Diseño de actividades matemáticas basadas en resolución de problemas en un ambiente de aprendizaje MOOC

Design of mathematical activities based on problem solving in a MOOC learning environment

[1]POVEDA-FERNÁNDEZ, William†*, AGUILAR-MAGALLÓN, Daniel Aurelio y [2]OLVERA-MARTÍNEZ, María del Carmen

ID 1er Autor: *William, Poveda-Fernández* / **ORC ID:** 0000-0002-7245-8278, **Researcher ID Thomson:** V-1424-2018, **CVU CONACYT ID:** 627826

ID 1er Coautor: *Daniel Aurelio, Aguilar-Magallón* / **ORC ID:** 0000-0001-7520-4508, **Researcher ID Thomson:** V-2050-2018, **CVU CONACYT ID:** 486327

ID 2do Coautor: *María del Carmen, Olvera-Martínez* / **ORC ID:** 0000-0001-7361-1687, **Researcher ID Thomson:** U-9456-2018, **CVU CONACYT ID:** 230198

[1]Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – IPN
[2]Universidad Juárez del Estado de Durango

W. Poveda, D. Aguilar y C. Olvera

wpoveda@cinvestav.mx

A. López, C. Lima, J. Reyes (Dirs.) Educación para todos. Tópicos Selectos de Educación en CITeM. ©ECORFAN-México, 2018.

Abstract

In this study, a massive and open online course was designed and implemented based on a problem-solving environment and the use of digital technologies. The research question was: How does the design and implementation of mathematical activities, in a problem-solving environment and coordinated use of digital technologies in a MOOC scenario, influence the construction of the mathematical thinking of the participants? The results indicate that the design of the activities and the methodology used during the course implementation promoted episodes of problem solving. In this route the participants, after interacting with dynamic representations of a problem, posed questions and looked for different ways to answer them, formulated conjectures based on the movement and measurement of attributes of mathematical objects present in the dynamic configuration and went from visual and empirical solutions to the presentation of geometric and algebraic arguments in the validation of the formulated conjectures, in a collaborative environment and through the discussion forum.

Problem Solving, Digital Technologies, MOOC, Design of activities

1 Introducción

Los avances tecnológicos han cambiado la forma en que los individuos se comunican e interactúan. Un estudiante, con el uso de las tecnologías digitales puede acceder a información sobre contenidos disciplinarios a través de diversas plataformas, compartir y discutir ideas o dudas en cualquier momento y desde cualquier sitio. De esta manera, las tecnologías digitales abren nuevas rutas en el proceso de aprendizaje (Santos-Trigo, Moreno-Armella, & Camacho-Machín, 2016), lo que ha originado que las instituciones educativas desarrollen o amplíen las opciones de aprendizaje, principalmente, en escenarios de aprendizaje en línea. Algunas organizaciones han explorado estas alternativas, como es el caso de KhanAcademy[2] quien, a través de su plataforma, proporciona una serie de videos que explican conceptos en diversas disciplinas, incluida matemáticas. Este tipo de alternativas permite que el alumno pueda estudiar a su propio ritmo, dentro y fuera de su clase, consultando videos las veces que considere necesarias.

Gracias a la conectividad de las tecnologías digitales se han creado plataformas digitales para que universidades e instituciones educativas ofrezcan Cursos en Línea Masivos y Abiertos (*Massive Open Online Course*, MOOC por sus siglas en inglés). El carácter abierto y masivo de un MOOC abre la posibilidad de que la comunidad de participantes sea numerosa (generalmente participan miles de personas) y heterogénea, es decir, con diferentes niveles de estudios, edad, conocimiento de la tecnología y dominio o conocimiento previo de la materia. Durante el desarrollo de las actividades no existe un profesor o tutor encargado de responder o dar seguimiento puntual a cada participante, sino que, cada integrante está a cargo del desarrollo y participación en las actividades. Dependiendo de los intereses y las posibilidades de tiempo de cada participante, se puede involucrar de una manera más profunda en una o varias de las actividades de aprendizaje que plantea el MOOC.

Con base en estas ideas, se presenta un estudio que se centró en un ambiente de aprendizaje MOOC dirigido a estudiantes de educación media y bachillerato, sin embargo, su carácter masivo y abierto implicó que cualquier individuo interesado podía inscribirse. Se utilizó el modelo de diseño de aprendizaje de Churchill, King, y Fox (2016) donde se integran Recursos, Actividades, Soporte y Evaluación con el objetivo de fomentar la participación activa de los participantes en un ambiente de reflexión, colaboración y discusión, en un contexto donde las tareas o problemas involucren a los estudiantes en un proceso de resolución de problemas.

El diseño de las tareas matemáticas se basó en la resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales de Santos-Trigo (2014). Aprender matemáticas está relacionado con la resolución de problemas ya que es un medio que permite identificar, explorar, probar y comunicar las estrategias de solución.

[2] Para más información https://www.khanacademy.org/about

Además, cuando se involucra una tecnología digital, como un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), puede utilizarse para integrar los procesos que intervienen en la resolución de problemas ya que pueden generar representaciones o modelos dinámicos de los problemas matemáticos donde el movimiento de objetos particulares (puntos, rectas, segmentos, polígonos, etc.) puede ser explorado y explicado en términos de relaciones matemáticas (Santos-Trigo, 2014).

Así, el MOOC se enfocó en el desarrollo de tareas para promover la práctica de tendencias o hábitos del quehacer matemático. Es decir, pretendió enfatizar que el aprendizaje de las matemáticas requiere problematizar o cuestionar las tareas o situaciones, pensar distintas maneras de resolver un problema, comprender y utilizar diversas representaciones de un concepto matemático, encontrar el significado e interpretar la solución y comunicar los resultados.

Con base en estas ideas y en las etapas de resolución de problemas propuestas por Polya (1945) y Schoenfeld (1985), Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) proponen una forma para caracterizar el pensamiento matemático de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales en cuatro episodios: la comprensión del problema, exploración del problema, búsqueda de múltiples acercamientos (dinámico, algebraico, geométrico, etc.) e integración de los acercamientos hacia la solución del problema (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2011).

En este contexto, en el estudio que se presenta, la pregunta de investigación guía fue: ¿De qué manera el diseño y la implementación de las actividades matemáticas, en un ambiente de resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales en un escenario MOOC, influye en la construcción y desarrollo del pensamiento matemático de sus participantes? Interesó analizar y documentar de qué manera las actividades influyeron en la construcción y desarrollo del pensamiento matemático de los participantes, cuando se involucran en un ambiente de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales dentro de un MOOC: qué tipo de preguntas plantean; qué medios utilizan para obtener información; qué conjeturas formulan y cómo las justifican; y, qué influencia tiene la interacción y discusión de las ideas entre los participantes y con el equipo que diseñó el curso.

2 Marco Conceptual

En el campo de la educación matemática, las propuestas curriculares actuales promueven un énfasis en la resolución de problemas y en el uso de herramientas digitales (NCTM, 2000; 2009). Investigadores como Santos-Trigo (2014) y Schoenfeld (1992), señalan que la resolución de problemas está relacionada con el aprendizaje de la matemática ya que permite identificar, explorar, probar y comunicar las estrategias de solución; además de que intervienen procesos como: formular conjeturas, buscar de diversos métodos de solución, explorar diferentes representaciones, buscar patrones, variantes y relaciones entre objetos matemáticos, presentar argumentos, comunicar resultados, plantear preguntas y proponer nuevos problemas (Santos-Trigo, 2014).

La resolución de un problema va más allá de aplicar un procedimiento mecánico, por lo que es necesario que el estudiante adquiera un hábito de cuestionamiento, mediante el cual, pueda resolver problemas matemáticos (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013). En este contexto, el reto de la enseñanza de las matemáticas es crear condiciones para generar un ambiente de aprendizaje que refleje la práctica o actividad matemática.

Las tecnologías digitales juegan un papel importante en resolución de problemas, por ejemplo, el uso de un SGD se vuelve importante para representar el problema en términos de sus propiedades principales y, después, visualizar el problema de forma dinámica. Esta herramienta también puede ser utilizada para cuantificar los atributos matemáticos como ángulos, segmentos de longitudes, pendientes, etc., y observar cómo cambian cuando se mueven algunos objetos (puntos o líneas) dentro de la representación dinámica del problema.

Aguilar-Magallón y Poveda (2017) argumentan que el uso de las herramientas digitales requiere no sólo transformar el trabajo del aula; sino también valorar las exploraciones que incluyen el razonamiento visual, empírico y formal. Indican que es importante reconocer que la herramienta por sí misma no proporciona los medios o las formas necesarias para que los estudiantes las utilicen eficientemente en las actividades de resolución de problemas.

Por ello, un elemento esencial es que los estudiantes planteen preguntas relevantes y busquen contestarlas en términos de relaciones matemáticas: “La formulación de preguntas debería conducir al estudiante a identificar e investigar relaciones matemáticas, para buscar evidencia o información que ayude a fundamentar dichas relaciones y para presentar y comunicar resultados” (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2009, p. 276).

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) presentan un marco para caracterizar las formas de razonamiento matemático en cuatro episodios que surgen como resultado del uso sistemático de la tecnología digital, en particular un SGD, en el proceso de resolución de problemas.

Comprensión del problema es el primer episodio que consiste en identificar los objetos matemáticos involucrados y establecer sus propiedades matemáticas, para posteriormente, construir un modelo dinámico que lo represente. Por ejemplo, si el problema contempla un rectángulo, el estudiante debe identificar las propiedades de sus lados, ángulos, diagonales, etc., para representarlo dinámicamente en un SGD.

El segundo episodio comprende *la exploración del problema*. La representación dinámica de la situación matemática se convierte en un medio para que el estudiante observe el comportamiento de los atributos de los objetos matemáticos al mover algunos elementos dentro del modelo dinámico. Esto permite efectuar exploraciones que llevan a la formulación de conjeturas. Por ejemplo, se puede observar la variación del valor del área de una familia de rectángulos de perímetro fijo cuando se modifica la longitud de uno de sus lados.

El tercer episodio, *diferentes acercamientos hacia la solución del problema*, promueven la búsqueda de diversas estrategias de solución. El uso de un SGD juega un papel importante ya que, por ejemplo, un acercamiento dinámico puede consistir en identificar las propiedades, patrones o invariantes de un objeto cuando se mueve, y argumentarlos por medios visuales (gráfica) o empíricos (datos numéricos y tablas en la hoja de cálculo). El objetivo es utilizar diferentes conceptos y recursos para generar diferentes estrategias de solución: dinámicas, algebraicas, geométricas, entre otras.

El cuarto episodio es la *integración*. Aquí se deben relacionar los diversos acercamientos a la solución del problema, hacer explícitos y relacionar los conceptos matemáticos utilizados. Otra característica importante de este episodio es la extensión del problema; por ejemplo, generalizar los resultados obtenidos mediante el cambio de alguna o varias condiciones del problema inicial.

En el diseño de ambientes de aprendizajes, Churchill, King, y Fox (2016) sugieren que estos deben incluir una propuesta sobre los contenidos y una posible ruta de cómo estudiarlos en un ambiente de trabajo en equipo y colaboración, donde cada persona participa activamente en un proceso de discusión ya sea preguntando, comentando o proporcionando sugerencias o diferentes formas de encontrar la solución a un problema. En este sentido, proponen un marco para el diseño de ambientes de aprendizaje en línea llamado RASE (Resources-Activities-Support-Evaluation)[3], basado en la premisa de que un ambiente de aprendizaje debe incluir e integrar cuatro componentes:

1. **Recursos.** Se refieren a los materiales disponibles para los estudiantes: videos, imágenes, documentos digitales, calculadoras, software, etc.
2. **Actividades.** El objetivo es involucrar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje a través del uso de Recursos en diversas tareas, como experimentos y resolución de problemas. En un ambiente de resolución de problemas las tareas que se presenten a los participantes deben generar la oportunidad de que éstos se involucren en un proceso de cuestionamiento, búsqueda de relaciones y reflexión conceptual (Santos-Trigo, 2008).
3. **Soporte.** Es necesario contemplar los medios para proporcionar ayuda a los estudiantes en el momento en que se les presente alguna interrogante relacionada con la tarea que están realizando. En este sentido, la herramienta foro de discusión de, se convierte en un medio de comunicación entre sus participantes y les ofrece la oportunidad de plantear y aclarar sus dudas, conocer las ideas de sus compañeros y contrastar sus puntos de vista con los de otros (Poveda & Aguilar-Magallón, 2017).

[3] Los cuatro componentes RASE se referencian con la primera letra en mayúscula (Recursos, Actividades, Soporte, Evaluación).

4. **Evaluación.** La evaluación debe ser formativa para permitir a los estudiantes mejorar constantemente su aprendizaje, es decir, una Actividad debe favorecer que los estudiantes trabajen en tareas, desarrollen y evidencien su aprendizaje mediante algún mecanismo (por ejemplo, escribir las ideas, resultados o solución de la tarea o problema). La Evaluación enfatiza que los alumnos puedan analizar la retroalimentación recibida, proporcionada a través de los medios de soporte, en función de refinar o ampliar los conceptos o ideas iniciales.

Por otra parte, en un ambiente MOOC se reúne virtualmente a un grupo de personas que tiene la posibilidad de participar en conversaciones, sobre algún tema de su interés, a través del foro de discusión. Según Ernest (2016), en una conversación, como unidad de análisis, interviene: un hablante o proponente, un oyente o crítico y un texto Matemático. El hablante o proponente plantea una idea (texto Matemático) y el oyente o crítico responde proporcionando su punto de vista, aceptando o modificando la idea original. Posteriormente, el hablante o proponente puede asumir el rol de oyente o crítico, de esta manera, se alternan sus roles. Este proceso se repite varias veces y se complementa con la incorporación de otros participantes. En una conversación se requiere que el número de personas involucradas sean dos o más y se pueden dar a través de textos escritos utilizando medios de comunicación electrónicos asíncronos, por ejemplo, el foro (Ernest, 2016).

3 Metodología

En esta sección se describen los elementos considerados en el diseño de las actividades del MOOC, sus participantes, la metodología utilizada durante la implementación del curso y la forma de organizar y analizar los datos obtenidos.

3.1 Diseño de las Actividades

Se diseñaron cinco actividades en total con el objetivo de que los participantes vieran los problemas matemáticos como un medio que les permitiera plantear preguntas y buscar diversas formas de contestarlas con ayuda de los Recursos, o bien, interactuando entre ellos en el foro de discusión. Así, un principio fundamental en el desarrollo de las actividades fue que los participantes continuamente formularan preguntas como un medio para comprender conceptos y resolver problemas; también, tuvieron la finalidad de promover el trabajo autónomo en los participantes. Para ello, se incorporaron los siguientes Recursos:

1. **Consulta de información.** Las plataformas digitales que se consideraron son Wikipedia y KhanAcademy. La primera proporciona información puntual acerca de definiciones, teoremas y propiedades de objetos matemáticos tales como polígonos, círculos, cónicas, etc. Por su parte, KhanAcademy incluye videos donde se abordan y explican conceptos y teoremas matemáticos.
2. **Modelos dinámicos.** Toda actividad proporcionó un conjunto de modelos dinámicos para que los participantes movieran y exploraran los objetos presentes e identificaran posibles relaciones, invariantes o patrones en sus atributos y formularan preguntas acerca de estos.

Las Actividades del MOOC fueron estructuradas en tres fases:

1. **Movimiento.** A partir de un modelo dinámico, creado en GeoGebra, que representa una situación matemática, el objetivo fue que los participantes exploraran el problema y plantearan preguntas sobre el comportamiento de los objetos y sus propiedades o atributos. Las plataformas Wikipedia y KhanAcademy fueron utilizadas para consultar y estudiar los conceptos matemáticos involucrados en el problema.
2. **Formulación de conjeturas.** Las preguntas planteadas en la etapa anterior tuvieron como objetivo la identificación y formulación de conjeturas. En una primera instancia, éstas debieron ser sustentadas o refutadas mediante argumentos visuales o empíricos, para ello se pueden utilizar las estrategias de movimiento de objetos, medición de sus atributos y lugares geométricos para modelar la variación de los atributos (área, perímetro de triángulos y cuadriláteros).
3. **Justificación de conjeturas.** Toda conjetura identificada debió ser justificada utilizando conceptos y relaciones matemáticas, por ejemplo, mediante argumentos algebraicos, geométricos, entre otros.

Debido a que en el MOOC no existe un profesor encargado de responder las dudas o dar seguimiento puntual a sus integrantes, el diseño de las actividades incluyó los medios para que los participantes obtuvieran ayuda sin depender de la figura del profesor o tutor. Todas las Actividades incorporaron el foro como medio de Soporte, el objetivo fue que los participantes tuvieran la oportunidad de plantear sus dudas y recibieran retroalimentación por parte de la comunidad, además, compartir ideas y participar en las discusiones que se generen en el desarrollo de las tareas y problemas propuestos. Así, el trabajo de los integrantes podría ser un punto de referencia para que otros retomen o extiendan las ideas y las contrasten o discutan dentro de la comunidad que genera el curso masivo.

El foro de discusión fue utilizado como el medio que permite al participante presentar sus ideas a los demás y obtener retroalimentación, así, una persona puede contrastar su punto de vista con el de los demás para ampliar sus recursos matemáticos y estrategias al resolver un problema.

A manera de ejemplo, la segunda actividad del MOOC presentó una representación dinámica del problema, a partir de una construcción que involucra rectas paralelas, perpendiculares y un punto simétrico de otro con respecto a una recta, el objetivo del diseño de la actividad fue que los participantes movieran los objetos matemáticos y formularan preguntas acerca del comportamiento de algunos de ellos. No existió un enunciado explícito del problema, sino que, inicialmente en el modelo dinámico solo es posible observar el punto A sobre la recta m. Con la ayuda de controles programados en el modelo, los participantes tuvieron la oportunidad de visualizar la construcción paso a paso. La Figura 5.1 muestra capturas de pantalla del modelo. La Tabla 5.1, detalla los objetivos de las fases de movimiento, conjetura y justificación de la actividad dos.

Figura 5.1 Modelo dinámico de la actividad 2

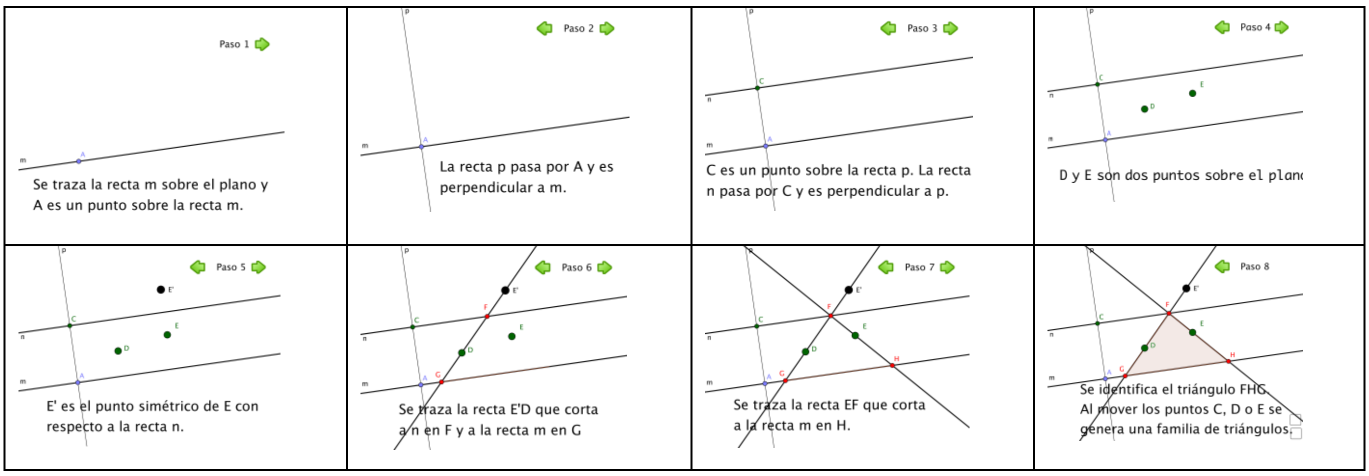
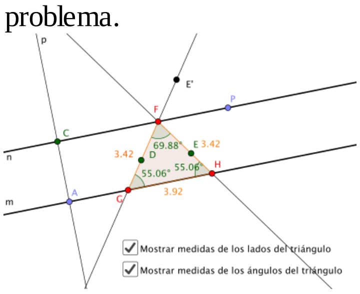


Tabla 5.1 Diseño de la actividad dos: Episodios de la resolución de problemas

El problema Entendimiento del problema	**Movimiento** Exploración	**Conjetura** Solución visual-empírica	**Justificación** Argumentación
Identificar conceptos y relaciones matemáticas. Identificar condiciones del problema. 	Visualizar el comportamiento de los objetos presentes en la configuración dinámica: rectas paralelas, rectas perpendiculares, punto simétrico a otro con respecto a una recta, mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, tipos de ángulos, triángulo isósceles y equilátero.	¿Qué propiedades tiene la familia de triángulos FGH? ¿Se conservan las propiedades para cualquier posición de los puntos E y D? ¿Existe alguna relación entre los lados de la familia de triángulos FGH? ¿Existe alguna relación entre sus ángulos?	¿Cómo justificar que todo elemento de la familia de triángulos FGH que se genera es "siempre" isósceles? ¿Qué relación existe entre los ángulos $E'FP$ y PFH? ¿En qué ayuda lo anterior para justificar que cada elemento de la familia de triángulos FGH es isósceles?

Fuente: MOOC Resolución de problemas Matemáticos y uso de tecnología digital

3.2 Participantes del MOOC y procedimientos

El MOOC fue construido en la plataforma digital *Open Edx*, a través de *MéxicoX* parte la Secretaría de Educación Pública de México. Tuvo una duración de seis semanas y el requisito solicitado a los interesados fue poseer estudios de nivel medio superior. Se inscribieron un total de 2889 personas. Es importante mencionar que 10% de estas personas participaron en los foros en las seis actividades del curso expresando sus ideas las veces que consideraron necesarias y se involucraron en el desarrollo de algunas tareas matemáticas, dependiendo de sus intereses.

El equipo de diseño del MOOC (ED) monitoreó la actividad de los participantes en los foros de la siguiente manera:

1. En cada Actividad se clasificaron los comentarios en cuatro categorías: respuestas a las preguntas que planteaba cada Actividad, acercamientos hacia la solución del problema (correctos e incorrectos), preguntas planteadas y, extensiones del problema. Posteriormente, se eliminaron aquellos que tenían ideas similares; se tomaron dos comentarios de cada categoría y fueron colocados de tal forma que se mostraran al inicio de las conversaciones, así los participantes les daban prioridad a estos comentarios para analizarlos y discutirlos.
2. Se intervenía en el foro solo cuando se requería orientar y extender la discusión. No se respondían de manera directa las preguntas de los participantes, sino que se les cuestionaba con el objetivo de generar discusión y que ellos mismos buscaran diferentes formas de solucionar la situación.
3. Al final de cada Actividad, se planteó una serie de preguntas para promover la ampliación del tema y que los participantes buscaran extender los problemas iniciales.

3.3 Recolección y análisis de datos

Los datos de este estudio se recolectaron por medio de los foros de discusión y la unidad de análisis fueron las conversaciones en el foro según el marco de Ernest (2016).

Al finalizar el curso, el equipo de diseño analizó las conversaciones en cada Actividad y seleccionó diez de los participantes más activos durante todo el curso. Se detectó que Yolanda, Karol, Ale, Alex, Carlos, Diego, Erick, Guillermo, José y Alan fueron los participantes que frecuentemente utilizaron el foro para expresar sus ideas.

Interesa analizar y documentar cómo el diseño de las Actividades, las interacciones en el foro y la metodología utilizada por el equipo de diseño fomentan el proceso de construcción del conocimiento matemático de los participantes, según el marco de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales de Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011).

4 Presentación de Resultados

En esta sección describe el trabajo de los participantes durante el desarrollo de la actividad dos el curso, se resalta cómo el diseño de las tareas matemáticas, las interacciones entre los participantes y la intervención del ED en el foro favorecieron promovieron que los participantes exploraran las representaciones dinámicas del problema, formularan conjeturas y las sustentaran mediante argumentos visuales, empíricos y formales, plantearan preguntas y buscaran diferentes formas de responderlas.

4.1 Entendimiento del problema

En la etapa inicial de la resolución del problema el objetivo fue que los participantes se cuestionaran sobre el significado de rectas paralelas, rectas perpendiculares y punto simétrico con la finalidad de observar las propiedades del triángulo FGH construido con base en esos objetos geométricos. Así, en este episodio de resolución de problemas, los participantes analizan los conceptos utilizados en la construcción del modelo dinámico y las relaciones que existen entre ellos. Las preguntas planteadas fueron las siguientes:

1. ¿Se puede afirmar que la recta n es paralela a m?

2. ¿Qué significa que E' sea el punto simétrico de E respecto a la recta n? ¿Qué propiedades cumple?

Al inicio de las conversaciones, los participantes coincidieron en que las rectas m y n son paralelas ya que visualmente parecía que no se llegaban a intersecar en algún punto. Los participantes Carlos, Karol y Yolanda les ayudaron a comprender la necesidad de justificar matemáticamente el paralelismo de las rectas m y n: les indicaron que se debe argumentar el por qué son rectas paralelas, para ello, les proporcionaron un enlace a Wikipedia (https://es.wikipedia.org/wiki/Quinto_postulado_de_Euclides) relacionado con el quinto postulado de Euclides (Figura 5.2).

Figura 5.2 Información compartida y relacionada con el V Postulado de Euclides

V postulado de Euclides

Postúlese... Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los [[ángulos]] menores que dos rectos.

Euclides

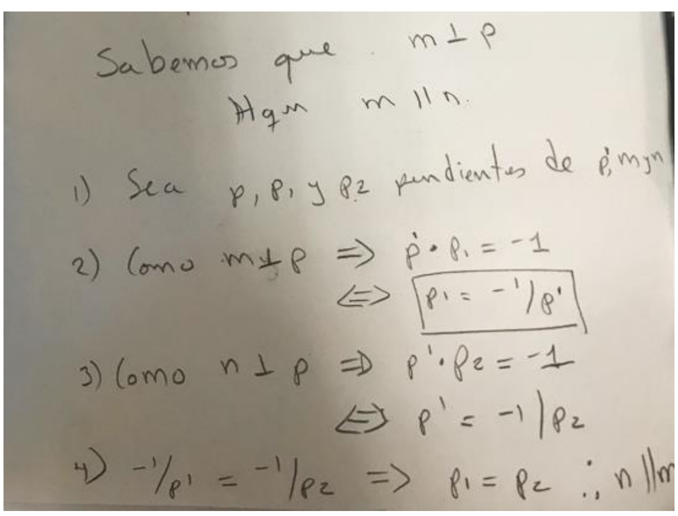
https://es.wikipedia.org/wiki/Quinto_postulado_de_Euclides

Fuente: Conversaciones de los participantes Carlos, Karol y Yolanda

Otros participantes no observaron relación entre la información compartida y la pregunta. El ED formuló la siguiente pregunta en el foro: *"¿Qué interpretan ustedes del V postulado de Euclides?"* Erick y Yolanda sugirieron a los otros centrar la atención en tres elementos de la construcción, las rectas m, n y p, dado que m es perpendicular a la recta p, entonces el ángulo que forman es de 90^o. Luego, como n es perpendicular a P, entonces el ángulo que forman es de 90^o. La recta p corta a m y n y los ángulos que se forman miden 90^o y la suma de dos ángulos internos del mismo lado suma 180^o por lo tanto al prolongar las rectas m y n nunca se cortarán.

José construyó y presentó otra justificación basada en geometría analítica. Utilizó los recursos: pendiente de recta, pendientes de rectas paralelas y pendientes de rectas perpendiculares. Su argumento consistió en relacionar las pendientes de las tres rectas y concluir que las pendientes de m y n son iguales (Figura 5.3).

Figura 5.3 Argumento presentado por José para justificar que m y n son rectas paralelas



Sabemos que $m \perp p$

Hqm $m \parallel n$.

1) Sea p, p_1 y p_2 pendientes de p, m y n

2) Como $m \perp p \Rightarrow p' \cdot p_1 = -1$
$\Leftrightarrow \boxed{p_1 = -1/p'}$

3) Como $n \perp p \Rightarrow p' \cdot p_2 = -1$
$\Leftrightarrow p' = -1/p_2$

4) $-1/p_1 = -1/p_2 \Rightarrow p_1 = p_2 \therefore n \parallel m$

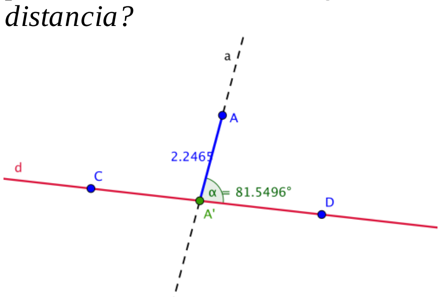
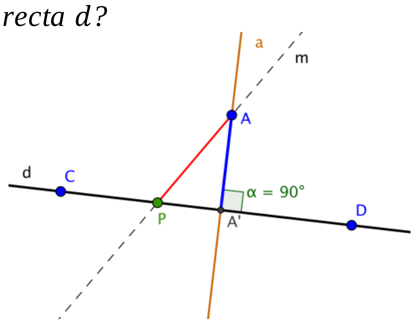
Fuente: Comentario de José en el foro

El comentario no recibió respuesta de otros participantes, el equipo de diseño consideró que la justificación algebraica reunía varios conceptos y relaciones, así que planteó la pregunta: "*¿Qué opinan de la justificación de José? ¿Qué conceptos matemáticos utiliza para sustentar la conjetura?*" Los participantes Yolanda, Erick, Alex y Karol aprobaron las ideas de José. Erick afirmó que, pese a saber el concepto de pendiente de una recta y las relaciones entre rectas paralelas y perpendiculares, no hubiera logrado conectar tales recursos como lo hizo José.

Respecto a la segunda pregunta, la discusión giró en torno a la definición de puntos simétricos. Ale y Diego no participaron en esta parte. Todos coincidieron en que E es simétrico a E' respecto a la recta n si la distancia de E a la recta es la misma que de E' a la recta, sin embargo, no mencionaron la relación que existe entre la distancia de un punto a una recta y la recta perpendicular. El ED decidió abordar el tema y presentó un modelo del problema (Tabla 4.1) y un conjunto de preguntas para guiar el trabajo de los participantes en búsqueda del significado del concepto de distancia de un punto a una recta.

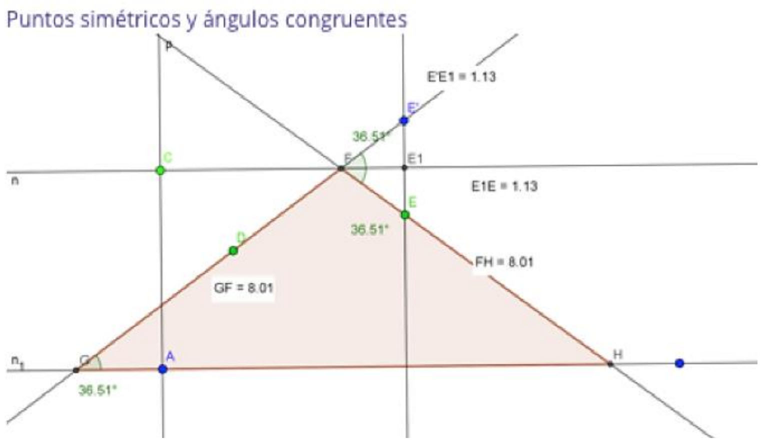
Erick, Yolanda, Carlos y Alex utilizaron las estrategias de movimiento de objetos y cuantificación de atributos (longitud de segmentos y medida de ángulos) como una ruta para formular una conjetura basada en argumentos visuales y empíricos. Guillermo reconstruyó y compartió una construcción dinámica similar a la de Alex, utilizó la estrategia de medición de segmentos y ángulos para medir la longitud de los segmentos $E'E_1$ y EE_1 y los ángulos α y β; también, afirmó que se cumplen las relaciones establecidas por Alex al mover el punto E (Figura 5.4).

Tabla 5.2 Preguntas planteadas por el ED sobre distancia de un punto a una recta

Preguntas planteadas por el ED	**Comentarios en el foro**	**Conclusiones**
Wikipedia proporciona la definición de distancia de un punto a una recta como la distancia más corta entre un punto A y un punto A' de la recta d, *¿cómo obtener tal distancia?*  *Al mover el punto A', ¿es posible obtener un segmento AA' de longitud mínima?*	**Erick** mencionó que la distancia más corta de A a la recta d se obtiene cuando el ángulo α mide 90^0. **Yolanda** coincidió con Erick y agregó: "*la distancia de un punto A a una recta d se debe medir sobre la recta perpendicular a d que pasa por C*". **Alex** cuestionó: "*¿Cómo justificar o probar lo que plantean Erick y Yolanda?*"	El movimiento de los objetos y la visualización, de manera instantánea, de sus atributos permitió a los participantes observar y formular la conjetura: "*La distancia de un punto A a una recta d se debe medir sobre la recta perpendicular a d que pasa por C*".
¿Qué sucede si la distancia mínima no se encuentra sobre la recta perpendicular a la recta d? 	**Carlos** mencionó: "*Si P es diferente de A' no es posible que AP sea menor que AA'*" y, además: "*Si la medida del ángulo $DA'A$ es diferente a 90° no es posible que AA' sea la mínima distancia entre A y la recta d*". **Alex** y **Guillermo** sustentaron la conjetura: "*El triángulo AA'P es rectángulo, la hipotenusa AP siempre es mayor que AA'*".	El segmento de menor distancia entre un punto A y una recta d se localiza sobre la recta perpendicular a d que pasa por A.

Fuente: Conversación en el foro relacionada con el concepto de distancia de un punto a una recta

Figura 5.4 Modelo dinámico construido por Guillermo



Fuente: Foro del MOOC Resolución de Problemas Matemáticos y uso de Tecnologías Digitales

Yolanda mencionó que el segmento $E'E$ (Figura 5.4) es perpendicular a la recta n y también, pese a que al mover el punto E y observar la relación de igualdad entre los ángulos α y β, no tenía argumentos para justificarlo (Figura 5.5).

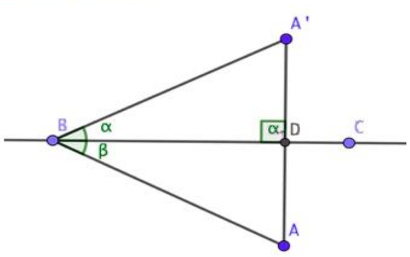
Figura 5.5 Argumento presentado por Yolanda para justificar que m y n son rectas paralelas

Según yo, E y E´ son simétricos pero respecto a la recta n, ahi si cumple que el segmento que une a dichos puntos es perpendicular al eje (n) y la distancia que hay de E al eje de simetría (n) y de E´ al eje de simetría es la misma. En cambio en la recta m, situándonos en cualquier punto, no encontramos la misma distancia de E a dicho punto, y de E´ al mismo punto. Por lo ´tanto, E y E´ no son simétricos respecto a m.

Fuente: Conversación en el foro relacionada con el concepto de puntos simétrico

En otro comentario, Yolanda compartió información de Internet y la utilizó para justificar la igualdad entre los ángulos α y β. Los detalles de la justificación y las conclusiones de las conversaciones en el foro se muestran en la Tabla 4.2

Tabla 5.3 Justificación de Yolanda y conclusiones de las conversaciones en el foro

Justificación de Yolanda	Recursos y Justificación	Resultados del foro
En otros foros ha surgido la pregunta de comó demostrar que el ángulo alta y beta son congruentes. Las respuestas que he leído no mencionan el porque lo son. han mencionado: E' es el simetrico de E con respecto a la recta n entonces los ángulos alga y beta son congruentes ¿eso siempre ser cierto? ¿por que? Busque la definición de punto simétrico y nunca mencionan eso, http://www.vitutor.com/geo/vec/a_10.html, PUNTO SIMÉTRICO RESPECTO DE UN PUNTO El punto simétrico A' de un punto A respecto de otro punto M, será el punto tal que la distancia del punto A al punto M es igual a la distancia del punto A' al punto M, es decir, d (A,D)= d (A',D). Por tanto, podemos decir que el punto D es el punto medio del segmento AA'. (http://matematica.laguia2000.com/general/punto-simetrico#ixzz4YR93zzEe).  La recta BC es mediatriz de A'A o en el caso del problema, la recta n es mediatriz de EE'. Por congruencia de triangulos (LAL) el angulo A'BA es congruente con DBA. Otra propiedad que es que el triángulo ABA' es isósceles y BD es bisectriz de A'BA	**Recursos:** Recta mediatriz de un segmento, congruencia de triángulos, bisectriz de un ángulo. **Justificación:** Sea la recta BC, A cualquier punto en el plano y A' es simétrico a A respecto a la recta BC. Por definición de punto simétrico, $A'D = AD$ ($AA' \perp BC$). Por lo tanto, BC es mediatriz de AA'. $\Delta A'BD \cong \Delta ABD$ (por el criterio de congruencia LAL), así $\sphericalangle A'BD \cong \sphericalangle ABD$, es decir, BC es bisectriz de $\sphericalangle ABA'$.	**Guillermo y Alex** retoman la justificación de Yolanda y concluyen: 1. A' es punto simétrico de A respecto a la recta BC, si la recta AA' es perpendicular a CB en D y $A'D = AD$, es decir, BC es mediatriz del segmento $A'A$. 2. Si B es un punto sobre BC, entonces el triángulo $A'BA$ es isósceles, ya que B está sobre la mediatriz del lado desigual AA'. Por lo tanto, BC es bisectriz de $\sphericalangle ABA'$.

Fuente: Conversación en el foro relacionada con el concepto de punto simétrico

Al final de las conversaciones, Yolanda y los demás participantes establecieron la definición de punto simétrico respecto a una recta.

4.2 Exploración del problema y formulación de una conjetura

En el foro, José mencionó que la familia de triángulos FGH son acutángulos, Guillermo le indicó que no necesariamente se cumple tal hecho y le sugirió: "*mueve el punto C de tal forma que se acerque a A y observa el valor del ángulo FGH*", (Ver Tabla 3.1).

Por otra parte, Ale observó algunas propiedades de la construcción dinámica y, con base en el movimiento y medición de segmentos, formula la conjetura de que los triángulos formados son isósceles. Los nueve participantes restantes, también llegaron a tal resultado: "*bajo las condiciones del problema, el triángulo FGH es isósceles*".

En otro comentario, Alex cuestionó por qué se genera una familia de triángulos FGH isósceles (Figura 5.6).

Figura 5.6 Conjetura de Alex sobre triángulos isósceles

Fuente: Conversación en el foro relacionada con la formulación de una conjetura

La formulación de una conjetura, basado en el movimiento y observación de objetos y sus atributos, no fue un obstáculo para los participantes ya que en los primeros comentarios pudieron observar la relación de igualdad entre dos lados del triángulo cuando movían los puntos D y E (ver Tabla 3.1). Esto fue posible gracias a la participación del Grupo y el objetivo del diseño de las actividades de incorporar medios de Soporte y Evaluación para que, una vez propuesto el problema, cualquier participante pudiera expresar sus ideas y proporcionar retroalimentación a otros.

El uso del SGD, a partir del movimiento de objetos, permitió a los participantes experimentar con los objetos geométricos y en conjunto con la observación de sus atributos (en este caso la longitud de segmentos) encontraron invariantes en la construcción dinámica del problema necesarias para relacionar el triángulo FGH con un triángulo isósceles, de acuerdo con las condiciones establecidas en el problema.

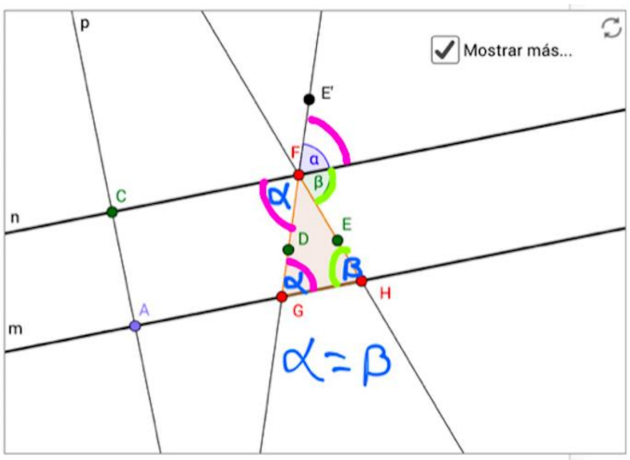
4.3 En búsqueda de una justificación

En esta parte el objetivo del diseño de la Actividad fue que los participantes se cuestionaran lo siguiente:

1. ¿Cómo se sustenta matemáticamente que la familia de triángulos FGH es isósceles?
2. ¿Qué conceptos, propiedades y recursos matemáticos es posible usar para sustentarlo?

Alex construyó y presentó una justificación basada en las propiedades del punto simétrico de E respecto a la recta n, los detalles se muestran en la Tabla 4.3.

Tabla 5.4 Justificación de Alex

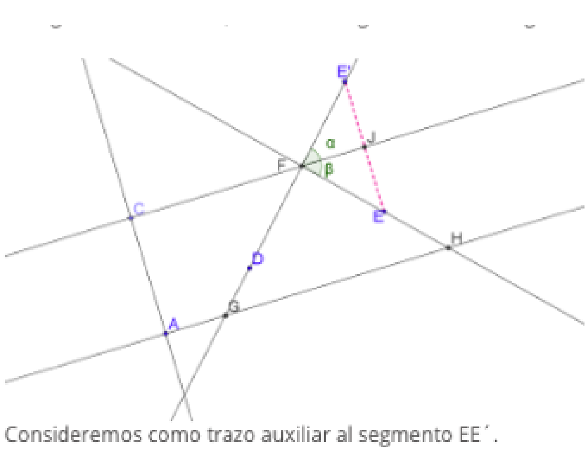
Justificación Alex	**Recursos, estrategias y justificación**
	**Recursos:** Punto simétrico respecto a una recta, distancia de un punto a una recta, bisectriz de un ángulo y ángulos entre paralelas. **Estrategia:** Relación entre los ángulos α y β entre rectas paralelas. **Justificación:** "Sea E' el punto simétrico de E respecto a la recta n, esto significa que están a la misma distancia de n. Así, n es bisectriz del ángulo $E´FE$ y, con ello, muestra que los ángulos α y β tienen la misma medida.

Fuente: Conversación en el foro relacionada con la justificación de la conjetura de Alex

Carlos, Karol, Erick y José estuvieron de acuerdo con la justificación de Alex. Por su parte, Alex retomó las ideas que expresó en la parte anterior de la actividad y en conjunto con Diego justificaron la conjetura utilizando ángulos entre paralelas y ángulo exterior de un triángulo, sin embargo, no dejaron clara la relación que existe entre los ángulos α y β. La Tabla 4.4 muestra los recursos y estrategias de esta justificación. Algunos participantes cuestionaron por qué $\angle\alpha \cong \angle\beta$, Alex sugirió que revisaran la parte anterior de la actividad donde se concluyó tal relación.

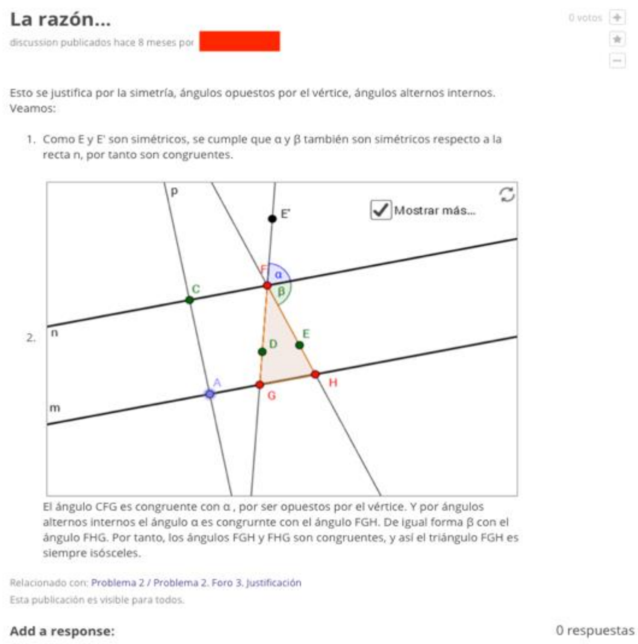
José proporcionó otra justificación de la conjetura, afirmó que los ángulos α y β son "*simétricos respecto a la recta n y por lo tanto congruentes*", este tema se había analizado en la parte anterior de la actividad, sin embargo, José no participó en las conversaciones. Yolanda le propuso que analizara lo discutido (Figura 5.3 y 5.4 y Tabla 5.1). José agradeció a Yolanda por la aclaración y afirmó estar de acuerdo en la justificación del por qué α y β son congruentes. La justificación de José hizo referencia a $\angle CFG \cong \angle\alpha$ por ser angulos opuestos por el vértice y $\angle\alpha \cong \angle FGH$ por ser alternos internos entre paralelas, análogamente $\angle\beta \cong \angle FGH$, por lo tanto $\angle FGH \cong \angle FHG$ (Figura 5.7).

Tabla 5.5 Recursos, estrategias y justificación de Alex y Diego

Justificación Alex y Diego	**Recursos, estrategias y justificación**
	**Recursos:** Punto simétrico respecto a una recta, ángulo externo de un triángulo de un ángulo y ángulos entre paralelas. **Estrategia:** Relación entre los ángulos α y β entre rectas paralelas. **Justificación:** Como $AH \parallel CF$ se tiene $\angle FHG \cong \angle\beta$ (alternos internos) y $\angle GHF \cong \angle\alpha$ (conjugados). Además, $\angle E'FE$ es ángulo externo de ΔGHF por lo que $\angle E'FE = \angle FGH + \angle GHF = \angle FGH + \angle\beta$ por lo tanto $\angle FGH \cong \angle\alpha$ Como $\angle\alpha \cong \angle\beta$ (por simetría de puntos) entonces ΔFGH es isósceles.

Fuente: Conversación en el foro relacionada con la justificación de la conjetura

Figura 5.7 Argumento presentado por José para justificar que m y n son rectas paralelas



La razón...

discussion publicados hace 8 meses por [redacted]

0 votos

Esto se justifica por la simetría, ángulos opuestos por el vértice, ángulos alternos internos. Veamos:

1. Como E y E' son simétricos, se cumple que α y β también son simétricos respecto a la recta n, por tanto son congruentes.

2\. El ángulo CFG es congruente con α , por ser opuestos por el vértice. Y por ángulos alternos internos el ángulo α es congrurnte con el ángulo FGH. De igual forma β con el ángulo FHG. Por tanto, los ángulos FGH y FHG son congruentes, y así el triángulo FGH es siempre isósceles.

Relacionado con: Problema 2 / Problema 2. Foro 3. Justificación

Esta publicación es visible para todos.

Add a response: 0 respuestas

Fuente: Conversación en el foro relacionada con la justificación de la conjetura

Durante el desarrollo de esta actividad, los participantes interactuaron entre ellos en el proceso de dar significado a los conceptos y refinar ideas que conduzcan a la justificación de la conjetura planteada. Algunos de ellos (Karol, Carlos, Diego, Erick) solo contestaron puntualmente las preguntas de la Actividad mientras que, Yolanda y José dieron seguimiento a las ideas que plantean en el foro y comentaron las ideas de otros cuando les responden.

4.4 Discusión de los resultados

El diseño de las actividades del curso masivo guio el trabajo de los participantes en dos direcciones, la primera hacia la búsqueda de diversas formas de explorar los modelos dinámicos donde el movimiento de objetos permitió de manera instantánea observar sus atributos; y la segunda, ver la representación dinámica de las tareas como una plataforma para identificar conceptos, plantear conjeturas basadas en el movimiento de los objetos matemáticos y sus relaciones o invariantes.

Las preguntas que se incluyeron en el diseño de la actividad promovieron que los participantes movieran y exploraran los objetos que conformaron el modelo dinámico, en este proceso identificaron los siguientes conceptos: rectas paralelas, rectas perpendiculares, punto simétrico a otro respecto a una recta, mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, tipos de ángulos, características y propiedades del triángulo isósceles y equilátero.

El uso del foro favoreció y permitió la comunicación y discusión de ideas matemáticas. Por ejemplo, al inicio de la actividad los participantes tenían ideas básicas del concepto de punto simétrico: E es simétrico a E' respecto a la recta n si existe la misma distancia de E y E' a la recta n. Sin embargo, cuando el equipo de diseño del curso cuestionó sobre el significado de distancia de un punto a una recta, los participantes no mostraron ideas concretas, por lo cual fue necesario ampliar el tema en el foro (Ver Tabla 5.1 y Figura 5.5).

La discusión generada en las conversaciones permitió a los participantes proporcionar retroalimentación a otros, o bien, recibirla de otros. Lo anterior favoreció el surgimiento o refinamiento de conceptos e ideas matemáticas, por ejemplo, emergieron los conceptos de mediatriz y bisectriz en la discusión de punto simétrico (Tabla 5.3).

El uso del foro como medio de Soporte y Evaluación favoreció el trabajo colaborativo, entre los participantes, durante el desarrollo de la Actividad. Además, el foro fue un espacio donde se comunicaron y explicaron las ideas, soluciones y resultados de los participantes, se compartieron imágenes y enlaces a modelos dinámicos elaborados por ellos mismos, y se favoreció el uso de notación matemática para explicar los pasos seguidos.

Las preguntas que se plantearon en la actividad y la intervención del equipo de diseño en el foro se convirtieron en un vehículo que permitió a los participantes construir, refinar, o transformar sus formas de comprender y resolver problemas. La evidencia muestra que los integrantes del estudio transitaron desde soluciones visuales y empíricas (movimiento de objetos y observación de relaciones o invariantes en sus atributos) hasta la presentación de argumentos de tipo geométricos y algebraicos en la validación de las conjeturas formuladas.

Durante el desarrollo del curso, el monitoreo que realizó el equipo de diseño en los comentarios dio lugar a la discusión y refinamiento de conceptos e ideas matemáticas y también, de los episodios de la resolución de problemas. Por ejemplo, el grupo de participantes conformado por José, Alex, Guillermo, Karol, Diego, Alex y Yolanda formularon conjeturas basadas en las estrategias de movimiento y medición de segmentos y ángulos relacionadas con la pendiente de una recta y la definición y propiedades de un punto simétrico con respecto a una recta, además, presentaron argumentos para justificarlas (Figuras 4.2, 4.3 y 4.4). Las preguntas planteadas por el ED fomentaron la discusión de ideas matemáticas y permitió dar significado a conceptos de punto simétrico con respecto a una recta y la distancia de un punto a una recta (Ver Tabla 4.1).

Es importante resaltar que, durante las conversaciones, algunos integrantes (Carlos, Erick, Ale, Guillermo, Karol y Yolanda) asumieron un comportamiento relacionado con proporcionar retroalimentación a las ideas y preguntas de otros, esto promovió el trabajo colaborativo y fomentó la independencia de los participantes en el proceso de la construcción y su desarrollo del conocimiento matemático.

5 Agradecimientos

A la Universidad de Costa Rica (UCR) por el apoyo brindado.

6 Conclusiones

Los resultados muestran que las diversas tecnologías digitales utilizadas en este estudio bajo el marco de diseño RASE y la resolución de problemas favorecieron un ambiente de trabajo de colaboración. La plataforma digital *Open Edx* permitió crear una secuencia de Recursos, Actividades, medios de Soporte y Evaluación en un mismo sitio. Mediante el uso de Recursos tales como modelos dinámicos elaborados en GeoGebra, videos de KhanAcademy y enlaces a Wikipedia, se diseñaron Actividades en las cuales los participantes tuvieron la oportunidad de explorar e identificar conceptos, formular conjeturas y buscar diversas maneras o argumentos para sustentarlas. En este proceso, los participantes utilizaron estrategias asociadas al uso del SGD tales como el movimiento de objetos dentro de la configuración dinámica y la cuantificación de sus atributos (longitudes y áreas).

El uso coordinado de tecnologías digitales tales como GeoGebra, la plataforma MéxicoX y el foro de discusión por sí mismas no proporcionan los medios o las formas necesarias para que los participantes se involucren en las actividades de resolución de problemas. El diseño de las actividades debe proporcionar una guía de trabajo y ser complementada en el foro mediante la intervención del equipo de diseño. En este sentido, las acciones que implementó el ED en el foro favorecieron la discusión de los diferentes episodios de la resolución de problemas y la comprensión de conceptos e ideas matemáticas.

Durante el desarrollo del curso, se identificó un grupo de participantes que asumió la tarea de aclarar dudas o contestar preguntas a otros, lo que favoreció el refinamiento de ideas y conceptos matemáticos involucrados con: el problema, la exploración del modelo dinámico, la formulación de conjeturas y con su justificación. Esto fue un factor para que los participantes avanzaran en el desarrollo y comprensión de las tareas matemáticas sin depender de un profesor o tutor.

Durante la etapa del diseño e implementación de un MOOC, es importante fomentar que los participantes sean el centro de las actividades sin depender de la figura de un tutor, por ello, se debe buscar que, ellos mismos, creen la conciencia de monitorear sus avances en la comprensión y uso de las ideas matemáticas en la resolución de problemas. En este sentido, el foro como medio de Soporte y Evaluación favoreció que los participantes colaboraran y trabajaran juntos en el desarrollo de todas las actividades.

7 Referencias

Aguilar-Magallón, D. & Poveda, W. (2017). Problem Posing Opportunities Whit Digital Technology in Problem Solving Environments. In Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2016). Framework for Designing Mobile Learning Environments. En D. Churchill, B. Fox, & M. King (Eds.), Mobile Learning Design, lecture Notes in Educational Technology (pp. 3-25). Singapore: Springer.

Ernest, P. (2016). The unit of analysis in mathematics education: bridging the political-technical divide? Educational studies in mathematics, 92(1), 37-58.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2009). Focus in High School Mathematics: Reasoning and sense making. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pólya, G. (1945). How to Solve it. Princeton: Princeton University Press.

Santos-Trigo, M. (2008). An inquiry approach to construct instructional trajectories based on the use of digital technology, Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 4, 347–357.

Santos-Trigo, M. (2014). La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. Segunda edición. México: Trillas, Asociación Nacional de profesores de matemáticas.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2009). Towards the construction of a framework to deal with routine problems to foster mathematical inquiry. PRIMUS, 19(3), 260-279.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2011). Framing a problem-solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the Seventh Conference of the European society for Research in Mathematics Education (pp. 2258-2277). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. The Mathematics Enthusiast, 10(1), 279-302.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 48(6), 827-842.

Poveda, W. & Aguilar-Magallón, D. (2017). Mathematical Problem Solving and Digital Technologies in a Massive Online Course. In Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Schoenfeld A. (1985). Mathematical problem Solving. New York: Academic Press.

Schoenfeld A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 334-371.) New York: Macmillan.