

## Modelado y predicción de la tasa de interés interbancaria de equilibrio en México vía un proceso auto-recursivo de orden uno

VÁZQUEZ Víctor†, CRUZ Hugo, REYES Hortensia, JUÁREZ Bulmaro & SOLANO Francisco

*Universidad Autónoma de Puebla.*

Recibido 3 de Enero, 2014; Aceptado 4 de Julio, 2014

### Resumen

A través de un proceso auto recursivo de orden uno algunos pronósticos interbancarios de la tasa de interés de equilibrio se presentan en México. Antes de hacer dicha previsión se analiza la estadística de Durbin -Watson con el fin de eliminar la posibilidad de una correlación de orden uno en el ruido conducido. Por último, desde la teoría martingala presentamos estimaciones de los parámetros desconocidos del modelo

**Interbancario, Durbin-Watson, Ruido conducido.**

### Abstract

Via an auto-recursive process of order one some forecasts of the equilibrium interbank rate of interest in Mexico are presented. Before doing such forecast we analyze the Durbin-Watson statistic in order to eliminate the possibility of a correlation of order one in the driven noise. Finally, from the martingale theory we present estimations of the unknown parameters of the model.

**Interbank, Durbin -Watson, Conducted noise.**

**Citación:** Vázquez V., Cruz H., Reyes H., Juárez B. Solano F. Modelado y predicción de la tasa de interés interbancaria de equilibrio en México vía un proceso auto-recursivo de orden uno. Revista de Análisis Cuantitativo y Estadístico 2014,1-1:1-9

† Investigador contribuyendo como primer autor.

## Introducción

El término Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE) se refiere a la tasa de interés que corresponde al punto de equilibrio entre las tasa de interés pasivas y activas que se determinan a partir de la información de tasas de interés que los bancos presentan al Banco de México (Banxico) para su cálculo. Se le considera el equivalente en México del EURIBOR (European Interbank Offered Rate) y es vista también como la tasa principal líder activa, es decir, el principal indicador del precio del crédito en México. La TIIE es una tasa de interés a distintos plazos: 28, 91 y 182 días que se calcula diariamente.

Cuando un banco tiene problemas para captar recursos para financiar sus créditos, la TIIE es el coste al cual puede pedir prestado a otro banco. Por otro lado, los bancos con recursos que exceden su cartera de crédito pueden prestar dinero a otro banco con tasa de interés igual a la TIIE.

Esta tasa de interés fue introducida mediante modificaciones del 20 de marzo de 1995 a la Circular 2008/94 del Banco de México, en donde se estableció un procedimiento conforme al cual, el propio Banco con cotizaciones presentadas por las instituciones de crédito, determinará dicha tasa de interés interbancaria de equilibrio. Dicho procedimiento es un tanto complicado, pero puede resumirse en la serie siguiente de pasos:

Los bancos interesados en participar en la determinación de la TIIE hacen del conocimiento del Banco de México tal interés mediante un escrito dirigido la Gerencia de Operaciones Nacionales, en el que se señalen los nombres de las personas autorizadas a recibir información del procedimiento respectivo.

Dicha comunicación deberá mostrar el conocimiento de firmas otorgado por la oficina de Operación de Cuentas de Efectivo del Banco de México, el cuál publicará en el Diario Oficial de la Federación el nombre de las instituciones participantes.

El Banco de México informa por escrito a las instituciones participantes los días hábiles bancarios en que recibirá cotizaciones de tasas de interés, los plazos y los montos para los cuales podrán presentar posturas. Las cotizaciones deberán presentarse a la Gerencia de Operaciones Nacionales del Banco de México, a más tardar a las 12:00 horas del día hábil bancario que corresponda. Para tal efecto, el Banco de México solicitará por lo menos a seis instituciones elegidas de manera aleatoria, que presenten, dentro del horario establecido, cotizaciones para cada uno de los plazos convocados para el día hábil bancario de que se trate.

Además, el Banco de México podrá señalar límites mínimos y máximos a los citados montos, dentro de los que podrán presentarse las cotizaciones en múltiplos de una cantidad base que al efecto señale el propio Banco de México, a la cual se le denomina monto base.

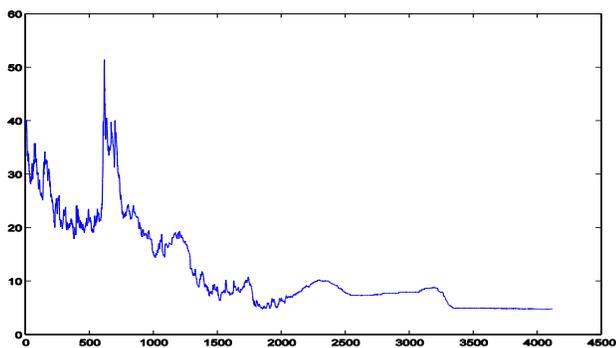
Si a más tardar a las 12:00 horas del día hábil bancario señalado para presentar las cotizaciones el Banco de México obtiene cuando menos seis de las instituciones participantes, procederá a calcular la TIIE.

Por otro lado, si no recibiera cuando menos seis cotizaciones, solicitará nuevamente a las instituciones elegidas sus cotizaciones a más tardar a las 12:15 horas.

En caso de que con base en la nueva solicitud no se reciban cuando menos seis cotizaciones, el Banco de México solicitará a las instituciones participantes que hubieren presentado cotizaciones, le coticen nuevamente tasas y solicitará a otra u otras instituciones participantes, a más tardar a las 12:30 horas.

En el caso en que el Banco de México no haya podido determinar la TIIE o de que a su criterio, haya habido colusión entre las instituciones participantes, determinará dicha tasa considerando las condiciones prevalecientes en el mercado de dinero.

Los resultados generales quedarán a disposición de las instituciones participantes a más tardar a las 14:00 horas del mismo día en que se determinen las tasas a través del SIAC-BANXICO o de cualquier otro medio electrónico, de cómputo o telecomunicación que el Banco de México autorice al efecto. El Banco de México publicará en el Diario Oficial de la Federación las tasas y el nombre de las instituciones que participaron en su determinación, el día hábil bancario inmediato siguiente a aquél en que se hayan determinado



**Gráfica 1** Evolución de la TIIE a 28 días

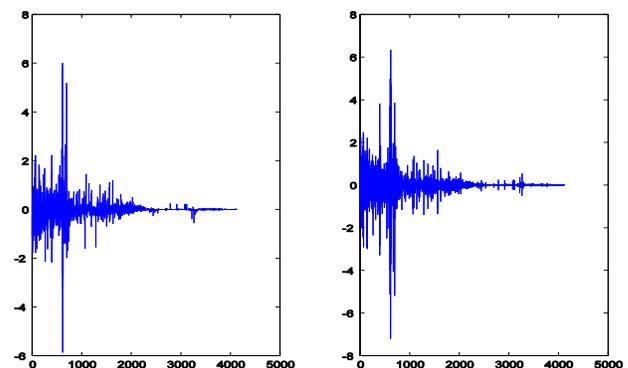
### Modelado de la TIIE

En la Gráfica 2, se presenta la evolución diaria de la TIIE a 28 días desde el 28 de marzo de 1996 al 8 de agosto de 2012 (a partir de esta fecha se publica diariamente la TIIE).

Dado que las instituciones bancarias ofrecen productos financieros con tasas que se encuentran en términos de la TIIE (tarjetas de crédito, fondos de inversión, créditos hipotecarios, inversiones, etc.) es de interés tanto de las instituciones como de las personas interesadas en contratar algún producto que dependa de la TIIE el contar con un pronóstico de esta tasa de interés.

Dado que no es posible el conocer de manera segura el valor futuro de la TIIE es necesario el considerar un enfoque estocástico para hallar un estimado de ésta.

De la Gráfica 1, puede conjeturarse que la serie definida por la TIIE no es estacionaria. Con el fin de respaldar tal conjetura en la Gráfica 3 se observan las primeras y segundas diferencias de esta serie. Además, en la Gráfica 4 se presenta la función de Autocorrelación y de Autocorrelación Parcial.



**Gráfica 2** Primeras y Segundas diferencias de la TIIE

Sin embargo, puede observarse cierta estabilidad en la TIIE a partir de julio de 2009; sin embargo, para efectos del presente trabajo se considerarán los datos de los últimos 6 meses (7 de febrero de 2012 a 7 de agosto de 2012); así, en la Gráfica 8.4 se observa el comportamiento de la TIIE junto con sus primeras diferencias en ese periodo.

Finalmente, en la Gráfica 8.5 se presenta la función de autocorrelación parcial, de la que se concluye que un modelo auto-recursivo de orden 1 puede ser adecuado para modelar las primeras diferencias de la TIIE en el periodo antes señalado.

**Procesos auto-recursivos de orden uno**

Un posible enfoque para su modelado es el ofrecido por el proceso auto-recursivo de orden 1, dado para toda  $n \geq 1$  por:

$$X_{n+1} = \theta X_n + \epsilon_{n+1}, \tag{1}$$

En donde  $X_0$  puede elegirse arbitrariamente,  $\sigma$  es un parámetro desconocido y  $(\epsilon_n)$  es una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas (i.i.d.) con media cero y varianza  $\sigma^2 > 0$  desconocida. Con el fin de obtener un pronóstico para la TIIE, es necesario estimar tanto el parámetro  $\theta$  como la varianza  $\sigma^2$ .

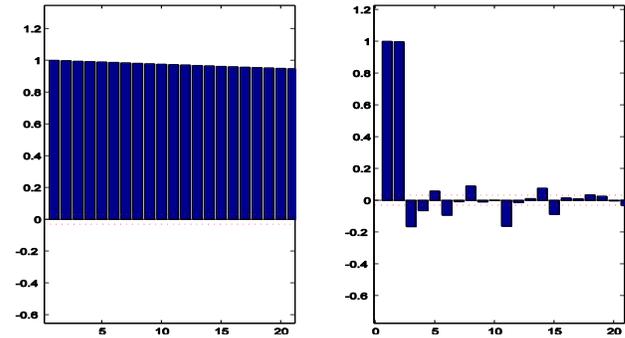
El estudio teórico de este proceso depende de la tricotomía:

1.  $|\theta| < 1$  (caso estable)
2.  $|\theta| = 1$  (caso inestable)
3.  $|\theta| > 1$  (caso explosivo)

En los tres casos los parámetros desconocidos son estimados por el método de mínimos cuadrados:

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k X_{k-1}}{\sum_{k=1}^n X_{k-1}^2} \tag{2}$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \hat{\theta}_k X_{k-1})^2. \tag{3}$$



**Gráfica 3** Función de autocorrelación y autocorrelación parcial

En el caso estable, se cuenta con resultados asintóticos obtenidos mediante el uso de la Teoría de Martingalas de dimensión uno. La idea central en la obtención de estos resultados es notar que la sucesión  $(M_n)$  dada para  $n \geq 1$ , por:

$$M_n = \sum_{k=1}^n X_{k-1} \epsilon_k \tag{4}$$

Es una martingala con proceso creciente dado para  $n \geq 1$ , por:

$$\langle M \rangle_n = \sigma^2 \sum_{k=1}^n X_{k-1}^2 \tag{5}$$

Que además satisface que  $\langle M \rangle_n = \mathcal{O}(n)$  casi seguramente (con probabilidad uno). Así, como consecuencia de la Primer Ley de Grandes Números para Martingalas se tiene que:

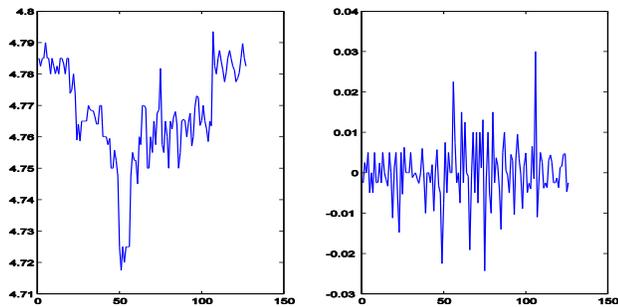
$$\hat{\theta}_n \rightarrow \theta \tag{6}$$

Casi seguramente, de manera similar, la Segunda ley de Grandes Números para Martingalas asegura que:

$$\hat{\sigma}_n^2 \rightarrow \sigma^2 \tag{7}$$

Casi seguramente. Además, como consecuencia del Teorema Central del Límite para Martingalas se tiene que:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1 - \theta^2). \tag{8}$$

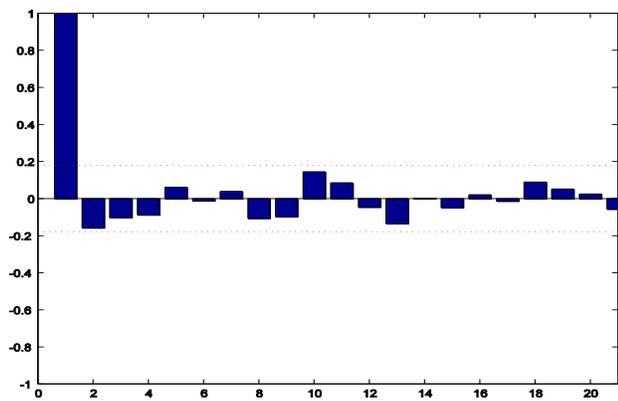


Gráfica 4 TIIE y sus primeras diferencias, del 07/02/2012 al 07/08/2012

Finalmente, si  $(\varepsilon_n)$  tiene un momento de orden cuatro finito; digamos  $\tau^4$ , tenemos que:

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \tau^4) \tag{9}$$

En el caso inestable puede mostrarse que se tiene una distribución asintótica relacionada con integración estocástica, mientras que en el caso explosivo, bajo ciertas condiciones adicionales se tiene una distribución asintótica de Cauchy.



Gráfica 5 Función de Autocorrelación parcial de la TIIE

### Prueba de no correlación de orden uno en el error

Los resultados asintóticos de la sección anterior dependen fuertemente de la suposición de que la sucesión  $(\varepsilon_n)$  es i.i.d. Sin embargo, esto no siempre es verdad. Recientemente, Bercu B. y Proia F. Consideraron que las variables aleatorias  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  puedan estar correlacionadas mediante un proceso auto-recursivo de orden uno:

$$\varepsilon_{n+1} = r\varepsilon_n + V_{n+1} \tag{10}$$

En donde  $|\rho| < 1$  y  $(V_n)$  es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. En este marco obtuvieron una prueba basada en la estadística de Durbin-Watson para contrastar las hipótesis:

$$H_0: \rho = \rho_0 \text{ contra } H_1: \rho \neq \rho_0 \tag{11}$$

En donde  $\rho_0$  es un valor fijo. Para efectos del presente trabajo, consideraremos  $\rho_0 = 0$ , únicamente con el objetivo de verificar si la sucesión  $(\varepsilon_n)$  sea i.i.d. En este caso, el estadístico de prueba es:

$$H_n = \frac{n}{4\hat{\theta}_n^2} (D_n - 2)^2 \tag{12}$$

En donde  $D_n$  es la estadística de Durbin-Watson en el instante  $n$  y está dada por:

$$D_n = \frac{\sum_{k=1}^n (\hat{\varepsilon}_k - \hat{\varepsilon}_{k-1})^2}{\sum_{k=0}^n \hat{\varepsilon}_k^2} \tag{13}$$

En donde:

$$\hat{\varepsilon}_k = X_k - \hat{\theta}_n X_{k-1} \tag{14}$$

Con  $k=0, 1, \dots, n$ , son los residuos de mínimos cuadrados.

Si  $(V_n)$  tiene un momento finito de orden 4, el estadístico de prueba  $H_n$  tiene bajo  $H_0$  una distribución  $\chi^2$  con un grado de libertad, ya que:

$$\sqrt{n}(D_n - 2) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 4\theta^2) \quad (15)$$

Así, si  $z_\alpha$  es el  $(1-\alpha)$ -cuantil de esta distribución, la hipótesis nula  $H_0$  no será rechazada si:

$$H \leq z_\alpha. \quad (16)$$

La eficiencia teórica de este procedimiento es evidenciada en [3] mediante el uso de simulaciones computacionales.

### Pronóstico de la TIE

En esta sección, describiremos un procedimiento para realizar predicciones de la TIE a 28 días para algunas fechas posteriores al 7 de agosto de 2012 modelándola a través de un proceso auto-recursivo de orden uno. Dicho procedimiento puede resumirse en los pasos siguientes:

- Recopilación de la información (Valores de la TIE).
- Realizar un contraste de hipótesis a fin de corroborar el supuesto de independencia de  $(\varepsilon_n)$ .
- Estimar a los parámetros desconocidos  $\theta$  y  $\sigma^2$ .
- Pronosticar la TIE.

### Recopilación de la información

En el sitio web del Banco de México puede encontrarse la serie histórica de la TIE a 28, 91 y 182 días.

En particular para el plazo a 28 días, se cuenta con los registros diarios desde el 28 de marzo de 1996, sin embargo en aras de emplear la teoría expuesta en la Sección 2, y como consecuencia de una análisis de las Gráficas 8.1 a 8.5, trabajaremos con las primeras diferencias de la serie que describe a la TIE del 2 de febrero de 2012 al 7 de agosto de 2012.

### Contraste de hipótesis

En esta sección se realizará el contraste de hipótesis

De manera preliminar observamos el valor de la estadística de Durbin-Watson para el conjunto de datos recopilados:

$$D_{125} = 2.052 \quad (17)$$

Mismo que es razonablemente cercano a dos, lo cual sugiere que  $(\varepsilon_n)$  es i.i.d. En la Gráfica 1.6 podemos observar la evolución de la estadística de Durbin-Watson conforme se incorpora la información en cada etapa.

Además tenemos que:

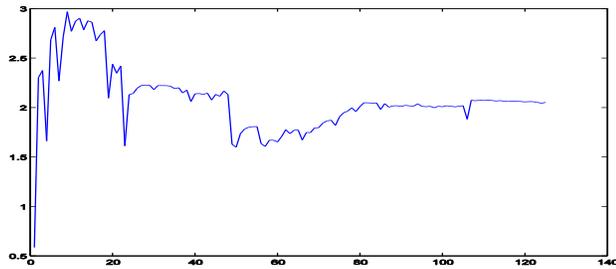
$$\hat{\theta}_{125} = -0.15788 \quad (18)$$

Sin embargo, en este punto no podemos afirmar que esta estimación sea eficiente, ya que en este punto aun no podemos apelar a la convergencia.

De manera más precisa, con un nivel de significancia del 0.10 tenemos que la hipótesis nula  $H_0: \rho=0$  no es rechazada, ya que:

$$H_{125} = \frac{125}{4\hat{\theta}_{125}^2} (D_{125} - 2)^2 = 0.8539 \quad (19)$$

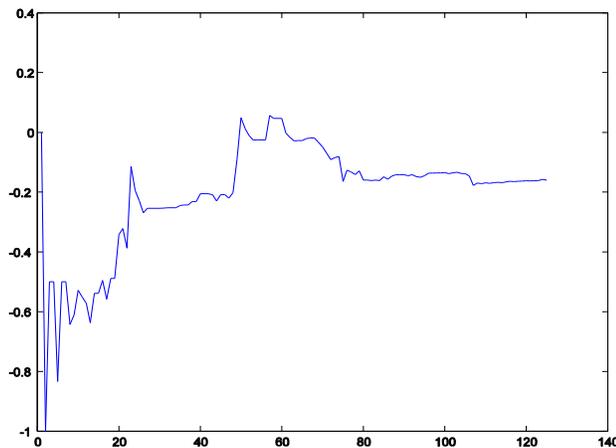
Mientras que  $z_{0.90} = 2.706$ .



**Gráfica 6** Comportamiento de la estadística de Durbin-Watson

**Estimación de  $\theta\sigma^2$**

Una vez que no se ha rechazado la hipótesis de no correlación de primer orden en  $(\varepsilon_n)$  podemos afirmar que el valor estimado de  $\theta$  dado en la igualdad (3) es una buena estimación como consecuencia de la convergencia.



**Gráfica 7** Estimaciones de  $\theta$

De manera similar, obtenemos que:

$$\hat{\sigma}_{125}^2 = 0.00005 \tag{20}$$

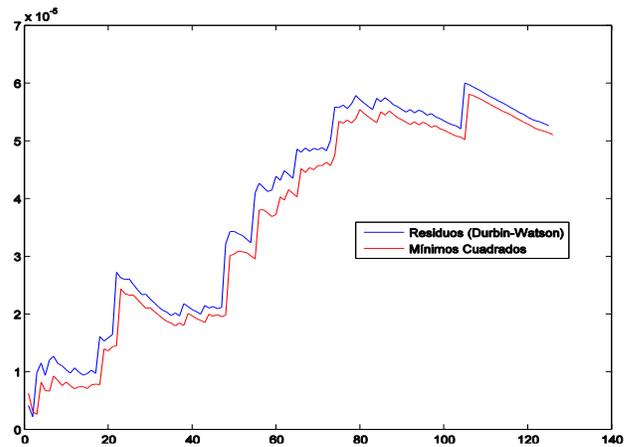
Además, se demuestra que:

$$\bar{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \hat{\varepsilon}_k - \left(1 - \frac{D_n}{2}\right) \hat{\varepsilon}_{k-1} \right)^2 \tag{21}$$

Converge casi seguramente a  $\sigma^2$ , a través (una vez más) de la teoría de martingalas. El valor de esta estimación es:

$$\bar{\sigma}_{125}^2 = 0.000052 \tag{22}$$

De manera adicional, en la Gráfica 8 se ilustra la evolución de las estimaciones de  $\sigma^2$ .



**Gráfica 8** Estimaciones de  $\sigma^2$

**Pronóstico**

En esta etapa, a través del proceso:

$$X_{n+1} = \hat{\theta}_{125} X_n + \varepsilon_{n+1} \tag{23}$$

Se intentará pronosticar la TIIE para algunos días posteriores al 7 de agosto de 2012. Sin embargo, antes de realizar tal predicción es necesario intentar dilucidar la distribución que siguen las variables aleatorias  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{124}$ .

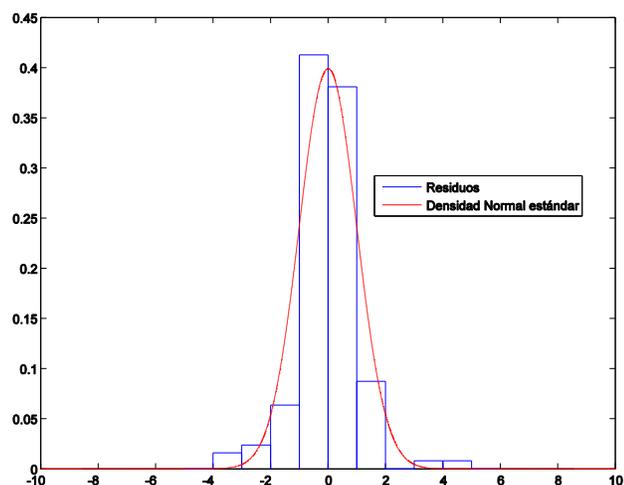
Para esto, realizaremos un análisis de los residuos, definidos para  $k=1,2,\dots,124$  por:

$$\hat{\varepsilon}_k = X_{k+1} - \hat{\theta}_{125} X_k. \tag{24}$$

A través de un cálculo directo, obtenemos que la media y la varianza de los residuos estandarizados:

$$\hat{\zeta}_k = \frac{\hat{\epsilon}_k}{\sqrt{\hat{\sigma}_{125}^2}} \quad (25)$$

Es -.00278 y 1.032 respectivamente; de manera adicional, en la Gráfica 8.9 se presenta un histograma en el cual puede observarse que siguen una distribución aproximadamente normal estándar.

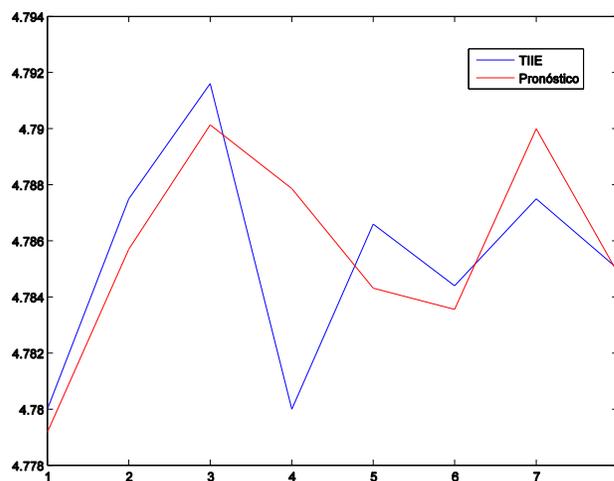


Gráfica 9 Histograma de los residuos estandarizados

Sin embargo tanto la prueba de Kolmogorov-Smirnov como la de Anderson-Darling, rechazan la hipótesis de normalidad en los residuos. Por lo que en lugar de simular valores de  $n$  con distribución Normal con media cero y varianza  $\bar{\sigma}_{125}^2$  ó  $\hat{\sigma}_{125}^2$ , se utilizará un remuestreo uniforme con reemplazo. En la Tabla 1, pueden observarse los valores de referencia de la TIIIE y sus pronósticos para los días 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16 y 17 de agosto de 2012:

Fecha	8/08/12	9/08/12	10/08/12	13/08/12	14/08/12	15/08/12	16/08/12	17/08/12
TIIIE	4.7800	4.7875	4.7916	4.7800	4.7866	4.7844	4.7875	4.7850
Pronóstico	4.7791	4.7857	4.7901	4.7879	4.7843	4.7836	4.7899	4.7849
Error Abs.	0.0005	0.0008	0.0052	0.0030	0.0005	0.0012	0.0012	0.0051

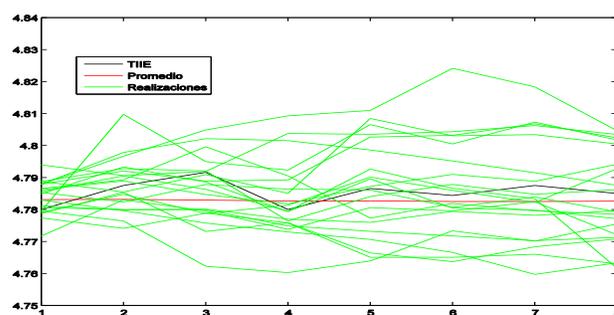
Tabla 1 Valores de la TIIIE y sus pronósticos del 8 al 17 de agosto de 2012



Gráfica 10 Pronóstico mediante una realización

Se observa además que la diferencia absoluta máxima entre los ocho valores estimados y los ofrecidos por el mercado es 0.0056, mientras que la diferencia absoluta promedio de los ocho pronósticos es .00272.

En la Gráfica 11 observamos 20 repeticiones del proceso, así como los valores promedio de 2000 repeticiones del mismo y el valor de referencia de la TIIIE.



Gráfica 11 Veinte repeticiones del pronóstico y su promedio

Fecha	8/08/12	9/08/12	10/08/12	13/08/12	14/08/12	15/08/12	16/08/12	17/08/12
TIIIE	4.7800	4.7875	4.7916	4.7800	4.7866	4.7844	4.7875	4.7850
Promedio	4.782728	4.782771	4.782694	4.782686	4.782537	4.7826133	4.78254	4.78246
Error Abs.	0.00272	0.00472	0.00890	0.002686	0.004032	0.0017866	0.004957	0.00253

Tabla 2 Valores de la TIIIE y promedio de 2000 pronósticos

Así, la diferencia máxima absoluta entre el promedio de las 2000 repeticiones del proceso y el valor de la TIIIE para los días bancarios comprendidos del 8 al 17 de agosto de 2012 es 0.00272. Mientras que su diferencia absoluta promedio es 0.00404.

### Conclusiones

A través de un proceso auto-recursivo de orden uno se realizó el modelado de la tasa interbancaria de equilibrio a 28 días para el periodo comprendido entre el 7 de febrero de 2012 y el 7 de agosto del mismo año. Dicho modelado permitió realizar pronósticos para los 8 días bancarios posteriores, que en la versión obtenida al promediar 2000 pronósticos individuales arroja un error absoluto promedio del orden de  $10^{-3}$ . Un estudio posterior puede realizarse al considerar toda la serie histórica de la TIIIE a 28 días y considerar la posibilidad de correlaciones de órdenes mayores.

### Referencias

Banco de México: [www.banxico.org.mx/](http://www.banxico.org.mx/)

Bercu B., Chafaï D., Modélisation stochastique et simulation, París, DUNOD, 2007, 335 pp.

Bercu B., Proia F, A sharp analysis on the asymptotic behavior of the Durbin-Watson statistic for the first order autoregressive process, ESAIM PS, vol. 16, 2012

Brémaud P., Markov Chains Gibbs fields, Monte Carlo simulation and queues, Nueva York, Springer, 2010, 445 pp.

Chernick M.R., Bootstrap methods, a guide for practitioners and researchers, Nueva Jersey, Wiley, 2007, 400 pp.

De Lara Haro A., Medición y control de riesgos financieros, México D.F., Limusa, 2005, 223 pp.

Ross S.M., Introductory Statistics, Second Edition, San Diego Ca. Elsevier Inc., 2005, 813 pp.

Ruppert D., Statistics and finance, an introduction, Nueva York, Springer Verlag, 2004, 485 pp.