- Doyle, C., Glover, K., Khargonekar, P. y Francis, B. (1989). State-space solution to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34 (8), 831-847.
- Ferreira, H., Rocha, P. y Sales, R. (2008). Galerkin method and weight function applied to nonlinear \mathcal{H}_∞ control with output feedback, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 16 (12), 1817-1843.
- Fridman, L., Barbo, J., Plestan, F. (2016). *Recent Trends in Sliding Mode Control*. Londres, Inglaterra: Editorial IET.
- Galvan, G.R., Fridman, L. (2015). Robustification of time varying linear quadratic optimal control based on output integral sliding modes. *IET Control Theory and Applications*, vol. 9 (4), 563-572.
- Glad, S. (1987). Robustness of nonlinear state feedback: a survey. *Automatica*, Vol. 23 (4), 425-435.
- Hardt, M., Helton, J. y Kreutz, K. (2000). Numerical solution of nonlinear \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems with application to jet engine compressors. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, Vol.8 (1), 98-111.
- Helton, J. y James, M. (1999). *Extending \mathcal{H}_∞ Control to nonlinear systems-Control of nonlinear systems to achieve performance objectives*. Filadelfia, Estados Unidos de Norte América: Editorial SIAM.
- Isidori, A. y Astolfi, A. (1992). Disturbance attenuation and \mathcal{H}_∞ -control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37 (9), 1283-1293.
- Kelly, R., Santibañez, V. y Loria, A. (2005). *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Londres, Inglaterra: Editorial Springer Verlag.
- Krstić, M. y Deng, H. (1998). *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems, Communications and Control Engineering*. Londres, Inglaterra: Editorial Springer.

- Kumar, P. R., Chalanga, A. y Bandyopadhyay, B. (2015). Smooth integral sliding mode controller for the position control of Stewart platform. *ISA Transaction*, vol. 58, 543-551. doi: 10.1016/j.isatra.2015.06.003.
- Levant, A. (2010). Chattering analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.55 (6), 1380-1389.
- Lukes, D. (1969). Optimization regulation of nonlinear dynamical systems. *SIAM Journal on Control*, Vol.7 (1), 75-100. doi: 10.1137/0307007.
- Meza, I., Aguilar, L., Shiriaev, A., Fridovich, L. y Orlov, Y. (2011). Periodic motion planning and nonlinear \mathcal{H}_∞ tracking control of a 3-DOF underactuated helicopter. *International Journal of Systems Science*, Vol. 42 (5), 829-838.
- Orlov, Y. y Aguilar, L. (2004). Non-smooth \mathcal{H}_∞ -position control of mechanical manipulators with frictional joints. *International Journal of Control*, Vol. 77 (11), 1062-1069.
- Orlov, Y. y Aguilar, L. (2014). *Advanced \mathcal{H}_∞ Control: Towards Nonsmooth Theory and Applications*. Nueva York, Estados Unidos de Norte América: Editorial Birkhäuser.
- Osuna, T., Montaña, O.E. y Orlov, Y. (2016). Nonlinear \mathcal{L}_2 -Gain analysis of hybrid systems in the presence of sliding modes and impacts. *Mathematical problems in Engineering*, Vol. 2016. doi: 10.1155/2016/9074096.
- Rubagotti, M., Castaño, F., Ferrara, A. y Fridman, L. (2011). Integral sliding mode control for nonlinear systems with matched and unmatched perturbations. *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 56 (11), 2699-2704.
- Sage, H., De Mathelin, M. y Ostertag, E. (1999). Robust control of robot manipulators: A survey, *International Journal of Control*, vol.72 (16), 1498-1522.
- Spong, M., Khorasani, K. y Kokotovic, P. (1987). An Integral Manifold Approach to the Feedback Control of Flexible Joint Robots. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol.3 (4), 291-300.
- Spong, M. y Vidyasagar, M. (1989). *Robot Dynamics and Control*. Nueva York, Estados Unidos de Norte América: Editorial Wiley.
- Subbotin, A. (1995). *Generalized Solution of First-Order PDE's the Dynamical Optimization Perspective*. Boston, Estados Unidos de Norte America: Editorial Birkhäuser.
- Utkin, V., Guldner, J. y Shi, J. (2009). *Sliding Modes Control in Electromechanical Systems*. Nueva York, Estados Unidos de Norte América: Editorial CRC.
- Utkin, V. (1992). *Sliding Modes in Control Optimization*. Berlin, Alemania: Editorial Springer-Verlag.
- Utkin, V. y Lee, H. (, 2006). Chattering problem in sliding mode control systems. *Proceeding of the 2006 International Workshop on Variable Structure Systems*, Alghero, Italy, 346-350.
- Van der Schaft, A. J. (1992). \mathcal{L}_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback \mathcal{H}_∞ control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37 (6), 770-784.
- Wen, J. y Jian, X. (2004). Nonlinear Integral type Sliding surface for both Matched and Unmatched Uncertain Systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol 49 (8), 1355-1360. doi: 10.1109/TAC.2004.832658.
- Yim, J. y Park, J. (1999). Nonlinear \mathcal{H}_∞ control of robotic manipulator. *1999 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetic*. Conferencia llevada a cabo en IEEE SMC'99 Conference Proceeding, Tokio, Japón.
- Zheng, B. y Park, J. (2015). Adaptive integral sliding mode control with bounded \mathcal{L}_2 -gain performance of uncertain quantized control systems. *IET Control Theory Applications*, Vol. 9 (15), 2273-2282.