Artículo **Revista de Análisis Cuantitativo y Estadístico**
Marzo 2015 Vol.2 No.2 160-165

Transpuesta: Operación en las matrices

MONTERROSAS-FUENTES, Alfonso†, GARCIA-PACHECO, David & SALAS-VALDIVIEZO, Gilberto

UT Izúcar de Matamoros

Recibido8 de Enero, 2015; Aceptado12 de Marzo, 2015

Resumen

Para muchos estudiantes, hasta el nivel medio superior y superior, suelen asistir a clases es mero protocolo en su vida, esto trae como consecuencia que le den poco valor a los conocimientos que los docentes vierten y explican. El problema se hace más grande cuando los conocimientos están relacionados con las matemáticas, es muy común escuchar que algún alumno deserto o va muy mal en la escuela porque no le entiende a las matemáticas; en este artículo se intenta disminuir un poco esa forma de apreciar la escuela, mediante la explicación y aplicación de un área de las matemáticas: Matrices [1].

Aquí exponemos desde que es una ecuación lineal [1], pasando por algunas de las propiedades del álgebra de matrices, la operación de la transpuesta en específico, para su posterior uso en un ejemplo de matrices rectangulares. Además se propone el algoritmo para sea implementado mediante un lenguaje de programación.

Sistema de ecuaciones lineales, matriz rectangular, transpuesta, pseudoinversa.

Abstract

For many students, to the upper and upper middle level usually they attend classes is simple protocol in your life, this results that give little value to knowledge that teachers pour and explain. The problem becomes bigger when knowledge is related to mathematics, it is very common to hear that some student or defected going badly in school because he understands math; this article attempts to reduce a little the way to appreciate the school, by explaining and implementing an area of mathematics: Matrix [1].

Here we present since it is a linear [1] equation, to some of the properties of matrix algebra, the transpose operation specifically for later use in an example of rectangular matrices. In addition the algorithm to be implemented by a programming language is proposed.

System of linear equations, rectangular matrix, transpose, pseudoinverse.

Citación: MONTERROSAS-FUENTES, Alfonso, GARCIA-PACHECO, David & SALAS-VALDIVIEZO, Gilberto. Transpuesta: Operación en las matrices. Revista de Análisis Cuantitativo y Estadístico 2015, 2-2:160-165

† Investigador contribuyendo como primer autor.

Introducción

¿Cómo resuelves un problema que no le ves principio ni fin? Una respuesta no muy acertada que siempre recibes es: “empieza por el principio”; esta respuesta casi siempre nos deja tan desconcertados o mas que cuando se nos planteó el problema.

En este artículo se hace uso de un sistema de ecuaciones lineales (álgebra lineal), donde el número de incógnitas no es igual al número de variables por lo que cuando se usa un método matricial para resolver el sistema, se obtiene una matriz rectangular la cual no permite usar el método de Cramer o de Gauss-Jordan para su solución [5], por lo tanto se usa la norma mínima o método de pseudoinversa, en este método se muestra un uso de la operación de transpuesta de las matrices. Al final se propone un algoritmo para implementar en una aplicación de lenguaje de programación. Todo con la finalidad de fomentar en el alumno la motivación por el estudio de las matemáticas y su posible aplicación que les resuelva problemas tecnológicos.

Herramientas: matrices:

Una expresión algebraica esta compuesta por:

$$\pm bX^{ex}, \qquad (1)$$

Donde $\pm$ indica el signo de la expresión algebraica, cuando no tiene signo se supone que es positiva, para los otros símbolos: ***b*** es el coeficiente y representa un valor numérico, ***X*** es la variable y ***ex*** el exponente.

El álgebra lineal trata sobre la solución de sistemas de ecuaciones lineales [2,3], esto es, donde el valor del exponente para las variables involucradas es uno, como ejemplo:

$$\begin{aligned} x+3y&=12 \\ 4x+2y&=6 \end{aligned} \qquad (2)$$

A partir de la ecuación (2) si la separamos los componentes para obtener la forma A*x = b es decir la matriz de coeficientes(**A**), variables(**x**) y términos independientes (**b**) se presenten de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Para este caso solo tomamos en cuenta el contenido de los corchetes del lado derecho,

$$A = \begin{bmatrix} 1_{11} & 3_{12} \\ 4_{21} & 2_{22} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Esta representación se conoce como matriz A [4], A es el nombre de la matriz y los valores 1, 3, 4, 2 son sus elementos o componentes y los pares de números que representan los subíndices, son los que ubican a cada elemento en un lugar, que mas específicamente nos dicen que los componentes están en un arreglo de renglones y columnas, definiendo a los renglones de forma horizontal y las columnas de forma vertical, así por ejemplo los elementos 1 y 3 están en el renglón 1, además estos pares de subíndices representan el orden de una matriz -renglones x columnas- (r x c) [5].

El álgebra de matrices versa sobre las operaciones que se realizan entre estas entidades [7], para dos matrices dadas A y B, tenemos las siguientes operaciones:

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Suma de matrices [1, 2, 3, 4, 5, 7]: requisito para realizar la operación, deben ser del mismo orden las dos matrices (r x c) y como se muestra en la ecuación (5) se suma elemento a elemento.

ISSN-2410-3438

Propiedad asociativa, las operaciones se realizan también elemento a elemento.

$$A \pm (B \pm C) \qquad (6)$$

Propiedad de elemento neutro de la suma las operaciones se realizan también elemento a elemento.

$$A + 0 = A \qquad (7)$$

Propiedad de escalamiento y distributiva de una matriz (8), el rango para r esta proporcionado por 0< r < ∞, la expresión (8a) muestra la propiedad asociativa, en estas operaciones también se realizan elemento a elemento.

$$r(A+B) = rA + rB \qquad (8)$$

o

$$rA + rB = (rA + rB) = r(A+B) \qquad (8a)$$

La ***operación*** de la ***transpuesta*** de una ***matriz*** [1, 2, 3, 4, 5], representada como $\boldsymbol{A^t}$ es una operación que en algunos casos no se le ve una utilidad práctica, esta operación involucra intercambiar los renglones por las columnas como se muestra a continuación,

Para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{bmatrix}$ su ***transpuesta*** es

$$\boldsymbol{A^t} = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Como se puede apreciar de la matriz **A** su $\mathbf{A^t}$ los elementos de la diagonal principal, la que va de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha, no sufren alteración alguna, los elementos que están en fuera de la diagonal principal si son intercambiados, esta operación es la que fundamentalmente hace énfasis este documento.

Propiedad de multiplicación [1, 2, 3, 4, 5, 7]:

$$A*B \qquad (10)$$

para esta operación se debe cumplir un requisito; el número de columnas de la primera debe ser igual al número de renglones de la segunda $ra \ x \ ca = rb \ x \ cb$ y la operación se realiza de la siguiente forma,

$$A*B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}*b_{11} + a_{12}*b_{21} & a_{11}*b_{12} + a_{12}*b_{22} \\ a_{21}*b_{11} + a_{22}*b_{21} & a_{21}*b_{12} + a_{22}*b_{22} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Como se puede observar se multiplica renglón por columna y se suman todos los productos resultantes.

Con la operación de multiplicación también viene la existencia de una matriz que tiene los siguientes elementos,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Esta matriz esta definida como matriz identidad [1, 2, 7], la característica de esta matriz es que los elementos de su diagonal principal; todos son uno. Esta matriz nos permite tener la siguiente propiedad,

$$I * A = A \qquad (13)$$

Identidad para la multiplicación de las matrices.

La operación de división en el álgebra de matrices no existe como tal pero para una matriz A se dice que A^{-1} representa su inversa si cumple con:

$$A*A^{-1} = I \qquad (14)$$

De los métodos para obtener la matriz inversa no los desarrollaremos aquí por su extensión, le sugerimos al lector consultar las referencias de las fuentes de información para hacer un estudio más amplio del tema [1, 6, 7].

Utilizando la propiedad de la inversa de una matriz y una vez que se tiene en la forma A*x = b un sistema de ecuaciones lineales, es posible encontrar la solución mediante $\mathbf{x = A^{-1}*b}$, es decir que existe una matriz $\mathbf{A^{-1}}$ la cual al ser multiplicada por **b** se obtiene una solución para el sistema de ecuaciones lineales.

Esto es claro y sucede cuando el sistema de ecuaciones lineales en cuestión tiene el mismo número de ecuaciones y variables, es decir la matriz A es una matriz cuadrada mismo número de renglones y columnas, pero no es el caso cuando hay una desigualdad entre las ecuaciones y variables.

Método

Para un sistema de ecuaciones lineales en su forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a1x} & +\mathrm{b1y} & +\mathrm{c1z} \\ \mathrm{a2x} & +\mathrm{b2y} & +\mathrm{c2z} \\ \mathrm{a3x} & +\mathrm{b3y} & +\mathrm{c3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{d1} \\ \mathrm{d2} \\ \mathrm{d3} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Pasando a la forma **A*x = b** donde **A** es la matriz de coeficientes, **x** es la matriz de variables y **b** es la matriz de términos independientes.

$$\begin{bmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Es un sistema donde las variables es igual al número de ecuaciones, una matriz cuadrada para el caso A y mientras su determinante sea diferente de cero va tener una única solución, la solución que se puede obtener de manera analítica mediante cualquier método para resolver sistemas de ecuaciones lineales, ya sea el de reducción, sustitución, igualación, Cramer o Gaus Jordan [1, 2, 3, 5].

Pero puede presentarse que el número de ecuaciones difiera del número de incógnitas o variables, es decir:

Caso a) variables > ecuaciones de la Ecuación 3, observamos rango de A 2x3, rango de X 3x1, rango de B 2x1,

$$\begin{bmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d1 \\ d2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Caso b) variables < ecuaciones de la Ecuación 4, observamos rango de A 3x2, rango de X 2x1, rango de B 3x1

$$\begin{bmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Como podemos observar la matriz A es una matriz rectangular, de tal modo que para encontrar la solución de estos dos casos de sistemas de ecuaciones lineales, los métodos mencionados arriba no se acoplan para hacerlo, además de que los sistemas en este caso van a tener un grupo de soluciones infinitas.

La respuesta a este problema es determinar la norma mínima [8], si $\mathbf{X^0}$ se define como la norma mínima, la cual debe satisfacer la condición

$$A * X^0 = b \quad \text{y} \quad \|\mathbf{X^0}\| \leq \|\boldsymbol{X}\|. \quad (19).$$

ISSN-2410-3438

Revista de Análisis Cuantitativo y Estadístico
Marzo 2015 Vol.2 No.2 160-165

Para toda X que satisface A*x = b. Esto significa que el punto solución $\mathbf{X^0}$ es el más cercano al origen en el espacio de dimensión m.

Entonces para el caso a) donde hay más variables que ecuaciones una solución se obtiene a partir de definir la matriz pseudoinversa derecha como:

$$A^R = A^t(A*A^t)^{-1} \quad (20)$$

Para obtener la pseudoinversa derecha se multiplica la $\mathbf{A^t}$ transpuesta de **A** por el inverso de la multiplicación de A por su $\mathbf{A^t}$, Esta es propiamente una inversa ya que cumple con la condición:

$$A*A^R=A[A^t(A*A^t)^{-1}]=A*A^t(A*A^t)^{-1}=I_n \quad (21)$$

Entonces la norma mínima para la pseudoinversa derecha la expresamos como:

$$X^0 = A^R\, b = [A^t(A*A^t)^{-1}\ ]*b \quad (22)$$

Ahora bien para el caso b) donde hay menos variables que ecuaciones la solución se obtiene a partir de definir la matriz pseudoinversa izquierda como:

$$A^L = (A^t*A)^{-1}\ A^t \quad (23)$$

Para obtener la pseudoinversa izquierda multiplicamos el inverso de la multiplicación de **A** por $\mathbf{A^t}$ por $\mathbf{A^t}$, que también cumple con la condición de

$$A^L*A=(A^t*A)^{-1}A^tA=(A^t*A)^{-1}(A^t*A)= I_n \quad (24)$$

Que para la norma mínima para la pseudoinversa izquierda la expresamos como

$$X^0 = A^L *b= [(A^t*A)^{-1}\ A^t\ ]*b \quad (25)$$

Algortimo

A continuación se expone el algoritmo para la solución de un sistema de ecuaciones lineales con la disparidad entre ecuaciones y variables.

```
‘Para la matriz A r x c

   ra = valor de renglones

   ca = valor de columnas

‘Para la matriz b

   rb = valor de renglones

‘leer la matriz A

   For i = 1 to ra

      For j = 1 to ca

        A[i][j] = valor

      End for j

   End for i

‘leer la matriz b

   For i = 1 to rb

      b[i] = valor

   End for i

‘traspuesta de A

   For i = 1 to ra

      For j = 1 to ca

        At[j][i] = A[i][j]

      End for j
```

ISSN-2410-3438

End for i

si ca > rb

‘obtener AR

AR = At*[(A*At)^(-1)]

‘obtener los valores de x0

X0 = AR *b = [At(AAt)^(-1)]*b

else si ca < rb

‘obtener AL

AL = [(AtA)^(-1)*At]

‘Obtener los valores de x0

X0 = AL *b= [(AtA)^(-1)* At]*b

X0 es la matriz solución del sistema de ecuaciones lineales.

Agradecimientos

Agradecemos a la Universidad Tecnológica de Izúcar de Matamoros y a la dirección del programa educativo de Tecnologías de la Información y Comunicaciones por su apoyo para la realización de este trabajo.

Conclusiones

Se presenta una propuesta para dar uso a la operación de la transpuesta en el álgebra de matrices, usando la pseudoinversa como método para dar solución a sistemas de ecuaciones lineales donde el número de ecuaciones y variables son desiguales.

Además se plantea un algoritmo para ser implementado en algún lenguaje de programación, lo que permite dar una relación de entre las matemáticas y la programación de aplicaciones, algo que tiene la intención por parte de los autores sea de utilidad para los docentes que imparten asignaturas en las carreras relacionadas a la programación de aplicaciones.

Referencias

Fraleigh Beauregard, *Álgebra Lineal*, Addison Wesley, 1989.

Stanley Grossman, *Álgebra Lineal*, McGraw Hill, 1996.

Howard Anton, *Introducción al Álgebra Lineal*, Limusa-Wiley, 2006.

Ben Noble- James W Daniel, *Álgebra Lineal Aplicada*, Prentice Hall, 1989.

David B. Jonson – Tomas A Mowry, *Finite Mathematics/ Practical Applications*, International Thomson Editors, 1999.

Jim Heferon, *Linear Algebra*, Springer, 2000.

Katsuhiko Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*, Prentice Hall, 1993.

ISSN-2410-3438