El uso de un Sistema de geometría dinámica para formular y resolver problemas

The use of a Dynamic Geometry System to formulate and solve problems

AGUILAR-MAGALLÓN, Daniel†*, [1]POVEDA-FERNÁNDEZ, William y [2]OLVERA-MARTÍNEZ, Carmen

ID 1er Autor: *Daniel Aurelio, Aguilar-Magallón* / **ORC ID:** 0000-0001-7520-4508, **Researcher ID Thomson:** V-2050-2018, **CVU CONACYT ID:** 486327

ID 1er Coautor: *William, Poveda-Fernández* / **ORC ID:** 0000-0002-7245-8278, **Researcher ID Thomson:** V-1424-2018, **CVU CONACYT ID:** 627826

ID 2do Coautor: *María del Carmen, Olvera-Martínez* / **ORC ID:** 0000-0001-7361-1687, **Researcher ID Thomson:** U-9456-2018, **CVU CONACYT ID:** 230198

[1]*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – IPN*
[2]*Universidad Juárez del Estado de Durango*

D. Aguilar, W. Poveda, C. Olvera

aguilarm@cinvestav.mx

A. López, C. Lima, J. Reyes (Dirs.) Educación para todos. Tópicos Selectos de Educación en CITeM. ©ECORFAN-México, 2018.

Abstract

This chapter reports and analyzes different types of problems that nine students in a Master's Program in Mathematics Education posed during a course on problem solving. What opportunities can a dynamic geometry system (GeoGebra) offer to allow in-service and in-training teachers to formulate and solve problems, and what type of heuristics and strategies do they exhibit during this process? Results show that combining semi-structured problems with the use of GeoGebra can be useful in motivating and involving teachers in various episodes of problem formulation. In this context, important strategies included analyses of the variation in the attributes of figures using dynamic points and loci.

Problem solving, Problem formulation, Use of digital technologies, Teacher training

1 Introducción

En los últimos treinta años, la resolución de problemas ha sido un dominio o área de investigación en educación matemática que relaciona el quehacer de la disciplina con el aprendizaje de los estudiantes (Santos-Trigo, 2014). Un principio fundamental en la resolución de problemas es la importancia de formular preguntas relevantes como medio para comprender, representar, explorar y resolver problemas (Polya, 1965). Así, estas preguntas son el medio para explorar conceptos y para desarrollar habilidades de resolución de problemas. Misfeldt y Johansen (2015) resaltan que la actividad de formular preguntas y problemas es un aspecto crucial y no trivial de la práctica profesional de los matemáticos. Actualmente, se reconoce que la formulación o planteamiento de problemas es una actividad central de la práctica matemática profesional y una componente fundamental del pensamiento matemático (Cai et al., 2013). En esta dirección, en las últimas dos décadas la resolución y formulación de problemas se han identificado como temas centrales para la educación matemática (Rosli et al., 2015). Osana y Pelczer (2015) comentan que:

> Un movimiento creciente en la educación matemática que pone a la resolución de problemas en el centro de las matemáticas escolares ha conducido a los investigadores a prestar atención en el planteamiento de problemas, particularmente en su papel en la enseñanza y aprendizaje. (p. 470).

Desde esta perspectiva, en escenarios de enseñanza y aprendizaje la actividad matemática es concebida como una forma de pensar donde una comunidad (profesor y estudiantes) formula preguntas y nuevos problemas para dar sentido y resolver situaciones problemáticas. En este camino, dicha comunidad reconoce la importancia de buscar distintas maneras de sustentar sus respuestas. Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Ortega-Moreno (2015) comentan que un objetivo de la actividad matemática es identificar y contrastar diversas maneras de representar, explorar, conjeturar, resolver y formular nuevos problemas. Dentro de estas comunidades, el papel del profesor es determinante para el aprendizaje de sus estudiantes, pues es el responsable de escoger y plantear las tareas que permitan desarrollar habilidades de resolución y formulación de problemas. Sin embargo, algunos investigadores reconocen que, en general, profesores y futuros profesores tienen serias dificultades para enfrentarse a tareas de planteamiento de problemas (Rosli et al., 2015; Lavy, 2015).

¿Cuál es el papel que juega el uso de tecnologías digitales en comunidades de aprendizaje que promueven y valoran la formulación y resolución de problemas? El uso de tecnologías digitales en la educación matemática puede ser un camino útil para desarrollar conocimiento matemático y para transformar escenarios de enseñanza alrededor del planteamiento y la resolución de problemas (Aguilar-Magallón & Reyes-Martínez, 2016). No obstante, existen pocas investigaciones sobre el papel de la tecnología en el diseño e implementación de tareas que tengan como objetivo el desarrollo de habilidades para formular y resolver problemas (Abramovich & Cho, 2015).

Por lo tanto, resulta importante investigar en qué medida el uso de distintas herramientas digitales, en particular el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), permite a los participantes involucrarse en actividades de planteamiento de problemas a partir de interrogantes que surgen en ambientes de resolución de problemas. Así, el objetivo principal de este estudio es analizar cómo el uso sistemático de un (SGD) por parte de profesores en servicio y formación, contribuye en los procesos de formulación y resolución de problemas.

Así, la pregunta que orienta esta investigación es: ¿Qué oportunidades puede ofrecer un sistema de geometría dinámica (GeoGebra) para que profesores y futuros profesores formulen y resuelvan problemas y qué tipo de recursos, heurísticas y estrategias exhiben en este proceso?

2 Marco Conceptual

En la literatura se caracteriza al proceso de plantear problemas alrededor de dos actividades centrales: la formulación y reformulación. La formulación consiste en generar problemas nuevos a partir de cierta información, situación o contexto. La reformulación involucra generar problemas mediante la modificación de las condiciones y/o objetivos de un problema dado (Silver, 1994). La actividad de reformulación también está presente cuando se transforma o replantea un problema que se está resolviendo con el objetivo de simplificarlo (Silver, Mamona-Downs, Leung, & Kenney, 1996). En resumen, la formulación de problemas consiste en: (1) generar un problema original a partir de cierta información o datos, (2) reformular un problema que se está resolviendo o (3) formular un problema nuevo modificando los objetivos o condiciones de un problema que ya ha sido resuelto. A partir de la caracterización anterior, el proceso de planteamiento de problemas puede ocurrir en tres momentos en relación con la resolución de problemas: i) antes de la resolución de problemas, cuando se formula un problema nuevo a partir de cierta información o situación; ii) durante la resolución de los problemas, cuando se reformula un problema que se está resolviendo con el objetivo de simplificarlo; iii) después de la resolución de problemas, cuando se formula un problema nuevo modificando, extendiendo o generalizando los objetivos o condiciones de un problema que ya ha sido resuelto (Rosli et al., 2015).

Siguiendo estas ideas, Stoyanova y Ellerton (1996) presentan una clasificación del tipo de problemas como abiertos, semi-estructurados y estructurados en función de las actividades de formulación o reformulación involucradas. En los problemas abiertos el individuo requiere plantear problemas a partir de cierta información presentada en forma de figuras, tablas, números, etcétera. En el enunciado de este tipo de problemas no hay requerimientos u objetivos específicos. En los problemas semi-estructurados el individuo requiere generar y/o agregar condiciones para resolverlos, en otras palabras, el anunciado de este tipo de problemas contiene información o condiciones parciales. Finalmente, en los problemas estructurados se proporciona el objetivo, así como toda la información y condiciones necesarias para conseguirlo. Los problemas abiertos involucran principalmente actividades de formulación, mientras que los estructurados comprenden tareas de reformulación. Los problemas semi-estructurados pueden motivar actividades tanto de formulación como de reformulación. Silver (1997) afirma que los problemas abiertos o semi-estructurados pueden ser útiles para motivar episodios de planteamiento de problemas.

Por otro lado, Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Aguilar-Magallón (2015) resaltan la importancia de utilizar de forma sistemática distintas herramientas digitales en ambientes de formulación y resolución de problemas. En esta dirección, se busca que el individuo constantemente identifique y examine distintos tipos de relaciones, plantee conjeturas, determine y analice patrones, utilice distintos sistemas de representación, establezca conexiones, emplee distintos argumentos, generalice y extienda problemas iniciales, comunique sus resultados y plantee sus propios problemas. Algunas investigaciones se han enfocado en estudiar procesos de planteamiento de problemas con herramientas digitales particulares como un SGD (Leikin, 2015; Lavy, 2015). De acuerdo con Lavy (2015), el uso de un SGD representa un apoyo cognitivo visual basado en interacciones inmediatas entre la herramienta y el usuario; lo cual puede facilitar procesos de planteamiento de problemas.

El planteamiento de problemas usando geometría dinámica implica una serie de interacciones únicas entre las acciones o entendimientos del estudiante y la interface del software. A los estudiantes se les ofrece la oportunidad de utilizar razonamiento visual en matemáticas, ayudándolos por medio de las facilidades del arrastre lo cual permite que el estudiante pueda generalizar problemas o examinar la validez de un problema planteado. (Lavy, 2015, p. 398).

En cuanto al diseño de actividades de formulación de problemas, Imaoka, Shimomura y Kanno (2015) recomiendan tareas que motiven la exploración de atributos variables de figuras como áreas, perímetros, longitudes, ángulos, entre otros. Además, argumentan que las actividades deben incluir algunos elementos que sean adecuados para utilizar un SGD. En otras palabras, que las actividades motiven y faciliten la experimentación, exploración y análisis de conjeturas más que la simple aplicación de algoritmos conocidos.

Por otro lado, Leikin (2015) afirma que es importante que las actividades diseñadas puedan representarse y resolverse de distintas maneras. Además, afirma que una estrategia importante para diseñar actividades de planteamiento de problemas consiste en transformar problemas estructurados en problemas abiertos o semi-estructurados. Es decir, recomienda eliminar condiciones u objetivos específicos de problemas estructurados para motivar la exploración e investigación con ayuda de un SGD; esto está basado en la estrategia *What if not?* para formular problemas propuesta por Brown y Walter (2005).

3 Metodología

3.1 Participantes

En este estudio participaron nueve estudiantes de un curso de Maestría en Educación Matemática durante catorce sesiones semanales con duración de tres horas cada una. El grupo estuvo conformado por seis profesores en servicio y tres futuros profesores. Todos los participantes tenían formación académica relacionada con matemáticas.

3.2 Diseño de las actividades

Para el estudio se implementaron, en total, cinco actividades tomando en cuenta las ideas propuestas por Imaoka et al. (2015) y Leikin (2015). Es decir, se partió de problemas estructurados relacionados con áreas de figuras y se transformaron en problemas semi-estructurados de investigación. Para este reporte se analizan los resultados de uno de los problemas; el cual surgió cuando el investigador transformó el problema estructurado, usado por Schoenfeld (1985), al modificar sus condiciones iniciales (Tabla 6.1).

3.3 Implementación de la actividad y recolección de datos

El desarrollo de la actividad se puede caracterizar en tres fases: trabajo individual o por parejas, discusiones plenarias y discusiones en línea. El trabajo individual o por parejas consistió en tres sesiones presenciales (semanales) de tres horas cada una dentro de un laboratorio de cómputo, es decir, cada estudiante tuvo acceso a una computadora personal con Internet. En las discusiones plenarias los participantes comentaban al grupo sus ideas o avances relacionados con la solución de la actividad. Para las discusiones en línea, se utilizó un muro digital (Padlet) donde los participantes podían continuar la discusión fuera de las sesiones presenciales. Los datos del estudio se recolectaron por medio de video grabaciones de las sesiones presenciales, registros de participaciones en el muro digital, hojas de trabajo de GeoGebra, reportes escritos de forma individual y entrevistas.

Tabla 6.1 Transformación de un problema estructurado en semi-estructurado

Problema Estructurado	Problema semi-estrucrturado
Se te da un triángulo T con base B. Muestra que siempre es posible construir, con regla y compás, una línea recta que es paralela a B y que divide al triángulo T en dos partes de misma área. ¿Puedes de forma similar dividir el triángulo en cinco partes de misma área? Schoenfeld (1985, p.16).	**P.1.** Dado un triángulo cualquiera, dividirlo en dos regiones con misma área.

Fuente: Elaboración propia

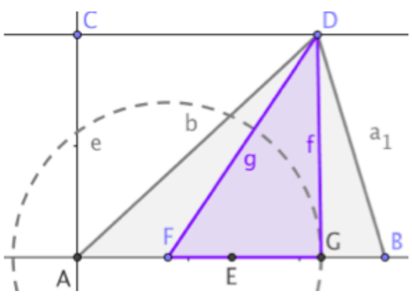
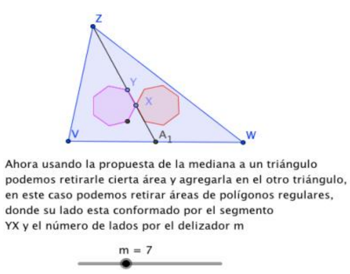
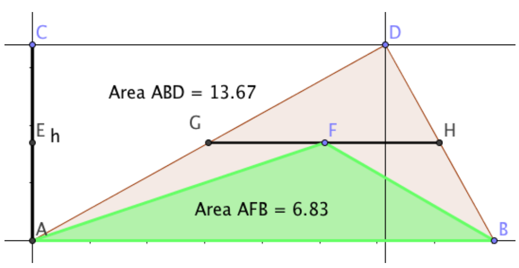
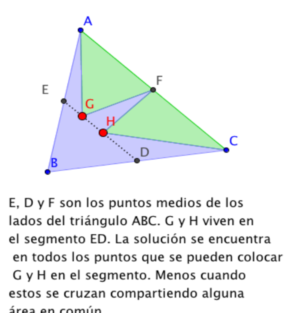
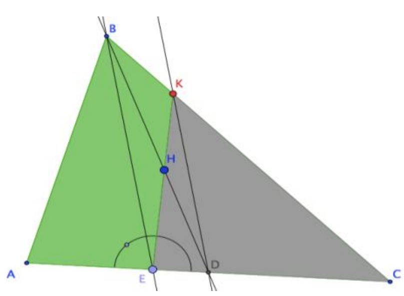
4 Resultados

En la primera parte de esta sección se muestran algunas soluciones iniciales que exhibieron los participantes (Sección 4.1). Posteriormente en la sección 4.2, se describen algunos problemas formulados por los participantes relacionados con nuevas formas de resolver el problema inicial (P1). En particular, se discutirán los recursos, heurísticas y estrategias presentes en este proceso. Finalmente, en la sección 4.3, se discuten algunas oportunidades que ofreció el SGD para formular y analizar nuevos problemas a través de la extensión o generalización de los acercamientos dinámicos iniciales. Estos problemas surgieron del planteamiento de preguntas detonadoras por parte del investigador; las cuales fueron trabajadas por los participantes.

4.1 Soluciones iniciales

En una primera instancia, los participantes resolvieron el problema usando dos ideas: 1) bisecar el área del triángulo por medio de la mediana (dividir base en dos partes iguales y conservar altura) y, 2) bisecar el área dividiendo la altura en dos partes iguales conservando la base inicial. Los participantes usaron estrategias de solución tanto estáticas como dinámicas. Algunas soluciones iniciales dinámicas se muestran en la (Tabla 6.2). Un aspecto esencial en estos acercamientos es la búsqueda de diversas maneras de identificar regiones con la misma área.

Tabla 6.2 Algunas soluciones dinámicas iniciales del problema

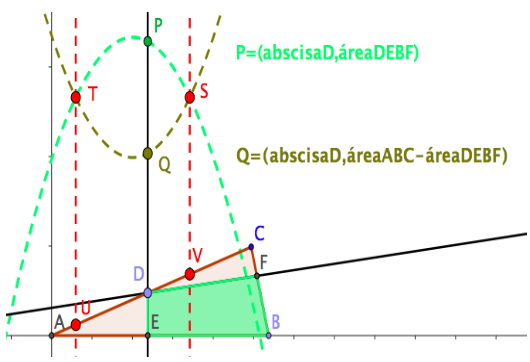
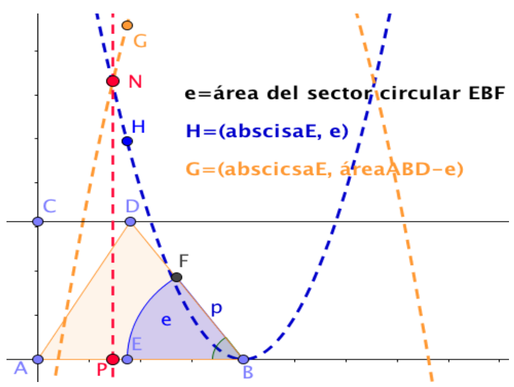
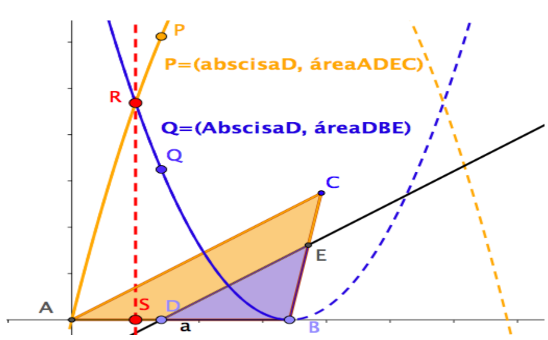
<table>
<tr><th>Solución</th><th>Recursos y estrategias</th></tr>
<tr><td>1.

</td><td>Recursos: circunferencia para trasladar medidas, punto móvil sobre segmento, punto medio, triángulo.
Estrategia dinámica: Punto F móvil sobre AB. Construir un triángulo FGD dinámico con misma altura que el triángulo ABD, pero con base móvil FG de longitud constante igual a AE, donde $AE = \frac{1}{2}AB$ (infinidad de soluciones).</td></tr>
<tr><td>2.

</td><td>Recursos: Mediana, polígono regular, punto móvil sobre segmento.
Estrategia dinámica: usar un deslizador “m” para trazar un polígono regular de m lados y reflejarlo a partir de la mediana; sumar y restar polígonos dinámicos de misma área en ambos lados de la mediana (infinidad de soluciones).</td></tr>
<tr><td>3.

</td><td>Recursos: paralela media, postulado 37 de Euclides.
Estrategia dinámica: Punto F móvil sobre la paralela media y construcción de triángulo ABF con misma base AB pero con la mitad de altura (infinidad de soluciones).</td></tr>
<tr><td>4.

</td><td>Recursos: paralela media, punto medio, triángulo, punto móvil sobre segmento, postulado 37 de Euclides.
Estrategia dinámica: dividir la altura en dos partes con la paralela media ED y construir dos triángulos que tienen misma base (igual a la mitad del lado AC) y vértices móviles G y H sobre la paralela media (infinidad de soluciones). El área de la región verde es igual a la comprendida por la región azul.</td></tr>
<tr><td>5.

</td><td>Recursos: mediana y postulado 37 de Euclides.
Solución dinámica: colocar punto E móvil sobre base AC para trazar recta EB y su paralela KD, a partir del punto medio D del lado AC. La recta EK divide al triángulo en dos secciones de misma área sin importar la posición del punto E.</td></tr>
</table>

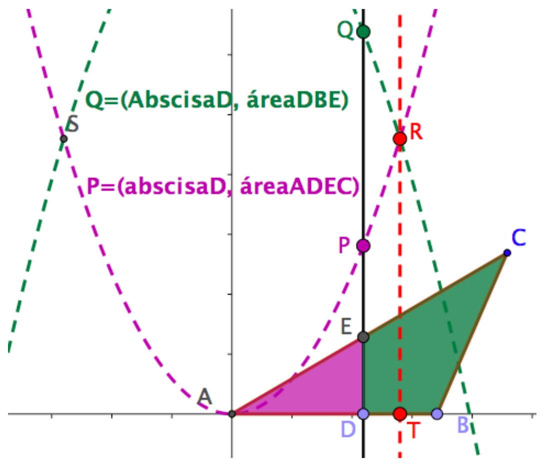
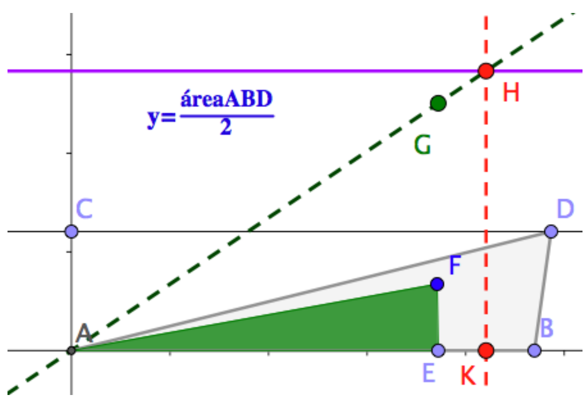
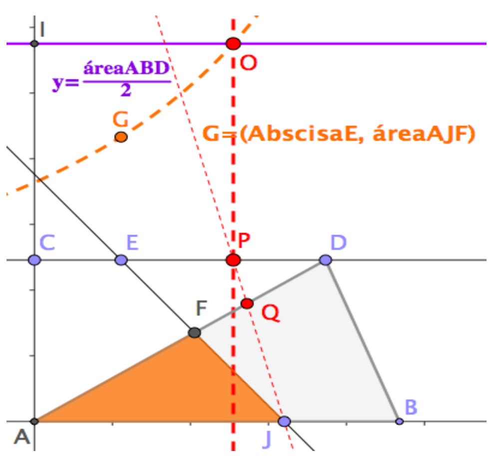
Fuente: Producciones de los participantes

4.2 Problemas planteados por los participantes

Después de presentar las soluciones iniciales en una discusión plenaria, los participantes propusieron nuevas formas de encontrar regiones con misma área en el triángulo dado; motivadas por la exploración dinámica de elementos dentro de la configuración (Tabla 6.3). Por ejemplo, un participante propuso utilizar un sector circular para dividir el triángulo en dos secciones de misma área. Otro enfocó la atención hacia una construcción que involucraba un cuadrilátero. Estas nuevas formas de explorar el problema surgen a partir de las oportunidades que ofrece la herramienta para arrastrar objetos y de la formulación de preguntas relevantes. La idea matemática central detrás de todos estos acercamientos dinámicos es la variación. Las preguntas planteadas están dirigidas al análisis de la variación del área de figuras con ciertas propiedades. El trabajo posterior de los participantes consistió en analizar estas variaciones por medio de puntos dinámicos y lugares geométricos. Se debe resaltar que, en este análisis, es crucial que la variación se produzca a partir del movimiento controlado de puntos dinámicos (arrastre de puntos por trayectorias bien definidas como rectas, circunferencias o cónicas), pues de lo contrario, no es posible construir lugares geométricos. Esta característica del SGD resulta determinante para la resolución de problemas de variación.

Tabla 6.3 Problemas planteados y estrategias de exploración y solución

Problema planteado	Recursos y estrategias de solución
1.1. Dividir el triángulo con un cuadrilátero de lados perpendiculares a dos lados del triángulo (variación de un punto D sobre el lado AC). 	***Exploración.*** Construcción de una familia de cuadriláteros a partir del punto móvil D y con lados perpendiculares a los lados del triángulo. ***Pregunta relevante:*** ¿dónde colocar el punto D sobre el lado AC para que el cuadrilátero EBFD tenga la misma área que la suma de las áreas de los triángulos AED y DFC? ***Solución.*** Construir los puntos dinámicos $P = (x(D), áreaDEBF)$ y $Q = (x(D), áreaABC - áreaDEBF$. Las intersecciones T y S de los lugares geométricos descritos por P y Q al mover D determinan las soluciones U y V.
1.2. Usar un sector circular para dividir el triángulo (variación de un punto E sobre el lado AB). 	***Exploración.*** Construcción de una familia de sectores circulares de área variable "*e*" partir del punto móvil E. ***Pregunta relevante:*** ¿Dónde colocar el punto E, sobre el lado AB, para que el sector circular BEF tenga la misma área que la sección AEFD? ***Solución.*** Crear los puntos $H = (x(E), e)$ y $G = (x(E), área\ ABD - e)$. La intersección N de los lugares geométricos descritos por H y G al mover E determina la solución P.
1.3. División por medio de una recta paralela a uno de los lados (variación de un punto D sobre el lado). 	***Exploración.*** Construcción de una familia de triángulos DBE con D móvil sobre AB y lado DE paralelo al lado AC. ***Pregunta relevante***: ¿Dónde colocar el punto D sobre el lado AB para que el cuadrilátero ADEC y el triángulo DBE tengan misma área? ***Solución.*** Crear los puntos $P = (x(D), áreaADEC)$ y $Q = (x(D), área\ DBE)$. La intersección R de los lugares geométricos descritos por P y Q al mover D determina la solución S.

<table>
<tr>
<td>1.4. División por medio de una recta perpendicular a uno de los lados (variación de un punto móvil D sobre el lado).

</td>
<td>Exploración. Construcción de una familia de triángulos rectángulos ADE, a partir del punto D móvil, sobre lado AB y con lado DE perpendicular al lado AB del triángulo inicial ABC.
Pregunta relevante: ¿Dónde colocar el punto D sobre el lado AB para que el cuadrilátero DBCE y el triángulo ADE tengan misma área?
Solución. Crear los puntos $P = (x(D), áreaADE)$ y $Q = (x(D), áreaDBCE)$
La intersección R de los lugares geométricos descritos por P y Q al mover D determina la solución T.</td>
</tr>
<tr>
<td>1.5. Bisecar el área por medio de un punto móvil F libre dentro del triángulo inicial y otro punto móvil E sobre la base.

</td>
<td>Exploración. Construcción de una familia de triángulos AEF a partir de los puntos móviles F y E. El punto F se mueve libremente dentro del triángulo ABD. El punto E se mueve sobre el lado AB.
Pregunta relevante: ¿Dónde colocar los puntos E y F para que el triángulo AEF tenga la mitad del área del triángulo ABD?
Solución. Crear el punto $G = (x(E), áreaAEF)$ La intersección H del lugar geométrico descrito por G (al mover E) y la recta $y = \frac{áreaABD}{2}$ determina la solución K.</td>
</tr>
<tr>
<td>1.6. Usar una recta cualquiera para dividir el triángulo.

</td>
<td>Exploración. Construcción de una familia de triángulos AJF a partir de los puntos móviles J y E.
Pregunta relevante: ¿Dónde colocar los puntos E y J para que el triángulo AJF tenga la mitad del área del triángulo ABD?
Solución. Crear el punto $G = (x(E), áreaAJF)$ La intersección O del lugar geométrico descrito por G (al mover E) y la recta $y = \frac{áreaABD}{2}$ determina la solución Q.</td>
</tr>
</table>

Fuente: Producciones de los participantes

El proceso que siguieron los participantes para resolver los problemas formulados se puede caracterizar en tres etapas: estrategia de exploración, planteamiento de pregunta relevante y estrategia de solución. La estrategia de exploración consistió en la división del triángulo inicial por medio de figuras móviles con ciertas propiedades (cuadriláteros, sectores circulares, triángulos, entre otros); en general, estas figuras no bisecaban el área del triángulo. Esta estrategia de exploración permitió formular preguntas relevantes a los participantes que a su vez determinaron una estrategia de solución. La estrategia de solución consistió en buscar por medio de las facilidades de la herramienta (arrastre) cuando las figuras móviles bisecaban el área del triángulo inicial. En la estrategia de exploración, el SGD motivó el uso de heurísticas de reformulación de problemas como analizar casos particulares, analizar casos extremos, relajar las condiciones del problema y explorar una familia de casos.

Para la solución fue determinante la mediación de dichas heurísticas por el SGD en términos de la estrategia *análisis dinámico de relaciones (ADR);* que consistió en construir puntos dinámicos (que representaban la variación de áreas) y visualizar sus respectivos lugares geométricos.

En una discusión plenaria los participantes mostraron a todo el grupo sus métodos de solución de los problemas y, de forma grupal, se reflexionó en tres cuestiones:

i) Variación. Existe una diferencia entre la variación analizada en los problemas 1.1,1.2, 1.3, 1.4 y en los problemas 1.5 y 1.6. Mientras en el primer grupo de problemas la variación se controla por medio de un solo punto dinámico, en el segundo grupo la variación depende de dos puntos dinámicos. Esta diferencia es importante, pues para analizar la variación, en el segundo grupo de problemas, se requiere primero considerar fijo alguno de los puntos dinámicos para generar un lugar geométrico a partir de la variación del otro punto. A diferencia del primer grupo de problemas, en el segundo se generan una familia de lugares geométricos que depende de la variación del punto que se consideró fijo en un principio. En otras palabras, si la variación depende de dos puntos dinámicos, uno de ellos generará un lugar geométrico y el otro modificará dicho lugar geométrico creando una familia de lugares geométricos.

ii) Naturaleza de las preguntas relevantes y estrategias de solución. Se resaltó la diferencia entre la naturaleza de las preguntas relevantes de los problemas 1.1,1.2, 1.3, 1.4 y los problemas 1.5 y 1.6 y su impacto en las estrategias de solución. Por un lado, en el primer grupo de problemas la pregunta relevante está asociada al análisis y comparación de la variación del área de dos sectores dentro del triángulo; esto tiene como consecuencia que la estrategia de solución consista en encontrar el punto de intersección de dos lugares geométricos. Por otro lado, en el segundo grupo de problemas la pregunta relevante compara la variación de un sector del triángulo con la mitad del área del triángulo original (la cual es constante); así, mediante este enfoque la estrategia de solución consiste en encontrar el punto de intersección de un lugar geométrico con la recta paralela al eje $X: y = \frac{Área\ del\ triángulo\ original}{2}$.

iii) Necesidad de buscar distintas formas de resolver los problemas planteados. Debido a las limitaciones del SGD, en cuanto a la estabilidad del comando *cónica dados cinco puntos* (comando necesario para encontrar puntos de intersección entre dos lugares geométricos que se suponen cónicas), se reflexionó sobre la necesidad de buscar maneras de extender y generalizar el análisis y, eventualmente, buscar distintas maneras de resolver los problemas.

4.3 Episodios de formulación de problemas adicionales

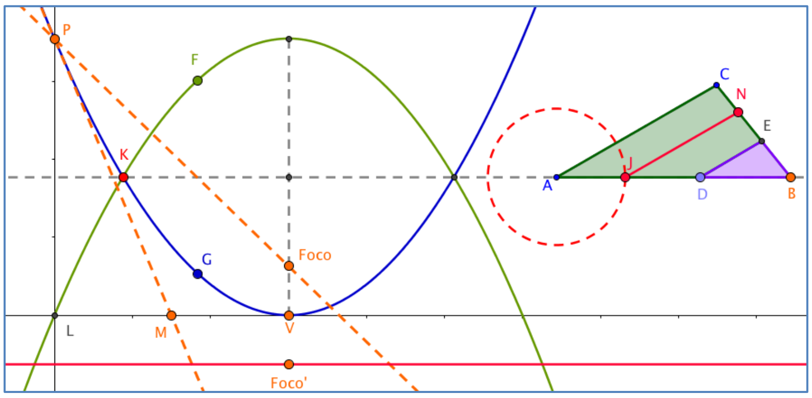
Como consecuencia de la discusión del punto iii) el investigador formuló nuevos problemas relacionados con el análisis de los lugares geométricos encontrados; en términos de sus representaciones algebraicas y sus elementos importantes (focos, vértices, ejes de simetría, etcétera). En este camino, fueron importantes las siguientes preguntas: ¿los lugares geométricos son cónicas? ¿en caso de ser cónicas cómo encuentro sus elementos importantes? ¿cómo encuentro la representación algebraica de los lugares geométricos? Cabe mencionar que el objetivo de esta fase de planteamiento de problemas, además de validar las soluciones encontradas previamente, fue extender la discusión para intentar dar una solución general a los problemas en términos de los datos conocidos del triángulo inicial. En otras palabras, los participantes buscaron generalizar las soluciones encontradas previamente por medio de una representación algebraica de los lugares geométricos (Tabla 6.3), a partir de parámetros definidos por las dimensiones conocidas del triángulo inicial.

Elementos importantes de cónicas

Para encontrar los elementos importantes de las cónicas, los participantes tuvieron que revisar (en distintos recursos en línea) sus propiedades geométricas. En la Figura 6.1 se muestra el método seguido por uno de los participantes para encontrar el vértice, foco y directriz de la parábola generada en la solución del problema 1.3. Este método consistió en encontrar de forma robusta un punto sobre la parábola y su vértice, es decir, puntos particulares que dependan únicamente de los parámetros conocidos del triángulo inicial como la longitud de sus lados y su área. Así, propuso el punto P = (0, $área ABC$) sobre la parábola y el vértice V = (AB, 0).

En este análisis, la parábola es generada por el punto G = (AD, $áreaDBE$); cuando AD = 0 el área del triángulo DBE coincide con el área del triángulo inicial ABC, por lo tanto, el punto P = (0, $áreaABC$) pertenece a la parábola. Por otro lado, cuando AD = AB el área del triángulo DBE es cero por lo tanto el punto V = (AB, 0) es el punto mínimo de la parábola, es decir, su vértice. Es importante recalcar que en esta estrategia de encontrar puntos específicos del lugar geométrico, el SGD sirve como mediador para las heurísticas de analizar casos particulares (extremos). Una vez teniendo el vértice V y un punto P de la parábola, el participante usó la propiedad reflexiva de la parábola para encontrar su foco y directriz; M es el punto medio de LV y la recta $PFoco$ es la reflexión de la recta PL sobre la recta PM.

Figura 6.1 Método geométrico para encontrar foco y directriz de una parábola, conociendo el vértice V, un punto P sobre la parábola y su eje de simetría

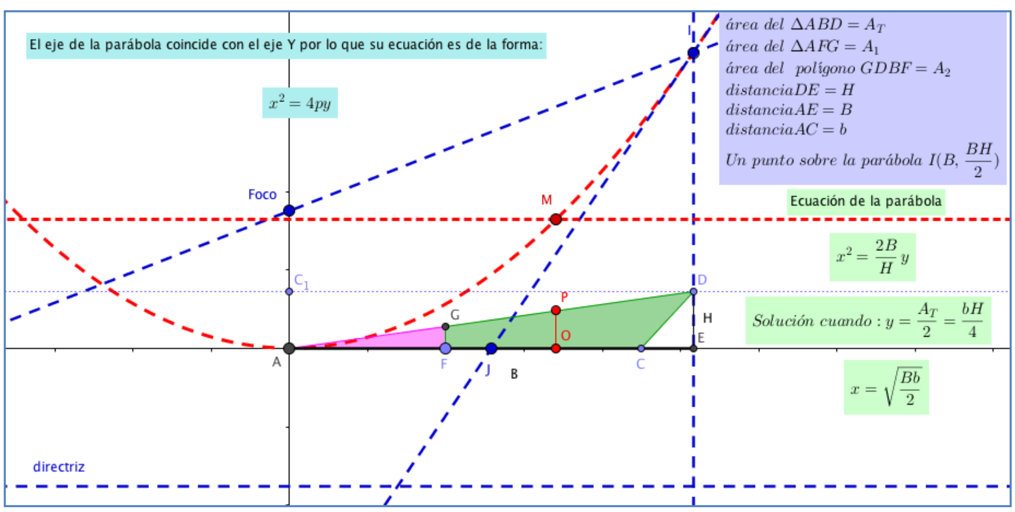


Fuente: Producciones de los participantes

Ecuaciones de cónicas

Los participantes no tuvieron dificultades para encontrar las ecuaciones de las parábolas presentes en las soluciones de los problemas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4, pues dichas parábolas eran verticales y era posible determinar su vértice y un punto sobre ellas de manera robusta en función de los parámetros conocidos de la configuración dinámica. En este camino, la heurística de explorar casos particulares y extremos fue fundamental para encontrar puntos que pertenecían a los lugares geométricos (Figura 6.2).

Figura 6.2 Parametrización y uso de casos extremos para encontrar la ecuación de la parábola usada para resolver el problema 1.4

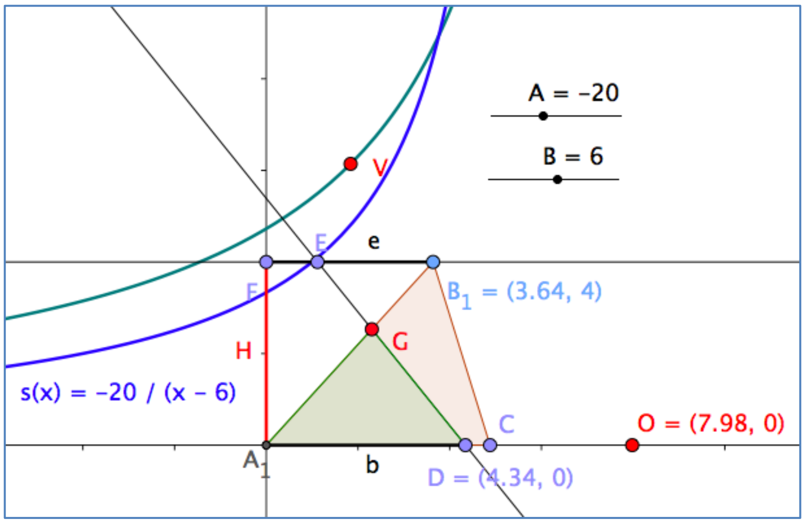


Fuente: Producciones de los participantes

A diferencia de encontrar las ecuaciones de las parábolas, no fue fácil encontrar la ecuación de la hipérbola usada para resolver el problema 1.6 de bisección por medio de una recta cualquiera. Un tipo de solución propuesta por los participantes, motivada por el SGD, fue asociar la gráfica de la hipérbola con una función racional. Algunos participantes trabajaron en un principio con una función racional del tipo $y = \frac{A}{x-B}$, pues identificaron que una asíntota era el eje X.

Así, por medio del uso de deslizadores exploraron varios valores posibles de A y B para que la gráfica de la función se empatara con la gráfica de la hipérbola (Figura 6.3). Se tuvieron dificultades para encontrar los valores de A y B, sin embargo, conjeturaron que A tendría que ser negativo y B positivo. Después de discutir ideas de forma grupal, reconocieron que B tendría que ser el valor de la abscisa del centro de la hipérbola encontrada en sesiones anteriores.

Figura 6.3 Uso de deslizadores para encontrar los valores de $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{B}$ de la función racional

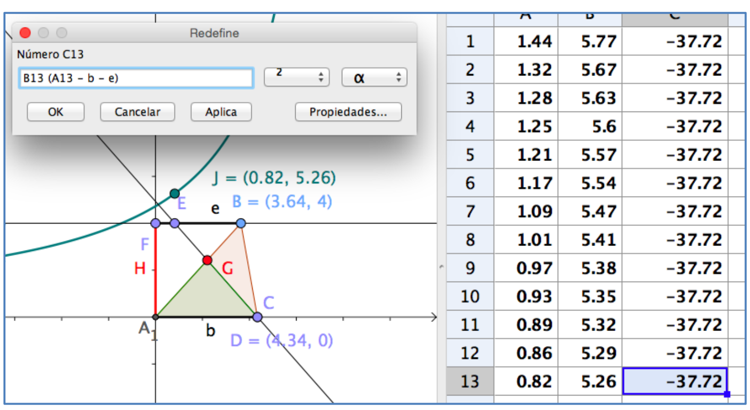


Fuente: Producciones de los participantes

Los participantes identificaron que la gráfica de la hipérbola estaba determinada por una función racional con asíntotas perpendiculares $y = 0$ y $x = e + b$ (recta perpendicular al eje X por el centro de la hipérbola encontrado previamente). Así, afirmaron que la función tendría la forma $y = \frac{A}{x-(e+b)}$. Posteriormente, encontraron el valor de A por medio de un análisis numérico y de una búsqueda de patrones. Para ello, registraron las coordenadas del punto que generaba la hipérbola en la hoja de cálculo y calcularon el valor de $A = y(x - e - b)$; donde x e y son las coordenadas del punto J sobre la hipérbola (Figura 6.4).

De este análisis encontraron varios casos particulares para distintos valores de b y H para descubrir que, $A = -\frac{Hb^2}{2}$. Así, logran encontrar la ecuación de la hipérbola (Figura 6.5). Finalmente, en una discusión grupal, los participantes se dieron cuenta de que todos los problemas se podían resolver aplicando semejanza de triángulos. En La Tabla 6.4 se muestra la semejanza aplicada para resolver los problemas 1.3, 1.4 y 1.6. Es importante resaltar que estas soluciones fueron encontradas por los participantes hasta el final del episodio de formulación y resolución de problemas antes descrito.

Figura 6.4 Registro en la hoja de cálculo del punto J que genera la hipérbola para encontrar el valor de $A = y(x - e - b)$; donde x e y son las coordenadas del punto J



Fuente: Producciones de los participantes

Figura 6.5 Análisis de casos particulares para detectar un patrón

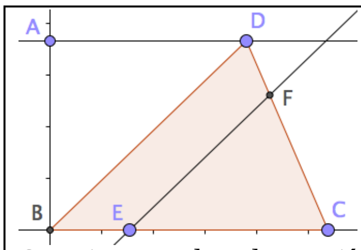
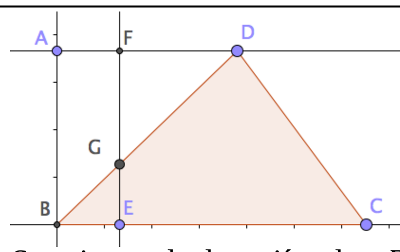
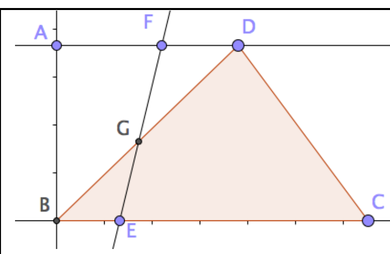
H	b	A
1	1	-1/2
	2	-2
	3	-9/2
	4	-8
2	1	-1
	2	-4
	3	-9
	4	-16
3	1	-3/2
	2	-6
	3	-27/2
	4	-24

De la tabla se deduce que $A = -\frac{Hb^2}{2}$, por lo tanto se obtiene la ecuación de la hipérbola:

$$y = -\frac{Hb^2}{2[x-(b+e)]}$$

Fuente: Producciones de los participantes

Tabla 6.4 Soluciones a los problemas aplicando semejanza de triángulos

		
Semejanza de los triángulos BCD y EFD para encontrar que cuando $EC = \frac{\sqrt{2}}{2}BC$ se resuelve el problema.	Semejanza de los triángulos BEG y DFG para encontrar que cuando $BE = \sqrt{\frac{AD*BC}{2}}$ se resuelve el problema.	Semejanza de los triángulos BEG y DFG para encontrar que cuando $AF = \frac{2BE^2}{BC} + BE + AD$ se resuelve el problema (considerando BE fijo).

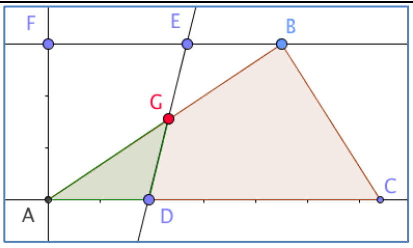
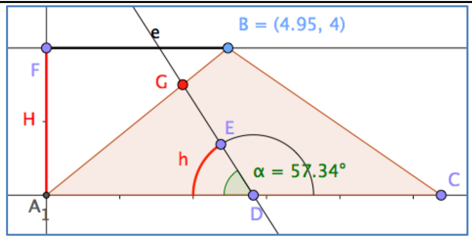
Fuente: Producciones de los participantes

Elección de variables en la estrategia ADR

Para implementar la estrategia ADR, una habilidad fundamental mediada por el SGD es escoger las variables (independiente y dependiente). Esta habilidad es crucial tanto para la resolución como para el planteamiento de problemas. Para resolver problemas se espera que el lugar geométrico descrito por el punto dinámico, que representa la relación, sea simple de manipular dentro del SGD (rectas, cónicas, circunferencias).

La estrategia ADR es útil para formular nuevos problemas pues una sola variación se puede estudiar en términos de una gran cantidad de variables independientes (lugares geométricos) que a su vez representan una oportunidad para plantear distintas reflexiones matemáticas. Por ejemplo, cuando apareció la hipérbola por primera vez al resolver el problema 1.6, un participante mencionó que tendría que ser una parábola. Su argumento fue que la variación de áreas se describe siempre por medio de funciones cuadráticas. En esta dirección, el investigador planteó el problema de realizar varios análisis dinámicos de la variación del área del triángulo escogiendo distintas variables dependientes e independientes. Algunos ejemplos de puntos dinámicos explorados por los participantes aparecen en la Tabla 6.5.

Tabla 6.5 Algunos ejemplos de variables dependientes e independientes exploradas por los participantes para resolver el problema de bisecar el área de un triángulo con una recta oblicua

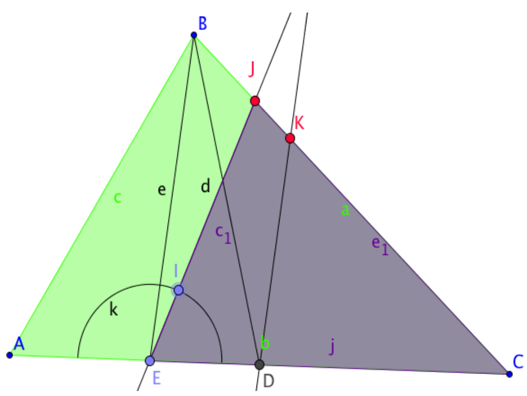
 $(ED,\text{área}ADG),(EB,\text{área}ADG),$ $(GB,\text{área}ADG),(x(G),\text{área}ADG)$ $(y(G),\text{área}ADG),(x(G),\text{área}ADG)$ $(x(E),\text{área}ADG-\text{área}DGBC),$ $(\text{área}ADG,\text{área}DGBC)$	 $(\alpha,\text{área}ADG),(x(E),\text{área}ADG)$ $(h,\text{área}ADG),(y(E),\text{área}ADG)$ $(sen\alpha,\text{área}ADG),\left(x(G),\frac{\text{área}ADG}{\text{área}DGBC}\right)$

Fuente: Producciones de los participantes

Argumentación de soluciones

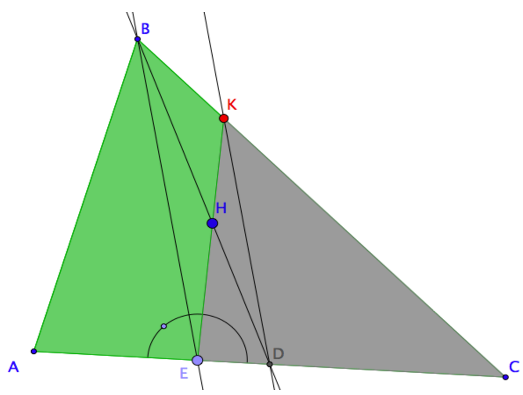
La solución 5 mostrada en la Tabla 6.2 surgió a partir de la exploración de una configuración dinámica relacionada con la mediana. Esta exploración utiliza una recta oblicua controlada por un punto móvil I sobre una semicircunferencia y un punto móvil E sobre un lado del triángulo inicial (Figura 6.6). Un participante trazó la recta paralela a EB por el punto medio D y encontró su punto K de intersección con el lado del triángulo. Además, trazó el triángulo ECJ donde J es el punto de intersección de la recta oblicua móvil con el lado del triángulo. Luego conjetura, a partir de comparar las áreas para distintos casos, que cuando el punto J y K coinciden se encuentra la solución al problema. Así, la solución se encuentra trazando el triángulo ECK (Figura 6.7). Un episodio importante de planteamiento de problemas se dio cuando se cuestionó a los participantes para que dieran un argumento geométrico de esta solución (adicional al dado por la herramienta). En esta dirección, se planteó el problema de demostrar que los triángulos EDK y BDK tienen misma área, lo que llevó a los participantes a explorar las propiedades del trapecio $EDKB$. Los participantes demostraron que dichos triángulos tienen la misma área usando la proposición 37 de Euclides (ambos triángulos comparten la base DK y tienen su vértice en una paralela a la base).

Figura 6.6 El triángulo EKC resuelve el problema por medio de una recta oblicua a partir del punto dinámico E (infinidad de soluciones)



Fuente: Producciones de los participantes

Figura 6.7 Solución al problema por medio de una recta oblicua EK; E móvil sobre AC



Fuente: Producciones de los participantes

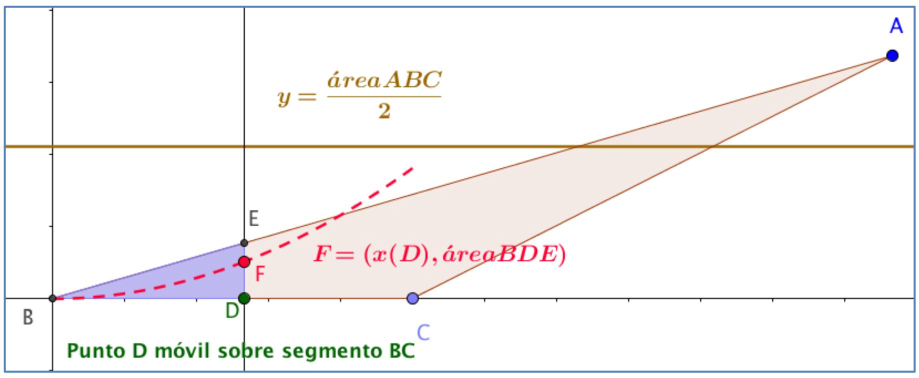
Dominio de soluciones dinámicas

Al resolver problemas, resulta importante preguntarse si el problema siempre tiene solución y si esta es única, o si existen varias o una infinidad de soluciones. Si el problema no siempre tiene solución, entonces un problema subsidiario que se puede formular es determinar cuáles son las condiciones necesarias para que la tenga. Desarrollar esta habilidad para plantear este tipo de interrogantes no es fácil por medio del uso de lápiz y papel; tampoco es fácil con ayuda de un SGD, sin embargo, éste ofrece oportunidades para implementar este tipo de reflexiones.

Existen diferencias entre el dominio de la solución general (condiciones necesarias para que la solución a un problema exista) y el dominio de la solución dinámica (cuando el alcance de una configuración dinámica está limitado por aspectos de su construcción).

Para ejemplificar lo anterior considere la solución propuesta por la mayoría de los participantes al problema de bisecar el área de un triángulo por medio de una recta perpendicular a un lado que pasa por un punto sobre dicho lado. Si el movimiento del punto que controla la recta perpendicular está restringido en el lado del triángulo, entonces existen triángulos para los cuales el problema no tiene solución dinámica (Figura 6.8). Esto no significa que esos triángulos no puedan dividirse en dos secciones de misma área por medio de una recta perpendicular. Este hecho llevó al investigador a plantear problemas relacionados en primera instancia con el dominio de la solución dinámica ¿para qué casos la configuración dinámica puede usarse para resolver el problema? Posteriormente, esta reflexión permitió a los participantes analizar el dominio de la solución general.

Figura 6.8 Triángulo para el cual la construcción no permite encontrar una solución



Fuente: Producciones de los participantes

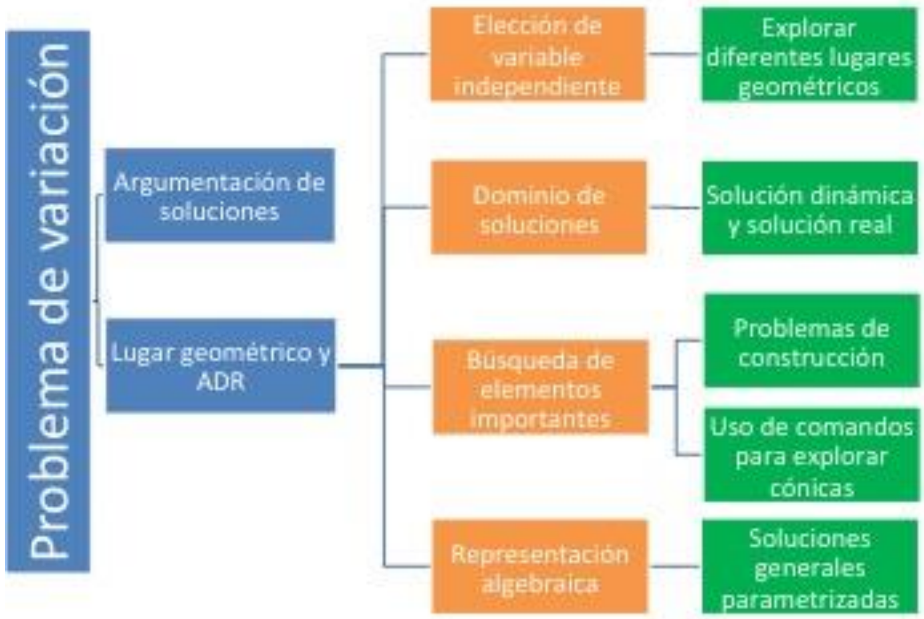
5 Conclusiones

Los resultados mostrados sugieren que con el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (GeoGebra) es posible generar procesos de planteamiento de problemas al transformar un problema tradicional (estructurado) en un problema de investigación (semi-estructurado). Dicha transformación se logró al no hacer explícitos ciertos objetivos o condiciones. En el problema inicial, no hacer explícita la condición de dividir el triángulo por medio de una recta paralela a uno de los lados fue determinante para que los participantes formularan y resolvieran diversos problemas.

Debido a la posibilidad de arrastrar objetos dentro de las configuraciones dinámicas, los participantes pudieron resolver el problema por medio de acercamientos dinámicos. Estos enfoques les permitió encontrar soluciones que sería complicado visualizar con herramientas estáticas tradicionales como lápiz y papel. Por otro lado, la exploración dinámica de la tarea motivó el planteamiento de una serie de problemas para los cuales la solución requirió analizar la variación del área de figuras. Para este análisis el uso de puntos dinámicos y sus respectivos lugares geométricos, por medio de la estrategia ADR, fue crucial. Posteriormente, otra fase de planteamiento de problemas se dio cuando los participantes exploraron los lugares geométricos (cónicas) para encontrar sus elementos importantes (foco, directriz, vértice, etcétera), sus ecuaciones y finalmente soluciones algebraicas a los problemas.

En resumen, en la exploración de este problema por medio del SGD se formularon diversos problemas adicionales para encontrar la solución del problema inicial. En ocasiones, el SGD permite encontrar soluciones por medio de la exploración y el método de prueba y error; en este camino, un episodio importante de formulación de problemas se da en la búsqueda de argumentos que fundamenten dichas soluciones. La estrategia ADR para explorar y resolver problemas ofrece diversas oportunidades para formular problemas como la elección de variable independiente, el dominio de la configuración dinámica y de las soluciones, el análisis de elementos importantes de lugares geométricos y su representación algebraica general parametrizada. Con la finalidad de responder la primera parte de la pregunta de investigación, en la Figura 6.9 se muestra una caracterización de los procesos de formulación de problemas que pueden surgir durante la resolución de problemas que involucran la variación de parámetros y la estrategia ADR.

Figura 6.9 Caracterización del proceso de formulación de problemas presente en la resolución de problemas que involucren variación y la estrategia ADR



Fuente: Elaboración propia

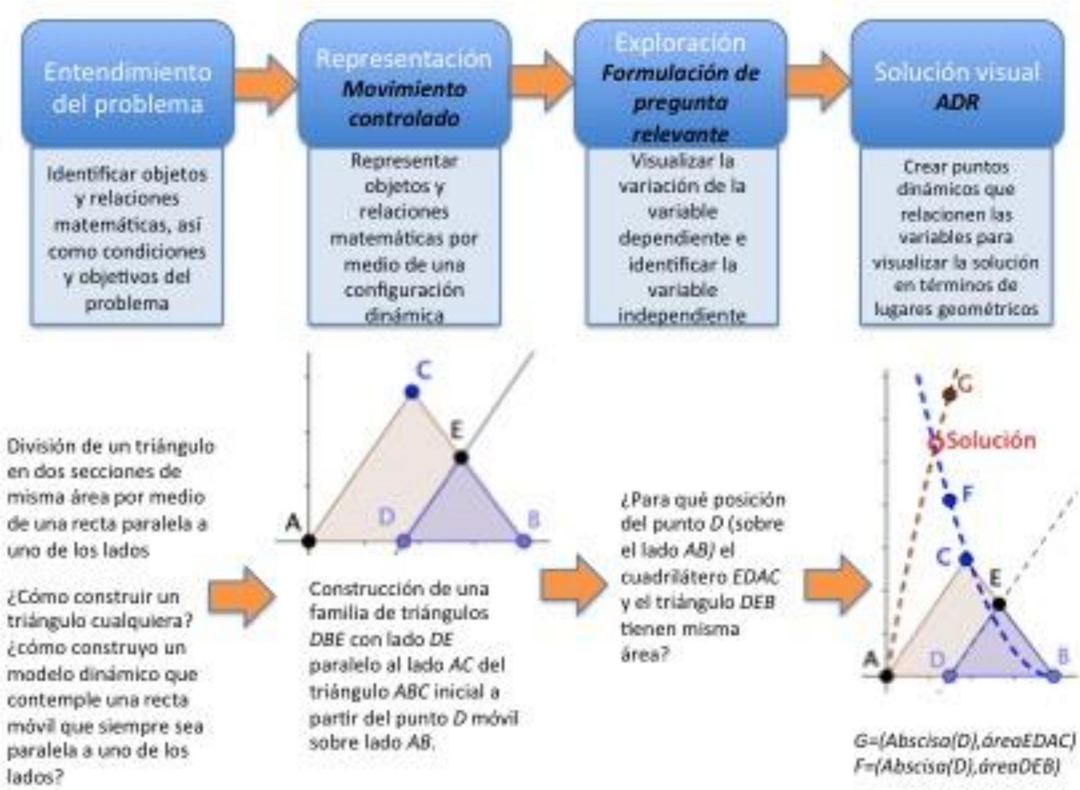
Respecto a la segunda parte de la pregunta de investigación, referente a los recursos, heurísticas y estrategias importantes para la formulación y resolución de problemas, se argumenta que el uso del SGD ofreció la posibilidad de implementar la estrategia ADR que es útil tanto para formular como para resolver problemas. Esta estrategia depende de un recurso esencial que es el movimiento controlado (MC). El movimiento controlado ocurre cuando una configuración dinámica depende del movimiento de puntos sobre trayectorias geométricas reconocidas por el SGD como rectas, circunferencias y cónicas. En otras palabras, si los puntos no se mueven por rectas (segmentos), circunferencias o cónicas, entonces es imposible implementar la estrategia ADR.

La estrategia ADR se puede utilizar principalmente en problemas que involucran el análisis y comparación de la variación de atributos de figuras como áreas, longitudes, ángulos, pendientes, entre otros. En este sentido, otro recurso matemático fundamental detrás de esta estrategia es la variación y covariación desde el punto de vista de relaciones y funciones matemáticas; por esta razón, el uso de los ejes coordenados del SGD resulta de vital importancia. En esta estrategia, los lugares geométricos son generados por puntos dinámicos (incrustados en el sistema de referencia creado por los ejes coordenados) que relacionan dos atributos variables dentro de la configuración dinámica.

La implementación de la estrategia ADR para resolver problemas de variación se puede caracterizar en cuatro fases principalmente: entendimiento del problema, representación dinámica del problema, exploración del modelo dinámico y solución visual (Figura 6.10). La fase de entendimiento del problema requiere identificar objetos y relaciones matemáticas, así como las condiciones y objetivos del problema. La etapa de representación consiste en construir un modelo dinámico que tome en cuenta los objetos y relaciones matemáticas identificadas en la etapa anterior. En esta etapa es importante la optimización de la configuración dinámica tomando en cuenta el uso apropiado de los ejes coordenados y el movimiento controlado. La fase de exploración consiste en visualizar la variación del atributo de interés en función del movimiento de puntos dentro del modelo dinámico. En esta fase normalmente se plantea (a veces no de forma explícita) la pregunta relevante que está detrás de la implementación de la estrategia ADR. Aquí, resulta importante identificar la variable independiente (otro atributo variable) que se tomará en cuenta para el análisis.

Por último, la solución visual se encuentra en términos de lugares geométricos descritos por puntos dinámicos que relacionan las variables (atributos) dentro del modelo. Las heurísticas relevantes en la implementación de la estrategia ADR son el análisis de casos particulares mediante el arrastre de la configuración y, la visualización y análisis de patrones e invariantes por medio de lugares geométricos.

Figura 6.10 Caracterización de la implementación de la estrategia ADR en problemas de variación



Fuente: Elaboración propia

Cualquier intento por incluir al planteamiento y resolución de problemas en escenarios de enseñanza y aprendizaje de matemáticas depende en primera instancia de los profesores. En este sentido, para los profesores el planteamiento o formulación de problemas es importante tanto para su formación disciplinar como para su práctica docente. Por medio de la formulación de problemas, los profesores en servicio y en formación pueden desarrollar su creatividad y construir o robustecer conocimiento matemático. Además, la formulación de problemas es una habilidad pedagógica fundamental, pues constantemente necesitan formular o reformular problemas en función de las necesidades, recursos, ideas o errores de sus estudiantes. En esta dirección, se requiere atender dos cuestiones importantes: 1) formación de profesores y 2) diseño de tareas de formulación de problemas.

En este estudio se mostró un ejemplo del diseño e implementación de una tarea de formulación de problemas. El uso de un SGD fue fundamental, pues permitió transformar un problema tradicional en una actividad de exploración e investigación. Así, se puede concluir que el SGD puede motivar procesos de exploración e investigación que eventualmente conducen a la formulación y resolución de distintos problemas. Esta idea, podría ser un elemento esencial para el diseño de programas de formación de profesores alrededor del planteamiento y resolución de problemas con ayuda de tecnologías digitales.

6 Referencias

Abramovich, S. & Cho, E. K. (2015). Using Digital Technology for Mathematical Problem Posing. En F. M. Singer, N. F. Ellerton, J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 71-102). Springer New York.

Aguilar-Magallón, D. & Reyes-Martínez, I. (2016). Digital technology and formulation of problems during the process of solving problems. In M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, & J. A. Eli (Eds.), Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 1432-1446). Tucson, AZ: The University of Arizona.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (2005). The art of problem posing. Psychology Press. Cai (Ed.), Mathematical Problem Posing (pp. 3-34). New York: Springer.

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B., & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. Educational Studies in Mathematics, 83(1), 57-69.
Imaoka, M., Shimomura, T., & Kanno, E. (2015). Problem Posing in the Upper Grades Using Computers. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 257-272). New York: Springer.

Lavy, I. (2015). Problem-Posing Activities in a Dynamic Geometry Environment: When and How. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 393-410). New York: Springer.

Leikin, R. (2015). Problem Posing for and Through Investigations in a Dynamic Geometry Environment. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 373-391). New York: Springer.

Osana, H. P. & Pelczer, I. (2015). A Review on Problem Posing in Teacher Education. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 469-492). New York: Springer.

Rosli, R., Capraro, M. M., Goldsby, D., Gonzalez, E. G., Onwuegbuzie, A. J., & Capraro, R. M. (2015). Middle-Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 333-354). New York: Springer.
Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I. & Aguilar-Magallón, D. (2015). The Use of Digital Technology in Extending Mathematical Problem Solving Reasoning. In Learning Technology for Education in Cloud (pp. 298-309). Springer International Publishing.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Ortega-Moreno, F. (2015). Fostering and supporting the coordinated use of digital technologies in mathematics learning. International Journal of Learning Technology, 10 (3), 251-270.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. For the learning of mathematics, 19-28.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. ZDM, 29(3), 75-80.

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. Journal for research in mathematics Education, 293-309.

Stoyanova, E. & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. Technology in mathematics education, 518-525.