La construcción de modelos geométricos dinámicos para formular y resolver problemas

The construction of dynamic geometric models to formulate and solve problems

AGUILAR-MAGALLÓN, Daniel†, [1]POVEDA-FERNÁNDEZ, William y [2]OLVERA-MARTÍNEZ, Carmen*

ID 1er Autor: *Daniel Aurelio, Aguilar-Magallón* / **ORC ID:** 0000-0001-7520-4508, **Researcher ID Thomson:** V-2050-2018, **CVU CONACYT ID:** 486327

ID 1er Coautor: *William, Poveda-Fernández* / **ORC ID:** 0000-0002-7245-8278, **Researcher ID Thomson:** V-1424-2018, **CVU CONACYT ID:** 627826

ID 2do Coautor: *María del Carmen, Olvera-Martínez* / **ORC ID:** 0000-0001-7361-1687, **Researcher ID Thomson:** U-9456-2018, **CVU CONACYT ID:** 230198

[1]*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados - Instituto Politécnico Nacional*
[2] *Universidad Juárez del Estado de Durango*

D. Aguilar, W. Poveda, C. Olvera

carmen.olvera@ujed.mx

A. López, C. Lima, J. Reyes (Dirs.) Educación para todos. Tópicos Selectos de Educación en CITeM. ©ECORFAN-México, 2018.

Abstract

We report and analyze episodes of problem solving related to the construction of dynamic configurations during a master's course in Mathematics Education. What are the heuristics and strategies that teachers and future teachers exhibit in the process of constructing dynamic representations of the figure in a geometric problem? The results show that the use of GeoGebra can be useful to motivate and involve teachers in various episodes of problem posing and problem solving. In this way, some important strategies were to relax the conditions of the problem, the exploration of particular cases, the search of patterns and invariants and the visualization of loci of intersection points.

Problem Solving, Technology, Geometric Thinking, Preparation of Teachers in Training

1 Introducción

La resolución de problemas es un tema importante en la agenda de investigación en Educación Matemática. Por un lado, se ha usado como marco conceptual que ayuda a comprender cuestiones cognitivas, metacognitivas y afectivas relacionadas con el proceso de solución de problemas; en particular, las formas en que un individuo utiliza sus recursos matemáticos, estrategias y heurísticas cuando se enfrenta a situaciones problemáticas desafiantes o problemas no rutinarios (Schoenfeld, 1985). Por otro lado, la resolución de problemas ha sustentado propuestas de currículos matemáticos y prácticas de enseñanza (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2011). Actualmente, se reconoce que el uso de tecnologías digitales, como un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), permite transformar escenarios de enseñanza alrededor de la resolución de problemas al generar oportunidades para desarrollar conocimiento matemático (Santos-Trigo, Reyes-Martínez & Aguilar-Magallón, 2016). En esta dirección, surge la necesidad de conocer cómo el uso de distintas herramientas digitales ofrece a los individuos diversos caminos y oportunidades para representar, explorar, comprender, resolver, formular, generalizar y extender problemas.

En el enfoque de la resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales, un principio fundamental es el desarrollo de una actitud inquisitiva en el individuo, es decir, que reconozca a la resolución de problemas como una oportunidad para plantear preguntas relevantes de forma constante y sistemática que le ayuden en su actividad matemática (Santos-Trigo, Reyes-Martínez, & Aguilar-Magallón, 2015). Es por esto que, la habilidad para plantear nuevos problemas ha sido foco de atención de investigadores y educadores quienes se interesan en los procesos de planteamiento de problemas como un aspecto fundamental de las matemáticas y su aprendizaje (Misfeldt & Johansen, 2015).

Con base en estas ideas y considerando que la habilidad de plantear problemas debe ser un aspecto fundamental de la educación no solo matemática, sino de la formación integral de todo individuo (Arikan & Unal, 2014), resulta importante investigar en qué medida el uso de tecnologías digitales, en particular el uso del SGD GeoGebra, permite a los individuos involucrarse en actividades de planteamiento de problemas. En este sentido, el estudio que se presenta se enfoca en conocer cuáles son los recursos, heurísticas y estrategias que exhiben profesores de matemáticas de bachillerato al formular y resolver problemas relacionados con la construcción de representaciones dinámicas de figuras presentes en problemas geométricos de demostración.

2 Marco Conceptual

La formulación de preguntas relevantes o actitud inquisitiva al enfrentarse a situaciones problemáticas es un aspecto central de la actividad matemática de un individuo (Polya, 1965). Comúnmente, el planteamiento de preguntas durante todo el proceso de resolución de problemas conduce a la formulación de nuevos problemas (Osana & Pelczer, 2015). En este sentido, la formulación de preguntas y nuevos problemas puede presentarse dentro del proceso de resolución de problemas en tres etapas: 1) *antes de resolver problemas*, cuando se genera un problema original a partir de una situación dada (Leikin, 2015); 2) *durante la resolución de problemas*, cuando se reformula un problema aplicando algunas heurísticas como relajar condiciones del problema (que implica resolver un problema más simple), analizar casos particulares o resolver un problema similar con el objetivo de hacer más accesible su solución (Cai et al., 2013); y, 3) *después de resolver problemas*, cuando se formula un problema nuevo modificando, extendiendo o generalizando los objetivos o condiciones de un problema que ya ha sido resuelto (Brown & Walter, 2005).

El planteamiento de preguntas y problemas es importante no solo para el desarrollo de habilidades matemáticas en profesores y futuros profesores, sino también para el desarrollo de habilidades didácticas (Tichá & Hošpesová, 2009). El profesor comúnmente necesita formular y reformular problemas, que van más allá de los problemas tradicionales del libro de texto, con objetivos didácticos específicos en función de las necesidades de sus estudiantes como: enseñar o reforzar un concepto particular o ayudar al estudiante a superar errores e ideas mal entendidas (Osana & Pelczer, 2015). En la literatura se reconoce que, en general, profesores y futuros profesores tienen serias dificultades al enfrentarse a tareas de planteamiento de problemas (Rosli et al., 2015). En esta dirección, se resalta la necesidad de programas de formación de profesores y futuros profesores en donde tengan la oportunidad de enfrentarse a diversas tareas de planteamiento de problemas para mejorar su habilidad matemática y didáctica.

¿Cuál es el papel de las herramientas digitales en el planteamiento de preguntas y problemas y en la formación de profesores para desarrollar habilidades de formulación y reformulación problemas? Leikin (2015) argumenta que el uso de un SGD es útil para formular preguntas y problemas relacionados con el análisis de relaciones matemáticas presentes en figuras que se usan para resolver problemas geométricos de demostración. Aguilar-Magallón y Reyes-Martínez (2016) afirman que las permisibilidades de un SGD como el arrastre de objetos geométricos, la medición de atributos (longitudes, ángulos, áreas, etc.), el uso de deslizadores y la visualización de lugares geométricos son estrategias que permiten motivar diversos episodios de formulación y resolución de problemas. Aguilar-Magallón y Poveda Fernández (2015) mencionan que algunas heurísticas fundamentales para formular y resolver problemas con ayuda de un SGD son relajar las condiciones del problema, analizar casos particulares y visualizar patrones e invariantes.

3 Metodología

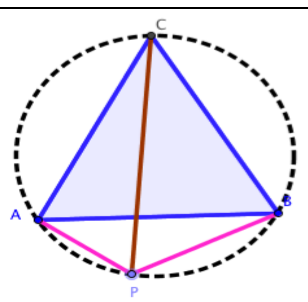
3.1 Participantes

En el estudio participaron nueve profesores de matemáticas de bachillerato durante cuatro sesiones semanales con duración de tres horas cada una, dentro de un curso de Maestría en Educación Matemática. Los participantes contaban con perfil matemático ya que su formación académica estaba relacionada con esta disciplina.

3.2 El problema

Para este reporte se analizan los procesos de formulación y resolución de problemas que surgieron a partir del análisis de la figura presente en el problema geométrico de demostración mostrado en la Figura 7.1.

Figura 7.1 Problema geométrico de demostración

	Sea ABC un triángulo equilátero y P cualquier punto de la circunferencia que lo circunscribe, demostrar que $AP + BP = CP$.

Fuente: Problema propuesto en el curso de maestría en Educación Matemática del CINVESTAV

3.3 Implementación de la actividad y recolección de datos

La actividad se implementó de forma presencial, en un laboratorio de cómputo, durante cuatro sesiones semanales de tres horas cada una. Una primera parte de las sesiones consistió en el trabajo individual o por parejas de los participantes y todos tuvieron acceso a una computadora. Otra fase importante en el desarrollo de las sesiones fueron las discusiones plenarias de las ideas de los participantes para explorar o resolver el problema; cada participante exponía sus avances a todo el grupo.

La formulación de preguntas y problemas fue un aspecto esencial en el desarrollo e implementación de este estudio. Así, el problema sirvió como punto de partida para plantear y resolver diversos problemas.

Los datos para el estudio se recolectaron a través de videograbaciones de las sesiones presenciales, las hojas de trabajo de GeoGebra y reportes escritos por los participantes en procesador de texto.

4 Resultados

En esta sección se exponen los episodios de formulación y resolución de problemas que fueron motivados por el uso de GeoGebra. En particular, el análisis se centró en las formas de razonamiento, recursos y heurísticas que exhibieron los participantes en este proceso.

4.1 Construcción de una representación dinámica del problema

En un principio, todos los participantes fueron capaces de resolver el problema de manera algebraica utilizando distintos recursos como trigonometría y semejanza. Posteriormente, en una discusión plenaria, surgió la siguiente pregunta: dada la figura del problema ¿cómo se construye utilizando el SGD? Todos los participantes afirmaron que para construirla bastaba con trazar primero un triángulo equilátero y después su circunferencia circunscrita. Sin embargo, ningún participante se preguntó si había otra forma de construirla, por lo que el investigador cuestionó ¿será la única manera de obtener la construcción? Así, los participantes formularon el siguiente problema:

PP1. Dada una circunferencia cualquiera, trazar un triángulo equilátero inscrito en dicha circunferencia

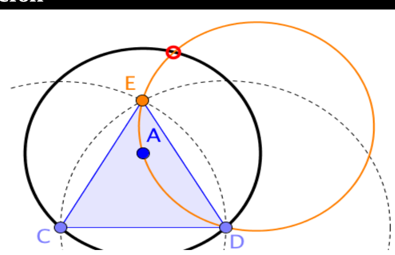
Las soluciones iniciales que presentaron los participantes fueron estáticas, es decir, estaban apoyadas en el concepto de rotación y el método con regla y compás para trazar un hexágono regular. Luego, desarrollaron acercamientos dinámicos en los que involucraron la visualización de lugares geométricos, en los cuales la principal heurística de resolución de problemas fue la de relajar las condiciones del problema.

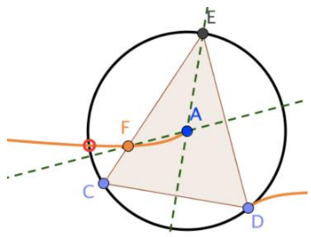
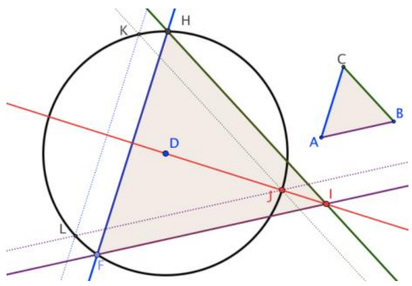
En otras palabras, los participantes trazaron triángulos que cumplían de forma parcial las condiciones del problema; por ejemplo, construyeron un triángulo equilátero con dos vértices sobre la circunferencia (el tercer vértice no estaba sobre la circunferencia) y un triángulo isósceles inscrito en la circunferencia (el triángulo no era equilátero). Después, mediante el movimiento de la construcción plantearon las condiciones necesarias para resolver el problema.

En la Tabla 7.1 se muestran los acercamientos dinámicos y las respectivas estrategias de solución del problema. Se observa el uso de lugar geométrico como herramienta para resolver problemas, sin embargo, en una primera instancia las soluciones se quedan en un nivel visual y empírico debido a que en GeoGebra no es posible intersecar lugares geométricos.

Esta dificultad motivó la formulación de nuevos problemas relacionados con el análisis de los lugares geométricos para conseguir la solución al problema en términos de intersecciones de éstos.

Tabla 7.1 Acercamientos dinámicos exhibidos por los participantes

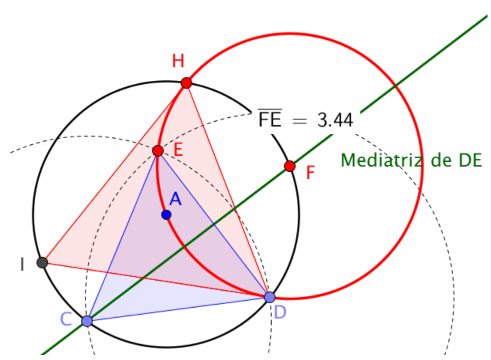
Construcción	Análisis
 1. Puntos C y D móviles. Se traza el triángulo CDE equilátero por medio de circunferencias. Lugar geométrico descrito por el punto E cuando se mueve el punto C.	***Recursos.*** Triángulo equilátero y lugar geométrico. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema. El triángulo CDE es equilátero, pero tiene sólo dos vértices inscritos en la circunferencia. Así, la estrategia de exploración consiste en mover el punto C hasta que el punto E pertenezca a la circunferencia inicial. ***Solución empírica.*** La intersección del lugar geométrico descrito por el punto E con la circunferencia inicial define uno de los vértices del triángulo equilátero inscrito (otro es el punto D y el último se encuentra por construcción).

 2. Puntos C y D móviles en la circunferencia. Mediatriz de segmento CD. Punto E de intersección de la mediatriz con la circunferencia. Mediatriz del segmento ED y su punto de intersección F con la recta CE. Lugar geométrico del punto F al mover el punto C.	***Recursos.*** Triángulo isósceles inscrito a una circunferencia, lugar geométrico y mediatriz. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema. El triángulo CDE es isósceles inscrito a la circunferencia, pero no es equilátero. Así, la estrategia de exploración consiste en mover el punto C hasta que el triángulo CDE sea equilátero. ***Solución empírica.*** Cuando el punto F y el punto C coincidan, el triángulo CDE será equilátero. El punto de intersección del lugar geométrico descrito por F con la circunferencia inicial define la posición exacta de un vértice del triángulo equilátero (siendo el punto D otro de los vértices del triángulo solución).
 3. Triángulo ABC equilátero cualquiera. Punto F móvil sobre la circunferencia. Paralela al lado CA que pasa por el punto F y su punto de intersección H con la circunferencia inicial. Paralela al lado BC por el punto H y paralela al lado AB que pasa por el punto F; punto de intersección I entre esas dos paralelas. Lugar geométrico del punto I al mover F.	***Recursos.*** Triángulo equilátero, semejanza y lugar geométrico. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema. El triángulo FIH es equilátero, pero tiene sólo dos vértices inscritos en la circunferencia. Así, la estrategia de exploración consiste en mover el punto F hasta que el punto I pertenezca a la circunferencia inicial. ***Solución robusta.*** El punto J de intersección del lugar geométrico descrito por I (recta DI) con la circunferencia inicial define la posición exacta de un vértice del triángulo solución. Para encontrar el triángulo inscrito se trazan paralelas a los lados de los triángulos ABC o FIH, a partir del punto J.

Fuente: Elaboración propia con producciones de los participantes.

Para poder intersecar lugares geométricos (en GeoGebra) se requiere transformarlos en objetos geométricos robustos; en otras palabras, que su construcción dependa de ciertos elementos bien definidos. Por ejemplo, para robustecer un lugar geométrico que es una recta se requieren dos puntos que pertenezcan a dicha recta; para robustecer una circunferencia se necesita su centro y radio; una parábola robusta se construye a partir de su foco y directriz. Las exploraciones dinámicas hechas por los participantes culminaron en la visualización de tres lugares geométricos y conjeturaron que, el primer lugar geométrico era una circunferencia, el segundo una hipérbola y el tercero una recta. En la búsqueda del centro para trazar de forma robusta la supuesta circunferencia, los participantes se dieron cuenta que la intersección F de la mediatriz del segmento variable DE con la circunferencia original era invariante (Figura 7.2). Así, supusieron que el punto F era el centro de la circunferencia y midieron la distancia al punto E para verificar que era constante. La detección de invariantes en la exploración de los modelos dinámicos de la Tabla 7.1 permitió a los participantes encontrar tres soluciones sintéticas (se pueden construir con regla y compás) al problema (Tabla 7.2).

Figura 7.2 El punto F de intersección de la mediatriz de DE con la circunferencia inicial es invariante y es el centro de la circunferencia descrita por el punto E



Fuente: Producciones de los participantes.

A continuación, se muestra la transcripción de un video donde un participante discute, de forma plenaria, el lugar geométrico del primer acercamiento (circunferencia) y cómo trazarlo de forma robusta.

1029 2:52 Participante: Entonces me di cuenta que al mover el punto E recorre un lugar, entonces lo que hice fue ver qué es lo que pasa con el lugar geométrico de E cuando muevo C y me da una circunferencia.

1029 3:32 Investigador: a ver antes, lo que preguntaba yo es ¿cómo estamos seguros de que ese lugar es una circunferencia? Entonces ahí el software también nos puede ayudar para ver que ese lugar geométrico es una circunferencia, porque ¿podría ser elipse no? Hay elipses que parecen circunferencias.

1029 4:10 Participante: Entonces tengo que encontrar el centro para ver si la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia es el mismo por la definición de circunferencia. Entonces lo que hice, bueno había varias formas de encontrar la circunferencia. Yo pensaba en poner un triángulo dentro de la circunferencia, cualquier triángulo, tres puntos en la circunferencia, agarrar el triángulo y trazar las mediatrices para encontrar el circuncentro, pero bueno también Cristina comentó que si tomábamos una secante (señala cuerda DE) y trazábamos su mediatriz, ésta sería un diámetro de la circunferencia y pues resultó que este punto donde se interseca esta mediatriz con la circunferencia (original) es exactamente el centro.

1029 5:16 Investigador: ¿Cómo descubriste eso?

1029 5:17 Participante: Bueno empíricamente, si mueves este punto (señala el punto C móvil), pues ese punto queda invariante, ¿no? (se refiere a la intersección F de la mediatriz de CE con la circunferencia inicial)

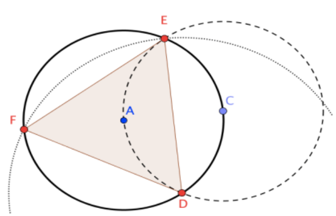
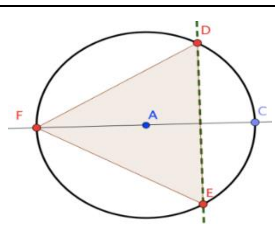
1029 5:32 Investigador: Fíjense aquí algo importante del uso de la herramienta es detectar invariantes. Intentando encontrar el centro traza la mediatriz (de DE) y resulta que el punto de intersección de dicha mediatriz y la circunferencia original es el centro de rotación de la mediatriz. Entonces es posible que sea el centro de la circunferencia.

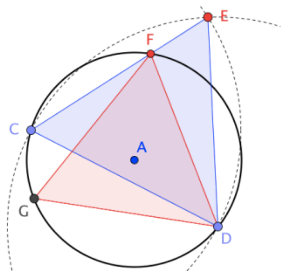
1029 6:00 Participante: Para ver si era cierto medí las distancias para ver si eran iguales y pues resulta que sí, entonces ya con el centro puedo trazar la circunferencia y ahora sí puedo encontrar el punto de intersección con la circunferencia original.

1029 8:00 Participante: Pero luego el investigador me preguntó que qué pasaba con esta circunferencia y la original, que qué observaba. Entonces pues parece ser que son iguales ¿no? Y si calculamos sus radios pues son iguales. Entonces así podría agarrar una circunferencia inicial, agarrar otra con el mismo radio y poner el centro en un punto de la circunferencia inicial y entonces ya me va a dar este segmento de aquí (lado DH del triángulo inscrito solución).

Fuente: Transcripción de videograbación sesión de trabajo

Tabla 7.2 Soluciones sintéticas encontradas por los participantes después de analizar los modelos dinámicos

Solución sintética	Descripción
1 	Punto C cualquiera sobre la circunferencia inicial con centro en A. Circunferencia con centro en C y radio CA. Los puntos de intersección E y D de las dos circunferencias formarán uno de los lados del triángulo equilátero inscrito. El tercer vértice F se encuentra con la circunferencia de centro D y radio DE.
2 	Punto C sobre la circunferencia inicial de centro A. Mediatriz del radio AC. Las intersecciones D y E de la mediatriz con la circunferencia inicial son dos vértices del triángulo equilátero inscrito. El otro vértice es la intersección de la recta AC con la circunferencia.

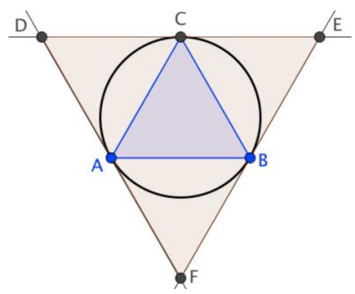
3 	Se traza cualquier triángulo equilátero con dos vértices en la circunferencia inicial tal que el vértice que no está en la circunferencia quede fuera de ella (triángulo CDE). El punto de intersección F del lado CE permanece invariante al mover el punto C. Así, los puntos D y F son dos vértices del triángulo equilátero inscrito. El tercero se encuentra por construcción tradicional.

Fuente: Elaboración propia con producciones de los participantes

4.2 Formulación de un nuevo problema

Un participante, mediante la exploración de modelos dinámicos, descubre que existe una relación entre el triángulo equilátero inscrito y el circunscrito a una circunferencia. Así, afirma que los tres puntos de tangencia de un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia definen un triángulo equilátero inscrito a la misma (Figura 7.3). Dicho participante planteó el problema de circunscribir un triángulo equilátero a la circunferencia para poder encontrar el triángulo equilátero inscrito.

Figura 7.3 Relación entre triángulo equilátero inscrito y circunscrito a una circunferencia



Fuente: Producción del participante

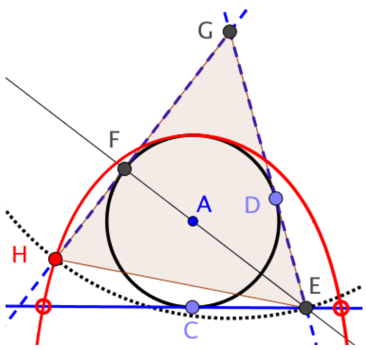
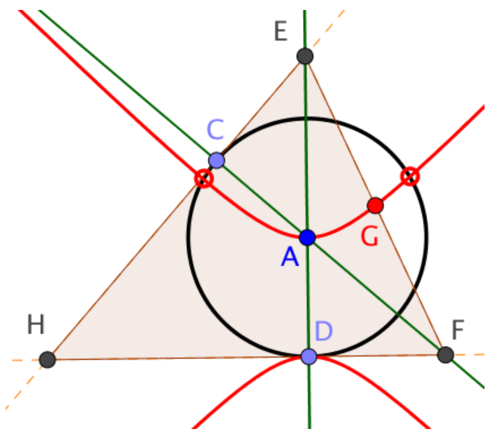
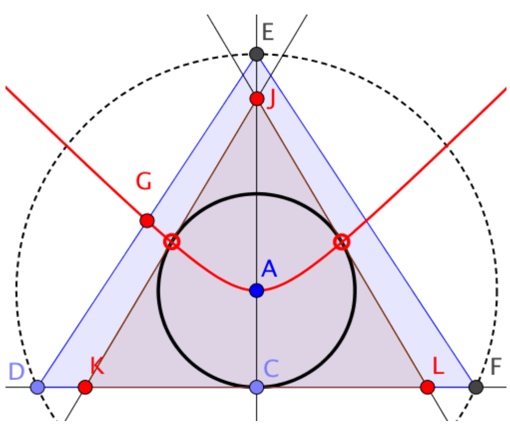
Con base en esta idea, se formuló a todo el grupo el siguiente problema:

PP2. Dada una circunferencia cualquiera trazar un triángulo equilátero circunscrito a dicha circunferencia

Algunos de los acercamientos que expusieron los participantes para resolver este problema les permitieron encontrar soluciones exactas y otros, únicamente soluciones empíricas. En las Tablas 3 y 4 se muestran exploraciones que no permitieron encontrar la solución exacta robusta debido a que no es posible intersecar lugares geométricos en GeoGebra. En la Tabla 7.4 se muestran acercamientos en donde los lugares geométricos generados fueron curvas polares. En todas estas soluciones empíricas, se usó la heurística de relajar las condiciones del problema.

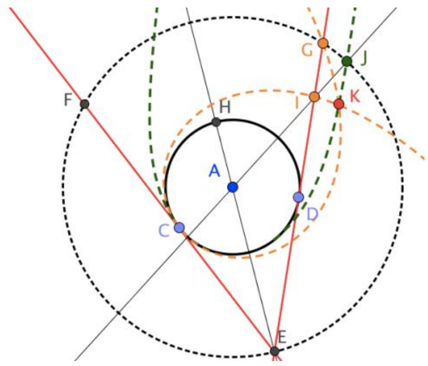
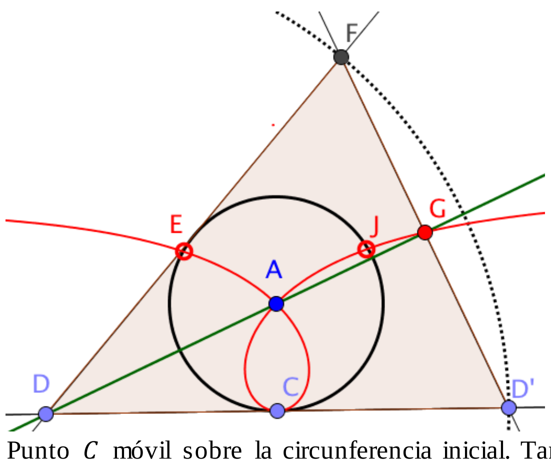
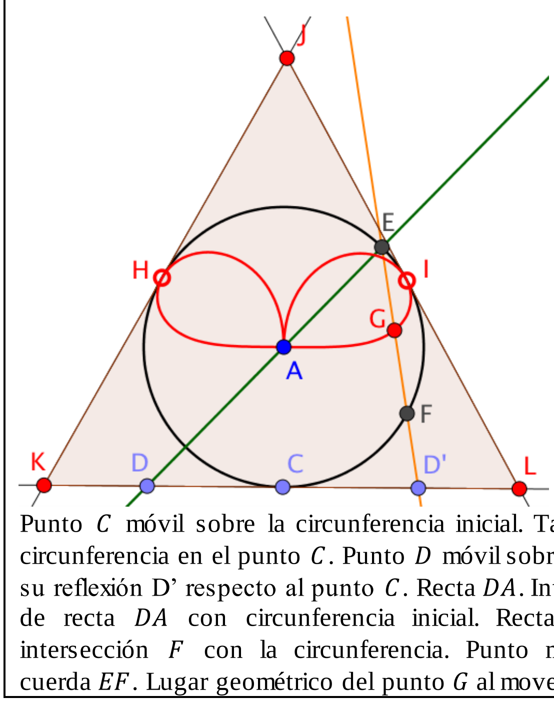
En estos acercamientos los participantes escogieron una condición del triángulo circunscrito y la relajaron para construir un modelo dinámico más simple, en otras palabras, que cumplieran de manera parcial las condiciones del problema. Por ejemplo, algunos participantes decidieron construir una familia de triángulos isósceles, mientras que otros construyeron una familia de triángulos equiláteros con dos lados circunscritos. Luego, mediante el movimiento buscaron el momento en que la construcción cumplía con todas las condiciones del problema.

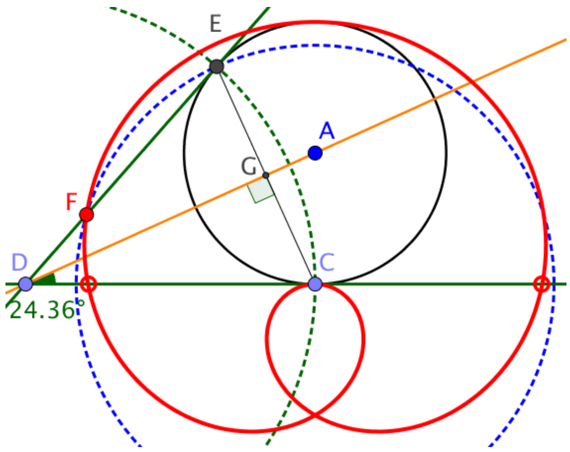
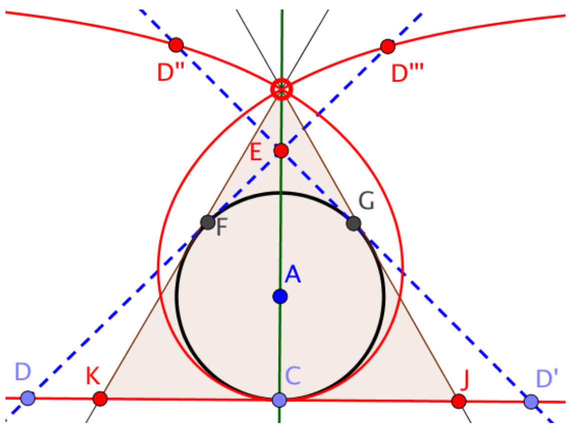
Tabla 7.3 Acercamientos dinámicos que involucran el uso de lugares geométricos y soluciones empíricas

Construcción	Análisis
 Tangentes a la circunferencia por los puntos C y D móviles. Punto E de intersección de las tangentes. Punto F de intersección entre la recta AE y la circunferencia inicial. Tangente a la circunferencia por el punto F. Punto G de intersección entre las tangentes que pasan por D y F. Circunferencia con centro en G y radio GE; punto H de intersección de dicha circunferencia con la tangente que pasa por F. Lugar geométrico del punto H al mover el punto D.	***Recursos.*** En un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia, las alturas pasan por el centro de dicha circunferencia y por el punto de tangencia. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan relaciones matemáticas específicas. Triángulo HEG es isósceles y tiene dos lados tangentes a la circunferencia. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto D el triángulo HEG es equilátero y con el lado HE tangente a la circunferencia? ***Estrategia de solución.*** Mover el punto D hasta que el punto H se encuentre sobre la recta tangente a la circunferencia que pasa por C. ***Solución empírica.*** La intersección del lugar geométrico descrito por el punto H (al mover el punto D) con la recta tangente que pasa por C determina dos vértices del triángulo equilátero circunscrito. El tercero se encuentra por construcción.
 Tangentes a la circunferencia por los puntos C y D móviles. Punto H de intersección de las tangentes. Rectas perpendiculares a las tangentes por los puntos D y C. Puntos E y F de intersección de las perpendiculares con las tangentes. Punto medio G de segmento EF. Lugar geométrico del punto G al mover el punto C.	***Recursos.*** En un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia, las alturas pasan por el centro de dicha circunferencia y por el punto de tangencia. El punto medio de los lados del triángulo equilátero circunscrito es el punto de tangencia. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan las relaciones matemáticas específicas. Triángulo HFE es isósceles y tiene dos lados tangentes a la circunferencia. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto C el punto medio G de EF se convierte en punto de tangencia? ***Estrategia de solución.*** Mover el punto C hasta que el punto G se encuentre sobre la circunferencia inicial. ***Solución empírica.*** Las intersecciones del lugar geométrico descrito por el punto G (al mover el punto C) con la circunferencia inicial determinan dos puntos de tangencia del triángulo equilátero circunscrito. El tercer punto de tangencia es el punto D.
 Punto C móvil sobre circunferencia. Tangente a la circunferencia por el punto C. Punto D móvil sobre recta tangente. Circunferencia con centro en A y radio AD; punto F de intersección de dicha circunferencia con la tangente que pasa por C. Recta CA. Punto E de intersección de la recta CA y la circunferencia de radio AD. Triángulo DFE. Punto medio G de lado DE. Lugar geométrico de punto G al mover el punto D.	***Recursos.*** El punto medio de los lados del triángulo equilátero circunscrito es el punto de tangencia. Circunferencia inscrita y circunscrita a un triángulo equilátero tienen el mismo centro. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan las relaciones matemáticas específicas. Triángulo DFE es isósceles y tiene un lado tangente a la circunferencia. Además, el punto C de tangencia es el punto medio del lado DF del triángulo. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto D el punto medio G de ED se convierte en punto de tangencia? ***Estrategia de solución.*** Mover el punto D hasta que el punto G se encuentre sobre la circunferencia inicial. ***Solución empírica.*** La intersección del lugar geométrico descrito por el punto G (al mover el punto D) con la circunferencia inicial determina dos puntos de tangencia faltantes del triángulo equilátero circunscrito.

Fuente: Elaboración propia con producciones de los participantes

Tabla 7.4 Acercamientos dinámicos que involucran el uso de curvas polares y soluciones empíricas

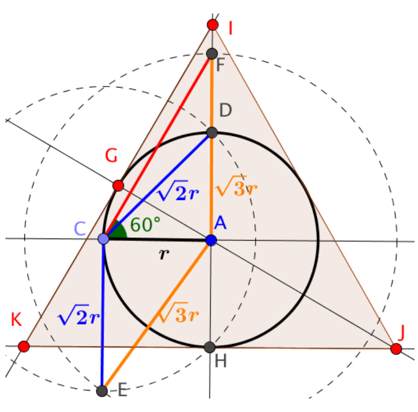
Construcción	**Análisis**
 Puntos C y D móviles sobre la circunferencia inicial (de centro A) y sus respectivas tangentes. Punto E de intersección de las rectas tangentes. Circunferencia con centro en A y radio AE; puntos F y G de intersección de dicha circunferencia con las rectas tangentes. Mediatriz de segmento FE y sus puntos de intersección I y J con la tangente y la circunferencia de radio AE respectivamente. Lugar geométrico de los puntos G y J.	***Recursos.*** En un triángulo equilátero la mediatriz de un lado pasa por el vértice opuesto. Circunferencia circunscrita. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan ciertas relaciones matemáticas. Triángulo FEG es isósceles y tiene dos lados tangentes a la circunferencia. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto D la mediatriz del segmento FE pasa por el vértice G del triángulo FEG? ***Estrategia de solución.*** Mover el punto D hasta que los puntos G y J coincidan. ***Solución empírica.*** La intersección (punto K) de los lugares geométricos descritos por los puntos G y J al mover el punto D determina un vértice del triángulo equilátero circunscrito; A partir del cual se trazan las tangentes a la circunferencia para obtener los otros vértices.
 Punto C móvil sobre la circunferencia inicial. Tangente a la circunferencia por el punto C. Punto D móvil sobre tangente y su reflexión D' respecto al punto C. Tangente a la circunferencia que pasa por el punto D. Circunferencia con centro en D y radio DD'; intersección F de dicha circunferencia con la tangente que pasa por D. Punto medio G del segmento FD'. Lugar geométrico del punto G al mover el punto D.	***Recursos.*** En un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia el punto de tangencia es el punto medio del lado correspondiente del triángulo. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan las relaciones matemáticas específicas. Triángulo FDD' es isósceles y tiene dos lados tangentes a la circunferencia, además, el punto de tangencia C es punto medio del lado DD'. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto D el punto medio G del segmento FD' se convierte en punto de tangencia? ***Estrategia de solución.*** Mover el punto D hasta que el punto G esté sobre la circunferencia inicial. ***Solución empírica.*** Las intersecciones (E, J y C) del lugar geométrico descrito por el punto G (al mover el punto D) con la circunferencia inicial determina los tres puntos de tangencia del triángulo equilátero circunscrito.
 Punto C móvil sobre la circunferencia inicial. Tangente a la circunferencia en el punto C. Punto D móvil sobre tangente y su reflexión D' respecto al punto C. Recta DA. Intersección E de recta DA con circunferencia inicial. Recta ED' y su intersección F con la circunferencia. Punto medio G de cuerda EF. Lugar geométrico del punto G al mover punto D.	***Recursos.*** En un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia el punto de tangencia es el punto medio del lado correspondiente del triángulo. La bisectriz de un ángulo del triángulo equilátero circunscrito pasa por el centro de la circunferencia inscrita y por el punto de tangencia del lado opuesto. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan las relaciones matemáticas específicas. Se suponen las rectas DD' y ED' como lados del triángulo circunscrito y la recta DA una bisectriz. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto D la recta ED' es tangente a la circunferencia inicial? ***Estrategia de solución.*** Mover el punto D hasta que los puntos E, F y G coincidan. Visualizar el lugar geométrico del punto G. ***Solución empírica.*** Las intersecciones (H e I) del lugar geométrico descrito por el punto G (al mover el punto D) con la circunferencia inicial determinan los dos puntos de tangencia faltantes del triángulo equilátero circunscrito (C es el otro).

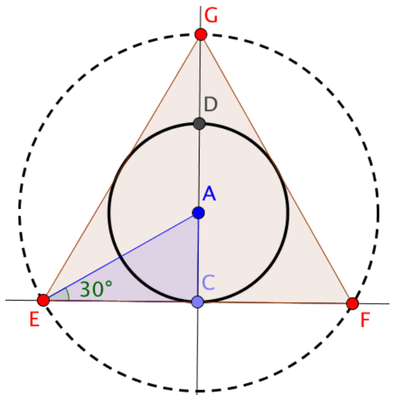
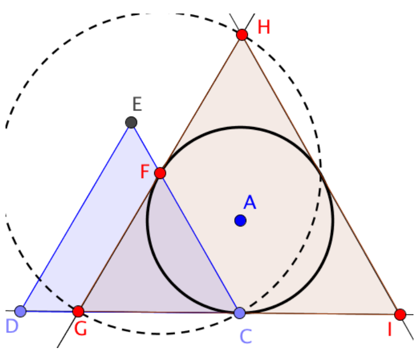
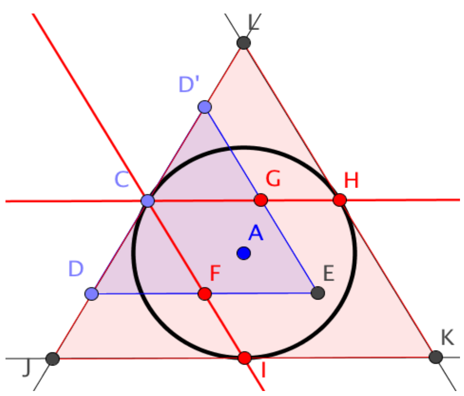
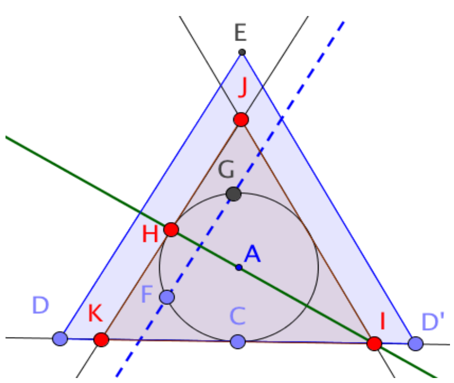
Construcción	Análisis
 Tangente a la circunferencia por el punto C móvil. Punto D móvil sobre tangente. Recta DA. Circunferencia con centro en D y radio DC; y su intersección E con la circunferencia inicial. Recta DE. Punto medio G de cuerda EC. Circunferencia con centro en C y radio CE; y su intersección F con la recta DE. Lugar geométrico del punto F al mover el punto D.	***Recursos.*** Las distancias del vértice de un triángulo circunscrito a los puntos de tangencia con la circunferencia inscrita (determinados por los lados que forman el vértice) son iguales. En un triángulo rectángulo con un ángulo de 30º se cumple que el cateto opuesto a dicho ángulo es la mitad de la hipotenusa. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan relaciones matemáticas específicas. Se suponen las rectas DD' y DE como lados del triángulo circunscrito y la recta DA una bisectriz. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto D el ángulo CDG es de 30º ? ***Estrategia de solución.*** La circunferencia con centro en C y radio CE sirve para duplicar la longitud del cateto CG, así CF mide dos veces CG. Mover el punto D hasta que la hipotenusa CD sea el doble del cateto CG, es decir, hasta que F y D coincidan. ***Solución empírica.*** Las intersecciones del lugar geométrico descrito por el punto F con la recta tangente que pasa por C determinan dos vértices del triángulo solución.
 Tangente a la circunferencia por el punto C móvil. Punto D móvil sobre tangente y su reflexión D' respecto al punto C. Tangentes a la circunferencia que pasan por D y D' y sus respectivos puntos de tangencia F y G. Reflexiones D''' y D'' de los puntos D y D' con respecto a F y G respectivamente. Lugar geométrico de los puntos D'' y D'''.	***Recursos.*** En un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia el punto de tangencia es el punto medio del lado correspondiente del triángulo. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan las relaciones matemáticas específicas. Se suponen las rectas DD', DF y $D'G$ como lados del triángulo circunscrito. Triángulo $DD'E$ es isósceles con tres lados tangentes a la circunferencia. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto D Los puntos de tangencia F y G se vuelven puntos medios de los lados DE y $D'E$ respectivamente? ***Estrategia de solución.*** La solución se encuentra cuando las reflexiones D'' y D''' coincidan con el punto E. ***Solución empírica.*** La intersección del lugar geométrico descrito por los puntos D'' y D''' con la recta AC es el vértice buscado.

Fuente: Producciones de los participantes

Las exploraciones dinámicas y los acercamientos a la solución del problema mostrados en las tablas 3 y 4 permitieron a los participantes encontrar algunas soluciones exactas sintéticas (Tabla 7.5).

Tabla 7.5 Soluciones sintéticas

Construcción	Análisis
 	***Recurso clave.*** Un triángulo rectángulo en el que la proporción entre sus catetos es de $\sqrt{3}$ tendrá un ángulo de 60º. ***Estrategia.*** Construir de forma geométrica un triángulo rectángulo con un ángulo de 60º. ***Solución.*** Las rectas AC y AD son perpendiculares. Así la longitud del segmento CD es $\sqrt{2}r$. Con la circunferencia de centro en C y radio CD y la perpendicular a la recta CA por el punto C se garantiza que el segmento CE mida $\sqrt{2}r$. Del triángulo rectángulo CEA se tiene que EA mide $\sqrt{3}r$. Se traza una circunferencia con centro en A y radio AE para trasladar la longitud $\sqrt{3}r$ a la recta AD (segmento AF). Así, el triángulo ACF tiene catetos de longitud $AF = \sqrt{3}r$ y $AC = r$. Por lo que el ángulo ACF mide 60º. Finalmente se traza la recta perpendicular a CF que pasa por A y se encuentra el punto de intersección G con la circunferencia inicial. G será otro punto de tangencia.

	***Recurso clave.*** En un triángulo rectángulo con un ángulo de 30º se cumple que el cateto opuesto a dicho ángulo es la mitad de la hipotenusa. El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero es el doble del radio de la circunferencia inscrita. ***Estrategia.*** Construir una circunferencia con centro en A y con el doble del radio de la circunferencia inicial. ***Solución.*** Se traza la tangente a la circunferencia inicial por un punto cualquiera C (móvil). Se traza una circunferencia con centro en A y radio $2AC$. Los puntos de intersección E y F de la circunferencia de radio $2AC$ con la recta tangente (que pasa por C) determinan dos vértices del triángulo equilátero circunscrito.
	***Recurso clave.*** Semejanza de triángulos. ***Estrategia.*** Dado un triángulo equilátero con un lado tangente a la circunferencia inicial y un vértice sobre la misma, construir otro triángulo equilátero con dos lados tangentes a la circunferencia. ***Solución.*** Se traza la tangente a la circunferencia inicial por un punto cualquiera C (móvil). Se traza un punto móvil D sobre esta tangente y un triángulo DCE equilátero de lado DC. El lugar geométrico del punto E al mover el punto D es el lado EC. Así, se encuentra el punto de intersección F del lado (o su prolongación) del triángulo equilátero con la circunferencia inicial. El punto F es invariante sin importar el movimiento del punto D y determina otro de los puntos de tangencia del triángulo solución.
	***Recurso clave.*** Semejanza de triángulos. ***Estrategia.*** Trazar un triángulo equilátero DED' con un lado tangente a la circunferencia inicial y dos vértices (D y D') simétricos respecto al punto de tangencia (C). Luego trazar un triángulo semejante que cumpla con las condiciones del problema. ***Solución.*** Se encuentran los puntos medios G y F de los lados $D'E$ y DE respectivamente y se observa que para alguna posición del punto D estos serán los puntos de tangencia. Los lugares geométricos descritos por los puntos F y G son rectas paralelas a los lados del triángulo equilátero $DD'E$ auxiliar. Así, para resolver el problema se trazan las rectas paralelas a los lados $D'E$ y DE que pasen por el punto C y se encuentran sus puntos de intersección I y H con la circunferencia inicial. Los puntos I y H serán los puntos de tangencia faltantes del triángulo solución.
	***Recurso clave.*** Semejanza de triángulos. ***Estrategia.*** Trazar un triángulo equilátero $DD'E$ con un lado tangente a la circunferencia inicial y dos vértices (D y D') simétricos respecto al punto de tangencia (C). Luego trazar un triángulo semejante que cumpla con las condiciones del problema. ***Solución.*** Se coloca un punto móvil F sobre la circunferencia por el que se traza una recta paralela al lado DE del triángulo equilátero auxiliar. Se encuentra el punto G de intersección de la paralela con la circunferencia inicial y se traza la mediatriz de FG. El punto H de intersección de la mediatriz de FG con la circunferencia será un punto de tangencia del triángulo solución.

Fuente: Producciones de los participantes

5 Discusión de resultados

Con ayuda del SGD, los participantes pudieron encontrar tres tipos de soluciones a los problemas planteados PP1 y PP2: soluciones empíricas, exactas robustas y exactas sintéticas. En una primera instancia, debido a que en GeoGebra no se pueden intersecar lugares geométricos, las soluciones encontradas fueron visuales o empíricas. Para encontrar las soluciones robustas (en términos de intersecciones) se requirió transformar (robustecer) los lugares geométricos en objetos reconocidos por la herramienta. Es importante mencionar que esta transformación es posible únicamente si los lugares geométricos son rectas, circunferencias, cónicas o si se tiene su ecuación.

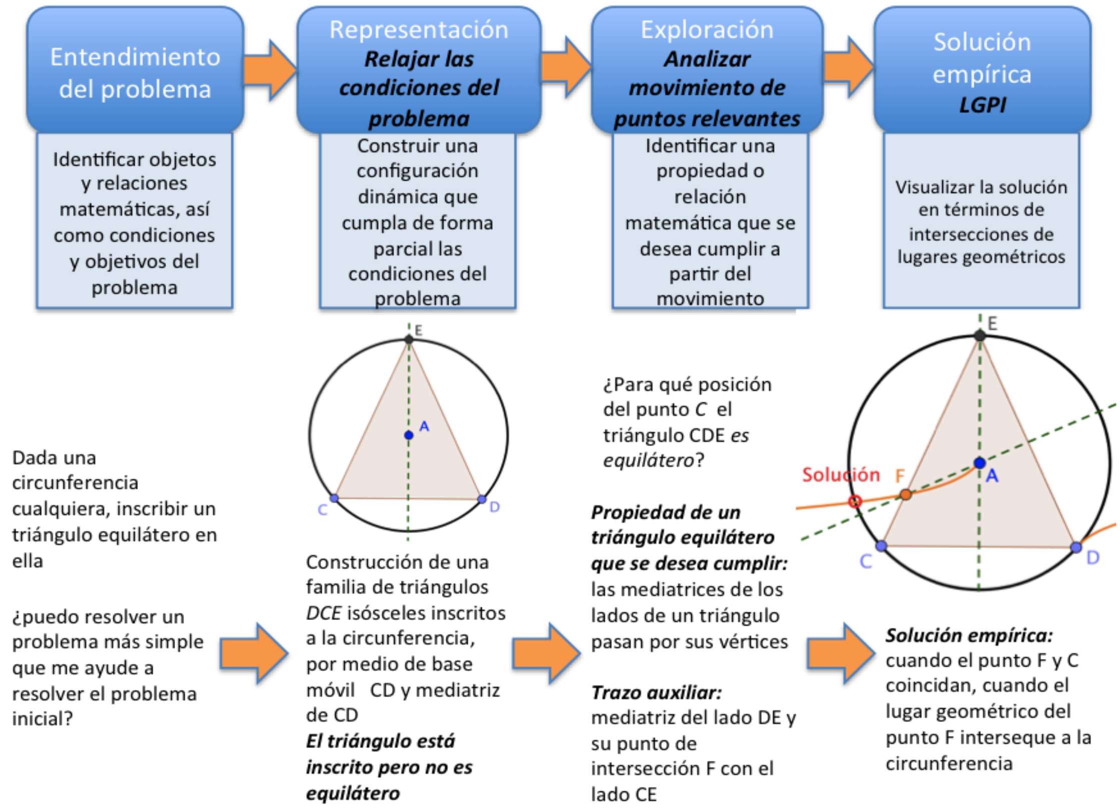
Así, un camino para transformar lugares geométricos en objetos geométricos robustos consiste en encontrar ciertos elementos importantes. Por ejemplo, los participantes tuvieron que obtener el centro de la supuesta circunferencia usada en la primera solución empírica (Tabla 7.1). Por otro lado, las soluciones sintéticas consisten únicamente de trazos geométricos básicos (regla y compás), es decir, no dependen de lugares geométricos. No obstante, en este estudio se mostraron ejemplos en donde la exploración de configuraciones dinámicas por medio de la variación y análisis de lugares geométricos permitió a los participantes obtener soluciones sintéticas (Tabla 7.2 y Tabla 7.5). Tanto para las soluciones empíricas como para las soluciones exactas (robustas y sintéticas), fueron importantes las heurísticas de visualizar patrones o lugares geométricos, explorar casos particulares y detectar invariantes. En la Figura 7.4, se muestra una caracterización del tipo de soluciones que se encontraron con ayuda del SGD y el proceso involucrado.

Figura 7.4 Caracterización del tipo de soluciones a los problemas encontradas con el SGD

Fuente: Elaboración propia

Los resultados de este estudio se pueden caracterizar alrededor de la estrategia de visualizar lugares geométricos de puntos de intersección (LGPI), la cuál puede ser útil para resolver problemas de construcción de figuras geométricas con relaciones y propiedades matemáticas específicas. En esta estrategia son importantes las heurísticas de relajar las condiciones del problema y realizar trazos auxiliares para mover elementos del modelo dinámico hasta que se cumplan las relaciones matemáticas buscadas; las cuáles se convierten en heurísticas de formulación de problemas. Un momento determinante para usar esta estrategia es la elección de la relación o propiedad matemática que se desea cumplir a partir del movimiento y que determinará la formulación de distintos problemas. Así, centrar la atención en una u otra propiedad o relación matemática arrojará problemas subsidiarios y soluciones distintas (véase Tabla 7.1). La implementación de la estrategia se puede caracterizar en cuatro fases: entendimiento, representación, exploración y solución visual (Figura 7.5).

Figura 7.5 Caracterización de la implementación de la estrategia LGPI en problemas de construcción



Fuente: Elaboración propia

La fase de entendimiento involucra identificar los objetos y relaciones matemáticas, así como las condiciones y objetivos del problema. La fase de representación requiere aplicar la heurística de relajar las condiciones del problema para construir una representación dinámica que cumpla de forma parcial las condiciones del problema. Posteriormente, la fase de exploración requiere realizar trazos auxiliares y analizar el movimiento de puntos relevantes en función de propiedades o relaciones matemáticas que se deseen cumplir a partir del movimiento. Finalmente, se visualiza la solución en términos de intersecciones de lugares geométricos de los puntos relevantes.

Los resultados mostrados en este estudio sugieren que el uso de GeoGebra para analizar y reconstruir modelos dinámicos de figuras, que comúnmente están presentes en problemas de demostración geométricos, representa una oportunidad para involucrarse en diversos procesos de formulación y resolución de problemas. En este camino, las facilidades que ofrece el SGD para arrastrar objetos y visualizar lugares geométricos permite implementar, de forma dinámica, estrategias y heurísticas de resolución de problemas como el análisis de patrones e invariantes y relajar las condiciones del problema para encontrar distintos tipos de soluciones (robustas, sintéticas y empíricas).

6 Conclusiones

Existe una gran variedad de problemas geométricos en los cuales la información o condiciones son presentados por medio de figuras o configuraciones geométricas. Comúnmente, cuando se resuelven problemas de forma tradicional (con papel y lápiz) la tarea de reconstruir las figuras que aparecen en los enunciados no es relevante, pues únicamente interesan las relaciones matemáticas implícitas en dichas figuras. Cuando se trabaja dentro de un SGD resulta primordial pensar en las formas de obtener representaciones dinámicas para explorar los problemas. Así, considerar distintas maneras de representar una situación problemática puede motivar episodios de planteamiento de problemas. Reflexionar sobre los posibles caminos para obtener una representación dinámica de una figura puede permitir problematizar y conectar diversas relaciones matemáticas y propiedades de figuras básicas como triángulos y circunferencias. En esta dirección, formular la pregunta ¿de cuántas maneras se puede construir un modelo dinámico de cierta figura? es una reflexión que siempre se debe motivar en ambientes de resolución de problemas geométricos que busquen desarrollar habilidades inquisitivas de los individuos.

Las heurísticas de relajar las condiciones del problema, analizar casos particulares, realizar trazos auxiliares y visualizar patrones e invariantes (lugares geométricos) son heurísticas fundamentales dentro de estos ambientes de formulación y resolución de problemas alrededor del uso de un SGD. Dichas heurísticas de resolución de problemas se convierten en heurísticas de formulación de problemas, pues relajar las condiciones del problema y analizar casos particulares lleva implícito la formulación de nuevos problemas (normalmente más simples). Por otro lado, realizar trazos auxiliares también lleva implícito un proceso de formulación de problemas, pues es necesario plantear qué propiedad se analizará en términos de dichos trazos auxiliares y luego cómo utilizarlos para resolver el problema por medio de la visualización de lugares geométricos de puntos de intersección.

Finalmente, se concluye que la formulación y resolución de problemas son dos actividades matemáticas que no se pueden separar y que deben ser parte de la formación integral de todo individuo. Profesores y estudiantes deben poseer la habilidad para formular preguntas relevantes que les ayuden a resolver cualquier problema (no solo matemático) que se les presente. Desde el punto de vista matemático y apoyado de los resultados de este estudio, es posible diseñar programas de formación de profesores que busquen desarrollar habilidades de formulación y resolución de problemas alrededor del uso de tecnologías digitales y la construcción de modelos dinámicos con ayuda de un SGD.

7 Referencias

Arikan, E. E. & Unal, H. (2014). Development of the structured problem posing skills and using metaphoric perceptions. European Journal of Science and Mathematics Education, 2(3), 155-166.

Aguilar-Magallón, D. & Reyes-Martínez, I. (2016). Digital technology and formulation of problems during the process of solving problems. In M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, & J. A. Eli (Eds.), Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 1432-1446). Tucson, AZ: The University of Arizona.

Aguilar-Magallón, D. & Poveda-Fernández, W. (2017). Problem Posing Opportunities whit Digital Technology in Problem Solving Environments. En M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, & J. A. Eli (Eds.), Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 1432-1446). Tucson, AZ: The University of Arizona.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (2005). The art of problem posing. Psychology Press. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 3-34). New York: Springer.

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B., & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. Educational Studies in Mathematics, 83(1), 57-69.

Leikin, R. (2015). Problem Posing for and Through Investigations in a Dynamic Geometry Environment. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 373-391). New York: Springer.

Misfeldt, M. & Johansen, M. W. (2015). Research mathematicians’ practices in selecting mathematical problems. Educational Studies in Mathematics, 1-17.

National Council of Teachers of Mathematics (2011). Technology in teaching and learning of mathematics: A position of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: The Council.

Osana, H. P. & Pelczer, I. (2015). A Review on Problem Posing in Teacher Education. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 469-492). New York: Springer.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Rosli, R., Capraro, M. M., Goldsby, D., y Gonzalez, E. G., Onwuegbuzie, A. J., & Capraro, R. M. (2015). Middle-Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 333-354). New York: Springer.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Aguilar-Magallón, D. (2015). The Use of Digital Technology in Extending Mathematical Problem Solving Reasoning. En Learning Technology for Education in Cloud (pp. 298-309). Springer International Publishing.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Aguilar-Magallón, D. (2016). Digital Technologies and a Modeling Approach to Learn Mathematics and Develop Problem Solving Competencies. En International Workshop on Learning Technology for Education in Cloud (pp. 193-206). Springer International Publishing.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Tichá, M. & Hošpesová, A. (2009). Problem posing and development of pedagogical content knowledge in pre-service teacher training. En meeting of CERME (Vol. 6). Lyon, Francia:CERME.