Elementos del pensamiento matemático que emergen al resolver problemas, en contextos hipotéticos, con Excel

Mathematical thinking elements that emerge when solving problems, in hypothetical contexts, with Excel

BARRERA-MORA, Fernando†* & REYES-RODRÍGUEZ, Aarón

ID 1er Autor: *Fernando, Barrera-Mora* / **ORC ID:** 0000-0002-4289-5776, **Researcher ID Thomson:** V-2045-2018, **CVU CONACYT ID:** 10147

ID 1er Coautor: *Aarón, Reyes-Rodríguez* / **ORC ID:** 0000-0001-8294-9022, **Researcher ID Thomson:** U-9434-2018, **CVU CONACYT ID:** 167472

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

F. Barrera & A. Reyes

fbarrera10147@gmail.com

A. López, C. Lima, J. Reyes (Dirs.) Educación para todos. Tópicos Selectos de Educación en CITeM. ©ECORFAN-México, 2018.

Abstract

In this paper we analyze what elements of mathematical thinking emerged when six pre-service mathematics teachers solved a task framed in a hypothetical context. We determined what strategies and ways of reasoning appeared when they approached the task using a spreadsheet (Excel) as well as paper and pencil environment. Also, we identified what were the main difficulties they faced when trying to justify procedures and give an interpretation of the results.

Modelación, Pensamiento matemático, Contexto hipotético, Tecnología digital

1 Introducción

Actualmente se reconoce que el uso de la tecnología influye en la forma en que se desarrolla el pensamiento matemático (Carreira, et al., 2016; Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2016), ya que el uso de artefactos computacionales ofrece oportunidades a los estudiantes para acceder a recursos y estrategias que pueden ampliar la exploración de relaciones, la formulación de conjeturas, o el uso e integración de diferentes representaciones semióticas (Santos-Trigo, Moreno-Armella y Camacho-Machín, 2016). ¿Qué es lo que distingue a las tecnologías digitales de otro tipo de herramientas que se han utilizado para apoyar el aprendizaje de las matemáticas? De acuerdo con Balacheff y Kaput (1996), lo que diferencia a los ambientes digitales, respecto de otros, es su carácter cognitivo intrínseco, pues con el uso de software se puede operar con representaciones de objetos y relaciones matemáticas. La interacción de estudiantes con una tarea, usando una herramienta digital, se basa en una interpretación simbólica y cálculos con los datos que los estudiantes introducen, dando lugar a una retroalimentación proporcionada por el ambiente computacional en los registros respectivos.

Esta característica de las tecnologías digitales como software dinámico, hoja electrónica de cálculo, Sistemas de Álgebra Computacional (CAS, por sus siglas en inglés), entre otros, ha facilitado a los usuarios la interacción con diversas representaciones de los objetos matemáticos, así como la realización de experimentos y exploraciones que, posteriormente, pueden conducirlos a visualizar e identificar relaciones, a formular conjeturas, a elaborar argumentos que las sustenten, a establecer conexiones, a comunicar resultados y plantear nuevos problemas. Es decir, el uso de estas herramientas puede promover la práctica sistemática de procesos fundamentales en el quehacer de la disciplina, incluyendo nuevas formas de pensar, representar y resolver problemas (Leung y Bolite-Frant, 2015; Santos-Trigo, 2017).

Por otro lado, en la época actual, caracterizada por un desarrollo acelerado de los artefactos tecnológicos, incluyendo software como GeoGebra, sistemas basados en la nube como Wolfram Alpha o apps como Photomath, los cuales ejecutan una amplia diversidad de procedimientos matemáticos en cuestión de segundos, es importante que la formación matemática de las personas incluya el desarrollo de habilidades, a partir de un entendimiento de los conceptos matemáticos subyacentes, que les permitan determinar cuándo y cómo usar los recursos digitales efectivamente (Devlin, 2017). Es decir, uno de los recursos básicos para los profesionales del siglo XXI debe consistir en el desarrollo del pensamiento matemático asistido con el uso de tecnologías digitales.

Diversos autores (Mishra y Koehler, 2006; Moreno-Armella y Hegedus, 2009; Santos-Trigo, 2017) argumentan que el uso sistemático de herramientas digitales, al abordar tareas, permite identificar y representar la información; encontrar relaciones entre datos e incógnitas; resolver casos particulares, identificar patrones y formular conjeturas; justificar y comunicar resultados. En este trabajo buscamos documentar la forma en que profesores de matemáticas utilizan Excel al resolver problemas, en un contexto hipotético (Barrera-Mora y Santos-Trigo, 2001). De manera más precisa, buscamos documentar cómo los profesores aprovechan las capacidades de procesamiento de datos de Excel para crear una amplia variedad de ejemplos y casos particulares que puedan ayudarlos a poner en práctica diversos elementos del pensamiento matemático: identificar y representar la información; encontrar relaciones entre datos e incógnitas; resolver casos particulares, identificar patrones y formular conjeturas; justificar y comunicar resultados.

2 Revisión de la literatura

Una de las características más sobresaliente de una hoja electrónica de cálculo, es la capacidad para organizar y operar datos numéricos a través de "fórmulas", haciendo referencias a las etiquetas de las celdas en las que se encuentran esos datos. Además, es posible transformar fórmulas, modificar procedimientos y realizar representaciones gráficas de la información capturada o procesada en la hoja de cálculo. En Excel, las representaciones numéricas y gráficas se encuentran vinculadas, de forma que al cambiar un dato se modifican otros datos o una gráfica; aunque esta relación es unidireccional, ya que no es posible modificar la gráfica sin modificar los datos. Sin embargo, esa interacción entre representaciones permite explorar propiedades de los datos, tales como tendencias o comportamientos asintóticos. La solución de problemas, utilizando una hoja electrónica de cálculo, se apoya esencialmente en efectuar una amplia diversidad de cálculos numéricos con rapidez y precisión. Entre los problemas que se pueden abordar con una hoja electrónica de cálculo se encuentran, por ejemplo, aquellos que requieren el uso de representaciones y procesos recursivos.

Existen investigaciones que han tratado de determinar cómo utilizar hojas electrónicas de cálculo para introducir a los estudiantes al álgebra y desarrollar el pensamiento algebraico, particularmente en lo que respecta a la construcción del concepto de variable (Wilson, Ainley y Bills, 2005; Carreira, et al., 2016), ya que con esta herramienta es posible relacionar cantidades de tal forma que el cambio de un dato se traduce en la variación de otras cantidades que dependen de éste. En esta línea de ideas, Nobre, Amado y Carreira (2012) argumentan que una hoja de cálculo puede actuar como un puente entre aritmética y álgebra ayudando a los estudiantes a generalizar patrones, apoyar el entendimiento del concepto de variable, ayudar a transformar expresiones algebraicas y proveer un espacio para explorar ecuaciones. El uso de una hoja de cálculo puede ayudar a que los estudiantes centren la atención en elementos tales como los procesos de razonamiento o la toma de decisiones, en vez de concentrarse en la realización de operaciones aritméticas laboriosas (Oliveira y Nápoles, 2017).

Entre las principales ventajas del uso de la hoja electrónica de cálculo se encuentra la facilidad para elaborar, organizar y representar datos, así como, el desarrollo de habilidades para planear el proceso de resolución de un problema, dado que los estudiantes pueden usar la herramienta para organizar y seleccionar la información necesaria, e implementar estrategias de solución que no requieren de una aproximación algebraica inicial. Esta característica hace que Excel sea una herramienta útil para abordar actividades en las que es necesario ajustar o modelizar un conjunto de datos mediante una función (Horton y Leonard, 2005), al permitir relacionar y manejar de forma simultánea representaciones numéricas y gráficas. Asimismo, el software proporciona retroalimentación a los estudiantes, lo cual puede favorecer el desarrollo de procesos de monitoreo y evaluación durante el proceso de resolución de un problema (Pittalis, Mousoulides y Christou, 2005). Por ejemplo, al realizar una operación aritmética inválida, como dividir por cero o insertar datos que no son válidos en una fórmula o en una función, la herramienta lo indicará mediante los mensajes de error "#¡DIV/0!" o "#¡NUM!", respectivamente; esto permitirá al estudiante darse cuenta que debe justificar el porqué del error o revisar el procedimiento de solución del problema.

Oliveira y Nápoles (2017) consideran que las hojas electrónicas de cálculo se pueden utilizar para modelizar problemas de crecimiento de poblaciones; resolver ecuaciones mediante métodos numéricos, por ejemplo el método de bisección o el de Newton-Rapson y permitir el análisis de estos métodos iterativos; modelizar procesos recursivos; generar sucesiones numéricas; abordar y analizar problemas de optimización. En estos estudios se destaca la utilidad de las hojas electrónicas de cálculo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; enfatizando el papel del maestro en la implementación de actividades que permitan a los estudiantes usar Excel como una herramienta de resolución de problemas.

Una actividad que ilustra el potencial de Excel para construir conjeturas consiste en elaborar un procedimiento que permita obtener el resultado de multiplicar un número de dos dígitos por el número 101 sin realizar la multiplicación; a partir de observar regularidades en un conjunto de casos particulares. Con base en una tabla, elaborada en Excel, se puede formular una conjetura para obtener el resultado de multiplicar 1001 por un número de tres dígitos sin efectuar la multiplicación. Esto se puede generalizar formulando una conjetura que permita obtener el resultado de multiplicar un número de n dígitos por el número 10…01, que tiene n-1 ceros.

Un ejemplo más, consiste en representar en forma decimal el número 1/*n* para diversos valores de *n* (un número natural) y observar en qué casos la expansión decimal de 1/*n* es finita. En el desarrollo de estas actividades, las características de la hoja electrónica de cálculo parecen favorecer los procesos de generalización de resultados a partir de casos particulares (Calder, et al., 2006).

Otra experiencia en la que se analizó la forma en que las aproximaciones a los problemas se pueden complementar con el uso de diferentes herramientas, se llevó a cabo por Pittalis, Mousolides y Christou (2005). En esta investigación se determinó que la integración de las aproximaciones a un problema efectuadas con un software dinámico y una hoja electrónica de cálculo mejoró las capacidades para pensar matemáticamente en los estudiantes de educación secundaria, respecto de aquellos estudiantes quienes solamente usaron libros de texto. En esas experiencias de aprendizaje, las herramientas actuaron como mediadores, comprometiendo a los estudiantes a usar formas de pensamiento y procesos que no se hubieran puesto en práctica sin el uso de esas herramientas.

A pesar de las diversas ventajas que ofrecen las tecnologías digitales, es necesario enfatizar que el uso, por sí solo, de las herramientas no garantiza el aprendizaje, ya que se deben desarrollar nuevas habilidades y competencias para aprender. Por ejemplo, no basta con visualizar un resultado en la pantalla; sino que se requiere relacionar esa representación con las propiedades del objeto matemático (Balacheff y Kaput, 1996), pues es posible que las propiedades que lo caracterizan, difieran de aquellas que se pueden percibir visualmente. Es decir, las capacidades de visualización que ofrecen las herramientas computacionales se deben complementar con la elaboración de argumentos matemáticos que justifiquen los resultados obtenidos con las herramientas.

Aunque el uso de la tecnología puede favorecer la construcción de conceptos y la puesta en práctica de diversos elementos del pensamiento matemático, cuando los estudiantes resuelven problemas, aún quedan muchas preguntas por responder. En este sentido, resulta relevante investigar el rol que juegan las herramientas computacionales en el aprendizaje de las matemáticas y, en particular, en el aprendizaje basado en la resolución de problemas. Las herramientas digitales serán una parte integral del salón de clases en todos los niveles escolares, lo cual implica la necesidad de "reexaminar qué matemáticas deben aprender los estudiantes así como la forma en que pueden aprenderlas mejor" (NCTM, 2000, p. 25).

De acuerdo con Borwein y Bailey (2003, pp. 2-3), en las *Matemáticas Experimentales*, la computadora puede usarse para: (a) obtener comprensión (insight) e intuición, (b) descubrir nuevos patrones y relaciones, (c) construir gráficas para evidenciar principios matemáticos, (d) examinar y especialmente probar o mostrar la falsedad de conjeturas, (e) explorar un posible resultado para determinar si requiere de una prueba formal, (f) sugerir aproximaciones para elaborar pruebas formales, (g) realizar cálculos que remplazan a las operaciones efectuadas a mano y (h) confirmar resultados obtenidos analíticamente.

En este contexto, buscamos documentar la forma en que profesores de matemáticas pueden combinar, transformar o comparar representaciones de los problemas y objetos matemáticos que es posible construir con Excel al resolver problemas enmarcados en contextos hipotéticos, y aprovechar las capacidades de procesamiento de datos de Excel para crear una amplia variedad de ejemplos y casos particulares que puedan ayudarlos a poner en práctica diversos elementos del pensamiento matemático: visualizar relaciones; formular conjeturas y buscar argumentos para sustentarlas; comunicar resultados y formular nuevos problemas.

¿Qué significa aprender matemáticas con el empleo de herramientas tecnológicas, en términos de la resolución de problemas?, ¿qué tipo de argumentos resultan relevantes para validar conjeturas cuando se trabaja en un ambiente computacional?, ¿de qué manera el uso de una hoja electrónica de cálculo puede favorecer la aplicación de heurísticas de resolución de problemas? La discusión de estas preguntas puede ayudar a caracterizar la forma en que profesores, quienes cursan una maestría en matemática educativa, generan estrategias de resolución de problemas, formulan y justifican conjeturas, comunican resultados y proponen nuevos problemas, mediante la conexión de contenidos de diversas áreas de las matemáticas y de otras disciplinas, cuando trabajan en escenarios tecnológicos en los que se promueve una aproximación inquisitiva de la resolución de problemas.

3 Elementos teóricos

La introducción de la tecnología en el ámbito educativo, y en particular en el campo del aprendizaje de las matemáticas, ha traído consigo un fuerte impacto en la forma de comprender los conceptos matemáticos. Este impacto se basa en la reificación de los objetos y las relaciones matemáticas, ya que es posible interactuar de forma más directa con esos objetos y relaciones de lo que era al trabajar con papel y lápiz; porque mediante una herramienta tecnológica se pueden operar y relacionar diferentes representaciones de objetos matemáticos (Moreno-Armella, Hegedus y Kaput, 2008). En otros términos, el potencial que genera el uso de la tecnología en el aprendizaje de los estudiantes, se basa en la diversidad de oportunidades para extender el tipo de representaciones con las que puede interactuar, y en la facilidad de operar con ellas mediante el uso de la tecnología. Sin embargo, como ya se ha mencionado, el proceso de utilización de la herramienta por parte de los estudiantes involucra el desarrollo de nuevas habilidades, en relación con un ambiente de papel y lápiz, que les permitan adquirir un entendimiento conceptual congruente con el quehacer de la disciplina, entre tales habilidades destacan la capacidad para interpretar y validar resultados obtenidos con las herramientas (Moreno-Armella y Elizondo-Ramírez, 2017; Edwards y Flores, 2018); la habilidad para manejar y transitar entre diversas representaciones, o la aptitud para conciliar resultados obtenidos con distintas herramientas (Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2016).

Un aspecto importante del uso de la tecnología en el aprendizaje, es el papel dual que juega. Por un lado, funciona como amplificador y por otro, como un reorganizador de la cognición (Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2008). El término amplificador se utiliza para caracterizar a una “extensión” cognitiva, que permite intensificar las capacidades mentales a través del uso de una herramienta, con base en las facilidades para encontrar diferentes formas de resolver un problema, que no están necesariamente disponibles o que tienen una función limitada en ambientes de papel y lápiz. Por otra parte, el término reorganizador de la cognición se utiliza para caracterizar la forma en que el uso de una herramienta reestructura la cognición, en su funcionamiento y en su manera de organizarse. El considerar a las herramientas computacionales como reorganizadores cognitivos implica reconocer que existe una relación dialéctica entre las herramientas y el usuario, ya que éstas organizan su pensamiento, pero también la actividad del usuario influye en el desarrollo de las herramientas en dos formas principales, al modificar lo que se hace con esas herramientas y al estudiar la forma en que se usan, con el objetivo de incorporar características que pueden favorecer el aprendizaje (Zbiek, et al., 2007; Sherman, 2014).

Lo expresado con anterioridad indica que la adquisición del conocimiento es una actividad mediada por las herramientas y las representaciones externas que constituyen la liga entre el aprendiz y el objeto del conocimiento (Hollebrands, Laborde y Sträßer, 2008). Esto significa, que durante el proceso de aprendizaje las herramientas que se utilicen, invariablemente influirán en la forma en que se aprende, y en el aprendizaje mismo, y recíprocamente, es decir, que el conocimiento construido depende de los instrumentos de mediación empleados (Wertsch, 1993). En este sentido, resulta importante examinar y comprender el papel mediador de las herramientas tecnológicas durante el proceso de aprendizaje basado en la resolución de problemas.

Algunas investigaciones en educación matemática, (Mishra y Koehler, 2006) han mostrado que los programas de investigación se estructuran en torno a más de una perspectiva, esto con la finalidad de analizar con más elementos, los procesos cognitivos e identificar las dificultades que muestran los estudiantes cuando incorporan a la tecnología al abordar tareas de aprendizaje matemático. Esto tiene como finalidad elaborar bases teóricas robustas que permitan enmarcar adecuadamente el uso de artefactos digitales en el salón de clase. Al respecto, el marco de investigación que orienta este trabajo incluye tres dimensiones: (i) ontológica, (ii) epistemológica y (iii) didáctica.

En cuanto a la dimensión ontológica, consideramos que matemáticas es la ciencia de los patrones (Steen, 1988) y que aprender matemáticas consiste, en gran medida, en adquirir una disposición para ver el mundo a través de la lente de un matemático (Schoenfeld, 1992). Esta disposición incluye llevar a cabo actividades entre las que destacan: experimentar, explorar relaciones matemáticas, formular conjeturas, justificar resultados, comunicar ideas, así como resolver problemas por diferentes rutas (Polya, 2009/1945) y desarrollar una actitud inquisitiva; es decir, habilidad para formular, de manera sistemática, preguntas y nuevos problemas (Santos-Trigo, 2007; Berger, 2014).

Esta perspectiva ontológica fue de utilidad para determinar las características de las tareas, así como del escenario de instrucción; los cuales debían favorecer el que los participantes llevaran a cabo "intentos sistemáticos, basados en la observación y experimentación para determinar la naturaleza o principios de regularidades en sistemas definidos axiomática o teóricamente" (Schoenfeld, 1992, p. 335). En otras palabras, al abordar las tareas, los profesores debieran llevar a cabo actividades de búsqueda de patrones, sobre la base de evidencia empírica proporcionada por los recursos de Excel.

En cuanto a la dimensión epistemológica, adoptamos una perspectiva de corte socio constructivista (Simon, 1994), por lo cual suponemos, por un lado, que cada persona construye, de forma activa, su propio conocimiento al enfrentar problemas que desequilibran sus estructuras cognitivas, independientemente del contexto o la presencia y naturaleza del proceso de enseñanza. Por otro lado, consideramos que el aprendizaje es un proceso que se lleva a cabo en una comunidad donde se construyen significados o entendimientos considerados como compartidos (Cobb et al., 1991). Dado que aprender es un proceso social, el medio cultural y sus producciones determinan las características del conocimiento que construimos (Werstch, 1993). Particularmente, la naturaleza de la actividad cognitiva se encuentra estrechamente ligada a la generación y uso de representaciones semióticas (Moreno-Armella y Hegedus, 2009, p. 501), esto debido a que estas estructuras simbólicas constituyen un medio que nos permiten actuar sobre el mundo, pero a su vez imponen regulaciones a nuestro pensamiento acerca del mundo (Moreno-Armella, Hegedus y Kaput, 2008; Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2016).

La dimensión didáctica se refiere a las características del aprendizaje que consideramos deseables y la forma de lograrlas. Estas características tienen como eje el transformar un conocimiento atomizado a uno altamente estructurado. Particularmente, en este trabajo estamos interesados en que los estudiantes desarrollen niveles progresivos de entendimiento de las ideas matemáticas (Hiebert, et al. 1997), lo que implica la construcción de *conexiones robustas* entre un conocimiento nuevo y conocimientos previos a partir de procesos de reflexión y comunicación de ideas, que se llevan a cabo durante la resolución de problemas. Entendemos que una conexión es robusta cuando la relación o relaciones establecidas entre diversos conceptos o ideas pueden usarse o aplicarse para abordar otras tareas o problemas. Los objetos matemáticos adquieren sentido y significado cuando se *utilizan* para resolver algún problema o satisfacer alguna necesidad, ya sea práctica o teórica. Por ejemplo, los logaritmos (cuya idea básica es conectar una sucesión aritmética con una geométrica) surgieron para satisfacer la necesidad de realizar operaciones aritméticas complejas con mayor facilidad; mientras que la definición formal de límite tiene su origen en la necesidad de sustentar rigurosamente diversos resultados del cálculo.

Adoptamos una aproximación a la resolución de problemas basada en proponer actividades de modelización que orienten una construcción gradual de los aspectos esenciales del pensamiento matemático, que de acuerdo con Schoenfeld (1994, p. 60), incluyen: (a) desarrollar un punto de vista que valore los procesos de matematizar, abstraer y tener una predilección de aplicarlos, y (b) desarrollar competencias con las herramientas del oficio (abstracción, representación simbólica y manipulación simbólica) y usarlas con el objetivo de entender y dar sentido a estructuras matemáticas.
Lo anterior, se relaciona estrechamente con la promoción de un ambiente de instrucción en el que los estudiantes trabajan en pequeños grupos, y realizan presentaciones plenarias del proceso de solución de los problemas. También, se requiere soporte instruccional sustantivo por parte del profesor para guiar las actividades esenciales que modelan la solución de problemas y la promoción de una reflexión constante por parte de los estudiantes (Santos-Trigo, 2014).

4 Metodología

La recolección de datos en la fase de experimentación se llevó a cabo en un curso de posgrado en matemática educativa (maestría), en el que participaron seis profesores quienes se encontraban inscritos como estudiantes de tiempo completo. En la tabla 3.1 se proporciona información específica con respecto a la formación y actividad profesional, de cada uno de los participantes en el estudio. Los profesores poseían conocimientos básicos sobre el uso de Excel en la resolución de problemas, adquiridos en al menos uno de sus cursos de maestría; sin embargo, ninguno de ellos había utilizado esta herramienta en su práctica docente.

Un aspecto que es importante considerar, es que las características de los participantes, y del contexto, influyeron en las conclusiones que se derivan de este estudio. Al ser estudiantes de tiempo completo pudieron trabajar de forma consistente con las actividades durante un periodo de tiempo superior al que generalmente se puede conseguir al trabajar con estudiantes de bachillerato, con profesores en servicio o con participantes voluntarios. Además, la mayor parte de ellos contaba con una formación profesional en matemáticas o áreas afines, por ello se debe tener cautela al extender los resultados a una población con una formación profesional diferente.

Por otra parte, el contexto también influyó en los resultados, ya que los participantes supieron que las actividades que realizarían, servirían de base para un trabajo de investigación, por lo que podría haber una mayor disposición para abordar las tareas, para buscar diversas formas de solucionar un problema, de utilizar diferentes formas de justificación o para extender un problema. Por ejemplo, si las mismas actividades se implementaran con estudiantes que tuvieran la obligación de abordarlas, el proceso de solución podría diferir del mostrado por los participantes de este trabajo.

Tabla 3.1 Características de los participantes

Seudónimo	Formación profesional	Experiencia profesional
Daniel	Ingeniería Industrial	Experiencia docente en bachillerato en instituciones privadas. Experiencia no docente en una empresa del ramo textil.
Emilia	Actuaría	Experiencia docente en bachillerato público.
Juana	Licenciatura en Admon. Master en formación profesional de profesores de centros educativos Diplomado en habilidades didácticas para la calidad educativa.	Experiencia docente en bachillerato en instituciones privadas. Experiencia profesional no docente en el área de recibo e inventarios en una empresa de productos alimenticios.
Miguel	Contaduría Actuaría	Experiencia docente en el nivel bachillerato en instituciones públicas, en el nivel superior e impartiendo asesorías particulares. Experiencia profesional no docente: auditor de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores.
Jacobo	Licenciatura en Matemáticas	Sin experiencia docente.
Sofía	Actuaría	Experiencia profesional no docente en el área de seguros e investigación de operaciones. Experiencia docente en nivel superior, bachillerato y secundaria. Anfitriona en sala de matemáticas del museo UNIVERSUM.

Fuente: Elaboración propia

Los participantes abordaron la tarea propuesta en dos sesiones de trabajo, de dos horas cada una. Las actividades se llevaron a cabo en un laboratorio de cómputo donde cada participante dispuso de una computadora que contó con procesador de textos, navegador de Internet y Excel para desarrollar las actividades propuestas. En cada una de las sesiones, los profesores resolvieron problemas mediante el empleo de las herramientas disponibles. Se propuso que los participantes trabajaran por parejas, integradas de acuerdo con su preferencia. Se consideró apropiado el trabajo en parejas porque mediante éste se promueve el intercambio y discusión de ideas, así como el análisis de los problemas desde diversos puntos de vista. No hubo un tiempo determinado para la fase de trabajo en parejas, el cual dependió de las dificultades que enfrentaron los participantes al resolver el problema.

Una vez que todos los participantes habían logrado un avance significativo en la solución del problema, un integrante de la pareja expuso ante todo el grupo las aproximaciones utilizadas, las conjeturas o problemas formulados, así como la justificación de esos resultados ante el resto de los integrantes del grupo; quienes hacían comentarios, preguntas y observaciones respecto del trabajo de sus compañeros, así como comparaciones con el trabajo propio. Durante las exposiciones se utilizó un proyector para mostrar el trabajo realizado y se empleó el pizarrón en los casos necesarios.

Al término de cada sesión, los profesores enviaron, vía correo electrónico, los archivos que generaron, y entregaron una copia de sus notas en la sesión siguiente.

Cuando una actividad quedó inconclusa al término de una sesión, los participantes debían continuar con la búsqueda de soluciones, la elaboración de justificaciones o la formulación de problemas, durante el periodo de tiempo entre una sesión y otra. Además, elaboraron un reporte del trabajo realizado durante cada sesión; así como comentarios y reflexiones con respecto al trabajo de sus compañeros, en caso de haberse realizado una presentación plenaria de los resultados o avances en la solución de los problemas. Los reportes se entregaron a los investigadores en la sesión siguiente y con éstos se integró una bitácora para cada estudiante.

Las actividades incluyeron trabajar situaciones y problemas obtenidos de artículos de investigación, libros, páginas de Internet y problemas formulados por los participantes. Los problemas iniciales se eligieron de forma que los datos provinieran de un contexto hipotético, donde la situación se construye a partir de una serie de suposiciones acerca del comportamiento de las variables o parámetros que explican el desarrollo de la situación y donde, a su vez, el comportamiento de los parámetros no se basa en datos o información real o de laboratorio (Barrera-Mora y Santos-Trigo, 2001).

Otra consideración importante para la selección de la tarea fue que representara una situación problemática para los participantes, es decir, que ellos no contaran con un procedimiento o algoritmo que les permitiera obtener una solución inmediata al aplicarlo y, por tanto, fuera relevante el empleo de las herramientas tecnológicas, así como la experimentación y la formulación de conjeturas; y que pudieran implementarse diversas rutas de solución del problema y, con base en el contraste de éstas, fuera posible problematizar ideas o conceptos matemáticos (NCTM, 2000). A continuación, se enuncia la tarea inicial, así como una extensión de la misma, que resolvieron los participantes en la investigación:

Tarea inicial. A un paciente se le inyecta una droga, novocaína, como un anestésico para su tratamiento dental. Inmediatamente después de recibir la inyección, su riñón inicia un proceso de eliminación de la droga. El dentista le dice al paciente que su riñón eliminará de su sangre aproximadamente 20% de la droga cada hora. Si el paciente recibe una inyección de 500 mg de novocaína ¿Qué cantidad de la droga permanecerá en su organismo después de 24 horas de haber recibido la inyección? (Adaptado de Barrera-Mora y Santos-Trigo, 2001).

Extensión de la tarea inicial. Un paciente toma una píldora cada cuatro horas, la cual contiene 200 mg. de cierta sustancia activa. Si se supone que la sustancia activa va al torrente sanguíneo de forma inmediata y que cada 4 horas el riñón elimina 20% de la sustancia que se encuentra en el torrente sanguíneo, ¿cuál es la cantidad de sustancia presente en el organismo del paciente al cabo de una semana de tomar el medicamento?

Es importante destacar que en Barrera-Mora y Santos-Trigo (2001) se elaboró una ruta hipotética de aprendizaje y una propuesta de protocolo de implementación, sin que se haya implementado la tarea. En este trabajo, seis profesores abordaron la tarea y se reportan los elementos del pensamiento matemático que pusieron en práctica al tratar de encontrar una solución.

Para abordar la tarea los participantes necesitan poner en práctica elementos del pensamiento algebraico para expresar la información del problema como una función, recursiva o definida explícitamente; del pensamiento geométrico y el estudio de procesos de cambio, al tratar de visualizar el comportamiento en el tiempo de las variables de interés (la cantidad de medicamento en la sangre).

El proceso de solución de este problema puede requerir de la utilización de Excel, por las facilidades que ofrece para efectuar cálculos numéricos y para relacionar las representaciones numérica y gráfica de los datos. Este problema ofrece la oportunidad de que los estudiantes observen cambios o invariantes en los comportamientos de las variables relevantes al modificar las hipótesis o supuestos iniciales. También, les puede permitir comprender que la construcción de un modelo matemático depende de las simplificaciones o de las hipótesis que se formulan respecto del fenómeno de interés.

5 Resultados

Esta sección se divide en dos subsecciones. En la primera, se aborda el análisis de la tarea inicial; mientras que en la segunda, se examinan los resultados de una extensión en la que el medicamento se suministra en varias ocasiones, considerando algunas omisiones y duplicación de la dosis.

5.1 Concentración de medicamento en la sangre (una sola toma)

Al abordar la tarea, todas las parejas siguieron aproximaciones parecidas. Por un lado, realizaron las operaciones para calcular la cantidad de medicamento en la sangre para algunos casos particulares, realizaron operaciones aritméticas y obtuvieron expresiones que les permitieron identificar un patrón y generalizar la forma de obtener la cantidad de medicamento presente en la sangre para cualquier hora después de la aplicación (Tabla 3.2). Con base en la expresión $500*(1-0.2)^{24}$, obtuvieron la respuesta a la pregunta planteada en el problema. Es importante notar que, en el equipo 3 (Jacobo y Sofía), hicieron explícita la naturaleza recursiva del problema en su aproximación con lápiz y papel, y que realizaron transformaciones con las representaciones numéricas para obtener una fórmula no recursiva. Por otra parte, en el equipo 2 (Miguel y Juana), extendieron el resultado algebraico de este problema particular y propusieron una fórmula que modela la concentración de medicamento en la sangre para cualquier concentración inicial y cualquier proporción de eliminación, $C_n = C_0(1-i)^n$.

Tabla 3.2 Identificación de patrones y generalización de resultados

Emilia y Daniel	$t_0 = 500$ mg. tiene novocaína en el organismo $t_1 = 500 - 500(.20) = 500(1-.20)$ cant. de novocaína después de 1 hr $t_2 = 500(1-.20) - 500(1-.20).20$ $= 500(1-.20)(1-.20)$ $= 500(1-.20)^2$ $t_3 = 500(1-.20)^2 - 500(1-.20)^2(.20)$ $= 500(1-.20)^2(1-.20)$ $= 500(1-.20)^3$ $t_n = 500(1-.20)^n$ $t_{24} = 500(1-.20)^{24}$ $= 2.36118$ mg.
Juana y Miguel	Cantidad inicial 500 mg $C_0 = 500$ $C_1 = 500 - 500(.20) = 500(1-.20) = 500(.80)$ $C_2 = C_1 - C_1(.20) = 500(1-.20) - 500(1-.20)(.20) = 500(1-.20)(1-.20)$ $= 500(1-.20)^2$ $C_n = 500(1-.20)^n$ o sea $C_n = C_0(1-i)^n$ donde i es el porcentaje que se elimina cada hora Entonces, para los datos del problema tenemos $C_{24} = 500(1-.20)^{24}$ Al inicio de la hora 24, habra 2.3611 mg

Sofía y Jacobo	$a_0 = 500$ mg. $a_1 = a_0 - 0.2a_0 = 500 - 0.2(500)$ $a_2 = a_1 - 0.2a_1 = [a_0 - 0.2a_0] - 0.2[a_0 - 0.2a_0]$ $= [a_0 - 0.2a_0](1 - 0.2)$ $a_3 = a_2 - 0.2a_2 = [a_0 - 0.2a_0](1 - 0.2) - 0.2[a_0 - 0.2a_0](1 - 0.2)$ $= [a_0 - 0.2a_0](1 - 0.2)(1 - 0.2)$ $= a_0(1 - 0.2)(1 - 0.2)(1 - 0.2)$ $= a_0(1 - 0.2)^3$ $\vdots$ $a_{24} = a_0(1 - 0.2)^{24}$

Fuente: Elaboración propia

Todos los equipos también implementaron en Excel un procedimiento recursivo para encontrar la concentración de medicamento en el organismo del paciente después de 24 horas. Los equipos 1 y 2 colocaron en una celda el valor 500 (celda B1) y en otra celda (B2) colocaron la fórmula B1-0.2*B1, la cual arrastraron para obtener como respuesta (en la celda B25) el valor 2.361183241. En el caso del equipo 3, el procedimiento en Excel se implementó de tal forma que pudieran variar la concentración inicial del medicamento, así como el porcentaje de eliminación. El trabajo efectuado en Excel, en el caso de todos los equipos, se utilizó para contrastar el resultado obtenido con la fórmula que derivaron en papel y lápiz ($500*(1-0.2)^{24}$) y el procedimiento recursivo realizado con la herramienta.

Adicionalmente, Miguel y Juana se interesaron por graficar los datos que obtuvieron en Excel, además ajustaron esos datos con la herramienta "tendencia" y obtuvieron la expresión $y = 500e^{-0.2231x}$.En el reporte de la sesión, los integrantes del equipo 3 (Jacobo y Sofía), se interesaron por verificar que la función exponencial obtenida por Miguel y Juana, al ajustar los datos del problema, reflejaba adecuadamente el comportamiento de los datos. Ellos elaboraron una tabla en la que contrastaron los resultados para la concentración de medicamento en la sangre, obtenidos con los modelos $y = 500(1 - 0.2)^n$ y $y = 500e^{-0.2231x}$, y calcularon las diferencias entre los modelos discreto y continuo, resaltando que la suma de los errores entre los datos observados y los esperados (a partir del modelo continuo) no es cero, como ocurre en el modelo de regresión lineal. Esto es evidencia de que este equipo, con el uso del software, intentó establecer una conexión entre sus conocimiento previos. Jacobo y Sofía notaron que una consecuencia interesante del modelo exponencial es que la sangre nunca se depura totalmente del fármaco, porque una función exponencial negativa nunca toma el valor cero.

Tabla 3.3 Elementos del pensamiento matemático (Tarea 1)

Emilia y Daniel	Identificaron un patrón y lo generalizaron con la expresión $t_n = 500(1 - 0.2)^n$. Implementaron un procedimiento recursivo en Excel para contrastar el resultado con el obtenido mediante la expresión algebraica que obtuvieron con papel y lápiz.
Juana y Miguel	Identificaron un patrón y lo generalizaron con la expresión $C_n = 500(1 - 0.2)^n$. Generalizaron la expresión anterior al escribir una fórmula útil para cualquier concentración inicial y proporción de eliminación de medicamente por hora, $C_n = C_0(1 - i)^n$. Implementaron un procedimiento recursivo en Excel para contrastar el resultado con el obtenido mediante la expresión algebraica que obtuvieron con papel y lápiz. Graficaron los datos y los ajustaron mediante una función exponencial, que de acuerdo con su criterio es la que proporciona el mejor ajuste. Se preguntaron cómo calcular la concentración de medicamento en la sangre para fracciones de hora.
Sofía y Jacobo	Identificaron un patrón y lo generalizaron mediante la expresión $a_{24} = a_0(1 - 0.2)^{24}$. Reconocieron la naturaleza recursiva del problema y operaron los registros de representación para obtener una fórmula cerrada. Se interesaron por determinar qué tan bien ajusta el modelo $y = 500e^{-0.2231x}$ a los datos del problema. Crearon una tabla para obtener las diferencias entre los modelos discreto y continuo, conjeturaron que la suma de los errores sería cero como en el modelo de regresión lineal, pero rechazaron su conjetura al visualizar los datos de su tabla.

Fuente: Elaboración propia

5.2 Concentración de medicamento en la sangre después de varias tomas

Después de abordar la primera tarea, los investigadores sugirieron una extensión, cuyo enunciado es el siguiente:

Un paciente toma una píldora cada cuatro horas, la cual contiene 200mg. de cierta sustancia activa. Si se supone que la sustancia activa va al torrente sanguíneo de forma inmediata y que cada 4 horas el riñón elimina 20% de la sustancia que se encuentra en el torrente sanguíneo, ¿cuál es la cantidad de sustancia presente en el organismo del paciente al cabo de una semana de tomar el medicamento?

Este problema difiere en varios aspectos del problema anterior, entre ellos, que el periodo de observación no es una hora, sino cada cuatro horas; además, se agrega la condición de que en cada periodo, se vuelve a introducir al organismo una nueva cantidad de medicamento y el lapso en el que se busca conocer la cantidad de medicamento es una semana. Adicionalmente, se planteó a los participantes el problema de determinar qué ocurre si el paciente olvidaba tomar el medicamento en la primera toma del segundo y del cuarto día, y por esta razón, tomaba el doble del medicamento en cada toma subsecuente.

Para abordar la tarea, en el equipo 1 (Daniel y Emilia), implementaron un procedimiento recursivo en Excel (Figura 3.1). En la celda B1, registraron la concentración de medicamento inicial de 200 mg, mientras que en la celda B2 declararon la fórmula 200+0.8*B1, y mediante el arrastre se obtuvo que la cantidad de medicamento presente en el organismo del paciente, después de 42 tomas, era aproximadamente de un gramo. Estos profesores también propusieron un modelo algebraico del problema y notaron que la cantidad de medicamento en la n-ésima toma se puede calcular mediante la expresión $t_n = 200 + 200(0.8) + 200(0.8)^2 + \cdots + 200(0.8)^{n-1}$, que es una serie geométrica cuyo valor se puede obtener mediante la fórmula $t_n = 200\left(\frac{1-(0.8)^n}{1-0.8}\right)$.

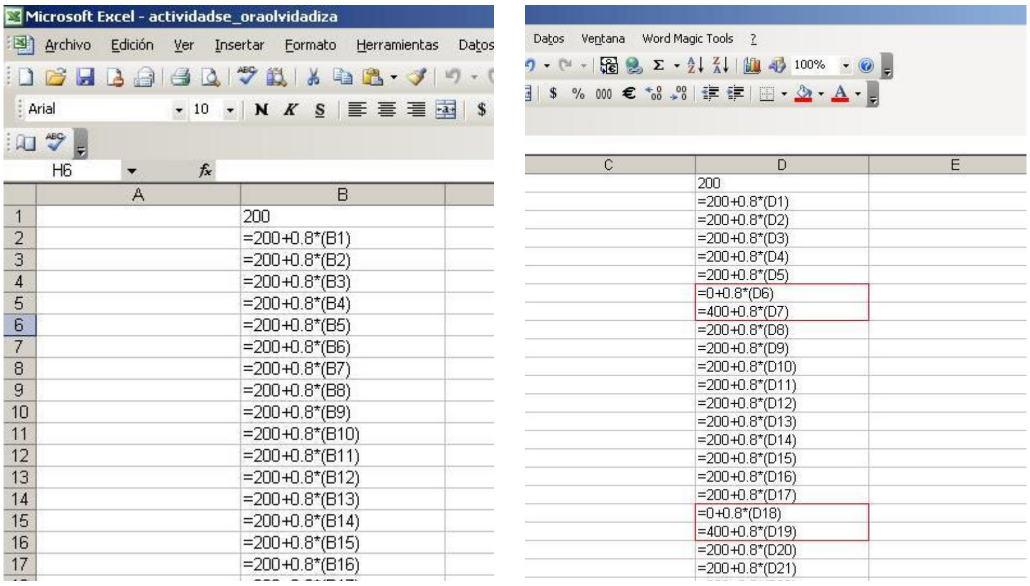
Para responder a la pregunta: ¿qué ocurre con la concentración de la sustancia activa en el organismo si al paciente se le olvida tomar el medicamento? Daniel y Emilia copiaron a otra columna de su tabla en Excel el procedimiento que implementaron para responder a la pregunta previa, y modificaron las fórmulas de las celdas que representan la séptima, octava, decimonovena y vigésima tomas (primera y segunda tomas del segundo día; así como, la primera y segunda tomas del cuarto día, respectivamente). La conclusión de los participantes fue que, al final de la semana, la concentración de medicamento en la sangre del paciente supera un gramo. En este caso, los participantes no plantearon un modelo algebraico. Los investigadores preguntaron el por qué no habían elaborado alguna gráfica para visualizar la evolución de la cantidad de medicamento presente en la sangre del paciente.

Respondieron que el resultado numérico les pareció suficiente para dar respuesta al problema.
Al preguntar a los profesores, cuáles serían las consecuencias para el paciente, en caso de olvidar tomar el medicamento y duplicar la dosis en la siguiente toma, Emilia comentó que no habría ningún efecto porque la concentración del medicamento es aproximadamente la misma al final del periodo, con olvidos y sin olvidos, se observa que esta profesora centra su atención únicamente en las cantidades, y no en los posibles efectos reales de que se incremente la concentración de cierta sustancia activa en el organismo de una persona.

Investigador: […] ¿Qué consecuencias creen que pudiera tener para la persona que está tomando el medicamento el no haberlo tomado y tomar el doble de la dosis en la siguiente toma, con base en esos resultados que tienen ahí de su modelo?… ¿o consideran que no hay ningún efecto?

Emilia: Como que no **hay** ningún efecto, ¿no? porque sigue teniendo un miligramo [quiso decir un gramo] en ambos casos, al final de las cuarenta y dos tomas ¿no? [al tomar el medicamento de acuerdo con la prescripción médica y cuando olvida realizar alguna toma], o sea, no siento que haya un, algún efecto.

Figura 3.1 Procedimientos implementados en Excel para resolver el problema



Fuente: Elaboración propia con base en los archivos de Emilia y Daniel

Para resolver el problema, en el equipo 2 (Miguel y Juana), organizaron la información del problema como se muestra en la tabla 3.4, e identificaron que la cantidad de medicamento presente en el organismo del paciente en la n-ésima toma, se puede obtener mediante una serie geométrica. Los profesores identificaron un patrón y lo generalizaron para obtener que $a_n = 200\left(1+\sum_{i=1}^{n}(0.8)^i\right)$, donde a_n es la cantidad de fármaco acumulada después de la n-ésima dosis, y n es el número de tomas o dosis ingeridas. Además, hicieron uso de su conocimiento sobre series geométricas para determinar que la cantidad de medicamente presente en el organismo del paciente al cabo de una semana se puede obtener con la expresión $200\left[(0.8)^{42}-1\right]/\left[0.8-1\right]$.

Posteriormente, implementaron un procedimiento recursivo en Excel para determinar la cantidad de medicamento presente en la sangre después de 42 tomas. En una columna colocaron el número de toma, en otra columna la cantidad de sustancia activa que se ingiere en cada toma y posteriormente una tercera columna con la cantidad de medicamento presente en la sangre. Esta misma tabla se modificó para responder a la pregunta de qué pasa si el paciente olvida tomar el medicamente, simplemente al colocar un cero en la cantidad de miligramos correspondiente a la toma 7 y 19, así como 400 en la cantidad de miligramos correspondientes a las tomas 8 y 20 (Tabla 3.4, tercera fila). Estos participantes también elaboraron una gráfica para visualizar el comportamiento de los datos. Mediante esta representación se dieron cuenta del comportamiento asintótico del fenómeno, e identificaron que la cantidad de medicamento en el organismo a largo plazo se estabiliza en mil miligramos, o un gramo de la sustancia activa.

Tabla 3.4 Evidencia del trabajo de Miguel y Juana

Modelo algebraico (sin olvidos)

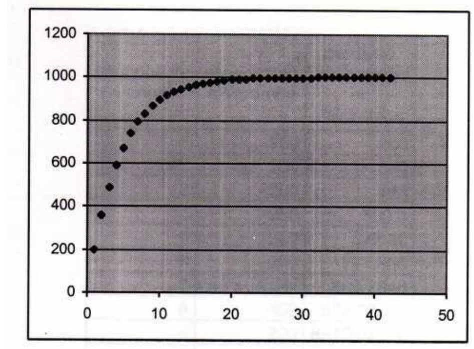
De acuerdo a los datos del problema, observamos que las condiciones siguen el siguiente patrón, qué representa una progresión geométrica:

$$a_1 = 200 = (200)(1)$$
$$a_2 = 200 + (200)(0.8)$$
$$a_3 = 200 + (200)(0.8) + (200)(0.8)^2$$
$$a_4 = 200 + (200)(0.8) + (200)(0.4)^2 + (200)(0.8)^3$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$a_{42} = 200 + (200)(0.8) + (200)(0.8)^2 + \ldots + 200(0.8)^{42}$$

Haciendo un análisis se deduce una fórmula general es $a_n = 200(1 + \sum_{i=1}^{n}(0.8)^i)$

Modelo Tabular y gráfico(sin olvidos)

1	200
2	360
3	488
4	590,4
5	672,32
6	737,856
7	790,2848
8	832,22784
9	865,782272
10	892,625818
11	914,100654
12	931,280523
13	945,024419
14	956,019535

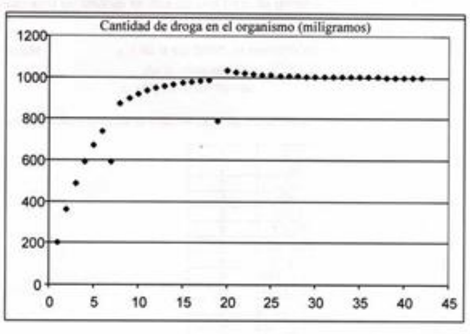


Modelo tabular en Excel (con olvidos y duplicación de la dosis)

Por lo que en el periodo 42 nos queda 1000.23036, esto se puede comprobar en la siguiente tabla:

periodos de 4 horas	cantidad en miligramos	cantidad acumulada en miligramos
1	200	200
2	200	360
3	200	488
4	200	590.4
5	200	672.32
6	200	737.856
7		590.2848
8	400	872.22784
9	200	897.782272
10	200	918.225818
11	200	934.580654
12	200	947.664523
13	200	958.131619
14	200	966.505295
15	200	973.204236
16	200	978.563389
17	200	982.850711

Modelo gráfico en Excel (con olvidos y duplicación de la dosis)



Fuente: Elaboración propia con base en los reportes de Miguel y Juana

A diferencia del primer equipo, Miguel y Juana implementaron un procedimiento algebraico para responder a qué ocurre con la concentración de la sustancia activa en el organismo cuando el paciente olvida tomar el medicamento, mediante lo que Miguel llamó "una ecuación de valor", una herramienta utilizada en matemáticas financieras. El procedimiento para plantear la ecuación es el siguiente, a la cantidad de medicamento presente en la sangre, suponiendo que se realizaron las tomas de acuerdo con la prescripción médica, se le resta la cantidad de medicamento de la toma 7 y 19 que queda en el organismo al finalizar la semana y se le suma la cantidad de medicamento adicional que se consumió en los periodos 8 y 20.

Entonces, la cantidad de medicamento en la sangre suponiendo el olvido de las tomas 7 y 19, así como la duplicación de la dosis en las tomas 8 y 20 es igual a:

$$\frac{200\left[(0.8)^{42}-1\right]}{0.8-1}-200(0.8)^{35}-200(0.8)^{23}+200(0.8)^{34}+200(0.8)^{22}\approx 1000.23 \quad \ldots \qquad (1)$$

Posteriormente, compararon los resultados obtenidos con Excel y con (1), obteniendo los mismos valores y convenciéndose así, de la validez del proceso de solución. Miguel fue capaz de llevar a cabo este proceso de razonamiento debido a sus conocimientos acerca del interés compuesto y ecuaciones de valor, al observar un comportamiento análogo entre este fenómeno y la concentración del medicamento en la sangre. Un aspecto relevante del trabajo del equipo 2 es que los participantes justificaron el comportamiento asintótico del modelo, con base en los supuestos o hipótesis del mismo.

Además, interpretaron el efecto que podrían tener los aumentos o disminuciones bruscos de la cantidad de medicamento presente en la sangre del paciente. Miguel consideró que no hay algún efecto en la salud del paciente al olvidar realizar una toma y después incrementar la dosis al doble, y justificó su razonamiento explicando que finalmente la concentración de medicamento se estabilizará en 1000 mg.

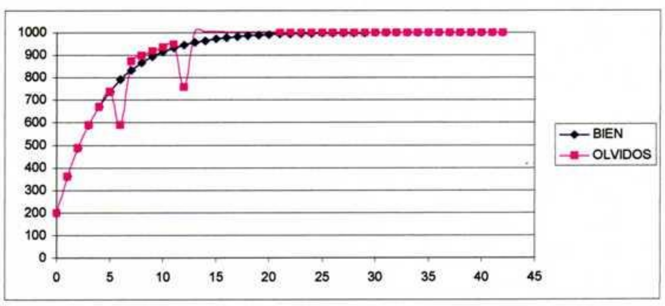
El equipo 3, formado por Jacobo y Sofía, elaboró una tabla en Excel, la columna "inicio" indica la cantidad de medicamento presente en la sangre al principio del n-ésimo periodo, después de haber recibido la dosis de medicamento correspondiente a ese periodo. Por otra parte, la columna "fin" indica la cantidad de medicamento en la sangre al final del periodo de cuatro horas.

Para simplificar la expresión que determina la cantidad de medicamento presente en la sangre del paciente, los estudiantes utilizaron el hecho de que la suma $S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^r$, puede expresarse como $S_n = \left(1 - r^{n+1}\right)/(1 - r)$. Entonces $a_n = 200\left(\left(1 - 0.8^{n+1}\right)/(1 - 0.8)\right)$. Al implementar esta fórmula en Excel, los estudiantes verificaron que proporcionaba los mismos resultados que con el procedimiento recursivo elaborado previamente. Posteriormente, los participantes graficaron los datos y observaron que la cantidad de medicamento presente en la sangre no supera los 1000 mg.

Con respecto a la situación de olvido del paciente y la ingesta del doble del medicamento, Jacobo y Sofía modificaron los valores de las tomas correspondientes en el modelo elaborado en Excel, para que se satisficieran las condiciones del problema. Sofía consideró que sí podría haber algún efecto en la vida real, al llevar a cabo esta forma de consumir el medicamento, ya que si la concentración de sustancia activa disminuye, debajo de cierto nivel, podría perder su efecto terapéutico y en caso de las alzas bruscas, el exceso de sustancia activa podría ser tóxico.

Tabla 3.5 Evidencia del trabajo de Sofía y Jacobo

<table>
<tr>
<td>Modelo tabular en Excel (sin olvidos)</td>
<td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th></tr>
<tr><th>Periodo</th><th>Toma</th><th>Inicio</th><th>Fin</th></tr>
<tr><td>0</td><td>200</td><td>200</td><td>=C2*0.8</td></tr>
<tr><td>1</td><td>200</td><td>=B3+D2</td><td>=C3*0.8</td></tr>
<tr><td>2</td><td>200</td><td>=B4+D3</td><td>=C4*0.8</td></tr>
<tr><td>3</td><td>200</td><td>=B5+D4</td><td>=C5*0.8</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>41</td><td>200</td><td>=B43+D42</td><td>=C43*0.8</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Modelo tabular en Excel (con olvidos y duplicación de la dosis)</td>
<td>
Se construyó el modelo considerando T_k=0 en k = 6 y k = 12 y 400 en k = 7, 13, para simular los olvidos y tomas "acumuladas".
<table>
<tr><th>0.8</th><th>TOMA</th><th>INICIO</th><th>FIN</th></tr>
<tr><td>0</td><td>200</td><td>200</td><td>160</td></tr>
<tr><td>1</td><td>200</td><td>360</td><td>288</td></tr>
<tr><td>2</td><td>200</td><td>488</td><td>390.4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>200</td><td>590.4</td><td>472.32</td></tr>
<tr><td>4</td><td>200</td><td>672.32</td><td>537.856</td></tr>
<tr><td>5</td><td>200</td><td>737.856</td><td>590.2848</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0</td><td>590.2848</td><td>472.22784</td></tr>
<tr><td>7</td><td>400</td><td>872.22784</td><td>697.782272</td></tr>
<tr><td>8</td><td>200</td><td>897.782272</td><td>718.225818</td></tr>
<tr><td>9</td><td>200</td><td>918.225818</td><td>734.580654</td></tr>
<tr><td>10</td><td>200</td><td>934.580654</td><td>747.664523</td></tr>
<tr><td>11</td><td>200</td><td>947.664523</td><td>758.131619</td></tr>
<tr><td>12</td><td>0</td><td>758.131619</td><td>606.505295</td></tr>
<tr><td>13</td><td>400</td><td>1006.50529</td><td>805.204236</td></tr>
<tr><td>14</td><td>200</td><td>1005.20424</td><td>804.163389</td></tr>
<tr><td>15</td><td>200</td><td>1004.16339</td><td>803.330711</td></tr>
<tr><td>16</td><td>200</td><td>1003.33071</td><td>802.664569</td></tr>
<tr><td>17</td><td>200</td><td>1002.66457</td><td>802.131655</td></tr>
<tr><td>18</td><td>200</td><td>1002.13166</td><td>801.705324</td></tr>
<tr><td>19</td><td>200</td><td>1001.70532</td><td>801.364259</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Modelo gráfico en Excel (con olvidos y duplicación de la dosis)</td>
<td>
Se construyeron las gráficas para comparar la concentración en la sangre, obteniendo:



Los olvidos provocan caídas bruscas en la concentración y las recuperaciones alzas bruscas, aunque no muy arriba de la concentración en caso no interrumpido. A largo plazo no tienen efecto pues la concentración tiende a 1000 mg.
</td>
</tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia con base en los reportes de Jacobo y Sofía

Comentarios. Se observó que mediante la representación algebraica de un problema con un procedimiento recursivo, la obtención de una fórmula implica que el estudiante lleve a cabo un proceso de identificación de patrones. Por otra parte, cabe destacar que del trabajo de Daniel y Emilia se puede concluir que una herramienta como Excel permite a los estudiantes abordar un número más amplio de problemas que los que pueden abordar únicamente con papel y lápiz. Por ejemplo, al resolver el problema con la hipótesis adicional del olvido de tomas y en incremento de la dosis, bastó con copiar el procedimiento utilizado para resolver el problema previo en otro lugar de la tabla y modificar la fórmula en alguna de las celdas para adaptar el procedimiento a los nuevos supuestos y así solucionar el problema, y sin embargo, no fueron capaces de traducir estas acciones llevadas a cabo con la herramienta para modificar el procedimiento algebraico. El elemento que permite explorar una cantidad mayor de datos del problema con el uso de Excel, es que la herramienta mantiene implícitas ciertas relaciones algebraicas entre los datos, lo cual es posible dada la capacidad para construir lo que Moreno-Armella y Hegedus (2009) denomina *representaciones ejecutables de objetos matemáticos*.

Tabla 3.6 Elementos del pensamiento matemático (Extensión de la tarea 1)

Daniel y Emilia	Identificación y generalización de un patrón para representar a la cantidad de medicamento como una serie geométrica. Elaboración de un modelo tabular con Excel para abordar el caso de los olvidos y duplicación de la dosis.
Miguel y Juana	Identificación y generalización de un patrón para representar a la cantidad de medicamento como una serie geométrica. Uso de diferentes representaciones para abordar los problemas (tabular, gráfica y algebraica). Mediante una ecuación de valor abordaron analíticamente el caso de los olvidos y duplicación de la dosis.
Jacobo y Sofía	Identificación y generalización de un patrón para representar a la cantidad de medicamento como una serie geométrica. Uso de representaciones tabulares y gráficas para abordar los problemas. Elaboración de una representación gráfica para analizar el comportamiento de los datos.

Fuente: Elaboración propia

6 Agradecimiento

Los autores agradecemos el apoyo brindado para la realización de este trabajo a través de los proyecto Conacyt-168543 (México), y del Plan Nacional I+D+I del MCIN (España) EDU2015-65270-R y EDU2017-84276-R.

7 Conclusiones

El uso de Excel favoreció la integración de aproximaciones numéricas, gráficas y algebraicas. La herramienta permitió a los estudiantes implementar de forma numérica procedimientos recursivos, mediante el establecimiento de una "fórmula" general, la cual, posteriormente, sólo requiere de transformarse recursivamente, en las celdas adyacentes, mediante el arrastre. Esta característica para implementar procedimientos recursivos, propia de las hojas de cálculo, puede ayudar a los estudiantes, con pocas habilidades para realizar operaciones numéricas, a resolver problemas que no podrían abordar con papel y lápiz. Esto es una muestra del efecto mediador de la herramienta en los procesos de resolución de un problema, particularmente representado por el arrastre que permite amplificar las capacidades de cálculo, y reorganizar la formulación de procesos recursivos. En el ambiente de papel y lápiz los procedimientos que involucran cálculos algebraicos son difíciles de implementar para estudiantes que no poseen fluidez procedimental, ya que obtener relaciones funcionales con base en fórmulas recursivas, requiere de recursos tales como: cálculo con series o solución de ecuaciones en diferencias (ecuaciones de valor).

En el problema donde se supone que hay olvidos y duplicación de la dosis, resulta complicado elaborar un modelo algebraico, si no se toma en cuenta que el proceso de eliminación del medicamento es lineal, debido a que la tasa de eliminación es constante. Al respecto, es importante señalar que una definición recursiva de una función es, en términos pedagógicos, más complicada que una fórmula cerrada, aunque los estudiantes tienden a considerar, en primer término, una función como recursiva, más que en su forma cerrada (Noss, 2001). Nos parece que una de las dificultades pedagógicas al definir una función en forma recursiva, radica en que la obtención de una forma cerrada, requiere, en varios casos, de resolver ecuaciones en diferencias. El uso de una herramienta como Excel, puede ser una primera aproximación para abordar procesos recursivos, lo cual es una forma de amplificar las capacidades aritméticas de un resolutor. Se observó que los participantes lograron conectar procedimientos aritméticos en papel y lápiz con el uso de fórmulas en Excel, y en consecuencia obtuvieron medios para verificar por sí mismos la validez de sus resultados.

Se observó que algunas características de Excel, en particular la transformación de fórmulas mediante el arrastre, permitió a los estudiantes abordar problemas que requieren de recursos matemáticos que muchas veces exceden aquellos que poseen estudiantes promedio de bachillerato.

Lo anterior es posible, ya que las herramientas operan con relaciones matemáticas de forma implícita (recursividad), y no es necesario, en una primera aproximación, que el estudiante las conozca para obtener o aproximar la solución de un problema, o para visualizar una relación entre variables. Además, la ejecutabilidad de algunas representaciones (obtener la gráfica de un conjunto de datos), puede favorecer el desarrollo de procesos cualitativos de análisis (Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2016). El que la herramienta mantenga implícitas diversas relaciones matemáticas puede aportar elementos para que el estudiante desarrolle nuevas habilidades, como elegir una variable independiente, en una relación funcional, que sea “apropiada” para resolver un problema particular. En el caso de los problemas en contextos hipotéticos, las herramientas no tienen influencia aparente en la determinación de las hipótesis o supuestos que permiten modelar matemáticamente el problema; ya que la actividad con las herramientas parte de la consideración de un modelo matemático.

En lo que respecta a los aspectos ontológico y didáctico, Excel apoyó el desarrollo de diferentes elementos del pensamiento matemático. Sin embargo, en lo que concierne a la generación de nuevos problemas, el alcance de Excel fue limitado en la generación de nuevos problemas, ya que en las tareas propuestas se utilizó principalmente como una herramienta para implementar procesos que permitieran aproximar una solución o como medio para verificar los resultados obtenidos mediante procedimientos algebraicos. Cuando se buscó determinar la concentración de medicamente en la sangre, suponiendo diversas tomas, el ajuste de los datos mediante una función continua ($y = 500e^{-0.2231x}$), permitió a Miguel formular el problema para determinar la concentración de medicamento en la sangre considerando cualquier periodo de tiempo. Esta herramienta se utilizó para formular conjeturas relacionadas con el comportamiento a largo plazo de un fenómeno. Por ejemplo, los estudiantes conjeturaron cómo se estabiliza la concentración de medicamento en la sangre de un paciente, con base en la integración de aproximaciones numéricas y gráficas. En este caso, el uso de la herramienta favoreció que los estudiantes dispusieran de varias fuentes para contrastar la validez de los resultados, por sí mismos, sin esperar que fuese el profesor u otro experto quien avalara esos resultados.

Asimismo, el uso de esta herramienta permitió a los participantes variar las hipótesis o supuestos iniciales de los problemas, con el objetivo de establecer el efecto de estas variaciones. Se pudo constatar que el uso de Excel amplió algunos elementos del pensamiento matemático, como son: identificar y representar información, resolver casos particulares, formular conjeturas y aportar elementos para justificar y comunicar resultados, lo cual es un indicador del desarrollo de entendimiento matemático.

Las principales dificultades que experimentaron los participantes al abordar las tareas fueron: (1) en el caso del problema con olvidos, solo un participante pudo modelar algebraicamente la situación y cuando realizó la exposición plenaria de su resultado, los demás profesores no comprendieron la formulación del resultado, que como se explicó en la sección de resultados, estuvo basado en la linealidad del proceso de eliminación; (2) en este mismo problema, todos los participantes, excepto Sofía, no advirtieron de los riesgos que supone duplicar una dosis, la cual puede traer graves consecuencias para la salud, es decir, los profesores no supieron interpretar los resultados matemáticos en términos de la situación de referencia.

8 Referencias

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), International handbook of mathematics education (pp. 469-501). Dordrecht: Kluwer Academic.

Barrera-Mora, F. y Santos-Trigo, M. (2001). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamentos. En Ministerio de Educación Nacional, Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media (Ed.), Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas (pp. 166-185). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Berger, W. (2014). A more beautiful question: The power of inquiry to spark breakthrough ideas. New York, NY: Bloomsbury.

Borwein, J. M., & Bailey, D. H. (2003). Mathematics by experiment: Plausible reasoning in the 21st Century. Natick, MA: AK Peters.

Calder, N., Brown, T., Hanley, U., & Darby, S. (2006). Forming conjectures within spreadsheet environment. Mathematics Education Research Journal, 18(3), 100-116.

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2016). Youngster solving mathematical problems with technology. Cham: Springer.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nichols, J., Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second grade mathematics project. Journal for Research in Mathematics Education, 22, 3-29.

Devlin, K (2017). All the mathematical methods I learned in my university math degree became obsolete in my lifetime. The Huffington Post. Recuperado el 2 de abril de 2018 de https://www.huffingtonpost.com/entry/all-the-mathematical-methods-i-learned-in-my-university_us_58693ef9e4b014e7c72ee248

Edwards, J., Flores, A. (2018). Four corners in learning mathematics with technology. Ohio Journal of School Mathematics, 78, 45-51.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., y Human, P. (1997). Making sense: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth, NH: Heinemann.

Horton, R. M., & Leonard, W.H. (2005). Mathematical Modeling in Science: Using Spreadsheets to Create Mathematical Models and Address Scientific Inquiry. Science Teacher, 72(5), 40-45.

Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), Task design in mathematics education. New ICMI Study Series (pp. 191–225). New York: Springer.

Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A new framework for teacher knowledge. Teachers College Record, 108 (6), 1017-1054.

Moreno-Armella, L. y Elizondo-Ramírez, R. (2017). La geometría al encuentro del aprendizaje. Educación Matemática, 29(1), 9-36.

Moreno-Armella, L. & Hegedus, S. J. (2009). Co-action with Digital technologies. ZDM Mathematics Education, 41(4), 505-519.

Moreno-Armella, L., & Santos-Trigo, M. (2008). Democratic access and use of powerful mathematics in an emerging country. In L. D. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education, 2nd Edition (pp. 319-351). New York: Taylor & Francis.

Moreno-Armella, L., & Santos-Trigo, M. (2016). The use of digital technologies in mathematical practices: Reconciling traditional and emerging approaches. Handbook of International Research in Mathematics Education, 595-616.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). Principles and standards for schools mathematics. Reston, VA: NCTM.

Nobre, S., Amado, N., & Carreira, S. (2012). Solving a contextual problem with the spreadsheet as an environment for algebraic thinking development. Teaching Mathematics and its Applications, 31(1), 11-19.

Noss, R. (2001). For a Learnable Mathematics in the Digital Culture. Educational Studies in Mathematics, 48, 21-46.

Oliveira, M., & Nápoles, S. (2017). Functions and mathematical modeling with spreadsheets. Spreadsheets in Education (eJSiE), 10(2), 1-30.

Pittalis, M., Mousoulides, N., & Christou, C. (2005). Integrating technology in a mathematics cognitive intervention program. Proceedings of the Fifth Conference of the European society for Research in Mathematics Education.

Polya, G. (2009). Cómo plantear y resolver problemas (Trad. Julián Zugazagoitia). México: Trillas. (Trabajo original publicado en 1945).

Santos-Trigo, M. (2007). La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. México: Trillas.

Santos-Trigo, M. (2014). Problem solving in mathematics education. In S. Lerman (ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 496-501). New York: Springer.

Santos-Trigo, M. (2017, agosto 30). Curiosidad epistémica, preguntas y tecnología digital. C^2 Ciencia y Cultura. Recuperado el 5 de abril de 2018 de http://www.revistac2.com/curiosidad-epistemica-preguntas-y-tecnologia-digital/

Santos-Trigo, M. & Moreno-Armella, L (2016). The Use of Digital Technology to Frame and Foster Learners' Problem-Solving Experiences. In P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Eds.), Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and new perspectives (pp. 189-207). Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space Framework. ZDM Mathematics Education, 48(6), 827-842.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), Mathematical Thinking and Problem Solving (pp. 53-70). New York: Routledge.

Sherman, M. (2014). The role of technology in supporting students’ mathematical thinking: Extending the metaphors of amplifier and reorganizer. Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 14(3), 220-246.

Simon, M. A. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. Educational studies in mathematics, 26(1), 71-94.

Steen, L.A. (1988). The science of patterns. Science, 240(29), 61-616.

Wertsch, J. V. (1993). Voices of the Mind: a sociocultural approach to mediated action. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Wilson, K., Ainley, J., & Bills, L. (2005). Spreadsheet, pedagogic strategies and the evolution of meaning for variable. En Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 321-328). Melbourne, Australia: PME.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: The perspective of constructs. In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research in mathematics teaching and learning (pp. 1169–1207). Charlotte, NC: Information Age Publishing.