Actas

Tópicos Selectos de Educación en CITeM

T-III

LÓPEZ-BETANCOURT, Alicia
LIMA-GONZÁLEZ, Cynthia
REYES-VALDÉS, José Refugio *Directores*

Red Internacional de Investigación Campus Viviente de Educación en Ciencias Ingeniería-Tecnología y Matemáticas

ECORFAN®

ISBN: 978-607-8534-41-8
Sello Editorial ECORFAN: 607-8534
Número de Control ATSE: 2018-01
Clasificación ATSE (2018): 201018-0107

Actas

Definición del Actas

Objetivos Científicos

Apoyar a la Comunidad Científica Internacional en su producción escrita de Ciencia, Tecnología en Innovación en las Áreas de investigación CONACYT y PRODEP.

ECORFAN-México S.C es una Empresa Científica y Tecnológica en aporte a la formación del Recurso Humano enfocado a la continuidad en el análisis crítico de Investigación Internacional y está adscrita al RENIECYT de CONACYT con número 1702902, su compromiso es difundir las investigaciones y aportaciones de la Comunidad Científica Internacional, de instituciones académicas, organismos y entidades de los sectores público y privado y contribuir a la vinculación de los investigadores que realizan actividades científicas, desarrollos tecnológicos y de formación de recursos humanos especializados con los gobiernos, empresas y organizaciones sociales.

Alentar la interlocución de la Comunidad Científica Internacional con otros centros de estudio de México y del exterior y promover una amplia incorporación de académicos, especialistas e investigadores a la publicación Seriada en Nichos de Ciencia de Universidades Autónomas - Universidades Públicas Estatales - IES Federales - Universidades Politécnicas - Universidades Tecnológicas - Institutos Tecnológicos Federales - Escuelas Normales - Institutos Tecnológicos Descentralizados - Universidades Interculturales - Consejos de CyT - Centros de Investigación CONACYT.

Alcances, Cobertura y Audiencia

Actas es un Producto editado por ECORFAN-Mexico S.C en su Holding con repositorio en México, es una publicación científica arbitrada e indizada. Admite una amplia gama de contenidos que son evaluados por pares académicos por el método de Doble-Ciego, en torno a temas relacionados con la teoría y práctica de las Área de investigación CONACYT y PRODEP respectivamente con enfoques y perspectivas diversos, que contribuyan a la difusión del desarrollo de la Ciencia la Tecnología e Innovación que permitan las argumentaciones relacionadas con la toma de decisiones e incidir en la formulación de las políticas internacionales en el Campo de las Ciencias. El horizonte editorial de ECORFAN-Mexico® se extiende más allá de la academia e integra otros segmentos de investigación y análisis ajenos a ese ámbito, siempre y cuando cumplan con los requisitos de rigor argumentativo y científico, además de abordar temas de interés general y actual de la Sociedad Científica Internacional.

Consejo Editorial

Comité Arbitral

MARTÍNEZ - BRAVO, Oscar Mario. PhD
Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

ZALDÍVAR - ROJAS, José David. PhD
Centro de Investigación y Estudios Avanzados

GARCÍA - RODRÍGUEZ, Martha Leticia. PhD
Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados

ARCINIEGA - NEVÁREZ, José Antonio. PhD
Universidad Nacional Autónoma de México

BARRAZA - BARRAZA, Diana. PhD
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

BRICEÑO - SOLIS, Eduardo Carlos. PhD
Centro de Investigación y Estudios Avanzados

PANTOJA - RANGEL, Rafael. PhD
Universidad de Guadalajara

PARADA - RICO, Sandra Evely. PhD
Centro de Investigación y Estudios Avanzados

GARCÍA - GUERRERO, Enrique Efrén. PhD
Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada

Cesión de Derechos

El envío de una Obra Científica a ECORFAN Actas emana el compromiso del autor de no someterlo de manera simultánea a la consideración de otras publicaciones científicas para ello deberá complementar el Formato de Originalidad para su Obra Científica.

Los autores firman el Formato de Autorización para que su Obra Científica se difunda por los medios que ECORFAN-México, S.C. en su Holding México considere pertinentes para divulgación y difusión de su Obra Científica cediendo sus Derechos de Obra Científica.

Declaración de Autoría

Indicar el Nombre de 1 Autor y 3 Coautores como máximo en la participación de la Obra Científica y señalar en extenso la Afiliación Institucional indicando la Dependencia.

Identificar el Nombre de 1 Autor y 3 Coautores como máximo con el Número de CVU Becario-PNPC o SNI-CONACYT- Indicando el Nivel de Investigador y su Perfil de Google Scholar para verificar su nivel de Citación e índice H.

Identificar el Nombre de 1 Autor y 3 Coautores como máximo en los Perfiles de Ciencia y Tecnología ampliamente aceptados por la Comunidad Científica Internacional ORC ID - Researcher ID Thomson - arXiv Author ID - PubMed Author ID - Open ID respectivamente

Indicar el contacto para correspondencia al Autor (Correo y Teléfono) e indicar al Investigador que contribuye como primer Autor de la Obra Científica.

Detección de Plagio

Todas las Obras Científicas serán testeadas por el software de plagio PLAGSCAN si se detecta un nivel de plagio Positivo no se mandara a arbitraje y se rescindirá de la recepción de la Obra Científica notificando a los Autores responsables, reivindicando que el plagio académico está tipificado como delito en el Código Penal.

Proceso de Arbitraje

Todas las Obras Científicas se evaluarán por pares académicos por el método de Doble Ciego, el arbitraje Aprobatorio es un requisito para que el Consejo Editorial tome una decisión final que será inapelable en todos los casos. MARVID® es una Marca de derivada de ECORFAN® especializada en proveer a los expertos evaluadores todos ellos con grado de Doctorado y distinción de Investigadores Internacionales en los respectivos Consejos de Ciencia y Tecnología el homologo de CONACYT para los capítulos de America-Europa-Asia-Africa y Oceania. La identificación de la autoría deberá aparecer únicamente en una primera página eliminable, con el objeto de asegurar que el proceso de Arbitraje sea anónimo y cubra las siguientes etapas: Identificación del ECORFAN Actas con su tasa de ocupamiento autoral - Identificación del Autores y Coautores- Detección de Plagio PLAGSCAN - Revisión de Formatos de Autorización y Originalidad-Asignación al Consejo Editorial- Asignación del par de Árbitros Expertos-Notificación de Dictamen-Declaratoria de Observaciones al Autor-Cotejo de la Obra Científica Modificado para Edición-Publicación.

ECORFAN Tópicos Selectos de Educación en CITeM

Volumen III

Las Actas ofrecerán los volúmenes de contribuciones seleccionadas de investigadores que contribuyan a la actividad de difusión científica de ECORFAN en su área de investigación en Educación en Ciencias, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas. Además de tener una evaluación total, en las manos de los editores de la Universidad Juárez del Estado de Durango que colaboraron con calidad y puntualidad en sus capítulos, cada contribución individual fue arbitrada a estándares internacionales (RESEARCH GATE, MENDELEY, GOOGLE SCHOLAR y REDIB), el Acta propone así a la comunidad académica, los informes recientes sobre los nuevos progresos en las áreas más interesantes y prometedoras de investigación en Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Para futuros volúmenes:
http://www.ecorfan.org/actas

López-Betancourt, Alicia · Lima-González, Cynthia · Reyes-Valdés, José Refugio

Directores

Tópicos Selectos de Educación en CITeM

Educación para todos

T-III

Universidad Juárez del Estado de Durango
Universidad de Texas en San Antonio
Universidad Autónoma de Coahuila. Octubre, 2018.

Prefacio

El término de Ciencia, Ingeniería, Tecnología, Educación y Matemáticas (CITeM) procede del término estadounidense STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) que, aunque en sus orígenes no denotaba una orientación integradora de las cuatro disciplinas, se ha reconocido la necesidad de una enseñanza y aprendizaje conjunto de las prácticas y contenidos de las cuatro disciplinas. Dado que las matemáticas son inherentes a estas disciplinas, se busca que los estudiantes aprendan conceptos matemáticos que les permitan explicar el mundo que los rodea: la naturaleza, los fenómenos físicos y químicos que están presentes en la vida cotidiana del ser humano para lograr así la alfabetización en CITeM de la sociedad de manera integradora. Esta nueva tendencia en la enseñanza posibilita un cambio en el desempeño del profesor de un transmisor de conocimiento a un facilitador. Éste deberá promover y provocar de forma intencionada procesos de indagación científica para que los estudiantes sean los protagonistas de su propio conocimiento.

En lo concerniente a la matemática, es necesario que la enseñanza garantice que los estudiantes hayan adquirido los conocimientos básicos para la vida diaria y para continuar estudiando. Para esto, la resolución de problemas se ha establecido en los últimos años como una estrategia que apoya el aprendizaje del conocimiento matemático. Además de reconocer, utilizar y llevar a cabo en el aula las relaciones existentes de la matemática con otras disciplinas.

El Grupo Internacional de Investigación Campus Viviente de Educación en Ciencias, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas, es una red de investigación internacional cuyo objetivo es fomentar una visión integradora de CITeM, a través de la aplicación de los resultados de investigaciones en el aula y en el desarrollo profesional docente. Así, el desarrollo profesional docente en contenidos de CITeM a través de ambientes de aprendizaje innovadores es uno de los principales ejes de acción del Grupo Internacional de Investigación Campus Viviente de Educación en CITeM.

Este Grupo Internacional parte de la idea de que la aplicación de los resultados de investigación implementados en el desarrollo profesional docente permite un cambio en el aula que propicia una educación de calidad para todos. Así, parte del trabajo colaborativo de este Grupo se ha enfocado al desarrollo profesional docente de diversos niveles educativos. Estas investigaciones se han compartido en eventos académicos conjuntos tales como Simposio Internacional Campus Viviente de Educación en CITeM, 2013, con sede en la Universidad de Texas en San Antonio, EUA; Panel de Discusión: Academic Collaborations in Internaional Settings: Equity and Quality in Education through STEM Education en Global Lation Education Advocacy Days, 2015, llevado a cabo en la Universidad de Texas en San Antonio, EUA; Primera y Segunda Reunión Nacional de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (Renace CITeM), 2015 y 2017 realizadas en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango, México.

Las investigaciones que integran este tomo están centradas principalmente en las ideas desarrolladas de los docentes a través del diseño, implementación o evaluación de ambientes de aprendizaje innovadores.

Los profesores son los responsables de diseñar, proponer y ejecutar actividades con ideas innovadoras que motiven a los estudiantes a aprender matemáticas y que le den significado a través de la relación con la ciencia en general, la ingeniería y la tecnología, en este sentido es importante conocer qué piensan los profesores de su práctica docente en matemáticas.

En el capítulo 1 las autoras Rodríguez-Vásquez, Navarro-Sandoval y García-González a través de un estudio de caso, con profesores de educación básica y medio superior en servicio cursando el posgrado de matemática educativa en el estado de Guerrero en México. investigaron las concepciones que tienen los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. La primera dimensión de este proceso identificada por los profesores es la dimensión interpersonal. Los profesores expresaron que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática debe ser evaluado, informado a los padres y colectivo. En lo referente a las concepciones de la actividad didáctica algunos profesores se conciben como transmisores de conocimiento, responsables de diseño de actividades y que estas se extiendan hacia los directivos, pares y padres de familia. Finalmente, los profesores expresaron y reconocieron las variables afectivas.

En los capítulos 2 y 3 se analizan las posibilidades de aprendizaje que presentan dos ambientes de aprendizaje basados en la modelación.

En el capítulo 2, Alvarado-Monroy, Olvera-Martínez y Moreno-Sandoval presentan los resultados de su investigación en la que exploran el uso del ambiente de aprendizaje integrador (AA) "Aviones y trayectorias" para desarrollar un aprendizaje social, emocional; y competencias de CITeM como el pensamiento crítico, la resolución de problemas, trabajo colaborativo y comunicación de resultados. La implementación del AA se llevó a cabo con profesores y estudiantes de secundaria, primaria y prescolar, y los padres de familia de los estudiantes de preescolar.

Por su parte, Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez presentan los resultados de la exploración de los aspectos ontológicos, epistemológicos y didácticos del uso de tecnología como mediadora del conocimiento algebraico a través de la modelación de la concentración de un ingrediente activo en el cuerpo humano. En su análisis, examinan las posibilidades de modelación y uso de representaciones que permite Excel en contraste con el uso de sólo papel y lápiz. Se presentan las ventajas que ofrece Excel para la exploración de diferentes condiciones y variantes del problema inicial.

En el capítulo 4, Angel Pretelín-Ricárdez utiliza el diseño de videojuegos, mediante una metodología construccionista, para el uso y desarrollo de conocimiento de matemáticas, fisica y modelación. El trabajo se centra en tres aspectos: la manera en que se realiza el proceso de modelación computacional, la experimentación y modelación en videojuegos. Se enfatiza en la construcción de videojuegos basada en modelos de sistemas físicos, esto con el fin de relacionar varias disciplinas, particularmente matemáticas, física y programación. A este enfoque se agrega la característica de actividades de "bajo umbral" y "alto techo", lo que permite ser realizadas por un rango amplio de estudiantes de diversos niveles, pero sin reducir el alcance de las ideas planteadas. La idea central del trabajo de Pretelín-Ricárdez, es potenciar el aprendizaje abstracto o interno mediante el desarrollo de actividades concretas o externas. Se integran actividades básicas iniciales con objetos tangibles tales como la elaboración de bosquejos utilizando lápiz y papel. Posteriormente, estas ideas se llevan a un nivel más abstracto con la incorporación de los conceptos de sistema, modelo y simulación. Se destacan finalmente tres aspectos: el enfoque multidisciplinario en la integración de conocimiento, el uso de la matemática en forma implícita y que la metodología resulta novedosa y atractiva para los estudiantes.

William Póveda Fernández, Daniel Aurelio Aguilar-Magallón y María del Carmen Olvera - Martínez abordan, en el capítulo 5, la resolución de problemas en un ambiente de aprendizaje MOOC. Se diseñan actividades que propician la interacción de participantes en un entorno virtual abierto, mostrando las ventajas de no estar confinado a un espacio cerrado. Se identifican roles que asumen los participantes ante la ausencia de una figura de asesor, enriqueciendo con esto el debate de ideas y la construcción del conocimiento.

El intercambio de roles propicia un proceso aprendizaje más eficiente, donde ciertos grupos se apropian de tareas asociadas a un asesor. Finalmente, las aportaciones se complementan dando lugar a diversas rutas para arribar a soluciones factibles en un ambiente colaborativo de esa dimensión.

En el capítulo seis los autores Aguilar-Magallón, Poveda-Fernández y Olvera Martínez exponen los resultados al trabajar con un grupo de profesores de matemáticas. Su investigación se centra en indagar las posibilidades que tiene un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) para transformar problemas tradicionales (estructurados) en problemas de investigación. Los resultados muestran que las características propias del SGD tales como el arrastre de objetos, la localización de elementos de las cónicas y las configuraciones dinámicas favorecieron la transformación de los problemas tradicionales, que en lápiz y papel sería complicada. El SGD favoreció la identificación de objetos y sus relaciones, identificar la variable independiente y visualizar la variación con la variable dependiente y la creación de puntos dinámicos para visualizar y determinar lugares geométricos.

Por su parte, los mismos autores en el capítulo siete exponen la importancia y relevancia de la resolución de problemas para el aprendizaje del conocimiento matemático. Ellos trabajaron con nueve profesores de bachillerato para investigar cuáles estrategias y heurísticas utilizaron para resolver problemas centrados en geometría y cómo al trabajar en un SGD favoreció para generar nuevos problemas a partir del propuesto inicialmente. Los resultados muestran que los profesores encontraron soluciones empíricas, exactas robustas y exactas sintéticas.

Agradecemos a la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango y al Cuerpo Académico de Matemática Educativa para la Interdisciplinariedad por su apoyo para el desarrollo y consolidación de la Red Internacional Campus Viviente de Educación en Ciencias, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas. Asimismo, agradecemos al Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma de Coahuila y el Cuerpo Académico de Computación Científica y sus Aplicaciones. De igual manera, deseamos agradecer al Departamento de Estudios Bilingües-Biculturales del Colegio de Educación y Desarrollo Humano en la Universidad de Texas en San Antonio. También agradecemos el financiamiento otorgado por el Proyecto Sustainable Support Systems for Student Success financiado por el Departamento de Educación de EUA a través de Academy for Teacher Excellence (UTSA).

.

López-Betancourt, Alicia
Universidad Juárez del Estado de Durango
Lima-González, Cynthia
Universidad de Texas en San Antonio
Reyes-Valdés, José Refugio
Universidad Autónoma de Coahuila

Estado de Durango, México
Octubre, 2018.

Contenido Pág.

Concepciones sobre la práctica docente en matemáticas: Un estudio de caso

Conceptions about teaching practice in mathematics: A case study

RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, Flor Monserrat†*, NAVARRO-SANDOVAL, Catalina y GARCÍA-GONZÁLEZ, María del Socorro

ID 1[er] Autor: *Flor Monserrat, Rodríguez-Vásquez* / **ORC ID:** 0000-0002-9596-4253, **Researcher ID Thomson:** V-1986-2018, **CVU CONACYT ID:** 100888

ID 1[er] Coautor: *Catalina, Navarro-Sandoval* / **ORC ID:** 0000-0001-5214-0062, **Researcher ID Thomson:** V-2182-2018, **CVU CONACYT ID:** 42875

ID 2[do] Coautor: *María del Socorro García-González* / **ORC ID:** 0000-0001-7088-1075, **arXiv ID:** mgargonza, **CVU CONACYT ID:** 333794

Universidad Autónoma de Guerrero

F. Rodríguez, C. Navarro, M. García

flor.rodriguez@uagro.mx

A. López, C. Lima, J. Reyes (Dirs.) Educación para todos. Tópicos Selectos de Educación en CITeM. ©ECORFAN-México, 2018.

Abstract

Research has shown that teachers have multiple conceptions about teaching and learning of mathematics. The purpose of the present study was to identify teachers' conceptions about their teaching practice and to investigate any possible relationship between these conceptions. Eight subjects participated in the study, all of them students of Professional Master in Mathematics of the Autonomous University of Guerrero. Six were secondary school teachers and two were high school teachers. To obtain data, were applied 6 activities under action-research method. The results show that there are a predominant conception in teachers about teaching practice and this conception characterizes teachers in their professional action as a professional working in an institution where they develop relationships with people who participate in the educational process; students, teachers, directors, mothers and fathers of family. We concluded that an institutional mechanism should be given them to teachers identifies and integrates each one of the dimensions of the teaching practice for the strengthening of the same in active.

Conception, Teaching Practice, Mathematics

1 Introducción

En la práctica educativa del docente de matemáticas, ante la necesidad de cambios inherentes en la conceptualización de la enseñanza de la matemática formal y rigurosa centrada en el profesor, a una enseñanza menos rigurosa, en el sentido estricto de la matemática, en la que se consideraba al estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tuvo como una de sus consecuencias, la formación continua del docente para obtener la calidad y actualización educativa. Kline (1999) mencionó que una de las causas de estos cambios conceptuales, fue el paradigma del fracaso de la matemática moderna, por la disfuncionalidad debida al choque de formalización y abstracción contra intuición y exploración. También, señaló que la matemática debería ser llevada con un tratamiento distinto al aula, la razón es que ésta estaba direccionada para una población muy pequeña de aquellos que serían matemáticos de profesión contra la población que se quedaría con una formación matemática para realizar operaciones aritméticas.

Soriano (2009) hace referencia a la práctica educativa en el sentido de Freire quien define a ésta como un conjunto de acciones socio-pedagógicas organizadas en el tiempo y espacio, de carácter histórico, es decir, un modo de enseñar y aprender elaborado a partir de experiencias formativas y prácticas, cuya función fundamental es reconstruir y reinventar la existencia humana de los educandos en un marco democrático.

Para comprender la práctica del docente, Clark y Peterson (1986) realizaron un estudio sobre las creencias y concepciones de los profesores, acerca de su planificación docente, de sus pensamientos y de sus decisiones tomadas en el aula de clase. Nespor (1987) señalaba que "para entender cómo enseñan los maestros, debemos entender sus creencias, las cuales, dirigen su actuar" (p. 323), a partir de entonces, el interés en el estudio de estos dos constructos ha crecido. En el caso de las creencias, uno de sus principales resultados es haber evidenciado el tipo de relación entre ellas y la práctica del profesor, como ejemplo señalamos la exhaustiva revisión de literatura de Buehl y Beck (2014), que identifican 4 formas en las que las creencias de los profesores y su práctica están relacionadas: 1) las creencias influyen las prácticas del profesor, 2) las prácticas del profesor influyen las creencias, 3) las creencias están desconectadas de las prácticas del profesor, 4) las creencias y las prácticas del profesor se influyen recíprocamente. Estas relaciones sin embargo, dependen de variables diversas, como el contexto, género, recursos económicos, políticas educativas. De ahí que, el estudio de las creencias y concepciones siga vigente. En el caso de las concepciones de la práctica del profesor, los resultados apuntan a que éstas son uno de los factores clave que influyen en las decisiones del aula (Remesal, 2006).

La revisión de literatura permitió identificar que el estudio de ambos constructos es particularmente relevante en el contexto de las iniciativas de desarrollo profesional docente (Borg, 2018). Por ejemplo, el modelo de capacitación (Lieberman y Miller, 2014), los profesores asisten a seminarios o talleres y reciben nuevas ideas (por ejemplo, estrategias para enseñar gramática), que se supone aplicarán en sus aulas.

Particularmente, en el contexto de las matemáticas, la revisión de literatura permitió concluir que los temas referentes al estudio de las concepciones han sido la enseñanza de las matemáticas, el aprendizaje y la evaluación, asimismo dicha literatura, puede acercarnos a conocer las concepciones que los profesores tienen de su práctica docente, la cual, no ha sido directamente objeto de investigación.

Reconociendo la importancia de estudiar las concepciones de los profesores, por las razones expuestas, el interés de la presente investigación es conocer las concepciones sobre la práctica docente en matemáticas, a partir de un estudio de caso, ya que la matemática es una disciplina que por la abstracción en su naturaleza resulta ser difícil no sólo en su aprendizaje sino en su enseñanza. Para ello, nos hemos planteado la pregunta de investigación: ¿Cuáles son las concepciones que tienen los profesores de matemáticas sobre su práctica docente?, para dar respuesta nos valemos de dicho estudio de caso. Se trata de un grupo de profesores, estudiantes de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Autónoma de Guerrero, que trabajan en escuelas de distintos contextos socioeconómicos.

Particularmente, se considera que el conocimiento de sus concepciones servirá para que los mismos docentes reflexionen sobre su propia práctica, valorando el servicio social que hacen y atendiendo las debilidades reflejadas en sus pares.

Este artículo consiste de 6 secciones, una introducción en la que se describe de manera general la problemática de estudio, una sección relativa a las concepciones del profesor de matemáticas para contextualizar la población de estudio. Una sección de metodología en donde se expone el procedimiento de la investigación, seguida de una sección de análisis de datos y resultados, posteriormente se presentan las conclusiones en donde se describen los principales hallazgos y limitaciones de la investigación. Finalmente, se exponen las referencias utilizadas en el cuerpo del escrito.

2 Las concepciones y el profesor de matemáticas

En la investigación, los constructos creencia y concepción tienden a usarse como sinónimos, sin embargo hay una clara diferencia si profundizamos en sus definiciones. Thompson (1992) define las concepciones como “una estructura mental más general que abarca creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias y gustos” (p. 130). Por su parte, el término creencia se usa para referirse a aquellas afirmaciones básicas sobre diferentes aspectos de la realidad que cualquier persona podría considerar verdaderas en diferentes momentos de su vida, aunque no tienen por qué constituir una verdad objetiva (Goodenough, 1990). De las definiciones anteriores, es claro que el constructo concepción queda subordinado al constructo de creencia, por lo que no podemos usarlos como sinónimo.

En este estudio, los términos creencia y concepción están claramente diferenciados con base en las definiciones anteriores, y se centra la atención en el estudio de las concepciones sobre la práctica docente en matemáticas.

Los resultados de investigaciones apuntan a que las concepciones son uno de los factores clave que influyen en las decisiones del aula (Remesal, 2006) y en la evaluación (Remesal, 2009). Por ejemplo, para algunos profesores la concepción de evaluación del aprendizaje de los estudiantes se mide por el conocimiento, las habilidades adquiridas, las actitudes, los valores y los procedimientos, además de considerar que es necesario el examen o prueba escrita para evaluar el aprendizaje (Buendía et al., 1999). En Nueva Zelanda, Brown (2003) identificó cuatro tendencias básicas referidas a concepciones de profesores sobre las funciones de la evaluación educativa: la evaluación como instrumento de mejora de la práctica escolar (de la enseñanza y del aprendizaje); de rendición de cuentas del sistema escolar; de acreditación del alumnado; y como una práctica carente de sentido.

En México, Dolores y García (2016) exploran las concepciones de profesores de matemáticas de bachillerato acerca de la evaluación, y encuentran que hay una tendencia a concebirla como medición de los conocimientos alcanzados, y muy pocos la conciben como un conjunto de habilidades y actitudes.

Estas concepciones que los profesores manifiestan sobre la evaluación resultan ser las acciones que realizan en clase, de ahí que, estudiar las concepciones nos puede brindar información de la práctica docente del profesor de matemáticas.

2.1 Las concepciones y la práctica docente

Las concepciones de los docentes sobre su propia práctica se analizaron con base en la definición de Práctica Docente de Fierro, Fortoul y Rosas (2012):

La práctica docente es definida como una praxis social, objetiva e intencional en la que intervienen los significados, las percepciones y las acciones de los agentes implicados en el proceso-maestros, alumnos, autoridades educativas y padres de familia-, así como los aspectos políticos-institucionales, administrativos y normativos que, según el proyecto educativo de cada país, delimitan la función del maestro (p.21).

Asimismo, se retomó la definición de Thompson (1992), por ello al hablar de concepciones sobre la práctica docente, se hará con base en las creencias, significados, y preferencias de los profesores de matemáticas. Es decir, a partir de las creencias, significados y preferencias de los docentes de matemáticas, se analizó qué agentes delimitan las funciones de los profesores.

Para el estudio de las relaciones que se suscitan en la práctica docente Fierro, Fortoul y Rosas (2012) consideran seis dimensiones: Personal, institucional, interpersonal, social, didáctica y valoral. Ver Tabla 1.1.

Tabla 1.1 Dimensiones de la práctica docente

Dimensiones de la práctica docente	Características (Breve descripción)
Dimensión personal	El docente debe reconocerse como ser histórico, capaz de analizar su presente y de construir su futuro, a recuperar las formas en que se relacionan su historia personal y su trayectoria profesional, su vida cotidiana y su trabajo en la escuela, reflexionar sobre su papel fuera del salón de clases, y sobre lo que representa su trabajo en su vida privada y de qué manera ésta se hace presente en el aula.
Dimensión institucional	El docente debe tener claro que su práctica docente se encuentra en el seno de una organización, donde su quehacer es también una tarea colectivamente construida y regulada en el espacio de la escuela, su lugar de trabajo. Asimismo, que sus decisiones y su práctica están normadas por tal organización pero, a su vez la escuela le ofrece los ejes rectores, normativos y profesionales de su puesto de trabajo, frente a las cuales cada maestro toma sus propias decisiones como individuo.
Dimensión interpersonal	El docente debe reconocer que trabaja en una institución donde desarrolla relaciones con personas que participan en el proceso educativo; alumnos, maestros, directores, madres y padres de familia. Estas relaciones interpersonales que ocurren dentro de la escuela se construyen sobre la base de las diferencias individuales en un marco institucional. Se hace referencia a un *clima institucional* que hace alusión a la manera en que se entretejen las relaciones interpersonales, que dan por resultado un ambiente relativamente estable de trabajo en la escuela y el gremio.
Dimensión social	El docente debe reconocer que su quehacer se desarrolla en un particular entorno histórico, político, social, geográfico, cultural y económico, que le imprime ciertas exigencias. La dimensión social de la práctica docente, se presenta como un intento de recuperar un conjunto de relaciones que se refieren a la forma en que cada docente percibe y expresa su tarea como agente educativo cuyos destinatarios son diversos sectores sociales.
Dimensión didáctica	Hace referencia al papel del docente como agente que, a través de los procesos de enseñanza, orienta, dirige, facilita y guía el quehacer de los alumnos con el saber colectivo culturalmente organizado. El conjunto de decisiones y prácticas de cada maestro en este ámbito, dependerá de que el proceso se reduzca a la simple transmisión y repetición de información o que constituya una experiencia constructiva y enriquecedora.
Dimensión valoral	Es valoral porque a través de la práctica docente damos cuenta de los valores que nos inculcaron y que debemos inculcar en nuestros alumnos, nos convertimos para ellos en un modelo de comportamiento, de actuar, de actitud. En ésta dimensión la práctica de cada maestro da cuenta de sus valores personales a través de sus preferencias conscientes, de sus actitudes, de sus juicios de valor, todos los cuales definen una orientación acorde a su actuación cotidiana.

Fuente: Fierro, Fortoul y Rosas (2012)

3 Metodología

En este apartado, se describen los elementos metodológicos que guiaron la investigación, en este sentido, se describen: los fundamentos de la investigación-acción como método aplicado en la investigación; el contexto de la investigación, incluyendo la población participante y sus características y; la forma en cómo se recolectaron los datos, incluyendo las actividades y materiales solicitados.

3.1 La investigación-acción

Dada su naturaleza intrínseca y personal, las concepciones no son observables y se tienen que inferir, desde el paradigma cualitativo la narrativa es la fuente de recolección de datos por excelencia, para ello se vale de instrumentos acordes, como el cuestionario o la entrevista. Por nuestra parte, se decidió adoptar la narrativa como fuente de datos para analizar las concepciones de los profesores, pero nos valemos de actividades en donde los profesores tienen que involucrarse y reflexionar personal y colectivamente sobre su labor educativa. Las actividades en las que participaron los docentes fueron diseñadas considerando las seis dimensiones de la práctica docente y su aplicación se llevó a cabo bajo el método de la investigación-acción.

El concepto tradicional de investigación-acción proviene del modelo de Lewin de las tres etapas del cambio social: descongelamiento, movimiento, recongelamiento. El proceso consiste en ocho fases de exploración y reflexión: i) insatisfacción con el actual estado de cosas; ii) identificación de un área problemática; iii) identificación de un problema específico a ser resuelto mediante la acción; iv) formulación de varias hipótesis; v) selección de una hipótesis; vi) ejecución de la acción para comprobar la hipótesis; vii) evaluación de los efectos de la acción; viii) generalizaciones.

Esencialmente este método sugiere que las tres características más importantes son su carácter participativo, su impulso democrático y su contribución simultánea al conocimiento en las ciencias sociales (Lewin, 1946). Este modelo describe a la investigación-acción como ciclos de acción reflexiva, donde cada ciclo se compone de una serie de pasos: planificación, acción y evaluación de la acción. Se comienza con una idea general sobre un tema de interés y sobre este se elabora un plan de acción.

De acuerdo con Cohen y Manion (2002) la investigación-acción se caracteriza por ser *situacional*, es decir, se preocupa por la interpretación de un problema en un contexto específico y la resolución se intenta con base en algún contexto, así mismo es trabajo de *colaboración*, esto significa que el trabajo es conjunto, además es *participativa*, dado que los miembros del equipo toman parte directa o indirectamente en la ejecución de la investigación y; finalmente, es *autoevaluadora* puesto que se evalúan continuamente las modificaciones dentro de la situación en cuestión, siendo el último objetivo mejorar la práctica.

3.2 Los participantes

Los participantes fueron en total ocho profesores de matemáticas, seis de nivel básico (secundaria) y dos de nivel medio superior. La formación académica de los profesores participantes se describe a continuación (ver Tabla 1.2):

Tabla 1.2 Formación y actividad académica de los profesores

Profesor	Actividad académica	Formación académica	Universidad de egreso
Profesor 1	Profesor de secundaria	Licenciatura en Ingeniería Civil	Universidad Autónoma de Guerrero
Profesor 2	Profesor de bachillerato	Especialidad en Educación Media Superior Línea I. Competencias Docentes; Licenciatura en Ingeniería Agrícola	Universidad Pedagógica Nacional U.P.N. Unidad 092 Ajusco (Central); Universidad Nacional Autónoma de México
Profesor 3	Profesor de secundaria	Licenciatura en Matemática Educativa; Licenciatura en Ingeniería Civil	Universidad Autónoma de Guerrero; Instituto Tecnológico de Chilpancingo (I.T.R.)
Profesor 4	Profesor de secundaria	Licenciatura en Educación Media en el Área de Matemáticas	Centro de Actualización del Magisterio de Chilpancingo
Profesor 5	Profesor de bachillerato	Licenciatura en Matemáticas Área Enseñanza de la Matemática y Computación	Universidad Autónoma de Guerrero
Profesor 6	Profesor de secundaria	Licenciatura en Contaduría	Universidad Autónoma de Guerrero
Profesora 7	Profesora de secundaria	Licenciatura en Matemáticas Aplicadas	Universidad Autónoma de Tlaxcala
Profesora 8	Profesora de secundaria	Licenciatura en Matemáticas Área Enseñanza de la Matemática y Computación	Universidad Autónoma de Guerrero

El contexto de la investigación fue el *Seminario de Práctica Docente I*, unidad de aprendizaje de la Maestría en Docencia de la Matemática (MDM) de la Universidad Autónoma de Guerrero. Cabe mencionar que el común denominador de los profesores de haber ingresado a la maestría, fue: i) fortalecer sus conocimientos en matemáticas, al menos del nivel educativo en el cual imparten clase y; ii) fortalecer su didáctica y en particular su didáctica en matemáticas. Se observó que una característica en ellos era su preocupación por aprender los conocimientos necesarios sobre las estrategias de enseñanza y conocer también qué hace la investigación en matemática educativa para favorecer su práctica docente. Por lo tanto, la reflexión sobre ésta fue un eje rector de la unidad de aprendizaje.

Los objetivos del *Seminario* consistieron en:

1. Reflexionar sobre el quehacer docente cotidiano, con base en los intereses y los motivos del profesor.
2. Estimular en los profesores el trabajo colaborativo, realizando actividades en grupo.
3. Ampliar sus conocimientos sobre la educación en general.
4. Fortalecer su compromiso tanto con los estudiantes como con la sociedad.
5. Estructurar un proyecto con impacto en el aula y la escuela.

Los objetivos del 1 al 4 del seminario estuvieron relacionados implícitamente con el objetivo de explorar sus concepciones. Ya que el seminario fue el contexto ideal para generar ciclos de reflexión sobre su propia práctica docente, dando lugar a la discusión sobre diferentes puntos de vista y con esta dinámica los 4 objetivos se cumplieron. El objetivo 5 no se relacionó directamente con la exploración de las concepciones, más bien consistió en la realización de una planeación sobre algún tema matemático específico que quisieran desarrollar como un proyecto de estructuración.

Al inicio del seminario se presentó a los docentes el plan de trabajo, se les mencionó que las discusiones tornarían en función de sus reflexiones sobre la práctica docente y se les indicó la metodología de trabajo. Los ocho profesores aceptaron la colaboración como parte de la investigación.

3.3 Recolección de datos

Para el proceso de exploración y reflexión de la práctica docente se diseñaron 6 actividades considerando las dimensiones de la práctica docente, y que hicieran reflexionar a los docentes sobre su propia práctica. Este proceso se realizó en 16 sesiones, una sesión por semana, un semestre del seminario. Al inicio, en la sesión 1, luego de mostrar la planeación general del seminario, se realizó una dinámica para que los docentes opinaran sobre la situación educativa en particular del estado de Guerrero y de su lugar de adscripción y en general del país, México, generando una discusión de la insatisfacción que tienen de tal situación educativa. Luego de la reflexión se identificaron varias problemáticas, entre ellas la formación continua, que por ejemplo a nivel maestría es un mérito propio de los docentes, pero que debiera ser atendido normativamente a nivel nacional, estatal y regional para que impacte en su propia práctica. Otra problemática que salió en la discusión es la relativa a su identidad como docentes de matemáticas, pues al ser docentes de matemáticas, se les relega la etiqueta de diferentes (tanto para bien como para mal), por ejemplo, son personas inteligentes y/o son personas raras.

Las actividades se organizaron por fases (ver Tabla 1.3).

Tabla 1.3 Diseño de actividades

No. Sesiones	Fase	Actividades
7	**Fase 1.** Reflexiones sobre la práctica docente. Tuvo como objetivo que los docentes reflexionarán sobre el valor de su práctica individual. Se acentuó el trabajo sobre las dimensiones personal, institucional, interpersonal y didáctica, por lo que las actividades se dirigieron hacia las relaciones de su compromiso, responsabilidad, situaciones desfavorables y favorables de su labor como docentes, y reflexionar sobre situaciones que quisieran cambiar o mejorar.	Actividad 1. La reflexión por medio de la narrativa. Se les pidió que realizaran un ensayo en el cual expresaran de forma individual sus reflexiones sobre la práctica docente individual y que se describieran como docentes. Se les pidió que pensaran en todo lo que consideraran relacionado en cuanto a su quehacer como docentes de matemáticas.
		Actividad 2. ¡A realizar un cartel! Se les pidió diseñar un cartel en forma colectiva que reflejara los altos y bajos de su práctica docente en general. Se solicitó papel celofán claro y obscuro (de diferentes tonos) como material principal del cartel, y que con los colores claros expresaran los altos de la actividad como docente y con los obscuros los bajos.
		Actividad 3. Relaciones del profesor en su práctica docente. Se les pidió que de forma individual realizaran un escrito donde reflexionaran sobre las relaciones y vínculos que se generan de su quehacer como educadores.
5	**Fase 2.** Detección de problemáticas. El objetivo de esta fase fue detectar problemáticas que se desearían cambiar o transformar. Para ello se cuestionó sobre los aspectos de la fase anterior, haciendo énfasis en causas y consecuencias. Se consideraron todas las dimensiones en juego.	Actividad 4. Modelando al profesor en mi país. La actividad consistió en realizar con plastilina un modelo del profesor actual en México. La actividad se realizó con los ojos cerrados, de tal forma que esto motivara la imaginación y creatividad de los profesores. Luego, explicaron cada detalle de su obra plástica.
		Actividad 5. ¡Soy profesor en México! Se les pidió realizar un escrito sobre su situación actual como profesores mexicanos, con todo lo que conlleva ser mexicano, y qué situaciones de sus funciones como docentes les gustaría cambiar. El objetivo fue describir y analizar la situación que actualmente vive el profesor, en función de nuestro país.
3	**Fase 3.** Concepción de práctica docente. El objetivo de esta fase fue que generalizaran su concepción de práctica docente, se propuso al final pues se pensó en que tomaran en cuenta las actividades anteriores.	Actividad 6. ¿Qué es la práctica docente? Se les pidió que hicieran un escrito en donde describieran qué significa para ellos el concepto de *práctica docente*.

Fuente: Elaboración propia.

4 Análisis de datos y resultados

Con base en la definición que adoptamos de concepciones sobre la práctica docente, el análisis de datos consistió en identificar, en las respuestas de los profesores, categorías que dieran cuenta de las creencias, significados, y preferencias de los participantes acerca de su labor docente. El análisis presentado corresponde a las actividades 2, 3 y 6, debido a que fueron las que arrojaron más información sobre las concepciones.

Se observó una concepción global de la práctica docente que está presente en los dos grupos de concepciones identificadas. Los participantes conciben a la práctica docente como una actividad interpersonal que implica relaciones entre alumnos, profesores, administrativos y conocimientos. Este tipo de relación se encuentra presente en el proceso enseñanza-aprendizaje que dirige el profesor de matemáticas. Ver Figura 1.1.

Figura 1.1 Concepciones sobre la práctica docente

Concepción global:

La práctica docente es interpersonal

Concepciones del proceso enseñanza-aprendizaje

a) El proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática debe ser evaluado

b) El proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática debe ser informado

c) El proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática necesita ser colectivo

Concepciones de la actividad didáctica

a) El profesor es transmisor del conocimiento

b) El profesor realiza actividades no centradas en el conocimiento

c) El profesor reconoce variables afectivas

Fuente: Elaboración propia.

Enseguida se detalla cada una de las concepciones señaladas en la Figura 1.

Concepción Primaria (o global): La práctica docente es interpersonal

La práctica docente desde la dimensión interpersonal, es la concepción global de los docentes, pues se reconocen como trabajadores de una institución donde desarrollan relaciones con el conocimiento, alumnos, maestros, directores, madres y padres de familia, además emergen reflexiones contrastando a las otras dimensiones, personal, institucional, social, didáctica y valoral.

El cartel de la Figura 1.2 da evidencia gráfica de esta concepción interpersonal.

Figura 1.2 Dimensión interpersonal

Fuente: Producciones de los docentes

En la elaboración del cartel (actividad 2) se les pidió reflejar los altos (colores amarillo, anaranjado) y bajos (colores rojo, azul marino y verde obscuro) de la práctica docente en general, de acuerdo con sus experiencias como profesores, como se observa en la figura anterior, hicieron uso de los colores solicitados.

Para conocer el uso que les dieron y las razones de éstas, se les pidió que las informaran por dos vías, oralmente y en un escrito. Enseguida se rescataron algunos extractos tanto de la exposición oral como de la escrita para evidenciar la concepción interpersonal que manifiestan de la práctica docente.

Los profesores narran la dimensión interpersonal en una estructura jerárquica, empezando por el objetivo fundamental de la Educación básica, hasta el conocimiento a enseñar (profesor 1 y 4). Los colores claros los usan en un sentido positivo, por ejemplo la figura del sol que identifican con el detonante de su labor educativa (profesor 1), o cuando señalan que tener en sus manos la enseñanza de los alumnos es una motivación para su labor docente (profesor 3). Los colores oscuros los usan para expresar sus disgustos de la labor docente, por ejemplo hacia los profesores que no realizan su labor cabalmente como excusa del mal salario que perciben y hacia los padres que piensan que los profesores son los únicos responsables de la educación de los estudiantes (profesor 4).

Profesor 1: La figura que asemeja a un sol y que se encuentra atrás del triángulo y que tiene los colores amarillo y anaranjado (colores claros), nos representa el objetivo fundamental de la Educación Básica.

Profesor 2: El triángulo representa la parte administrativa del sistema educativo, las personas que administran los recursos humanos, económicos, materiales, los que prestan servicios de trámites a profesores que se encuentran frente a grupo, a los gestores, organizadores y ponentes de los cursos de formación…la figura está en azul obscuro porque para nosotros es una gran trampa, es el cuello de botella en donde se estancan los recursos que están destinados a los centros educativos.

Profesor 3: Las figuras humanas debajo del triángulo, representan a los profesores, a los estudiantes, a los padres de familia, y están colocados como pilares porque para nosotros ellos son los pilares de la educación. Están de color claro porque saber que tenemos en nuestras manos la educación de toda una ciudad nos motiva….

Profesor 4: La figura humana con colores obscuros y sin brazos, representa a aquellos profesores y padres que muestran indiferencia en la educación, representa a aquellos profesores que medio hacen las cosas porque medio les pagan y porque tienen la consigna de que no serán acreedores de un monumento y representa a aquellos padres que piensan que sólo los profesores tienen la obligación de educar a sus hijos. Finalmente, la plataforma en la cual descansan los pilares, cuya forma es la de unos libros con color amarillo, representa el conocimiento que debemos transmitir.

Concepciones del proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática

En la **actividad 3**, se les pidió a los profesores que elaboraran un escrito de forma individual, en el que reflexionaran sobre las relaciones y vinculaciones que se generan de su quehacer como educadores, las producciones de los profesores en esta actividad nos permiten identificar 3 tipos de concepciones relacionadas con el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para los docentes, la práctica docente no significa sólo la actividad de planificar, ejecutar y evaluar el conocimiento, sino que incluye el resto de actividades que son consecuencia de las relaciones que genera el profesor con su medio educativo. En este grupo de concepciones sigue prevaleciendo la concepción de práctica docente en la dimensión interpersonal. Enseguida, se muestra cada una de las concepciones identificadas.

a) El proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática debe ser evaluado

Los profesores consideran que se debe evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje para conocer sus avances y retrocesos, argumentan que esta evaluación debe ser periódica y que los instrumentos de evaluación pueden ser la dosificación de contenidos, planeaciones y evaluaciones. Resaltan que esta evaluación debe ser presentada a los directivos y al personal administrativo. Encontramos nuevamente la dimensión interpersonal de la práctica docente.

b) El proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática debe ser informado a los padres

En relación con la concepción de evaluación, los docentes consideran que ésta debe ser informada a los padres de familia en reuniones constantes, la finalidad de este informe es dar a conocer a los padres el desempeño de sus hijos. En esta comunicación los agentes responsables son los padres y los profesores.

c) El proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática necesita ser colectivo

En los escritos predomina la concepción de que el profesor debe estar en continua actualización y dominio del conocimiento que enseña, ya que él debe ser capaz de desentrañar los secretos más profundos del conocimiento que pretende enseñar, y de poder transmitirlos. Señalan que este proceso debe ser colectivo, junto a sus pares, en reuniones de academia o de pares académicos. Dentro de ésta, la concepción global sigue estando presente.

Concepciones de la actividad didáctica del profesor de matemáticas

A diferencia de las actividades 2 y 3, en la **actividad 6**, se les pidió explícitamente la definición de práctica docente. En sus respuestas, los docentes conciben la práctica docente como *el conjunto de actividades que realizan* con los estudiantes, los directivos, los profesores y los padres de familia (profesores 5 y 6). Y como *la interacción entre profesor, estudiantes y conocimientos* (profesoras 7 y 8), en ellas la concepción interpersonal también se manifiesta. Ambas concepciones se han agrupado en una misma categoría ya que hacen referencia a la actividad didáctica del profesor de matemáticas, sin embargo dentro de ellas hemos identificado el significado que para ellos tiene su labor didáctica, enseguida las explicamos.

a) El profesor es transmisor del conocimiento

Identificamos casos en los que los profesores se conciben así mismos como transmisores del conocimiento, como puede leerse en la evidencia de la actividad 2 y 6.

Profesora 7: [Práctica docente es…] la interacción del profesor dentro del aula para poder comunicar y transmitir conocimientos, esta interacción se realiza con los alumnos y con el conocimiento a comunicar (actividad 6).

Profesor 4: …Finalmente, la plataforma en la cual descansan los pilares, cuya forma es la de unos libros con color amarillo, representa el conocimiento que debemos transmitir (actividad 2).

b) El profesor realiza actividades no centradas en el conocimiento

El profesor reconoce que además de realizar actividades con sus estudiantes, como la transmisión del conocimiento, su labor consiste también en realizar otro tipo de actividades con sus pares, con los directivos y con los padres de familia.

Profesor 6: [Práctica docente es…] el conjunto de actividades que ejercemos en nuestra profesión, por ejemplo, comprenden los temas, planear las clases, elaborar el material requerido, conseguir el equipo que se necesite para la clase, dar la clase, calificar, elaborar exámenes, diseñar clases, asistir a reuniones fuera y dentro de la institución; organizar, asistir y participar en eventos académicos, culturales y deportivos; realizar las actividades de comisiones específicas, elaborar informes de inicio, medio y fin de curso; etc., donde cada una de estas actividades engendran otras actividades más específicas, todas estas relacionadas entre sí de una u otra manera (actividad 6).

Profesor 5: [Práctica docente es…] el ejercicio continuo que permite a un profesor enseñar. Cuando hablamos de nuestra práctica docente, ¿realmente alcanzamos a comprender todo lo que abarca esa frase? Yo digo que sí y a mi parecer no sólo lo sabemos sino que también lo hacemos; los profesores que estamos frente a uno o varios grupos, y digo uno o varios porque eso depende del nivel educativo (eso debería ser por norma); sabemos que nuestra práctica docente no sólo es la actividad dentro del grupo, sino también dentro de la institución y fuera de ella (actividad 6).

c) El profesor reconoce variables afectivas

En algunos casos, identificamos que el profesor reconoce que las variables afectivas son de importancia en su labor, lo que da cuenta también de la concepción interpersonal de la práctica docente. La profesora 8 señala que además de lo cognitivo, por ejemplo los conocimientos, lo afectivo influye en su práctica docente. En el caso del profesor 3, hace explícito lo afectivo como consecuencia del aprendizaje de sus estudiantes, producto de lo que él ha enseñado.

Profesora 8: [Práctica docente es…] la relación entre estudiantes y profesores, no sólo se basa en lo cognitivo, sino también en lo afectivo y social (actividad 6).

Profesor 3:… ver que nuestros alumnos hacen uso de lo que les enseñamos es lo que nos produce alegría y una enorme satisfacción por lo que hacemos (actividad 2).

Los resultados antes mostrados dejan ver los agentes que delimitan la práctica docente de los profesores participantes en el estudio, éstos son, ellos mismos, sus estudiantes, sus directivos, sus compañeros de trabajo, y los padres de sus estudiantes. Así mismo pudimos percatarnos de la influencia de dichos agentes en la práctica docente, ya que ésta fue concebida como interpersonal.

5 Conclusiones

Desde la investigación en Matemática Educativa, hay dos caminos para estudiar los factores afectivos de los profesores, como las creencias, concepciones o actitudes. El primero es la medición, desde el método cuantitativo, mediante el uso de escalas; el segundo, es la caracterización, desde el método cualitativo, aquí prevalecen instrumentos como las observaciones de clase, la entrevista, los cuestionarios, las narrativas y el recuerdo estimulado (Lester, 2002; Skott, 2015).

En este trabajo, mediante la investigación-acción propusimos actividades centradas en la narrativa para acceder a las concepciones de profesores de matemáticas acerca de su práctica docente, entre ellas la actividad del cartel resultó favorable, pues mediante su elaboración los profesores tuvieron una vía alternativa a la narrativa para manifestar las concepciones sobre su práctica, consideramos que esta actividad podría ser aplicada en otros trabajos al estudiar factores subjetivos como se ha hecho aquí.

El proceso de investigación-acción al permitir una dinámica abierta en los ciclos de reflexión, sirvió para profundizar de forma directa en las concepciones de los profesores desde su identidad como docentes. Se pudo observar que la concepción global se relaciona con todas las demás dimensiones señaladas por Fierro, Fortoul y Rosas (2012), pues se concibe que la práctica docente ocurre dentro y fuera de la escuela y las relaciones son siempre complejas, pues se construyen sobre la base de las diferencias que no solamente atañen a la edad, el sexo o la escolaridad, sino también a cuestiones menos evidentes a primera vista como la diversidad de metas, los intereses, la ideología frente a la enseñanza, las preferencias políticas, entre otras.

En relación a los resultados obtenidos, se identificó una concepción predominante: la concepción global *La práctica docente es interpersonal*; y se identificaron dos concepciones más, concepciones del proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática y concepciones de la actividad didáctica del profesor de matemáticas.

Respecto de las concepciones del proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática, los profesores reconocen que este es colectivo, lo que significa que están presentes diferentes agentes, el profesor, el estudiante, el conocimiento matemático, sus pares académicos, los directivos y los padres de familia; además reconocen que dicho proceso debe ser evaluado para conocer sus avances y retrocesos, y resaltan la importancia de dar a conocer estos resultados a los padres de familia para que sean conscientes del desempeño escolar de sus hijos.

Al hablar de su actividad didáctica, los profesores se reconocen como trasmisores de conocimiento, sin embargo señalan que este no es su único fin, pues su labor también requiere de otro tipo de actividades no centradas en el conocimiento matemático, por ejemplo, asistir a reuniones fuera y dentro de la institución; organizar, asistir y participar en eventos académicos, culturales y deportivos; realizar las actividades de comisiones específicas, entre otras. Son conscientes además de la variable afectiva en la relación interpersonal con sus estudiantes, lo que se corresponde con la investigación sobre afecto y matemáticas, se ha dicho que las emociones que los profesores experimentan en el aula de matemáticas se desencadenan en función de los logros de los estudiantes, por ejemplo, entender los temas, resolver problemas o acreditar exámenes (García y Martínez, 2018).

Respecto de los resultados, podemos argumentar que en las concepciones de los profesores sobre su práctica docente, la matemática no cobra una presencia relevante como cuerpo de conocimiento, sino que aparece en el mismo nivel de importancia que el resto de agentes que influyen en ella, como los estudiantes, padres de familia, directivos, creemos que estos resultados pueden estar influenciados por el tipo de instrumentos utilizados, que no particularizan en la actividad matemática, por ejemplo la resolución de problemas, sin embargo los resultados representan un acercamiento al entendimiento de la labor que realiza este colectivo.

Consideramos que bajo la categoría de concepción global de la práctica docente interpersonal se deben crear los mecanismos para ayudar a los docentes a conocer su propia práctica en cada una de las dimensiones personal, institucional, dimensión interpersonal, social, didáctica y valoral. A fin de fortalecer su identidad como entes que impactan de manera directa no sólo en la educación en lo que se refiere a matemáticas, sino en la educación de manera general. En el proceso de formación y actualización docente se debe considerar que sus concepciones sobre la práctica docente pueden influir sus comportamientos en el aula, por lo que si se concibe ésta de forma más general en todas las dimensiones la práctica docente tendría un impacto objetivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
Sin embargo, para poder determinar estos mecanismos de concientización de las dimensiones de la práctica docente son necesarias investigaciones futuras que analicen el impacto de cada una de las dimensiones en la práctica docente, con el fin de que se aporte información valiosa sobre cómo mejorar dicha práctica en un sentido transversal y relacional como docente.

6 Referencias

Borg, S. (2018). Teachers' beliefs and classroom practices. In P. Garrett & J. M. Cots (Eds.), The Routledge handbook of language awareness (pp. 75-91). London: Routledge.

Brown, G. (2003). Teachers' conceptions of assessment. Auckland: University of Auckland.

Buehl, M.M. & Beck, J.S. (2014). The relationship between teachers 'beliefs and teachers 'practice. In H. Fives & M.G. Gill (eds.) International handbook of research on teachers 'beliefs. (pp. 66-84). London: Routledge.

Buendía, L., Carmona, M., González, D. y López, R. (1999). Educación XX1: Revista de la Facultad de Educación, 2, 125–154

Clark, C. M., & Peterson, P. L. (1986). Teachers' thought processes. In M. C. Wittrock (Ed.), Handbook of research on teaching (3rd ed., pp. 255–296). New York: Macmillan.

Cohen, L. y Manion, L. (2002). Métodos de investigación educativa. España: La Muralla.

Dolores, C. y García, J. (2016). Concepciones de Profesores de Matemáticas sobre la Evaluación y las Competencias. Números 92, 71-92.

Nemser, S. (1990). Teacher preparation: structural and conceptual alternatives. In R. Houston (ed.), Handbook of research on Teacher Education (212-223), Nueva York: Macmillan.

Fierro, C., Fortoul, B y Rosas, L. (2012), Transformando la práctica docente. Una propuesta basada en la investigación-acción, México, Paidós.

Goodenough, W. H. (1990). Evolution of the human capacity for beliefs. American Anthropologist, 93, 597-612.

García, M. y Martínez, G. (2018). Un estudio exploratorio sobre las emociones de profesores de matemáticas. En C. Dolores Flores, G. Martínez Sierra, M. S. García González, J. A. Juárez López, J. C. Ramírez Cruz. (Eds.), Investigaciones en dominio afectivo en matemática educativa (pp. 283-299). México: Ediciones Eón y Universidad Autónoma de Guerrero.

Kline, M. (1999). El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar? España: Ed. Siglo XXI.

Lester, F. K. (2002). Implications for research on students' beliefs for classroom practice. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), Beliefs: A hidden variable in mathematics education? (pp. 345 – 353). Dordrecht: Kluwer.

Lewin, K. (1946). Action research and minority problems. Journal of Social 2(4), 34-46.

Lieberman, A. & Miller, L. (2014). Teachers as professionals: Evolving definitions of staff development. In L.E. Martin, S. Kragler, D.J. Quatroche & K.L. Bauserman (eds.) Handbook of professional development in education: Successful models and practice, pre-12. (pp. 3-21). New York: The Guildford Press.

Nespor, J. (1987). The role of beliefs in the practice of teaching. Journal of Curriculum Studies, 19, 317–328

Remesal, A. (2006). Los problemas en la evaluación del aprendizaje matemático en la educación obligatoria: perspectiva de profesores y alumnos. Unpublished doctoral thesis. Universidad de Barcelona.

Remesal, A. (2009). Spanish student teachers' conceptions of assessment when starting their career. Symposium: Perceptions and conceptions of assessment in the classroom: Different national perspectives. 13th Conference of the European Association for Research in Learning and Instruction, Amsterdam, Holland.

Skott, J. (2015b). Towards a Participatory Approach to "Beliefs" in Mathematics Education. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Eds.), From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education (pp. 3–23). http://doi.org/10.1007/978-3-319-06808-4

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, 127–146. MacMillan: New York.

El potencial de un ambiente de aprendizaje integrador en Educación Básica

The potential of an inclusive learning environment in Basic Education

ALVARADO-MONROY, Angelina†*, OLVERA-MARTÍNEZ, María del Carmen y MORENO-SANDOVAL, Selene

ID 1[er] Autor: *Angelina, Alvarado-Monroy* / **ORC ID:** 0000-0001-6063-1822, **Researcher ID Thomson:** V-1964-2018, **CVU CONACYT ID:** 83588

ID 1[er] Coautor: *María del Carmen, Olvera-Martínez* / **ORC ID:** 0000-0001-7361-1687, **Researcher ID Thomson:** U-9456-2018, **CVU CONACYT ID:** 230198

ID 2[do] Coautor: *Selene, Moreno-Sandoval* / **ORC ID:** 0000-0002-7175-3425, **Researcher ID Thomson:** V-2114-2018, **CVU CONACYT ID:** 928398

Universidad Juárez del Estado de Durango

A. Alvarado, M. Olvera, S. Moreno

aalvarado@ujed.mx

A. López, C. Lima, J. Reyes (Dirs.) Educación para todos. Tópicos Selectos de Educación en CITeM. ©ECORFAN-México, 2018.

Abstract

The observation of patterns and behavior of phenomena or objects, variation, estimation and prediction are fundamental ideas in science, technology, engineering and mathematics (STEM). In this paper, we present the design and evaluation of a learning environment in which participants are immersed in the construction of knowledge that arises from the exploration and monitoring of the behavior and flight trajectory of different airplanes made by them, through the folding paper. The characteristics and behavior of the paper airplanes are used to predict or estimate future scenarios (which is more convenient to win a competition of best: distance, speed, flight time, etc.). As well as, to characterize the types of aircraft. The main interest of this study is to document, using the results of the implementation with teachers and students of different educational levels, to what extent this environment promotes a social and emotional learning (World Economic Forum, 2016) and the development of competences and qualities to face challenges or tasks related to STEM.

Integrating STEM in Education, Estimation, Inquiry Practices

1 Introducción

Durante los últimos años, en educación, la conversación se ha dirigido hacia la importancia de la necesidad de apoyar una visión que ponga énfasis en que los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática se den en contextos integrados de ciencia, ingeniería y tecnología, es decir, una visión integradora e interdisciplinaria de la educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (CITeM) para un aprendizaje a lo largo de la vida. Lo anterior, requiere de una aproximación al aprendizaje que elimine las barreras tradicionales que separan estas disciplinas y las integre en el mundo real, a través de experiencias de aprendizaje que sean relevantes para los estudiantes (Vásquez, Sneider, & Comer, 2013).

En este sentido, se considera que la enseñanza debe enfatizar el análisis y la reflexión de un conjunto de ideas fundamentales que faciliten el surgimiento de estructura matemática o científica, la construcción de hipótesis, la observación de patrones, la interpretación y predicción del comportamiento de fenómenos u objetos.

Para ello, es importante el diseño de ambientes de aprendizaje que ofrezcan oportunidades para que los estudiantes construyan, organicen, revisen y profundicen en el conocimiento emergente. En tales diseños, la exploración e indagación son parte fundamental del aprendizaje ya que son el mecanismo mediante el cual se genera el conocimiento científico.

A nivel internacional se ha visualizado la importancia de una educación en CITeM para cubrir con las demandas de formación de individuos de este siglo. El American Institute for Research (AIR, 2016) plantea una visión de educación en CITeM para el año 2026 que incluya, entre otras componentes: 1) ambientes de aprendizaje que inviten de manera intencional al juego y al riesgo; 2) experiencias educativas con acercamientos interdisciplinarios para proveer desafíos apropiados para los estudiantes; 3) espacios de aprendizaje flexibles e inclusivos; y, 4) ejemplos de ambientes de aprendizaje que fomenten la autoconciencia cultural y social y que promuevan la diversidad y las oportunidades de una educación integradora en CITeM.

El doblado de papel u origami es una técnica japonesa que puede ser utilizada como estrategia didáctica para construir conocimiento en contextos integrados de CITeM. En Lang (2011) y en Wang-Iverson, Lang y Yim (2011), se pueden encontrar una serie de actividades de origami, en las cuales, surgen métodos matemáticos y patrones diversos que pueden aprovecharse para encontrar vínculos con otras disciplinas como la física o la ingeniería.

Lang, ha sido capaz de proponer patrones de geometría cilíndrica que pueden encajar en un cohete, también desarrolló una bolsa de aire para auto que durante un choque se infla desde un pequeño paquete que está cuidadosamente doblado. Para él, cada vez que un ingeniero crea algo que se abre o se cierra de una manera controlada es una oportunidad para hacer uso de los patrones de doblaje de origami (Great Big Story, 2017). En este trabajo, se ha utilizado el doblado de papel para construir diferentes modelos de aviones y estudiar su comportamiento.

Por otra parte, uno de los procedimientos que se encuentra implícito dentro de los ambientes de aprendizaje en contextos de CITeM y que permite preveer o evaluar la solución de los problemas que se presentan es: la estimación. Proceso que se usa frecuentemente para proporcionar una respuesta aproximada a un problema. No obstante, se debe considerar que las situaciones presentadas en el aula para favorecer la estimación deben tener sentido para los estudiantes, esto es, la respuesta adecuada no debe ser la exacta sino sólo un valor aproximado (Mochón & Vázquez, 1995). Lemonidis (2016), presenta una amplia investigación de las habilidades que pueden desarrollarse a partir del proceso de estimación, principalmente, para su aplicación práctica y para profundizar en la comprensión de los conceptos a través de su representación e interpretación.

La estimación es un proceso que, en las últimas décadas, ha sido descuidado en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica en México. Sin embargo, a nivel internacional se ha sugerido integrarla en la educación básica y restar el énfasis en el aprendizaje algorítmico. En el caso de México, desde 2017, se promovió el Sistema de Alerta Temprana (SisAT) como un conjunto de indicadores, herramientas y procedimientos sistemáticos, para detectar y atender a tiempo a los alumnos que estén en riesgo de no alcanzar los aprendizajes esperados o de abandonar la escuela (Secretaría de Educación Pública, 2017b).

Dentro de los indicadores del SisAT, se encuentra el cálculo mental. En el cual los resultados obtenidos de la aplicación de las herramientas de toma de datos, en el estado de Durango, México, no fueron del todo favorables. Por tal motivo, en la Secretaría de Educación del Estado de Durango, a través del programa de Fortalecimiento a la Calidad Educativa, se enfocaron en emprender acciones que ayudaran a las instituciones de educación básica a mejorar su desempeño en cálculo mental y estimación, procesos que están estrechamente vinculados, más aún, la estimación involucra el cálculo mental pero además requiere de un conocimiento del concepto o atributo en juego. Dentro de estas acciones se encuentra la capacitación de profesores de nivel preescolar, primaria y secundaria sobre el diseño e implementación de ambientes de aprendizaje que favorezcan estos procesos y la posterior implementación por parte de dichos profesores en sus respectivos grupos.

En el presente trabajo, se dan a conocer algunos de los resultados obtenidos durante la fase de capacitación de dichos profesores y la fase de implementación en los grupos con sus estudiantes. Específicamente, se presenta un ambiente de aprendizaje que favorece la estimación dentro de una visión integradora e interdisciplinaria al conjuntar distintas disciplinas como son la matemática, la ingeniería y la física, dentro del contexto de aviones y trayectos, además, de los pasos del método científico. Así, el objetivo de este trabajo es proponer y evaluar el funcionamiento (con profesores y estudiantes de educación básica) de un ambiente de aprendizaje que integre conocimientos de diferentes disciplinas y sea:

a) Flexible, en el sentido de que puede ser adaptado a diferentes niveles educativos de acuerdo a los aspectos que el profesor pretende enfatizar y al nivel de profundidad deseado en el análisis de las variables involucradas. Esto es posible, si la actividad se enriquece con la diversidad de respuestas correctas y la existencia de un espacio en el cual se pueda participar de formas distintas para lograr los objetivos dirigidos al desarrollo de habilidades y competencias de los estudiantes.

b) Inclusivo, en el sentido de lograr que un mayor número de estudiantes se involucren en el desarrollo de las tareas. También, se pretende hacer accesible el conocimiento a los estudiantes (Slough & Milam, 2013). Para ello, se promueve de manera intencional el juego (competencias de vuelo de aviones), desde un acercamiento interdisciplinario, a través de tareas con demanda mínima de conocimientos previos (doblado de papel).

c) Estructurado socialmente, a través del trabajo colaborativo, de ayudarlos a aprender de otros (Slough & Milam, 2013) y de discusiones reguladas para favorecer la toma de decisiones grupales.

Para evaluar la pertinencia del ambiente de aprendizaje nos interesa investigar en qué medida promueve un aprendizaje social y emocional para individuos de este siglo, de acuerdo a las competencias y habilidades del carácter propuestas en WEF (2016) y adaptadas en la Tabla 2.1 de la siguiente sección.

2 Marco Conceptual

En la enseñanza tradicional el profesor utiliza un método expositivo considerando, falsamente, que el conocimiento ocurre por transmisión. Una alternativa a este tipo de enseñanza son los ambientes de aprendizaje centrados en el pensamiento del estudiante (AA), en contraste con el método expositivo, aún tan utilizado en el contexto escolar, en los AA se asume que el conocimiento debe ser construido por los estudiantes. La Secretaría de Educación Pública (2017a) menciona que los procesos cognitivos necesarios para que el aprendizaje ocurra están estrechamente vinculados a los ambientes que los propician.

En este sentido, los AA se conciben como «un conjunto de factores que favorecen o dificultan la interacción social en un espacio físico o virtual determinado. Implican un espacio y un tiempo, donde los participantes construyen conocimientos y desarrollan habilidades, actitudes y valores» (p. 82). Así, un AA es un espacio complejo en el que los estudiantes interactúan, bajo condiciones y circunstancias físicas, humanas, sociales y culturales propicias, para generar experiencias de aprendizaje significativo y con sentido. Dichas experiencias son el resultado de «actividades interactivas y complementarias que permiten a los individuos abordar necesidades e intereses de aprendizaje únicos, estudiar múltiples niveles de complejidad y profundizar en la comprensión» (Hannafing & Land, 1997, p. 168; citados en Land, Hannafing, y Oliver, 2012).

En los AA, los métodos y estrategias utilizados por los estudiantes varían en función de los objetivos y contextos en los cuales son aplicados, tales prácticas privilegian la evaluación formativa de los estudiantes. Según Land, Hannafing, y Oliver (2012), los AA comprenden cuatro componentes básicos:

- Contextos: representan la naturaleza de los problemas o tareas que guían y orientan a los estudiantes para el aprendizaje.

- Herramientas: ofrecen apoyo basado en tecnologías (digitales y/o materiales concretos de bajo costo y fácil acceso) para representar, organizar, manipular, comunicar conocimiento y construir comprensión.

- Recursos: representan fuentes de información y contenido, ya sean de información estática, o bien, de recursos dinámicos.

- Andamios: son mecanismos de apoyo diseñados para ayudar al individuo en sus esfuerzos para entender procedimientos, estrategias, conceptos y sobre cómo reflexionar, planear, monitorear, etc.

El conocimiento no se genera de manera aislada o fragmentada, de tal manera que, en la concepción de los AA propuestos a los estudiantes, se considera un enfoque interdisciplinario. En Bybee (2013) se pueden encontrar diferentes visiones de educación en CITeM, en este trabajo se ha adoptado una visión integrada, en la cual las prácticas educativas integradoras son reconocidas por propiciar AA en los cuales aparecen combinadas dos o más disciplinas de CITeM (e.g. diseñar una clase en la cual la matemática, la física y la ingeniería sean igual de relevantes).

En el Foro Económico Mundial (WEF, 2016) se identifica que las competencias mediante las cuales los estudiantes se aproximan a desafíos complejos relacionados con CITeM y que son necesarias para formar individuos del siglo XXI en aprendizaje social y emocional son: el pensamiento crítico y resolución de problemas, el trabajo colaborativo, la creatividad y la comunicación. También, se plantean la importancia de desarrollar cualidades en el carácter que les permitan aproximarse a un entorno cambiante: curiosidad, iniciativa, persistencia, adaptabilidad, liderazgo y conciencia social y cultural.

Para el desarrollo de tales competencias y cualidades, sugieren estrategias generales y específicas para cada competencia, al igual que proponen estrategias específicas para el desarrollo de las diferentes cualidades del carácter. Tales estrategias (Tabla 2.1) pueden ser una guía para el diseño y/o evaluación del funcionamiento de un AA enfocado en CITeM.

Tabla 2.1 Estrategias para el desarrollo de cualidades del carácter y competencias para un aprendizaje socioemocional en el siglo XXI

<table>
<tr><th colspan="2">Competencias y Cualidades del Carácter</th></tr>
<tr><td colspan="2">C1: Pensamiento crítico y resolución de problemas; C2: Trabajo colaborativo; C3: Creatividad; y, C4: Comunicación.
Q1: Curiosidad; Q2: Iniciativa; Q3: Persistencia; Q4: Adaptabilidad; Q5: Liderazgo; y, Q6: Conciencia social y cultural</td></tr>
<tr><th colspan="2">Estrategias generales</th></tr>
<tr><td>E1: Fomentar aprendizaje basado en el juego.
E2: Guiar a los estudiantes al descubrimiento de los tópicos emergentes.
E3: Ayudar a los estudiantes para que aprovechen su personalidad y fortalezas.
E4: Proveer desafíos apropiados.</td><td>E5: Utilizar un enfoque práctico.
E6: Tener objetivos claros dirigidos al desarrollo de habilidades y/o competencias explícitas.
E7: Fortalecer razonamiento reflexivo y análisis.
E8: Permitir tiempo para que los alumnos presten atención a la tarea.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Estrategias específicas por competencia</th></tr>
<tr><td>EC1: Proporcionar retroalimentación constructiva.
EC3: Ofrecer oportunidades para construir e innovar.</td><td>EC4: Crear un ambiente enriquecido por el lenguaje.
EC2: A) Fortalecer el respeto y tolerancia hacia los demás. B) Propiciar oportunidades para el trabajo en equipo.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Estrategias específicas para el desarrollo de cualidades del carácter</th></tr>
<tr><td>EQ1: A) Fomentar las preguntas o las prácticas de indagación. B) Proveer autonomía para tomar decisiones. C) Inculcar conocimiento suficiente para que se hagan preguntas y puedan innovar.
EQ2: A) Propiciar que se involucren en proyectos de largo plazo. B) Construir confianza en la capacidad de tener éxito. C) Propiciar autonomía para tomar decisiones.
EQ3: Crear oportunidades para el aprendizaje desde el error.</td><td>EQ4: A) Fortalecer la capacidad para procesar las emociones. B) Practicar tanto en flexibilidad como en estructura.
EQ5: A) Fortalecer la capacidad de negociar. B) Motivar la empatía.
EQ6: A) Fortalecer el respeto y tolerancia hacia los demás. B) Motivar la empatía. C)Fomentar la autoconciencia cultural.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia con información de WEF (2016)

Con base en estas ideas, en el presente trabajo, se muestra en qué medida el AA, 'Aviones y trayectorias', diseñado e implementado con profesores de educación básica y sus respectivos alumnos, promueve un aprendizaje social y el desarrollo de competencias y cualidades para enfrentar desafíos o tareas relacionados con CITeM.

3 Metodología

Para el presente estudio hemos seguido la metodología basada en el diseño (Lesh, 2002), la cual pretende analizar el aprendizaje en contexto, mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza. En esta metodología, se consideran importantes tanto el diseño de las secuencias didácticas como la investigación de su funcionamiento para crear diseños eficaces en la promoción del aprendizaje. Más aún, en este tipo de estudios se pretende explicar por qué el diseño didáctico funciona y es importante sugerir modos en que puede adaptarse a nuevas circunstancias (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003).

Además, pretenden documentar el proceso de aprendizaje a través de: los recursos, el conocimiento previo exhibido por los estudiantes en las tareas, la naturaleza de las interacciones en el aula, la evidencia escrita, la emergencia y evolución de las concepciones. De la misma manera que trata de documentar cómo se lleva a cabo el proceso de enseñanza mediante la observación y análisis de las evidencias del trabajo de los estudiantes.

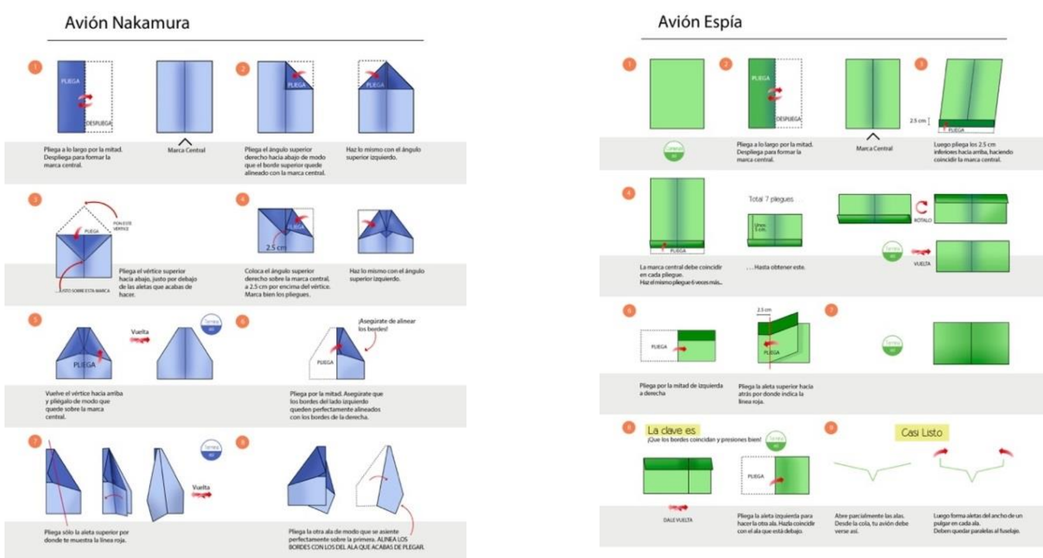
En estos estudios, el diseño es constantemente revisado a partir de la experiencia (Collins, Joseph, & Bielaczyc, 2004). El proceso de investigación se compone de ciclos continuos de diseño, implementación, análisis y rediseño. En esta metodología, durante la trayectoria de enseñanza y aprendizaje se elaboran conjeturas, que se prueban y se refinan con base en las evidencias que se van documentando en el transcurso de la investigación, recogiendo extensos registros sobre lo que alumnos, profesores e investigadores aprenden a lo largo del proceso (Design Based Research Collective, DBRC, 2003). Esta metodología ha mostrado su utilidad para investigar el desarrollo del conocimiento matemático en los estudiantes en ambientes de aprendizaje complejos.

Por lo anteriormente expuesto, para probar su funcionamiento y la capacidad de adaptación a diferentes circunstancias, en este trabajo se ha recolectado evidencia del funcionamiento del diseño del AA propuesto en diferentes escenarios con profesores de diferentes niveles de educación básica y sus estudiantes.

3.1 Diseño propuesto

El ambiente de aprendizaje que se presenta en este trabajo es ‘Aviones y trayectorias’ (Alvarado-Monroy, Mata-Romero, & Olvera-Martínez, 2018; Mata-Romero, Alvarado-Monroy, & Olvera-Martínez, 2018; Olvera-Martínez, Alvarado-Monroy, & Mata-Romero, 2018), el cual se diseñó con la intención de incorporar las estrategias mencionadas en el marco conceptual con la finalidad de desarrollar las competencias y cualidades del carácter propuestas en WEF (2016). El ambiente comienza con la construcción de aviones, mediante el doblado de papel. Se proporcionan las instrucciones para la elaboración de cuatro diferentes tipos: Nakamura, Espía, Profesional y Pteroplano[1], mismos que los estudiantes, organizados en equipos de tres, pueden seleccionar para su construcción (ver Figura 2.1).

Figura 2.1 Ejemplos de las guías de construcción de dos de los aviones propuestos



Fuente: Elaboración propia con información de diversas fuentes libres de internet

Una vez que cada equipo tiene al menos dos aviones diferentes, se plantean las siguientes preguntas guías para detonar la exploración y, posteriormente, la discusión: ¿Cuáles son sus mejores vuelos?, ¿cómo funcionan? Antes de experimentar los lanzamientos de los aviones, se les solicita a los estudiantes que dibujen la trayectoria o camino que ellos creen que va a describir cada uno de los aviones que construyeron, tomando en cuenta las características del tipo de avión y del tipo de lanzamiento (ascendente, descendente, vertical y horizontal), es decir, que estimen la trayectoria del avión. Enseguida, los aviones se prueban en el interior y exterior del aula, se experimentan las diferentes formas de lanzamiento, se observa el desempeño de cada modelo y se registran los datos obtenidos para determinar características de cada diseño: trayectorias seguidas de acuerdo al lanzamiento, mejor zona de vuelo, tiempo de vuelo, distancia recorrida, velocidad alcanzada; así como, para comparar con la trayectoria estimada. Finalmente, con todos estos datos se les pide a los estudiantes: sugerir la forma de pilotear cada avión para asegurar un mejor desempeño; reflexionar sobre qué pasaría si agregan una tira de papel insertada a una de las alas, o bien, en ambas alas; sugerir la mejor zona de vuelo de los dos diseños seleccionados de acuerdo con el espacio (interior/exterior) y que expliquen por qué lo creen así; aproximar la velocidad que alcanzan los aviones y que expliquen cómo lo hicieron. El conocimiento que puede emerger en este ambiente, está relacionado con: patrones de medida, fricción del aire, tipos de trayectorias, velocidad, distancia, tiempo, presión atmósferica, etc. Tanto las preguntas, como el conocimiento que puede generarse, es adaptado a cada uno de los niveles de educación básica: preescolar, primaria o secundaria.

Los recursos que incorporan, además de las hojas de papel para origami, los instructivos y las hojas de registro, son elegidos por los participantes (reloj, cronómetro, reglas, objetos para medir distancia, etc.) con base en las características y formas en que diseñaron su experimento.

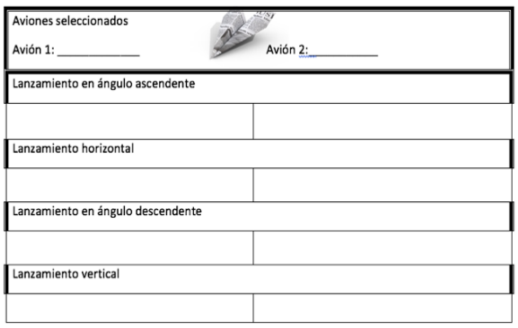
[1]Disponibles por los autores en https://face.ujed.mx/wp-content/uploads/2018/04/Pri_Sección-3.5-Aviones-y-trayectorias.pdf

Una vez que los estudiantes estimaron trayectorias, experimentaron lanzamientos de aviones de papel e identificaron relaciones físicas y matemáticas en el comportamiento de los aviones, se realiza una puesta en común para promover aprendizaje compartido. Se discuten, revisan y extienden todas las ideas generadas en los equipos. Se recomienda que la validación de las ideas o producciones realizadas en los equipos se apoye en la razón del argumento matemático aportado por los participantes, más que en la autoridad del profesor. Con base en la discusión, el profesor guía un cierre concentrando las ideas relevantes.

3.2 Participantes, recogida de datos e instrumentos

Para la concentración de evidencias del funcionamiento del AA se utilizó una hoja de registro de observaciones de los estudiantes al comparar el desempeño de los dos aviones elegidos (Figura 2.2). También se tomaron fotografías, se videograbaron las sesiones y se registraron algunas notas de campo de los observadores.

Figura 2.2 Hoja de registro de trayectorias con relación al tipo de lanzamiento



Aviones seleccionados

Avión 1: ___________ Avión 2: ___________

Lanzamiento en ángulo ascendente

Lanzamiento horizontal

Lanzamiento en ángulo descendente

Lanzamiento vertical

Fuente: Elaboración propia

Para desarrollar las competencias C2 y C4 (Tabla 2.1) es necesario ofrecer oportunidades para que los participantes se pongan de acuerdo sobre las ideas emergentes y decidan cómo comunicarlas. Debido a que la actividad demanda, más que una respuesta concreta de algún número, una explicación sobre las características de los aviones y la mejor forma de pilotearlos, se les pide a los participantes del AA que redacten una carta para los niños que aparecen como 'clientes potenciales' y así documentar tal respuesta.

Para registrar evidencia del pensamiento de los participantes la carta se les solicita en la tarea de la siguiente manera:

«Hiram, Emilio, Rocío, Felipe y Luna son niños que están interesados en realizar competencias de aviones de papel en su escuela. Anoten en una carta TODAS las recomendaciones que les puedan hacer acerca de la forma de pilotear los diferentes aviones. Podrían incluir en su carta información del tipo: *Los mejores vuelos se producen con lanzamientos fuertes (suaves) y hacia…. La zona recomendada para el avión…. La trayectoria que sigue…, alcanza una velocidad de… etc.»*

En este sentido, por ser una actividad que demanda un método o explicación más que una respuesta corta, que está presentada desde una situación real y pide documentar la respuesta a través de una carta, el AA tiene características en común con las Actividades Detonadoras de Modelos o Model Eliciting Activities propuestas por Lesh y Doerr (2003).

3.3 Detalles de la implementación

La implementación del ambiente de aprendizaje 'Aviones y trayectorias' se llevó a cabo en dos fases:

Fase 1. Taller de capacitación. Se impartió un taller de 20 horas para los profesores de cada una de las escuelas involucradas: preescolar, primaria y secundaria. En dicho taller se abordaron 15 ambientes de aprendizaje, entre ellos el de 'Aviones y trayectorias', de manera que los profesores se enfrentaran a la exploración de las actividades propuestas, identificaran las habilidades y contenidos matemáticos que se pueden rescatar en cada uno de los AA y también, pensaran en posibles adaptaciones con base en las características de sus grupos.

Fase 2. Implementación con estudiantes. Cada uno de los profesores escogió uno o dos de los AA abordados en el taller para implementarlo en su respectivo grupo, a los profesores que eligieron el AA reportado en este trabajo, se les dio seguimiento y acompañamiento en la implementación con la finalidad de recolectar evidencias para el análisis de su funcionamiento y proporcionar retroalimentación al profesor sobre su práctica. El profesor tenía la libertad de adaptar las actividades a su contexto y a las características de su grupo, pero conservando la esencia matemática subyacente en cada ambiente.

4 Resultados

Enseguida se presentan los resultados de la aplicación del AA organizados en tres secciones. En la primera, se abordan los resultados generales que fueron observados y se considera son producto del diseño más que del contexto y las circunstancias específicas del medio en el cual fue probado. En la sección 4.2, se presentan los resultados de la Fase 1 correspondiente a los talleres de profesores y en los cuales ellos participan realizando las tareas propuestas en el AA como si fueran estudiantes. Al final, se documentan los resultados obtenidos durante la Fase 2 relativa a la puesta en marcha del AA de los profesores con sus propios estudiantes. Para analizar los resultados y poder dar respuesta a la pregunta de investigación, se han identificado las estrategias utilizadas y se han escrito entre paréntesis y resaltado en negritas los códigos establecidos en la Tabla 2.1

4.1 Resultados Generales del Diseño

El AA se probó en diferentes escenarios (Figura 2.3), los participantes trabajaron en equipos de dos, tres o cuatro profesores o estudiantes (**EC2B; EC2A**) y se observó que el AA proporcionó oportunidades para que los participantes jugaran con los aviones (**E1**), al mismo tiempo que sus compañeros de equipo observaban el comportamiento de los mismos. Los participantes pudieron leer, interpretar, discutir ideas y argumentar tratando de convencer a sus compañeros (**E7; EC1**). Posteriormente, registraron el acuerdo por escrito en su hoja de trabajo (**E7; EQ5A; EQ5B**) y al final de cada tarea se realizó una puesta en común en gran grupo guiados por el profesor (**E6**).

Figura 2.3 Estudiantes y profesores participando en el AA de 'Aviones y trayectorias'

Fuente: Evidencias recolectadas del trabajo de estudiantes y profesores

4.2 Resultados de la Fase 1 de Capacitación de Profesores

Enseguida se presentan evidencias de las ideas fundamentales en CITeM que surgieron en las interacciones ocurridas en el proceso y se identifican estrategias para el desarrollo de competencias y cualidades del carácter (Tabla 2.1) en un grupo de profesores de secundaria, uno de preescolar y uno de primaria. Los resultados se presentan mediante la descripción del contexto, la transcripción de una interacción o una producción de los estudiantes y la descripción que se hace de los datos.

a) Resultados con el Grupo de Profesores de Secundaria

El taller se llevó a cabo en una secundaria del medio rural del estado de Durango. Es importante señalar que se contó con la asistencia de todos los profesores de la escuela sin importar la materia que impartían ya que, como proyecto escolar, en todas las clases se debían proponer actividades para el desarrollo del cálculo mental y la estimación. De esta manera, únicamente un profesor de los 15 participantes, impartía la materia de matemáticas.

Al monitorear el trabajo en un equipo de 4 profesores (Tabla 2.2). Se puede observar que el investigador les proporciona desafíos apropiados al equipo (**E4**) y fomenta prácticas de indagación (**EQ1**) para despertar la curiosidad de los profesores con el objetivo claro de (**E6**) de llevarlos a identificar las características y las variables que afectan el vuelo de los aviones seleccionados.

Tabla 2.2 Interacción de un investigador con un equipo de profesores de secundaria

Transcripción	Descripción
[1] Investigador: Con base en sus experimentos, ¿cuál es el que vuela mejor? [2] Profesora 1: El Espía y el Nakamura. [3] Profesor 2: El Nakamura es el más estable. [4] Profesor 3: para mí el de mejor vuelo es éste [avión Nakamura], pero el más rápido es el que hizo el profe [avión Profesional] porque está picudo. [5] Profesor 4: Pero es que aquí va a depender de los bordes y dónde se cargue el peso de la hoja, hay unos que tienen el peso más cargado adelante y otros atrás y eso afecta en cómo vuela.	En el fragmento se puede ver que los profesores comparan los vuelos de los aviones, identifican las características [3-4] y las variables que pueden afectar el vuelo [5]. Además, encuentran relevante la distribución del peso respecto a las características de los dobleces del papel.

Fuente: Elaboración propia con información de las producciones de los profesores

b) Resultados con el Grupo de Profesores de Preescolar

Se capacitaron a siete profesoras de educación preescolar de una escuela ubicada en la ciudad de Durango. Durante el taller, en uno de los equipos se seleccionaron los aviones Nakamura y el Pteroplano, se puede observar en la Tabla 2.3 que, motivados por el investigador (**E6; EQ1; EQ5**), se involucran en identificar características del avión y las asocian a su función. Sustentan la elección del avión que recorre mayor distancia (**E7**), construyen hipótesis sobre el mejor tipo de lanzamiento y la mejor zona de vuelo, experimentan para contrastarlas (**E1; E5**) y finalmente, hacen la elección del mejor avión (**EQ1-B**).

Tabla 2.3 Interacción de un investigador con un equipo de profesores de preescolar

<table>
<tr><th colspan="2">Transcripción</th></tr>
<tr><td>[6] Investigador: De lo que experimentaron, ¿cuál escogerían?
[7] Profesora 1: Pues depende de qué se quiera.
[8] Investigador: si queremos que el avión llegue lo más lejos posible, ¿cuál escogerían?
[9] Profesora 1: Pues el Nakamura.
[10] Investigador: Pero ahora, ¿cómo lo lanzamos? ¿hacia arriba? ¿horizontal? o ¿cómo?
[11] Profesora 1: De manera ascendente.
[12] Profesora 2: ¡No! ¿en cuál fue en el que se vino hasta acá?
[13] Profesora 3: En el horizontal.
[14] Profesora 2: ¡Ah, entonces ese!, de manera horizontal.</td><td>[15] Investigador: Ahora, ¿creen que ese comportamiento que se observó aquí adentro se conserve afuera?
[16] Profesora 2: ¡No! Yo digo que van a cambiar, se van a hacer más largas por el aire.
[17] Profesora 4: Pero, ¡si, ni está haciendo aire!
[18] Profesora 2: Pero, si está más fluido. Me refiero a que [el aire] fluye más [afuera] que aquí adentro.
[19] Investigador: Bueno, ahora hagan la estimación de las trayectorias de los aviones haciendo el experimento afuera.
[20] Profesora 4: No, pues puros espirales, con el aire van a dar vuelta.
[21] Profesora 2: No! Yo digo que sólo las va a alargar [las trayectorias].</td></tr>
<tr><th colspan="2">Descripción</th></tr>
<tr><td colspan="2">Del extracto de la interacción se puede observar que en [7] se da una acción de la profesora que da cuenta de que han identificado que las características de los aviones construidos determinan su función. Por ejemplo, algunos son para acrobacia, para vuelo tipo dardo y otros son planeadores. Como respuesta, el investigador los enfoca en elegir el avión que llegue lo más lejos posible [8]. En [9] eligen el Nakamura, el cual es planeador y además tipo dardo, atributos que hacen que sea el que se mantiene un mayor tiempo en el aire y alcanza mayor distancia que el Profesional y el Pteroplano.
En [10] el investigador los dirige hacia el tipo de lanzamiento del avión Nakamura. Así, en [11-14] ellos identifican que el mejor lanzamiento es el horizontal.
Otra cuestión de interés para el investigador, es que construyan hipótesis y experimenten para verificarlas. Así, en [15] los centra en ver si el comportamiento en los vuelos de los aviones es el mismo en interiores y exteriores. Como respuesta en [16-21] construyen sus hipótesis. Después de hacer el experimento concluyen que, la trayectoria se verá afectada principalmente por la dirección y fuerza de la corriente de aire. En consecuencia, el Nakamura es mejor en interiores que en exteriores. Mientras que el Pteroplano al ser de acrobacia es mejor en exteriores y el profesional es un avión adaptable para ambas situaciones.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia con información de las producciones de los profesores

c) Resultados con Profesores de Primaria

El siguiente fragmento se da en un taller de capacitación con profesores de una primaria, de la zona rural del estado de Durango, al monitorear el trabajo de un equipo de cuatro profesores. En este equipo los aviones construidos fueron el Espía y el Pteroplano. En la Tabla 2.4 se puede observar que el investigador desafía (**E4**) a los profesores para que identifiquen algunas variables y características de los aviones que influyen en su vuelo. Les da el tiempo para discutir, reflexionar y analizar sus aportaciones en el equipo (**E8; E7; EQ5-AB**).

Tabla 2.4 Interacción de un Investigador con un equipo de profesores de primaria

Transcripción	Descripción
[22] Investigador: ¿Cuáles fueron las variables que identificaron que pueden variar el vuelo de uno y de otro? [23] Profesor 1: El peso, la forma. [24] Profesor 2: El tamaño. [25] Profesor 3: El peso porque hay unos que con los dobleces se hacen más pesados de una parte. [26] Profesor 1: Oiga maestra, pero no se hacen más pesados, el peso sigue siendo el mismo, ¿no?, es la misma hoja. [27] Profesora 4: Bueno, lo que pasa es que el peso está distribu… [28] Profesor 1: Está mal distribuido. [29] Profesora 4: Sí, por ejemplo, el espía se hace más pesado en un sólo lugar.	En este fragmento, se observa que el investigador dirige la discusión en identificar las variables que influyen en el vuelo de los aviones [22]. Los profesores mencionan algunas [23-24] y de la discusión entre ellos [25-28] se llega a la conclusión de que el avión Espía se caracteriza por ser de una pieza en el sentido de no tener cola o pico definido. Esa distribución uniforme del peso lo hace ser el avión planeador que puede mantenerse por mayor tiempo en el aire, pero con una distancia menor recorrida que el Pteroplano, Profesional, Nakamura (ordenados de menor a mayor distancia recorrida) y con una velocidad menor que el Profesional, por ejemplo.

Fuente: Elaboración propia con información de las producciones de los profesores

En la Tabla 2.5, se presenta la discusión que se generó entre los profesores y el investigador (**EQ1-A; E6**) luego de realizar una competencia de aviones en la que cada equipo eligió un avión, un representante y un modo de lanzamiento (**EQ6-AB; EQ5-AB; EQ3; EQ1-B**).

Tabla 2.5 Interacción del momento de socialización entre investigador y el grupo de profesores de primaria

Socialización	Descripción
[30] Profesor 1: las pruebas de ensayo nos salieron contraproducentes a nosotros. [31] Investigador: ¿Sí? ¿Por qué? [32] Profesor 1: Porque nosotros con el Espía, cuando estuvimos haciendo los lanzamientos era el que avanzaba más, descendía. [33] Profesor 2: Es que no hubo aire ahorita. [34] Profesora 3: Le dieron nervios profe! [35] Profesora 4: Pero, es que aparte ustedes se subieron en la banquita (durante el experimento) entonces la altura de la que la estaban lanzando era diferente a la que estaba ahorita. El aire es más caliente y eso hace que flote. [36] Profesor 1: Sí, puede ser, porque como estábamos más arriba pues alcanzaba a planear más y ahorita se estampaba en el piso muy pronto.	El avión Espía mientras más alto sea el punto desde donde inicias el vuelo mayor es la distancia de recorrido que alcanza. Eso explica también, que sus mejores vuelos sean con lanzamientos en ángulo ascendente o vertical. Este conocimiento toma forma en la primera observación hecha en [35] por la profesora. La justificación que da al final puede abrir un espacio de discusión para extender el conocimiento. Finalmente, en este diálogo uno de los profesores se muestra pensativo y deja abierta la duda para comprobar tal observación [36]. Esto se retomará más adelante en las conclusiones.

Fuente: Elaboración propia con información de las producciones de los profesores

4.3 Resultados de la Fase 2 de Implementación de los Profesores con sus Estudiantes

En esta sección se presentan algunos resultados obtenidos durante la implementación del AA con estudiantes de un grupo de preescolar, dos de primaria y dos de secundaria. Se identifican algunas estrategias para el desarrollo de competencias y cualidades del carácter (Tabla 2.1). Se presenta el contexto, la transcripción de una interacción o una producción de los estudiantes y la interpretación que se hace de la evidencia.

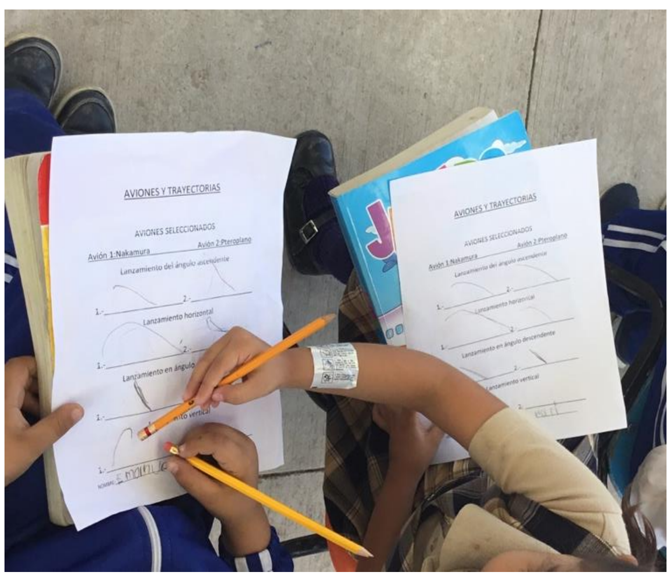
a) Resultados del Grupo de Estudiantes de Preescolar

En un grupo de tercer grado del nivel preescolar (5-6 años) se implementó el AA en dos sesiones propiciando que se involucren en proyectos de mediano plazo (**EQ2-A**). En la primera, la profesora trabajó con padres y niños para la construcción de los aviones. La segunda sesión, sólo se trabajó con los niños experimentando el vuelo de los aviones en un patio techado con domo y la profesora se centró en el trazado de trayectorias de los aviones.

Durante el primer momento, se observó que fue una actividad muy estimulante para los niños y se dio un momento de convivencia con los padres (**E1; EQ6-ABC; EC3; EC2-B; E3**). Algo que sorprendió a la profesora, fue la dificultad que representó para los padres el doblado de papel para construir los aviones y constantemente requerían de apoyo (**EC1**). Cuando padres e hijos hacen las primeras pruebas para el vuelo de aviones fue un momento muy significativo para ambos (**E5; E1; EC2-AB; E4; E3;EQ2-B**).

En el segundo momento, los niños organizados en equipo vuelan sus aviones en el patio (**EQ3; EQ4; EQ2-B; E5; E8**). Se observó la dificultad para trabajar en equipo, los niños querían tener cada uno los aviones que construyeron con sus papás y de manera independiente decidir cuál era el mejor para una competencia de mayor distancia, así que, la profesora accedió a su petición y les llevó más tiempo del programado (**E8; EQ1-B**). Como consecuencia, la profesora decide cerrar la actividad organizando al grupo en herradura y siendo ella quien vuela cada uno de los aviones, les pide que reproduzcan el 'recorrido del vuelo' en unas hojas de registro (**E4**: Figura 2.4). Esta parte fue muy interesante dado que se observaban discusiones en los niños con sus compañeros sobre el trazado del vuelo (**EC2-AB**). Durante la discusión de la profesora con los niños, se observó claramente cómo el lenguaje se fue transformando y los niños hablaban de 'recorrido', 'camino', 'trayectoria' del avión (**EC4**). También, algo interesante fue que empezaban a trazar su trayectoria considerando la altura del lanzador y no pasaba de un eje horizontal que consideraban como el piso (**E2; E4; E6**).

Figura 2.4 Estudiantes de preescolar dibujando y discutiendo sobre las trayectorias de los aviones



Fuente: Evidencia recolectada del trabajo de los estudiantes

b) Resultados del Grupo de Estudiantes de Primaria

En un grupo de tercer grado (8 años), la maestra sólo propone la construcción de dos modelos de aviones: Nakamura y Espía. Cada estudiante construye, a partir del doblado de papel, sus dos aviones (**E5; E4; E6**) y la maestra permite que ellos sigan el instructivo (Figura 2.1) dando tiempo para que muestren persistencia en lograrlo (**E8; E3; EQ4-A; EQ2-B**) e interviene cuando considera necesario apoyarlos (**EC1; E3**). En una hoja dibujan la trayectoria que piensan que va a tener cada avión. Enseguida, salen a la cancha a experimentar cada uno de los diferentes tipos de lanzamiento (**EQ2-C; EQ3; E3; E2**). Primero lo realiza la profesora y luego los alumnos. Una vez realizado el lanzamiento, dibujan la trayectoria que describió el avión (Figura 2.5).

Figura 2.5 Estudiante de tercer grado mostrando el trazado de las trayectorias de los aviones

Fuente: Evidencia recolectada del trabajo de los estudiantes

Después de experimentar los lanzamientos, la profesora comienza una discusión sobre ¿cómo fueron las trayectorias? Los alumnos coinciden en que cada avión tuvo diferentes trayectorias con el mismo tipo de lanzamiento. La discusión que se generó aparece en la Tabla 2.6.

Tabla 2.6 Interacción entre una profesora de tercer grado de primaria y sus alumnos

Transcripción de la Socialización	Descripción
[37] Profesora: Los dos aviones, aunque los lancemos de la misma manera, tienen diferente comportamiento, no sucede lo mismo, por eso son diferente tipo de avión. [38] Alumno: Sí, la forma de las alas, son diferentes. [39] A: Uno se eleva más que el otro. [40] A: ¡Maestra! el tamaño también tiene que ver. [41] P: Muy bien, también tiene que ver el tamaño, o, a ver Aldo, ¿cómo se llama cuando los impulsamos y lanzamos con la mano? [42] A: Fuerza. [43] P: Fuerza ¿verdad? A lo mejor la lanzamos con mucha fuerza, o sin mucha fuerza. ¿Tiene algo que ver la fuerza para que el avión se desplace? [44] A: Sí, nosotros somos los que lo impulsamos. Si le poníamos mucha fuerza iba más rápido. [45] A: ¡Maestra! Tal vez la fuerza tiene que ver con que uno iba más rápido y otro más despacio. [46] P: ¡Ah muy bien! Entonces, ¿qué dicen los demás?, ¿la fuerza con la que los aventamos si tiene que ver o no? [47] Grupo: ¡Sí!	En [37] la profesora concentra la idea expresada por los estudiantes durante la experimentación en equipos y la enfatiza. Los estudiantes identifican algunas características específicas de cada avión que propician un comportamiento diferente ensayando el mismo tipo de lanzamiento [38-40]. La profesora realiza preguntas dirigidas [41-43] para incluir alumnos que han mostrado interés en la experimentación, pero no se animan a participar de la discusión con sus observaciones [42, 44 y 45]. Posteriormente, en [46] la profesora llama al grupo a la aprobación de lo que han encontrado sus compañeros para darles mayor confianza y valor a su contribución al grupo.

Fuente: Elaboración propia con información de las producciones de los estudiantes

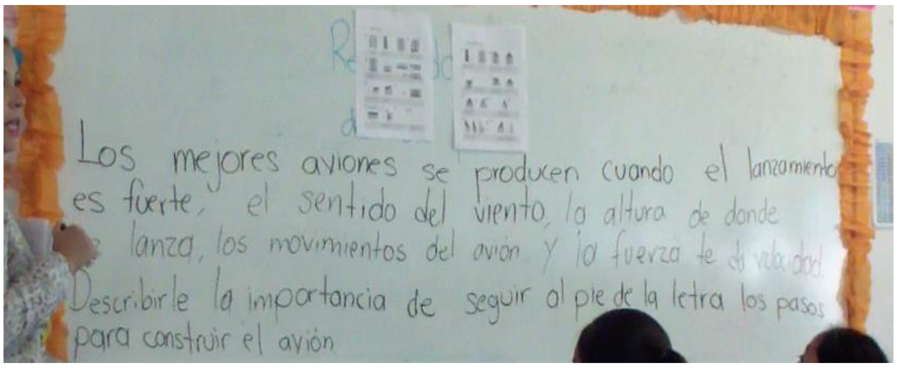
A posteriori, la profesora pide redactar una carta de recomendaciones (**E6**; **E7**), sin embargo, continúa la discusión grupal (Tabla 2.7) y entre todos generan una carta (**EQ5-A; EC3; E2**) que se escribe en el pizarrón (Figura 2.6).

Tabla 2.7 Discusión y redacción grupal de la carta para comunicar sus recomendaciones para ganar una competencia de aviones

<table>
<tr><th colspan="2">Transcripción de la discusión y redacción grupal de la carta</th></tr>
<tr><td>[48] Profesora: Vamos a escribir la forma en la que podemos pilotear los diferentes aviones, ¿qué recomendaciones le daríamos a alguien para que pueda pilotear el avión?
[49] P: ¿Qué necesitábamos para que nuestro avión volara?
Alumno: ¡Aire!
[50] P: Bueno, tuvimos que observar para dónde iba el...
Grupo: ¡Aire!
[51] P: ¡Muy bien! Entonces vamos a escribir una carta a uno de sus compañeros de 3 “B”, donde le digan qué deben hacer para que su avión se desplace. Ya dijimos el aire, fijarnos para dónde va el viento. ¿Qué más?
[52] A: La fuerza.
[53] P: La fuerza, muy bien. ¿Qué más?
[54] A: El tipo de avión
[55] P: ¿Cómo podemos empezar a escribir el texto? [Escribe en el pizarrón: Los mejores aviones [vuelos] se producen cuando el lanzamiento es ...]
[56] A: ¡Fuerte!, porque si no lo impulsamos, pues no vuela maestra.
[57] P: Y, ¿hacia dónde tiene que estar dirigido el avión?, ¿en contra del aire será bueno?
[58] A: ¡No! Si lo lanzamos adelante [se refiere a en contra] del aire se nos va a desbaratar.
[59] P: Entonces, tenemos que ver que el avión vaya a favor del viento para que pueda planear mejor.
[60] A: Maestra, también la altura.
[61] P: Mmm, sí también puede ser, la altura desde donde se lanza (lo escribe en el pizarrón). No es lo mismo lanzarlo de arriba de una silla que de arriba del salón, ¿verdad?
[62] A: Arriba del salón dura más.</td>
<td>[63] P: Puede ser que su distancia sea más larga, puede ser.
[64] A: Sí, porque ahí sopla más el aire.
[65] A: Sí, entre más arriba hay más aire.
[66] A: Y es más rápido.
[67] P: ¡Escuchen eso! ¡Exacto! O más distancia puede recorrer, quizás.
[68] P: Qué otro aspecto debemos de tomar en cuenta para que el avión pueda volar
[69] A: Los movimientos
[70] P: Pero ¿los movimientos de qué?
[71] A: Del avión o del aire
[72] P: [Escribe los movimientos del avión] [73] ¿Qué más?
[74] A: La fuerza
[75] P: La fuerza ya está. ¿Qué más?, ¿tendrá relación la fuerza con la velocidad?
[76] A: Pues sí maestra, la fuerza le da velocidad al avión.
[77] P: ¡Ah! Entonces hay que tomar en cuenta que al lanzarlo fuerte podemos observar que podemos tener una velocidad más rápida y si lo lanzo sin aplicar una fuerza... Igual hay una velocidad, pero no suficiente para planear. ¿Con esto (refiriéndose a las recomendaciones escritas en el pizarrón) un compañero puede hacer la actividad?
[78] A: ¡No! Faltan los pasos, decirle que son importantes los pasos del avión (refiriéndose a las instrucciones del doblado de papel), si no, no salen.
[79] P: Ok, entonces hay que describirle la importancia de seguir al pie de la letra los pasos para construir el avión [escribe en el pizarrón].
[80] P: ¿Con eso están completas nuestras recomendaciones?
[81] Grupo: ¡Sí!</td></tr>
<tr><th colspan="2">Descripción y observaciones</th></tr>
<tr><td colspan="2">En este fragmento se puede observar que la profesora constantemente hace preguntas para guiar la discusión hacia la redacción de las recomendaciones para lograr un mejor vuelo. Al responder las preguntas de la profesora, los estudiantes identifican la importancia de impulsarlo a través de una fuerza [52 y 56], además de la importancia de lanzarlo en la dirección que sopla el viento [58], tener en cuenta la altura de lanzamiento [60], la relación fuerza-velocidad [76] y seguir puntualmente los instructivos de construcción de los aviones para garantizar su construcción y calidad [78].
La idea de que a mayor altura los aviones vuelan mejor, dado que el aire arriba es más caliente y se mueve más rápido [60-67], fue un conocimiento que también surgió con el grupo de profesores de primaria (ver Tabla 2.5). En este fragmento, se puede ver que la profesora lo enfatiza en [67] como una idea relevante que ha surgido y que, posteriormente, debe ser retomada para formalizarse. También, surgen otras relaciones [76] que deben extenderse y tratar de formalizarse buscando recursos de apoyo para lograrlo.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia con información de las producciones de los estudiantes

Figura 2.6 Reporte producido en el grupo sobre las recomendaciones para producir mejores vuelos de los aviones

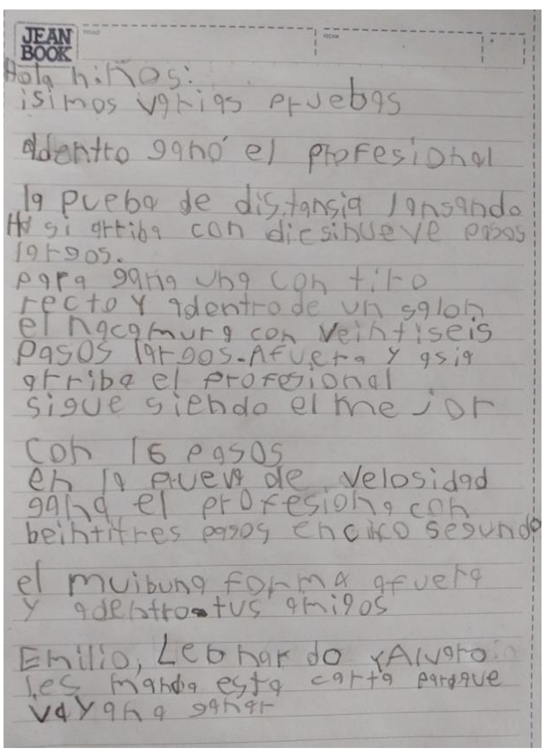


Fuente: Producciones del grupo de estudio

En otro grupo de tercer grado de primaria, se observó el trabajo de un equipo y la documentación de sus recomendaciones para otros amigos que participarían en una competencia. Los resultados se presentan en la Tabla 2.8 y Figura 2.7.

Los estudiantes de este grupo, se observaron emocionados primero con la construcción (**EC3; EQ2-B; EQ3; EQ4**) de los aviones y, posteriormente, con el juego (**E1**). Se brindó el tiempo para generar un ambiente de cuestionamiento, reflexión y argumentación de ideas, de manera que los estudiantes estructuraran su pensamiento y trataran de explicarlo (**EC4; E8; EC2A-B; EQ1-AB**). En este equipo, experimentaron lo suficiente y se emocionaron al realizar descubrimientos en cuanto a cómo lograr controlar que el avión de una vuelta ((**E2; E4; E5**). Aunque fueron muchos logros en el equipo, se eligió como evidencia la carta (Figura 2.7) para los 'clientes potenciales' que solicitan ayuda para ganar una competencia, dado que, es un instrumento que apoya al docente en hacer visible el pensamiento del estudiante y el conocimiento, lo cual es un reto en los AA (Slough & Milam, 2013).

Figura 2.7 Carta producida por los niños para sugerir el avión que puede ganar una competencia



Fuente: Producción de los estudiantes

Tabla 2.8 Descripción de la carta elaborada por los estudiantes de tercer grado de primaria (Figura 2.7)

Transcripción	Descripción
Hola niños: *Hicimos varias pruebas, adentro ganó el Profesional la prueba de distancia lanzando hacia arriba con 19 pasos largos.* *Para ganar una [competencia] con tiro recto y adentro de un salón, el Nakamura con 23 pasos largos.* *Afuera y hacia arriba el Profesional sigue siendo el mejor con 16 pasos.* *En la prueba de velocidad gana el profesional con 23 pasos en cinco segundos.* *El [de] muy buena forma afuera y adentro.* *Tus amigos: E, L y A.* *Les mandan esta carta para que ¡vayan a ganar!*	Al monitorear este equipo, se observó que eligieron una unidad de medida no estándar (pasos largos) y pidieron apoyo para contar el tiempo con un reloj. Hicieron pruebas para seleccionar al mejor lanzador y también, aunque todos hicieron sus aviones con ayuda del investigador uno de ellos más que los otros dos, eligieron los aviones que mejor apariencia tenían en sus dobleces y simetría. Luego de varias pruebas eligieron una marca 'representante' del número de pasos y del tiempo de vuelo para escribir su carta. Experimentaron con variables como: zona de vuelo, tipo de lanzamiento, tiempo y distancia de vuelo. Aunque, se les sugería también probar con lanzamientos en ángulo descendente o hacia abajo no quisieron hacerlo y su justificación fue que eran muy pequeños y se impacta de inmediato en el piso, mientras con un adulto, por su altura a lo mejor alcanzaba a retomar el vuelo antes de chocar con el piso (**EQ1-B**). En el caso del Pteroplano, que en la construcción tiene una tira aparte, lo volaron sin la tira y con la tira en una de las alas y se emocionaron porque eso provocaba que el avión diera vuelta hacia ese lado.

Fuente: Elaboración propia con información de las producciones de los estudiantes

c) Resultados de dos Grupos de Estudiantes de Secundaria

Los dos grupos de secundaria en los cuales se implementó el AA y cuyos resultados aquí se reportan, pertenecían a dos escuelas del medio rural. El Grupo A, era de primer grado de secundaria con edad promedio de 12 años, mientras que, el grupo B, correspondía con el tercer grado de secundaria (14 años).

Grupo A

En esta aplicación el profesor trabaja con equipos de 3 y 4 alumnos. Primero, explica que la clase tendrá tres momentos: explicación de la actividad y construcción de los aviones, volar los aviones y platicar sobre los resultados de los experimentos (**EQ2-A**).

El profesor comienza la actividad preguntando ¿qué sucede con los aviones cuando vuelan? y ¿qué factores influyen en que el avión no vuele con toda libertad? Los alumnos dan respuestas como: agarran vuelo, trazan una trayectoria, van de un lugar a otro, si van rápido llegan más pronto, los afecta el viento, la lluvia, etc. Posteriormente, entrega a cada equipo el material para que elijan dos tipos de aviones para construir.

Una vez que tienen los aviones de papel, el profesor cuestiona ¿cuáles son sus mejores vuelos?, ¿cómo funcionan? Y les pide que anticipen y registren en una hoja la trayectoria que piensan qué tendrá cada avión que les tocó. Este momento es interesante, dado que, deben construir sus hipótesis derivadas de la observación de la forma de los aviones seleccionados (**E7**). Posteriormente, los alumnos exploran el vuelo de los aviones dentro y fuera del salón y comparan la trayectoria real con la que ellos estimaron (**EC1**).

Después de volar los aviones, en el salón, el profesor propicia una discusión, de la cual se exhibe un fragmento en la Tabla 2.9.

Tabla 2.9 Discusión del profesor con sus estudiantes de primer grado de secundaria

Transcripción	Descripción
[82] Profesor: ¿qué pasaría si a cada uno de los aviones le pegamos una tirita de papel? [83] Alumno: Se iría de lado. [84] A: A lo mejor agarra más vuelo. [85] P: Y si les pegamos 2 tiras una de cada lado. [86] A: Yo creo que a lo mejor agarra más vuelo, más velocidad. [87] P: Entonces, esas son las preguntas que se deben de hacer como estudiantes de secundaria. Hacer todas las posibles estimaciones.	En este fragmento se puede ver que los estudiantes construyen una hipótesis relacionada con lo que ocurriría al poner una tira de papel en uno de los aviones. Ellos anticipan que daría una vuelta hacia ese lado. Este comportamiento fue contrastado luego de experimentar en un grupo de primaria (Tabla 2.8).

Fuente: Elaboración propia con las producciones de los estudiantes

El profesor pide que por equipo redacten una carta con las recomendaciones que le darían a un piloto para que su avión vuele bien. Un alumno de cada equipo lee la idea central de su carta (**EQ1-AB; EC4; EC2; EQ5**):

1) «Nosotros elegimos el avión Profesional, es el más recomendable para que se vaya derecho porque tiene el pico puntiagudo.

2) Nosotros recomendamos el avión Pteroplano porque hace una trayectoria ascendente y de esta forma avanza más rápido, lo tienen que lanzar fuerte de forma ascendente.

3) Nosotros elegimos el avión Nakamura en ángulo ascendente o también horizontal, se recomienda que sea horizontal un poco ascendente y se debe aventar despacio para que avance más y tenga una mejor trayectoria. No lo lances de manera vertical porque es de la forma que menos avanza.

4) Nosotros recomendaríamos el avión Nakamura en el lanzamiento [haciendo un movimiento de mano que deja ver que se refiere al ascendente], porque es así como agarra mayor 'impulsación' [refiriéndose al impulso] aunque se le dé con poca fuerza, y vuela mejor que el Pteroplano. Recomendamos a los pilotos, que revisen que todo funcione bien antes de pilotear.

5) Recomendamos hacer los dobleces exactos y evitar lanzarlo en contra del aire.

6) No recomendamos el Pteroplano porque en todos los vuelos se abren las alas y se regresa.»

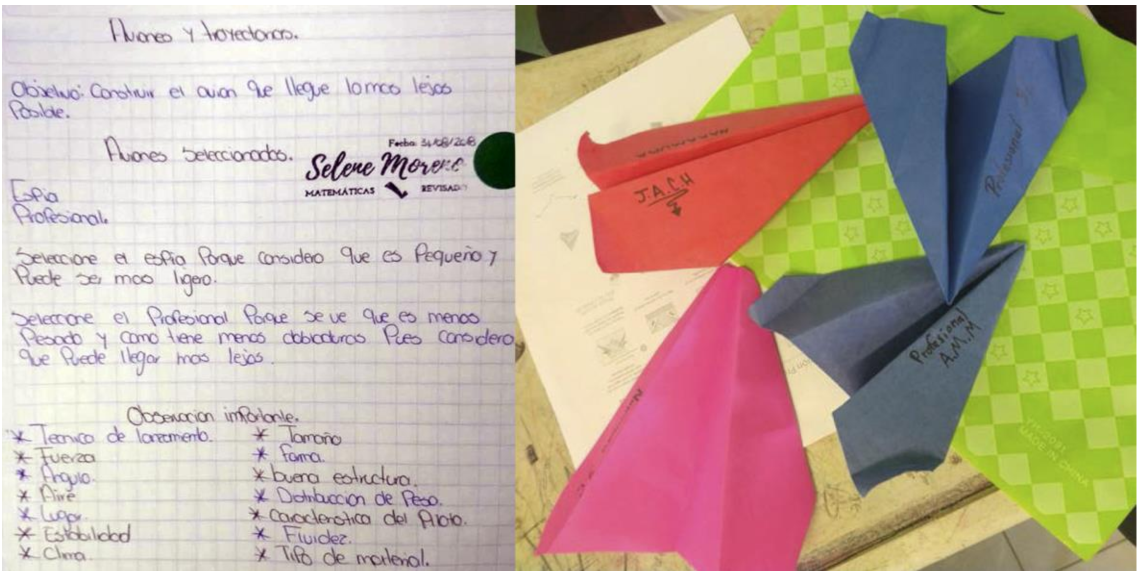
La idea expresada en los puntos 1, 3 y 4, fueron encontradas en un grupo de primaria (Tabla 2.8); también, la recomendación realizada en 5 se expresó anteriormente en la discusión grupal en la Tabla 2.7.

Grupo B

La profesora les presentó el AA a los estudiantes introduciendo las tareas con una presentación en Power Point **(E6)**. En los videos se puede percibir la motivación y emoción con que realizan las tareas y la importancia de la práctica de indagación exhibida por la profesora, tanto en el momento de monitorear el trabajo en equipo, como en los momentos de socialización y discusión con todo el grupo (**E7; EC4; EQ1-A**).

Inician con la construcción de los aviones (**EC3**) y con base en su forma y dobleces generan diferentes hipótesis, sin antes haber volado los aviones. Además de comprender y plasmar por escrito el objetivo que se han trazado en el grupo (**E6**; **E4**), como puede verse en la Figura 2.8.

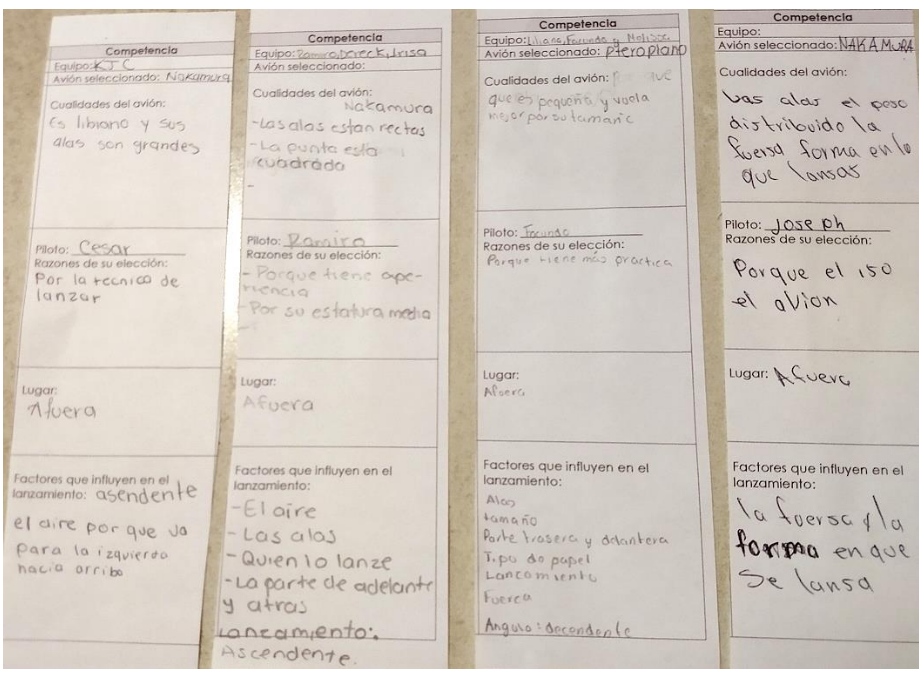
Figura 2.8 Construcción de aviones e hipótesis en congruencia con el objetivo



Fuente: Producciones de los estudiantes

Posteriormente, experimentan y juegan volando sus aviones (**E1**; **EC3**) en diferentes escenarios: dentro del salón, fuera y en un patio con domo. Esta última zona de vuelo la sugieren por considerarla bajo ‘condiciones controladas’. Enseguida, como se aprecia en la Figura 2.9, realizan una competencia, en la cual eligen el piloto, el avión, la zona de vuelo y realizan registros de factores que influyen en el mismo (**E3; EQ1-B**).

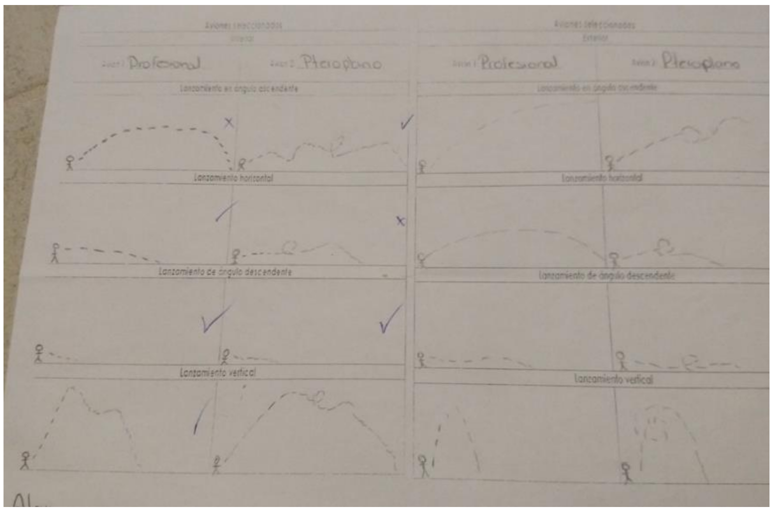
Figura 2.9 Registros de los estudiantes sobre las decisiones tomadas con la intención de ganar la competencia de aviones



Fuente: Producciones de los estudiantes

Una vez que realizaron la experimentación, el registro de información relevante acerca de las características de los aviones, que identificaron los factores que influyen en el vuelo, así como el tipo de trayectorias seguidas con diferentes lanzamientos (Figura 2.10), toman decisiones en equipo utilizando la información disponible (**EQ5-AB; EQ6-AB; EQ1-BC**).

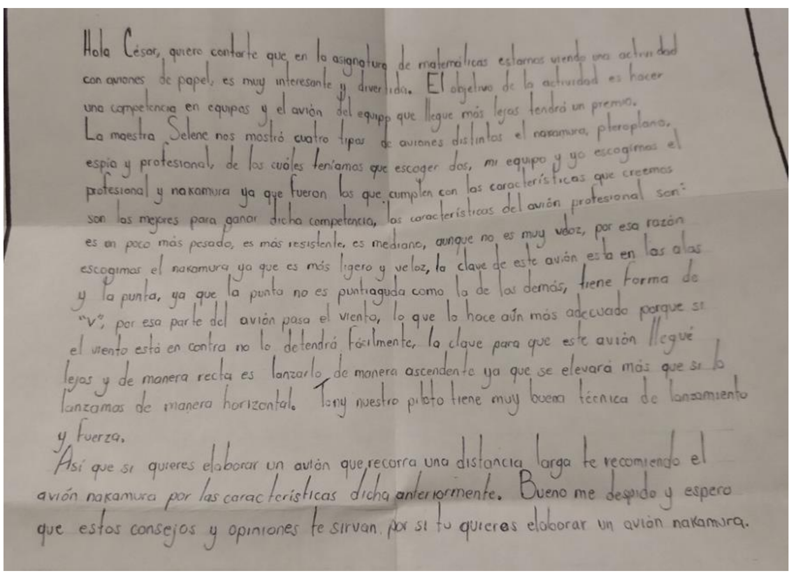
Figura 2.10 Registro de información sobre las trayectorias de los aviones según el tipo de lanzamiento y elección del mejor avión para una competencia



Fuente: Producciones de los estudiantes

Finalmente, a través de una carta como la que se muestra de ejemplo en la Figura 2.11, comunican sus hallazgos (**EC4**) y sustentan su elección del avión Nakamura para que otros puedan utilizar el conocimiento que ellos han construido (**E5**; **EC4**).

Figura 2.11 Carta de un equipo para comunicar sus hallazgos y emitir recomendaciones para ganar una competencia de aviones



Hola César, quiero contarte que en la asignatura de matemáticas estamos viendo una actividad con aviones de papel, es muy interesante y divertida. El objetivo de la actividad es hacer una competencia en equipos y el avión del equipo que llegue más lejos tendrá un premio.
La maestra Selene nos mostró cuatro tipos de aviones distintos el nakamura, pteroplano, espía y profesional, de los cuáles teníamos que escoger dos, mi equipo y yo escogimos el profesional y nakamura ya que fueron los que cumplen con las características que creemos son las mejores para ganar dicha competencia, las características del avión profesional son: es un poco más pesado, es más resistente, es mediano, aunque no es muy veloz, por esa razón escogimos el nakamura ya que es más ligero y veloz, la clave de este avión esta en las alas y la punta, ya que la punta no es puntiaguda como la de las demás, tiene forma de "v", por esa parte del avión pasa el viento, lo que lo hace aún más adecuado porque si el viento está en contra no lo detendrá fácilmente, la clave para que este avión llegué lejos y de manera recta es lanzarlo de manera ascendente ya que se elevará más que si lo lanzamos de manera horizontal. Tony nuestro piloto tiene muy buena técnica de lanzamiento y fuerza.
Así que si quieres elaborar un avión que recorra una distancia larga te recomiendo el avión nakamura por las características dicha anteriormente. Bueno me despido y espero que estos consejos y opiniones te sirvan, por si tu quieres elaborar un avión nakamura.

Fuente: Evidencia tomada de las producciones de los estudiantes

Un último resultado que es de interés reportar, es que ha sido muy gratificante para profesores e investigadores el observar que es una actividad que genera emoción en los estudiantes y realmente proyectan que están disfrutando y se pueden escuchar comentarios como: «Lo estoy disfrutando tanto, que siento que no es una clase».

5 Agradecimientos

Los autores expresan su agradecimiento al Grupo Internacional de Investigación Campus Viviente de Educación en CITeM; al Programa de Desarrollo Profesional (Prodep) por el apoyo al fortalecimiento del Cuerpo Académico 'Matemática Educativa para la Interdisciplinariedad (UJED-CA-132)'; y, al Programa de Fortalecimiento a la Calidad Educativa (PFCE-2017) a través del proyecto, de la Secretaría de Educación del Estado de Durango, 'Estrategias para la implementación de las habilidades matemáticas en educación básica'.

6 Conclusiones

Con este tipo de AA se pueden detonar una gran variedad de ideas, nociones matemáticas y científicas y sus relaciones, al igual que procedimientos tempranos útiles en la ingeniería (e.g. construir a partir de un instructivo). También, se involucra, tanto a los profesores como a los estudiantes, en proyectos que les llevan mayor tiempo (**EQ2**). Al surgir diferentes contenidos, el profesor puede posteriormente retomarlos para formalizarlos en clase y/o profundizar en ellos. Por ejemplo, la noción de velocidad expresada en las Tablas 4.6 y 4.7 por niños de primaria; la idea de que a mayor altura el avión vuela mejor expresada en los fragmentos [30-36; 60-67], la noción de trayectoria como gráfica que relaciona la altura con el tiempo de vuelo, o bien, la distancia con el tiempo (Figuras 4.2 y 4.8), etc.

Además, según reportan los profesores que han implementado este AA, aún pasados los días los estudiantes siguen aportando información, derivada de investigación personal, acerca del comportamiento de los aviones. Por tal razón, quien guía el AA debe prepararse con recursos que apoyen las discusiones. Por ejemplo, en el fragmento [30-36] de la Tabla 2.5, con profesores de primaria y en [60-67], de la Tabla 2.7, con estudiantes de tercero de primaria, se percibe una aseveración que no es fácil de entender. Dado que, a mayor altura hace más frío y pensar que el aire es más frío abajo que arriba, resulta paradójico. Para extender el conocimiento, quien guía la actividad puede enfocar al equipo en pensar en esa idea. Es importante contrastar el conocimiento informal con el conocimiento científico y se puede mencionar que la gravedad está jalando al aire frío con más fuerza que al aire caliente (existe un mayor número de moléculas por litro de las cuáles jalar). Así que, cuando el aire caliente y el frío se encuentran, el aire frío será empujado hacia abajo a través del aire caliente. El aire caliente no tiene más alternativa que apartarse y ser desplazado hacia arriba. Así, el aire arriba es más caliente y se mueve más rápido que abajo y esta es, precisamente, una de las razones por las que vuelan los aviones. Para apoyar el trabajo del guía se pueden agregar recursos confiables. Por ejemplo, identificar un libro de texto donde se aborde el tema, o bien, otro tipo de recursos como un video corto (Quantos de Ciencia, 2018).

Un rasgo que se han identificado y se considera importante es que este AA es inclusivo. En virtud de que los requisitos previos para acceder a él son mínimos, en todos los escenarios de implementación se observó la motivación y que todos participaron y mostraron su particular interés en alguno de los momentos con oportunidad de aprovechar sus fortalezas y personalidad (**E3**), ya sea de construcción de aviones con doblado de papel (**EC3**), concentración al seguir las instrucciones mostrando persistencia (**Q3**), construir hipótesis, experimentar (**E5**), observar y registrar la información relevante (**EC3**), discutir y defender sus puntos de vista (**E7; EC1**), tomar decisiones sobre el mejor avión (**EQ1-AB**), aprender de otros y comunicar sus hallazgos (**EC4**). El doblado de papel fue una estrategia útil para motivar e integrar a la mayoría de los estudiantes en la realización de la tarea (**EC3**) y para darle sentido a sus argumentos (**EQ5-A; E7; EC-4**). Esto puede verse en la Tabla 2.2 cuando los profesores de secundaria [1-5] encuentran la relación entre los dobleces del papel y la distribución del peso y la eficiencia de los aviones (**EQ1-A; EQ1-B; EQ1-C**), de la misma manera que los estudiantes de tercero de primaria y de primero de secundaria quienes identifican la importancia de la precisión de los dobleces para lograr un mejor desempeño en los vuelos (Sección 4.3, Figura 2.6 e incisos c, respectivamente). También, el origami permitió la incorporación de los padres de familia de los preescolares (sección 4.3, inciso a) en la construcción de aviones (**EC1**; **EQ5-B; EQ3; EQ6-C; E8; EC2-B; EQ4-A**), lo cual fue significativo y se presentaron oportunidades para que los niños y padres pudieran regular sus emociones (**E4; E3; EQ3; EQ4-A**).

Por otra parte, el AA se considera que fue flexible, dado que ha sido posible modificarlo para implementarlo con profesores de diferentes niveles educativos y lograr que ellos lo adapten a las condiciones y circunstancias específicas de su contexto y grupo de estudiantes. Ha sido un espacio en el cual tanto profesores como estudiantes han participado de diferentes maneras (registrando observaciones, construyendo aviones, participando como el 'mejor' piloto, comunicando resultados, argumentando sus ideas, etc) y el AA se ha enriquecido con la diversidad de respuestas.

Los estudios de diseño de un AA, como el aquí mostrado, permiten el refinamiento de ideas y aprendizaje no sólo del profesor y de los estudiantes. Los investigadores también experimentan un aprendizaje que los conduce a realizar mejoras al diseño. En este caso, se percibe necesario apoyar al docente en el registro sistemático de los datos obtenidos durante el proceso de experimentación.

Para ello, se sugiere agregar un recurso para dicho registro que apoye la identificación y socialización de ideas relevantes, facilite llegar a acuerdos y ayude a encontrar relaciones entre variables (Tabla 2.10). Por ejemplo, en tipo de vuelos se pueden caracterizar en: planeador, dardo y de acrobacia. Para el registro del tiempo que dura el avión en el aire se puede acordar una unidad de medida convencional como el 'segundo', o bien, no estándar como el conteo seguido. Para medir la distancia, de igual manera se puede pensar en metros, pero también en pasos largos o cortos como ocurre en la interacción con el equipo de tercero de primaria que informa sus hallazgos en la Tabla 2.8, Figura 2.6. Se pueden ampliar o reducir el registro de acuerdo a las ideas generadas en cada grupo, como por ejemplo, en un grupo se expresó la inquietud de indagar sobre el impacto del número de dobleces, requerido para construir el avión, en el tiempo de vuelo.

Tabla 2.10 Instrumento sugerido para el registro sistemático de las observaciones

Avión	Tipo de vuelos	Tiempo de vuelo	Distancia	Velocidad	Mejor lanzamiento	Mejor zona para el vuelo
Nakamura						
Profesional						
Espía						
Pteroplano						

Fuente: Elaboración propia

Por otra parte, se considera que este tipo de ambientes responde con la necesidad detectada de ofrecer oportunidades de introducir, en educación básica, procesos de estimación de trayectorias, tiempo de vuelo, distancia, velocidad, etc. con el propósito de profundizar en la comprensión de la representación física e interpretación del atributo o concepto en juego. En este sentido, se pudo dar seguimiento a una escuela secundaria que participó en la capacitación e implementó la mayoría de los ambientes de aprendizaje propuestos (Alvarado-Monroy, Mata-Romero, & Olvera-Martínez, 2018; Mata-Romero, Alvarado-Monroy, & Olvera-Martínez, 2018; Olvera-Martínez, Alvarado-Monroy, & Mata-Romero, 2018), incluido el de 'Aviones y trayectorias', mostrando avances favorables en los resultados de los estudiantes en los procesos de cálculo mental y estimación.

Finalmente, este AA inicia con ideas simples de doblado de papel y oportunidades para el juego. Posteriormente, se torna complejo al abrir un abanico de posibilidades para integrar conocimiento de diferentes disciplinas, desde la necesidad de explicar el comportamiento de los aviones, y desarrollar competencias y cualidades del carácter necesarias para la formación de los estudiantes de esta era. Específicamente, las competencias en correspondencia con sus diferentes asignaturas son para el desarrollo: en el pensamiento crítico y la resolución de problemas; en el trabajo colaborativo; y, para la comunicación, principalmente. Desde los resultados puede verse que ha permitido una mayor participación de los estudiantes y ha sido posible que los profesores muestren mayor agencia y autonomía para realizar las adaptaciones necesarias en su contexto y nivel educativo. Se percibe la necesidad de abrir espacios para el desarrollo profesional que apoyen al docente en ganar experiencia para establecer objetivos claros y dirigir la discusión hacia el cumplimiento de los mismos. Además de apoyarlo para reunir recursos que le permitan profundizar en el conocimiento y las relaciones que se pueden generar con este tipo de AA complejos, así como involucrar a los estudiantes en proyectos a mediano y largo plazo.

7 Referencias

Alvarado-Monroy, A., Mata-Romero, A., & Olvera-Martínez, C. (2018). La estimación y el cálculo mental en educación básica: secundaria. Durango, México: Secretaría de Educación del Estado de Durango con Facultad de Ciencias Exactas. Disponible en: https://face.ujed.mx/wpcontent/uploads/2018/06/LaEstimacion yelCalculoMentalenEducacionBasicaSecundaria-1.pdf

American Institute for Research, AIR (2016). STEM 2026: A vision for Innovation in STEM Education. Department of Education. USA.

Bybee, R. (2013). What is your perspective of STEM Education? En R. Bybee (Autor) The Case for STEM Education: Challenges and Opportunities (pp. 73-80). Arlington, Virginia: NSTA press.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Desing experiment in Educational Research. Educational Researcher, 32 (1), 9-13.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: theoretical and methodological issues. Journal of the Learning Sciences, 13 (1), 15-42.

The Design Based Research Collective, DRBC (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. Educational Researcher, 32 (1), 5-8.

Great Big Story (2017). See a NASA Physicist's Incredible Origami. Publicado el 16 de marzo de 2017 en: https://www.youtube.com/watch?v=DJ4hDppP_SQ

Lang, R. (2011). Origami Design Secrets. Mathematical Methods for an Ancient Art. New York: A K Peters/CRC Press.

Land, S., Hannafing, M., & Oliver, K. (2012). Student-centered learning environments. Foundations, assumptions and design. En D. Johassen & S. Land (Eds.) Theoretical foundations of learning environments (pp. 3-21). New York: Routledge.

Lemonidis, C. (2016). Mental Computation and Estimation: Implications for mathematics education research, teaching and learning. New York: Routledge.

Lesh, R. (2002). Research Design in Mathematics Education: Focusing on Design Experiments. En L. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education (pp. 27-50). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H., Post, T., & Zawojewski, J. (2003). Model Development Sequences. En R. Lesh & H. Doerr (Eds.) Beyond constructivism: A models and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education (pp. 35-58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mata-Romero, A., Alvarado-Monroy, A., & Olvera-Martínez, C. (2018). La estimación y el cálculo mental en educación básica: primaria. Durango, México: Secretaría de Educación del Estado de Durango con Facultad de Ciencias Exactas. Disponible en: https://face.ujed.mx/wp-content/uploads/2018/06/LaEstimación
yCalculoMentalenPrimaria.pdf

Mochón, S. & Vázquez, J. (1995). Cálculo mental y estimación: Métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza. Educación Matemática, 7, 3, 93-105.

Olvera-Martínez, C., Alvarado-Monroy, A., & Mata-Romero, A. (2018). La estimación y el cálculo mental en educación básica: preescolar. Durango, México: Secretaría de Educación del Estado de Durango con Facultad de Ciencias Exactas. Disponible en: https://face.ujed.mx/wp-content/uploads/2018/06/Estimacion
CalculoMentalPreescolar.pdf

Quantos de Ciencia (2018). Por qué vuelan los aviones. Julieta Fierro – Astrónoma. Publicado el 17 de mayo de 2018. Disponible en: https://m.facebook.com/story.php?story_fbid=187581305229861&id
=129413424379983

Secretaría de Educación Pública (2017a). Modelo Educativo para la Educación Oblicatorio. Educar para la libertad y la creatividad. Cd. De México: SEP. Disponible en https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/198738/
Modelo_Educativo_para_la_Educacio_n_Obligatoria.pdf

Secretaría de Educación Pública (2017b). Orientaciones para el Establecimiento del Sistema de Alerta Temprana en Escuelas de Educación Básica. Disponible en: http://dgdge.sep.gob.mx/sisat/materiales/manualesPrim/Manual_Orientaciones_SisAT%20(versi%C3%B3n%20final%202017).pdf

Slough, S. W., & Milam, J.O. (2013). Theoretical framework for the design of STEM Project-Based Learning. En R. M. Capraro, M.M. Capraro & J. Morgan (Eds.), STEM Project-Based Learning: an Integrated Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM) Approach (15-27). Rotterdam:Sense Publishers.

Vasquez, J. A., Sneider, C. I., & Comer, M. W. (2013). STEM lesson essentials, grades 3-8: Integrating science, technology, engineering, and mathematics. Portsmouth, NH: Heinemann.

Wang-Iverson, P., Lang, R., & Yim, M. (2011). Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education. New York: A K Peters/CRC Press.

World Economic Forum (2016). New Vision for Education: Fostering Social and Emotional Learning through Technology. Boston Consulting Group. Disponible en http://www3.weforum.org/docs/WEF_New_Vision_for_Education.pdf

Elementos del pensamiento matemático que emergen al resolver problemas, en contextos hipotéticos, con Excel

Mathematical thinking elements that emerge when solving problems, in hypothetical contexts, with Excel

BARRERA-MORA, Fernando†* & REYES-RODRÍGUEZ, Aarón

ID 1er Autor: *Fernando, Barrera-Mora* / **ORC ID:** 0000-0002-4289-5776, **Researcher ID Thomson:** V-2045-2018, **CVU CONACYT ID:** 10147

ID 1er Coautor: *Aarón, Reyes-Rodríguez* / **ORC ID:** 0000-0001-8294-9022, **Researcher ID Thomson:** U-9434-2018, **CVU CONACYT ID:** 167472

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

F. Barrera & A. Reyes

fbarrera10147@gmail.com

A. López, C. Lima, J. Reyes (Dirs.) Educación para todos. Tópicos Selectos de Educación en CITeM. ©ECORFAN-México, 2018.

Abstract

In this paper we analyze what elements of mathematical thinking emerged when six pre-service mathematics teachers solved a task framed in a hypothetical context. We determined what strategies and ways of reasoning appeared when they approached the task using a spreadsheet (Excel) as well as paper and pencil environment. Also, we identified what were the main difficulties they faced when trying to justify procedures and give an interpretation of the results.

Modelación, Pensamiento matemático, Contexto hipotético, Tecnología digital

1 Introducción

Actualmente se reconoce que el uso de la tecnología influye en la forma en que se desarrolla el pensamiento matemático (Carreira, et al., 2016; Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2016), ya que el uso de artefactos computacionales ofrece oportunidades a los estudiantes para acceder a recursos y estrategias que pueden ampliar la exploración de relaciones, la formulación de conjeturas, o el uso e integración de diferentes representaciones semióticas (Santos-Trigo, Moreno-Armella y Camacho-Machín, 2016). ¿Qué es lo que distingue a las tecnologías digitales de otro tipo de herramientas que se han utilizado para apoyar el aprendizaje de las matemáticas? De acuerdo con Balacheff y Kaput (1996), lo que diferencia a los ambientes digitales, respecto de otros, es su carácter cognitivo intrínseco, pues con el uso de software se puede operar con representaciones de objetos y relaciones matemáticas. La interacción de estudiantes con una tarea, usando una herramienta digital, se basa en una interpretación simbólica y cálculos con los datos que los estudiantes introducen, dando lugar a una retroalimentación proporcionada por el ambiente computacional en los registros respectivos.

Esta característica de las tecnologías digitales como software dinámico, hoja electrónica de cálculo, Sistemas de Álgebra Computacional (CAS, por sus siglas en inglés), entre otros, ha facilitado a los usuarios la interacción con diversas representaciones de los objetos matemáticos, así como la realización de experimentos y exploraciones que, posteriormente, pueden conducirlos a visualizar e identificar relaciones, a formular conjeturas, a elaborar argumentos que las sustenten, a establecer conexiones, a comunicar resultados y plantear nuevos problemas. Es decir, el uso de estas herramientas puede promover la práctica sistemática de procesos fundamentales en el quehacer de la disciplina, incluyendo nuevas formas de pensar, representar y resolver problemas (Leung y Bolite-Frant, 2015; Santos-Trigo, 2017).

Por otro lado, en la época actual, caracterizada por un desarrollo acelerado de los artefactos tecnológicos, incluyendo software como GeoGebra, sistemas basados en la nube como Wolfram Alpha o apps como Photomath, los cuales ejecutan una amplia diversidad de procedimientos matemáticos en cuestión de segundos, es importante que la formación matemática de las personas incluya el desarrollo de habilidades, a partir de un entendimiento de los conceptos matemáticos subyacentes, que les permitan determinar cuándo y cómo usar los recursos digitales efectivamente (Devlin, 2017). Es decir, uno de los recursos básicos para los profesionales del siglo XXI debe consistir en el desarrollo del pensamiento matemático asistido con el uso de tecnologías digitales.

Diversos autores (Mishra y Koehler, 2006; Moreno-Armella y Hegedus, 2009; Santos-Trigo, 2017) argumentan que el uso sistemático de herramientas digitales, al abordar tareas, permite identificar y representar la información; encontrar relaciones entre datos e incógnitas; resolver casos particulares, identificar patrones y formular conjeturas; justificar y comunicar resultados. En este trabajo buscamos documentar la forma en que profesores de matemáticas utilizan Excel al resolver problemas, en un contexto hipotético (Barrera-Mora y Santos-Trigo, 2001). De manera más precisa, buscamos documentar cómo los profesores aprovechan las capacidades de procesamiento de datos de Excel para crear una amplia variedad de ejemplos y casos particulares que puedan ayudarlos a poner en práctica diversos elementos del pensamiento matemático: identificar y representar la información; encontrar relaciones entre datos e incógnitas; resolver casos particulares, identificar patrones y formular conjeturas; justificar y comunicar resultados.

2 Revisión de la literatura

Una de las características más sobresaliente de una hoja electrónica de cálculo, es la capacidad para organizar y operar datos numéricos a través de “fórmulas”, haciendo referencias a las etiquetas de las celdas en las que se encuentran esos datos. Además, es posible transformar fórmulas, modificar procedimientos y realizar representaciones gráficas de la información capturada o procesada en la hoja de cálculo. En Excel, las representaciones numéricas y gráficas se encuentran vinculadas, de forma que al cambiar un dato se modifican otros datos o una gráfica; aunque esta relación es unidireccional, ya que no es posible modificar la gráfica sin modificar los datos. Sin embargo, esa interacción entre representaciones permite explorar propiedades de los datos, tales como tendencias o comportamientos asintóticos. La solución de problemas, utilizando una hoja electrónica de cálculo, se apoya esencialmente en efectuar una amplia diversidad de cálculos numéricos con rapidez y precisión. Entre los problemas que se pueden abordar con una hoja electrónica de cálculo se encuentran, por ejemplo, aquellos que requieren el uso de representaciones y procesos recursivos.

Existen investigaciones que han tratado de determinar cómo utilizar hojas electrónicas de cálculo para introducir a los estudiantes al álgebra y desarrollar el pensamiento algebraico, particularmente en lo que respecta a la construcción del concepto de variable (Wilson, Ainley y Bills, 2005; Carreira, et al., 2016), ya que con esta herramienta es posible relacionar cantidades de tal forma que el cambio de un dato se traduce en la variación de otras cantidades que dependen de éste. En esta línea de ideas, Nobre, Amado y Carreira (2012) argumentan que una hoja de cálculo puede actuar como un puente entre aritmética y álgebra ayudando a los estudiantes a generalizar patrones, apoyar el entendimiento del concepto de variable, ayudar a transformar expresiones algebraicas y proveer un espacio para explorar ecuaciones. El uso de una hoja de cálculo puede ayudar a que los estudiantes centren la atención en elementos tales como los procesos de razonamiento o la toma de decisiones, en vez de concentrarse en la realización de operaciones aritméticas laboriosas (Oliveira y Nápoles, 2017).

Entre las principales ventajas del uso de la hoja electrónica de cálculo se encuentra la facilidad para elaborar, organizar y representar datos, así como, el desarrollo de habilidades para planear el proceso de resolución de un problema, dado que los estudiantes pueden usar la herramienta para organizar y seleccionar la información necesaria, e implementar estrategias de solución que no requieren de una aproximación algebraica inicial. Esta característica hace que Excel sea una herramienta útil para abordar actividades en las que es necesario ajustar o modelizar un conjunto de datos mediante una función (Horton y Leonard, 2005), al permitir relacionar y manejar de forma simultánea representaciones numéricas y gráficas. Asimismo, el software proporciona retroalimentación a los estudiantes, lo cual puede favorecer el desarrollo de procesos de monitoreo y evaluación durante el proceso de resolución de un problema (Pittalis, Mousoulides y Christou, 2005). Por ejemplo, al realizar una operación aritmética inválida, como dividir por cero o insertar datos que no son válidos en una fórmula o en una función, la herramienta lo indicará mediante los mensajes de error “#¡DIV/0!” o “#¡NUM!”, respectivamente; esto permitirá al estudiante darse cuenta que debe justificar el porqué del error o revisar el procedimiento de solución del problema.

Oliveira y Nápoles (2017) consideran que las hojas electrónicas de cálculo se pueden utilizar para modelizar problemas de crecimiento de poblaciones; resolver ecuaciones mediante métodos numéricos, por ejemplo el método de bisección o el de Newton-Rapson y permitir el análisis de estos métodos iterativos; modelizar procesos recursivos; generar sucesiones numéricas; abordar y analizar problemas de optimización. En estos estudios se destaca la utilidad de las hojas electrónicas de cálculo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; enfatizando el papel del maestro en la implementación de actividades que permitan a los estudiantes usar Excel como una herramienta de resolución de problemas.

Una actividad que ilustra el potencial de Excel para construir conjeturas consiste en elaborar un procedimiento que permita obtener el resultado de multiplicar un número de dos dígitos por el número 101 sin realizar la multiplicación; a partir de observar regularidades en un conjunto de casos particulares. Con base en una tabla, elaborada en Excel, se puede formular una conjetura para obtener el resultado de multiplicar 1001 por un número de tres dígitos sin efectuar la multiplicación. Esto se puede generalizar formulando una conjetura que permita obtener el resultado de multiplicar un número de n dígitos por el número 10…01, que tiene n-1 ceros.

Un ejemplo más, consiste en representar en forma decimal el número 1/*n* para diversos valores de *n* (un número natural) y observar en qué casos la expansión decimal de 1/*n* es finita. En el desarrollo de estas actividades, las características de la hoja electrónica de cálculo parecen favorecer los procesos de generalización de resultados a partir de casos particulares (Calder, et al., 2006).

Otra experiencia en la que se analizó la forma en que las aproximaciones a los problemas se pueden complementar con el uso de diferentes herramientas, se llevó a cabo por Pittalis, Mousolides y Christou (2005). En esta investigación se determinó que la integración de las aproximaciones a un problema efectuadas con un software dinámico y una hoja electrónica de cálculo mejoró las capacidades para pensar matemáticamente en los estudiantes de educación secundaria, respecto de aquellos estudiantes quienes solamente usaron libros de texto. En esas experiencias de aprendizaje, las herramientas actuaron como mediadores, comprometiendo a los estudiantes a usar formas de pensamiento y procesos que no se hubieran puesto en práctica sin el uso de esas herramientas.

A pesar de las diversas ventajas que ofrecen las tecnologías digitales, es necesario enfatizar que el uso, por sí solo, de las herramientas no garantiza el aprendizaje, ya que se deben desarrollar nuevas habilidades y competencias para aprender. Por ejemplo, no basta con visualizar un resultado en la pantalla; sino que se requiere relacionar esa representación con las propiedades del objeto matemático (Balacheff y Kaput, 1996), pues es posible que las propiedades que lo caracterizan, difieran de aquellas que se pueden percibir visualmente. Es decir, las capacidades de visualización que ofrecen las herramientas computacionales se deben complementar con la elaboración de argumentos matemáticos que justifiquen los resultados obtenidos con las herramientas.

Aunque el uso de la tecnología puede favorecer la construcción de conceptos y la puesta en práctica de diversos elementos del pensamiento matemático, cuando los estudiantes resuelven problemas, aún quedan muchas preguntas por responder. En este sentido, resulta relevante investigar el rol que juegan las herramientas computacionales en el aprendizaje de las matemáticas y, en particular, en el aprendizaje basado en la resolución de problemas. Las herramientas digitales serán una parte integral del salón de clases en todos los niveles escolares, lo cual implica la necesidad de "reexaminar qué matemáticas deben aprender los estudiantes así como la forma en que pueden aprenderlas mejor" (NCTM, 2000, p. 25).

De acuerdo con Borwein y Bailey (2003, pp. 2-3), en las *Matemáticas Experimentales*, la computadora puede usarse para: (a) obtener comprensión (insight) e intuición, (b) descubrir nuevos patrones y relaciones, (c) construir gráficas para evidenciar principios matemáticos, (d) examinar y especialmente probar o mostrar la falsedad de conjeturas, (e) explorar un posible resultado para determinar si requiere de una prueba formal, (f) sugerir aproximaciones para elaborar pruebas formales, (g) realizar cálculos que remplazan a las operaciones efectuadas a mano y (h) confirmar resultados obtenidos analíticamente.

En este contexto, buscamos documentar la forma en que profesores de matemáticas pueden combinar, transformar o comparar representaciones de los problemas y objetos matemáticos que es posible construir con Excel al resolver problemas enmarcados en contextos hipotéticos, y aprovechar las capacidades de procesamiento de datos de Excel para crear una amplia variedad de ejemplos y casos particulares que puedan ayudarlos a poner en práctica diversos elementos del pensamiento matemático: visualizar relaciones; formular conjeturas y buscar argumentos para sustentarlas; comunicar resultados y formular nuevos problemas.

¿Qué significa aprender matemáticas con el empleo de herramientas tecnológicas, en términos de la resolución de problemas?, ¿qué tipo de argumentos resultan relevantes para validar conjeturas cuando se trabaja en un ambiente computacional?, ¿de qué manera el uso de una hoja electrónica de cálculo puede favorecer la aplicación de heurísticas de resolución de problemas? La discusión de estas preguntas puede ayudar a caracterizar la forma en que profesores, quienes cursan una maestría en matemática educativa, generan estrategias de resolución de problemas, formulan y justifican conjeturas, comunican resultados y proponen nuevos problemas, mediante la conexión de contenidos de diversas áreas de las matemáticas y de otras disciplinas, cuando trabajan en escenarios tecnológicos en los que se promueve una aproximación inquisitiva de la resolución de problemas.

3 Elementos teóricos

La introducción de la tecnología en el ámbito educativo, y en particular en el campo del aprendizaje de las matemáticas, ha traído consigo un fuerte impacto en la forma de comprender los conceptos matemáticos. Este impacto se basa en la reificación de los objetos y las relaciones matemáticas, ya que es posible interactuar de forma más directa con esos objetos y relaciones de lo que era al trabajar con papel y lápiz; porque mediante una herramienta tecnológica se pueden operar y relacionar diferentes representaciones de objetos matemáticos (Moreno-Armella, Hegedus y Kaput, 2008). En otros términos, el potencial que genera el uso de la tecnología en el aprendizaje de los estudiantes, se basa en la diversidad de oportunidades para extender el tipo de representaciones con las que puede interactuar, y en la facilidad de operar con ellas mediante el uso de la tecnología. Sin embargo, como ya se ha mencionado, el proceso de utilización de la herramienta por parte de los estudiantes involucra el desarrollo de nuevas habilidades, en relación con un ambiente de papel y lápiz, que les permitan adquirir un entendimiento conceptual congruente con el quehacer de la disciplina, entre tales habilidades destacan la capacidad para interpretar y validar resultados obtenidos con las herramientas (Moreno-Armella y Elizondo-Ramírez, 2017; Edwards y Flores, 2018); la habilidad para manejar y transitar entre diversas representaciones, o la aptitud para conciliar resultados obtenidos con distintas herramientas (Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2016).

Un aspecto importante del uso de la tecnología en el aprendizaje, es el papel dual que juega. Por un lado, funciona como amplificador y por otro, como un reorganizador de la cognición (Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2008). El término amplificador se utiliza para caracterizar a una “extensión” cognitiva, que permite intensificar las capacidades mentales a través del uso de una herramienta, con base en las facilidades para encontrar diferentes formas de resolver un problema, que no están necesariamente disponibles o que tienen una función limitada en ambientes de papel y lápiz. Por otra parte, el término reorganizador de la cognición se utiliza para caracterizar la forma en que el uso de una herramienta reestructura la cognición, en su funcionamiento y en su manera de organizarse. El considerar a las herramientas computacionales como reorganizadores cognitivos implica reconocer que existe una relación dialéctica entre las herramientas y el usuario, ya que éstas organizan su pensamiento, pero también la actividad del usuario influye en el desarrollo de las herramientas en dos formas principales, al modificar lo que se hace con esas herramientas y al estudiar la forma en que se usan, con el objetivo de incorporar características que pueden favorecer el aprendizaje (Zbiek, et al., 2007; Sherman, 2014).

Lo expresado con anterioridad indica que la adquisición del conocimiento es una actividad mediada por las herramientas y las representaciones externas que constituyen la liga entre el aprendiz y el objeto del conocimiento (Hollebrands, Laborde y Sträßer, 2008). Esto significa, que durante el proceso de aprendizaje las herramientas que se utilicen, invariablemente influirán en la forma en que se aprende, y en el aprendizaje mismo, y recíprocamente, es decir, que el conocimiento construido depende de los instrumentos de mediación empleados (Wertsch, 1993). En este sentido, resulta importante examinar y comprender el papel mediador de las herramientas tecnológicas durante el proceso de aprendizaje basado en la resolución de problemas.

Algunas investigaciones en educación matemática, (Mishra y Koehler, 2006) han mostrado que los programas de investigación se estructuran en torno a más de una perspectiva, esto con la finalidad de analizar con más elementos, los procesos cognitivos e identificar las dificultades que muestran los estudiantes cuando incorporan a la tecnología al abordar tareas de aprendizaje matemático. Esto tiene como finalidad elaborar bases teóricas robustas que permitan enmarcar adecuadamente el uso de artefactos digitales en el salón de clase. Al respecto, el marco de investigación que orienta este trabajo incluye tres dimensiones: (i) ontológica, (ii) epistemológica y (iii) didáctica.

En cuanto a la dimensión ontológica, consideramos que matemáticas es la ciencia de los patrones (Steen, 1988) y que aprender matemáticas consiste, en gran medida, en adquirir una disposición para ver el mundo a través de la lente de un matemático (Schoenfeld, 1992). Esta disposición incluye llevar a cabo actividades entre las que destacan: experimentar, explorar relaciones matemáticas, formular conjeturas, justificar resultados, comunicar ideas, así como resolver problemas por diferentes rutas (Polya, 2009/1945) y desarrollar una actitud inquisitiva; es decir, habilidad para formular, de manera sistemática, preguntas y nuevos problemas (Santos-Trigo, 2007; Berger, 2014).

Esta perspectiva ontológica fue de utilidad para determinar las características de las tareas, así como del escenario de instrucción; los cuales debían favorecer el que los participantes llevaran a cabo "intentos sistemáticos, basados en la observación y experimentación para determinar la naturaleza o principios de regularidades en sistemas definidos axiomática o teóricamente" (Schoenfeld, 1992, p. 335). En otras palabras, al abordar las tareas, los profesores debieran llevar a cabo actividades de búsqueda de patrones, sobre la base de evidencia empírica proporcionada por los recursos de Excel.

En cuanto a la dimensión epistemológica, adoptamos una perspectiva de corte socio constructivista (Simon, 1994), por lo cual suponemos, por un lado, que cada persona construye, de forma activa, su propio conocimiento al enfrentar problemas que desequilibran sus estructuras cognitivas, independientemente del contexto o la presencia y naturaleza del proceso de enseñanza. Por otro lado, consideramos que el aprendizaje es un proceso que se lleva a cabo en una comunidad donde se construyen significados o entendimientos considerados como compartidos (Cobb et al., 1991). Dado que aprender es un proceso social, el medio cultural y sus producciones determinan las características del conocimiento que construimos (Werstch, 1993). Particularmente, la naturaleza de la actividad cognitiva se encuentra estrechamente ligada a la generación y uso de representaciones semióticas (Moreno-Armella y Hegedus, 2009, p. 501), esto debido a que estas estructuras simbólicas constituyen un medio que nos permiten actuar sobre el mundo, pero a su vez imponen regulaciones a nuestro pensamiento acerca del mundo (Moreno-Armella, Hegedus y Kaput, 2008; Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2016).

La dimensión didáctica se refiere a las características del aprendizaje que consideramos deseables y la forma de lograrlas. Estas características tienen como eje el transformar un conocimiento atomizado a uno altamente estructurado. Particularmente, en este trabajo estamos interesados en que los estudiantes desarrollen niveles progresivos de entendimiento de las ideas matemáticas (Hiebert, et al. 1997), lo que implica la construcción de *conexiones robustas* entre un conocimiento nuevo y conocimientos previos a partir de procesos de reflexión y comunicación de ideas, que se llevan a cabo durante la resolución de problemas. Entendemos que una conexión es robusta cuando la relación o relaciones establecidas entre diversos conceptos o ideas pueden usarse o aplicarse para abordar otras tareas o problemas. Los objetos matemáticos adquieren sentido y significado cuando se *utilizan* para resolver algún problema o satisfacer alguna necesidad, ya sea práctica o teórica. Por ejemplo, los logaritmos (cuya idea básica es conectar una sucesión aritmética con una geométrica) surgieron para satisfacer la necesidad de realizar operaciones aritméticas complejas con mayor facilidad; mientras que la definición formal de límite tiene su origen en la necesidad de sustentar rigurosamente diversos resultados del cálculo.

Adoptamos una aproximación a la resolución de problemas basada en proponer actividades de modelización que orienten una construcción gradual de los aspectos esenciales del pensamiento matemático, que de acuerdo con Schoenfeld (1994, p. 60), incluyen: (a) desarrollar un punto de vista que valore los procesos de matematizar, abstraer y tener una predilección de aplicarlos, y (b) desarrollar competencias con las herramientas del oficio (abstracción, representación simbólica y manipulación simbólica) y usarlas con el objetivo de entender y dar sentido a estructuras matemáticas.
Lo anterior, se relaciona estrechamente con la promoción de un ambiente de instrucción en el que los estudiantes trabajan en pequeños grupos, y realizan presentaciones plenarias del proceso de solución de los problemas. También, se requiere soporte instruccional sustantivo por parte del profesor para guiar las actividades esenciales que modelan la solución de problemas y la promoción de una reflexión constante por parte de los estudiantes (Santos-Trigo, 2014).

4 Metodología

La recolección de datos en la fase de experimentación se llevó a cabo en un curso de posgrado en matemática educativa (maestría), en el que participaron seis profesores quienes se encontraban inscritos como estudiantes de tiempo completo. En la tabla 3.1 se proporciona información específica con respecto a la formación y actividad profesional, de cada uno de los participantes en el estudio. Los profesores poseían conocimientos básicos sobre el uso de Excel en la resolución de problemas, adquiridos en al menos uno de sus cursos de maestría; sin embargo, ninguno de ellos había utilizado esta herramienta en su práctica docente.

Un aspecto que es importante considerar, es que las características de los participantes, y del contexto, influyeron en las conclusiones que se derivan de este estudio. Al ser estudiantes de tiempo completo pudieron trabajar de forma consistente con las actividades durante un periodo de tiempo superior al que generalmente se puede conseguir al trabajar con estudiantes de bachillerato, con profesores en servicio o con participantes voluntarios. Además, la mayor parte de ellos contaba con una formación profesional en matemáticas o áreas afines, por ello se debe tener cautela al extender los resultados a una población con una formación profesional diferente.

Por otra parte, el contexto también influyó en los resultados, ya que los participantes supieron que las actividades que realizarían, servirían de base para un trabajo de investigación, por lo que podría haber una mayor disposición para abordar las tareas, para buscar diversas formas de solucionar un problema, de utilizar diferentes formas de justificación o para extender un problema. Por ejemplo, si las mismas actividades se implementaran con estudiantes que tuvieran la obligación de abordarlas, el proceso de solución podría diferir del mostrado por los participantes de este trabajo.

Tabla 3.1 Características de los participantes

Seudónimo	Formación profesional	Experiencia profesional
Daniel	Ingeniería Industrial	Experiencia docente en bachillerato en instituciones privadas. Experiencia no docente en una empresa del ramo textil.
Emilia	Actuaría	Experiencia docente en bachillerato público.
Juana	Licenciatura en Admon. Master en formación profesional de profesores de centros educativos Diplomado en habilidades didácticas para la calidad educativa.	Experiencia docente en bachillerato en instituciones privadas. Experiencia profesional no docente en el área de recibo e inventarios en una empresa de productos alimenticios.
Miguel	Contaduría Actuaría	Experiencia docente en el nivel bachillerato en instituciones públicas, en el nivel superior e impartiendo asesorías particulares. Experiencia profesional no docente: auditor de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores.
Jacobo	Licenciatura en Matemáticas	Sin experiencia docente.
Sofía	Actuaría	Experiencia profesional no docente en el área de seguros e investigación de operaciones. Experiencia docente en nivel superior, bachillerato y secundaria. Anfitriona en sala de matemáticas del museo UNIVERSUM.

Fuente: Elaboración propia

Los participantes abordaron la tarea propuesta en dos sesiones de trabajo, de dos horas cada una. Las actividades se llevaron a cabo en un laboratorio de cómputo donde cada participante dispuso de una computadora que contó con procesador de textos, navegador de Internet y Excel para desarrollar las actividades propuestas. En cada una de las sesiones, los profesores resolvieron problemas mediante el empleo de las herramientas disponibles. Se propuso que los participantes trabajaran por parejas, integradas de acuerdo con su preferencia. Se consideró apropiado el trabajo en parejas porque mediante éste se promueve el intercambio y discusión de ideas, así como el análisis de los problemas desde diversos puntos de vista. No hubo un tiempo determinado para la fase de trabajo en parejas, el cual dependió de las dificultades que enfrentaron los participantes al resolver el problema.

Una vez que todos los participantes habían logrado un avance significativo en la solución del problema, un integrante de la pareja expuso ante todo el grupo las aproximaciones utilizadas, las conjeturas o problemas formulados, así como la justificación de esos resultados ante el resto de los integrantes del grupo; quienes hacían comentarios, preguntas y observaciones respecto del trabajo de sus compañeros, así como comparaciones con el trabajo propio. Durante las exposiciones se utilizó un proyector para mostrar el trabajo realizado y se empleó el pizarrón en los casos necesarios.

Al término de cada sesión, los profesores enviaron, vía correo electrónico, los archivos que generaron, y entregaron una copia de sus notas en la sesión siguiente.

Cuando una actividad quedó inconclusa al término de una sesión, los participantes debían continuar con la búsqueda de soluciones, la elaboración de justificaciones o la formulación de problemas, durante el periodo de tiempo entre una sesión y otra. Además, elaboraron un reporte del trabajo realizado durante cada sesión; así como comentarios y reflexiones con respecto al trabajo de sus compañeros, en caso de haberse realizado una presentación plenaria de los resultados o avances en la solución de los problemas. Los reportes se entregaron a los investigadores en la sesión siguiente y con éstos se integró una bitácora para cada estudiante.

Las actividades incluyeron trabajar situaciones y problemas obtenidos de artículos de investigación, libros, páginas de Internet y problemas formulados por los participantes. Los problemas iniciales se eligieron de forma que los datos provinieran de un contexto hipotético, donde la situación se construye a partir de una serie de suposiciones acerca del comportamiento de las variables o parámetros que explican el desarrollo de la situación y donde, a su vez, el comportamiento de los parámetros no se basa en datos o información real o de laboratorio (Barrera-Mora y Santos-Trigo, 2001).

Otra consideración importante para la selección de la tarea fue que representara una situación problemática para los participantes, es decir, que ellos no contaran con un procedimiento o algoritmo que les permitiera obtener una solución inmediata al aplicarlo y, por tanto, fuera relevante el empleo de las herramientas tecnológicas, así como la experimentación y la formulación de conjeturas; y que pudieran implementarse diversas rutas de solución del problema y, con base en el contraste de éstas, fuera posible problematizar ideas o conceptos matemáticos (NCTM, 2000). A continuación, se enuncia la tarea inicial, así como una extensión de la misma, que resolvieron los participantes en la investigación:

Tarea inicial. A un paciente se le inyecta una droga, novocaína, como un anestésico para su tratamiento dental. Inmediatamente después de recibir la inyección, su riñón inicia un proceso de eliminación de la droga. El dentista le dice al paciente que su riñón eliminará de su sangre aproximadamente 20% de la droga cada hora. Si el paciente recibe una inyección de 500 mg de novocaína ¿Qué cantidad de la droga permanecerá en su organismo después de 24 horas de haber recibido la inyección? (Adaptado de Barrera-Mora y Santos-Trigo, 2001).

Extensión de la tarea inicial. Un paciente toma una píldora cada cuatro horas, la cual contiene 200 mg. de cierta sustancia activa. Si se supone que la sustancia activa va al torrente sanguíneo de forma inmediata y que cada 4 horas el riñón elimina 20% de la sustancia que se encuentra en el torrente sanguíneo, ¿cuál es la cantidad de sustancia presente en el organismo del paciente al cabo de una semana de tomar el medicamento?

Es importante destacar que en Barrera-Mora y Santos-Trigo (2001) se elaboró una ruta hipotética de aprendizaje y una propuesta de protocolo de implementación, sin que se haya implementado la tarea. En este trabajo, seis profesores abordaron la tarea y se reportan los elementos del pensamiento matemático que pusieron en práctica al tratar de encontrar una solución.

Para abordar la tarea los participantes necesitan poner en práctica elementos del pensamiento algebraico para expresar la información del problema como una función, recursiva o definida explícitamente; del pensamiento geométrico y el estudio de procesos de cambio, al tratar de visualizar el comportamiento en el tiempo de las variables de interés (la cantidad de medicamento en la sangre).

El proceso de solución de este problema puede requerir de la utilización de Excel, por las facilidades que ofrece para efectuar cálculos numéricos y para relacionar las representaciones numérica y gráfica de los datos. Este problema ofrece la oportunidad de que los estudiantes observen cambios o invariantes en los comportamientos de las variables relevantes al modificar las hipótesis o supuestos iniciales. También, les puede permitir comprender que la construcción de un modelo matemático depende de las simplificaciones o de las hipótesis que se formulan respecto del fenómeno de interés.

5 Resultados

Esta sección se divide en dos subsecciones. En la primera, se aborda el análisis de la tarea inicial; mientras que en la segunda, se examinan los resultados de una extensión en la que el medicamento se suministra en varias ocasiones, considerando algunas omisiones y duplicación de la dosis.

5.1 Concentración de medicamento en la sangre (una sola toma)

Al abordar la tarea, todas las parejas siguieron aproximaciones parecidas. Por un lado, realizaron las operaciones para calcular la cantidad de medicamento en la sangre para algunos casos particulares, realizaron operaciones aritméticas y obtuvieron expresiones que les permitieron identificar un patrón y generalizar la forma de obtener la cantidad de medicamento presente en la sangre para cualquier hora después de la aplicación (Tabla 3.2). Con base en la expresión $500*(1-0.2)^{24}$, obtuvieron la respuesta a la pregunta planteada en el problema. Es importante notar que, en el equipo 3 (Jacobo y Sofía), hicieron explícita la naturaleza recursiva del problema en su aproximación con lápiz y papel, y que realizaron transformaciones con las representaciones numéricas para obtener una fórmula no recursiva. Por otra parte, en el equipo 2 (Miguel y Juana), extendieron el resultado algebraico de este problema particular y propusieron una fórmula que modela la concentración de medicamento en la sangre para cualquier concentración inicial y cualquier proporción de eliminación, $C_n = C_0(1-i)^n$.

Tabla 3.2 Identificación de patrones y generalización de resultados

Emilia y Daniel	$t_0 = 500$ mg. tiene novocaína en el organismo $t_1 = 500 - 500(.20) = 500(1-.20)$ cant. de novocaína después de 1 hr $t_2 = 500(1-.20) - 500(1-.20).20$ $= 500(1-.20)(1-.20)$ $= 500(1-.20)^2$ $t_3 = 500(1-.20)^2 - 500(1-.20)^2(.20)$ $= 500(1-.20)^2(1-.20)$ $= 500(1-.20)^3$ $t_n = 500(1-.20)^n$ $t_{24} = 500(1-.20)^{24}$ $= 2.36118$ mg.
Juana y Miguel	Cantidad inicial 500 mg $C_0 = 500$ $C_1 = 500 - 500(.20) = 500(1-.20) = 500(.80)$ $C_2 = C_1 - C_1(.20) = 500(1-.20) - 500(1-.20)(.20) = 500(1-.20)(1-.20)$ $= 500(1-.20)^2$ $C_n = 500(1-.20)^n$ o sea $C_n = C_0(1-i)^n$ donde i es el porcentaje que se elimina cada hora Entonces, para los datos del problema tenemos $C_{24} = 500(1-.20)^{24}$ Al inicio de la hora 24, habrá 2.3611 mg

Sofía y Jacobo	$a_0 = 500$ mg. $a_1 = a_0 - 0.2a_0 = 500 - 0.2(500)$ $a_2 = a_1 - 0.2a_1 = [a_0 - 0.2a_0] - 0.2[a_0 - 0.2a_0]$ $= [a_0 - 0.2a_0](1 - 0.2)$ $a_3 = a_2 - 0.2a_2 = [a_0 - 0.2a_0](1 - 0.2) - 0.2[a_0 - 0.2a_0](1 - 0.2)$ $= [a_0 - 0.2a_0](1 - 0.2)(1 - 0.2)$ $= a_0(1 - 0.2)(1 - 0.2)(1 = 0.2)$ $= a_0(1 - 0.2)^3$ $\vdots$ $a_{24} = a_0(1 - 0.2)^{24}$

Fuente: Elaboración propia

Todos los equipos también implementaron en Excel un procedimiento recursivo para encontrar la concentración de medicamento en el organismo del paciente después de 24 horas. Los equipos 1 y 2 colocaron en una celda el valor 500 (celda B1) y en otra celda (B2) colocaron la fórmula B1-0.2*B1, la cual arrastraron para obtener como respuesta (en la celda B25) el valor 2.361183241. En el caso del equipo 3, el procedimiento en Excel se implementó de tal forma que pudieran variar la concentración inicial del medicamento, así como el porcentaje de eliminación. El trabajo efectuado en Excel, en el caso de todos los equipos, se utilizó para contrastar el resultado obtenido con la fórmula que derivaron en papel y lápiz ($500*(1-0.2)^{24}$) y el procedimiento recursivo realizado con la herramienta.

Adicionalmente, Miguel y Juana se interesaron por graficar los datos que obtuvieron en Excel, además ajustaron esos datos con la herramienta "tendencia" y obtuvieron la expresión $y = 500e^{-0.2231x}$.En el reporte de la sesión, los integrantes del equipo 3 (Jacobo y Sofía), se interesaron por verificar que la función exponencial obtenida por Miguel y Juana, al ajustar los datos del problema, reflejaba adecuadamente el comportamiento de los datos. Ellos elaboraron una tabla en la que contrastaron los resultados para la concentración de medicamento en la sangre, obtenidos con los modelos $y = 500(1 - 0.2)^n$ y $y = 500e^{-0.2231x}$, y calcularon las diferencias entre los modelos discreto y continuo, resaltando que la suma de los errores entre los datos observados y los esperados (a partir del modelo continuo) no es cero, como ocurre en el modelo de regresión lineal. Esto es evidencia de que este equipo, con el uso del software, intentó establecer una conexión entre sus conocimiento previos. Jacobo y Sofía notaron que una consecuencia interesante del modelo exponencial es que la sangre nunca se depura totalmente del fármaco, porque una función exponencial negativa nunca toma el valor cero.

Tabla 3.3 Elementos del pensamiento matemático (Tarea 1)

Emilia y Daniel	Identificaron un patrón y lo generalizaron con la expresión $t_n = 500(1 - 0.2)^n$. Implementaron un procedimiento recursivo en Excel para contrastar el resultado con el obtenido mediante la expresión algebraica que obtuvieron con papel y lápiz.
Juana y Miguel	Identificaron un patrón y lo generalizaron con la expresión $C_n = 500(1 - 0.2)^n$. Generalizaron la expresión anterior al escribir una fórmula útil para cualquier concentración inicial y proporción de eliminación de medicamente por hora, $C_n = C_0(1 - i)^n$. Implementaron un procedimiento recursivo en Excel para contrastar el resultado con el obtenido mediante la expresión algebraica que obtuvieron con papel y lápiz. Graficaron los datos y los ajustaron mediante una función exponencial, que de acuerdo con su criterio es la que proporciona el mejor ajuste. Se preguntaron cómo calcular la concentración de medicamento en la sangre para fracciones de hora.
Sofía y Jacobo	Identificaron un patrón y lo generalizaron mediante la expresión $a_{24} = a_0(1 - 0.2)^{24}$. Reconocieron la naturaleza recursiva del problema y operaron los registros de representación para obtener una fórmula cerrada. Se interesaron por determinar qué tan bien ajusta el modelo $y = 500e^{-0.2231x}$ a los datos del problema. Crearon una tabla para obtener las diferencias entre los modelos discreto y continuo, conjeturaron que la suma de los errores sería cero como en el modelo de regresión lineal, pero rechazaron su conjetura al visualizar los datos de su tabla.

Fuente: Elaboración propia

5.2 Concentración de medicamento en la sangre después de varias tomas

Después de abordar la primera tarea, los investigadores sugirieron una extensión, cuyo enunciado es el siguiente:

Un paciente toma una píldora cada cuatro horas, la cual contiene 200mg. de cierta sustancia activa. Si se supone que la sustancia activa va al torrente sanguíneo de forma inmediata y que cada 4 horas el riñón elimina 20% de la sustancia que se encuentra en el torrente sanguíneo, ¿cuál es la cantidad de sustancia presente en el organismo del paciente al cabo de una semana de tomar el medicamento?

Este problema difiere en varios aspectos del problema anterior, entre ellos, que el periodo de observación no es una hora, sino cada cuatro horas; además, se agrega la condición de que en cada periodo, se vuelve a introducir al organismo una nueva cantidad de medicamento y el lapso en el que se busca conocer la cantidad de medicamento es una semana. Adicionalmente, se planteó a los participantes el problema de determinar qué ocurre si el paciente olvidaba tomar el medicamento en la primera toma del segundo y del cuarto día, y por esta razón, tomaba el doble del medicamento en cada toma subsecuente.

Para abordar la tarea, en el equipo 1 (Daniel y Emilia), implementaron un procedimiento recursivo en Excel (Figura 3.1). En la celda B1, registraron la concentración de medicamento inicial de 200 mg, mientras que en la celda B2 declararon la fórmula 200+0.8*B1, y mediante el arrastre se obtuvo que la cantidad de medicamento presente en el organismo del paciente, después de 42 tomas, era aproximadamente de un gramo. Estos profesores también propusieron un modelo algebraico del problema y notaron que la cantidad de medicamento en la n-ésima toma se puede calcular mediante la expresión $t_n = 200 + 200(0.8) + 200(0.8)^2 + \cdots + 200(0.8)^{n-1}$, que es una serie geométrica cuyo valor se puede obtener mediante la fórmula $t_n = 200\left(\frac{1-(0.8)^n}{1-0.8}\right)$.

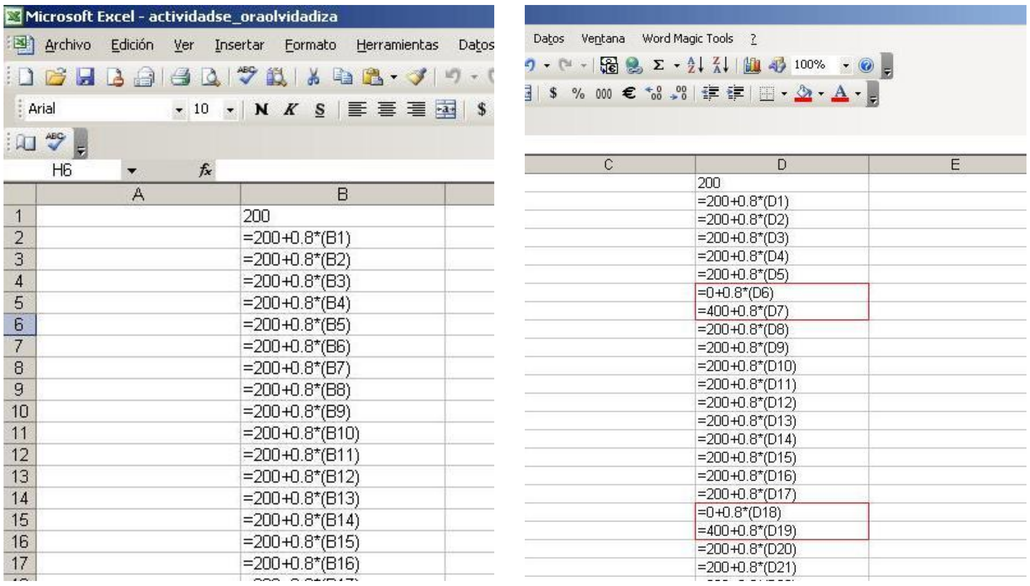
Para responder a la pregunta: ¿qué ocurre con la concentración de la sustancia activa en el organismo si al paciente se le olvida tomar el medicamento? Daniel y Emilia copiaron a otra columna de su tabla en Excel el procedimiento que implementaron para responder a la pregunta previa, y modificaron las fórmulas de las celdas que representan la séptima, octava, decimonovena y vigésima tomas (primera y segunda tomas del segundo día; así como, la primera y segunda tomas del cuarto día, respectivamente). La conclusión de los participantes fue que, al final de la semana, la concentración de medicamento en la sangre del paciente supera un gramo. En este caso, los participantes no plantearon un modelo algebraico. Los investigadores preguntaron el por qué no habían elaborado alguna gráfica para visualizar la evolución de la cantidad de medicamento presente en la sangre del paciente.

Respondieron que el resultado numérico les pareció suficiente para dar respuesta al problema.
Al preguntar a los profesores, cuáles serían las consecuencias para el paciente, en caso de olvidar tomar el medicamento y duplicar la dosis en la siguiente toma, Emilia comentó que no habría ningún efecto porque la concentración del medicamento es aproximadamente la misma al final del periodo, con olvidos y sin olvidos, se observa que esta profesora centra su atención únicamente en las cantidades, y no en los posibles efectos reales de que se incremente la concentración de cierta sustancia activa en el organismo de una persona.

Investigador: […] ¿Qué consecuencias creen que pudiera tener para la persona que está tomando el medicamento el no haberlo tomado y tomar el doble de la dosis en la siguiente toma, con base en esos resultados que tienen ahí de su modelo?… ¿o consideran que no hay ningún efecto?

Emilia: Como que no **hay** ningún efecto, ¿no? porque sigue teniendo un miligramo [quiso decir un gramo] en ambos casos, al final de las cuarenta y dos tomas ¿no? [al tomar el medicamento de acuerdo con la prescripción médica y cuando olvida realizar alguna toma], o sea, no siento que haya un, algún efecto.

Figura 3.1 Procedimientos implementados en Excel para resolver el problema



Fuente: Elaboración propia con base en los archivos de Emilia y Daniel

Para resolver el problema, en el equipo 2 (Miguel y Juana), organizaron la información del problema como se muestra en la tabla 3.4, e identificaron que la cantidad de medicamento presente en el organismo del paciente en la n-ésima toma, se puede obtener mediante una serie geométrica. Los profesores identificaron un patrón y lo generalizaron para obtener que $a_n = 200\left(1+\sum_{i=1}^{n}(0.8)^i\right)$, donde a_n es la cantidad de fármaco acumulada después de la n-ésima dosis, y *n* es el número de tomas o dosis ingeridas. Además, hicieron uso de su conocimiento sobre series geométricas para determinar que la cantidad de medicamente presente en el organismo del paciente al cabo de una semana se puede obtener con la expresión $200\left[(0.8)^{42}-1\right]/\left[0.8-1\right]$.

Posteriormente, implementaron un procedimiento recursivo en Excel para determinar la cantidad de medicamento presente en la sangre después de 42 tomas. En una columna colocaron el número de toma, en otra columna la cantidad de sustancia activa que se ingiere en cada toma y posteriormente una tercera columna con la cantidad de medicamento presente en la sangre. Esta misma tabla se modificó para responder a la pregunta de qué pasa si el paciente olvida tomar el medicamente, simplemente al colocar un cero en la cantidad de miligramos correspondiente a la toma 7 y 19, así como 400 en la cantidad de miligramos correspondientes a las tomas 8 y 20 (Tabla 3.4, tercera fila). Estos participantes también elaboraron una gráfica para visualizar el comportamiento de los datos. Mediante esta representación se dieron cuenta del comportamiento asintótico del fenómeno, e identificaron que la cantidad de medicamento en el organismo a largo plazo se estabiliza en mil miligramos, o un gramo de la sustancia activa.

Tabla 3.4 Evidencia del trabajo de Miguel y Juana

Modelo algebraico (sin olvidos)

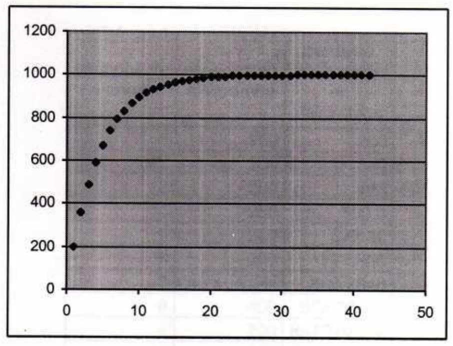
De acuerdo a los datos del problema, observamos que las condiciones siguen el siguiente patrón, qué representa una progresión geométrica:

$$a_1 = 200 = (200)(1)$$
$$a_2 = 200 + (200)(0.8)$$
$$a_3 = 200 + (200)(0.8) + (200)(0.8)^2$$
$$a_4 = 200 + (200)(0.8) + (200)(0.4)^2 + (200)(0.8)^3$$
$$\vdots$$
$$a_{42} = 200 + (200)(0.8) + (200)(0.8)^2 + \ldots + 200(0.8)^{42}$$

Haciendo un análisis se deduce una fórmula general es $a_n = 200(1 + \sum_{i=1}^{n} (0.8)^i)$

Modelo Tabular y gráfico(sin olvidos)

1	200
2	360
3	488
4	590,4
5	672,32
6	737,856
7	790,2848
8	832,22784
9	865,782272
10	892,625818
11	914,100654
12	931,280523
13	945,024419
14	956,019535

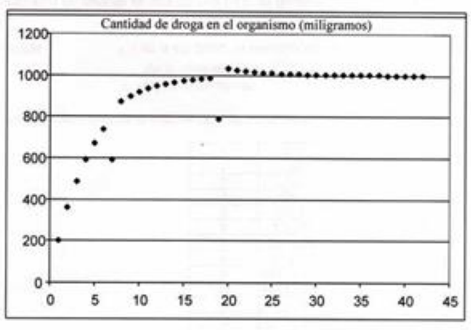


Modelo tabular en Excel (con olvidos y duplicación de la dosis)

Por lo que en el periodo 42 nos queda 1000.23036, esto se puede comprobar en la siguiente tabla:

periodos de 4 horas	cantidad en miligramos	cantidad acumulada en miligramos
1	200	200
2	200	360
3	200	488
4	200	590.4
5	200	672.32
6	200	737.856
7		590.2848
8	400	872.22784
9	200	897.782272
10	200	918.225818
11	200	934.580654
12	200	947.664523
13	200	958.131619
14	200	966.505295
15	200	973.204236
16	200	978.563389
17	200	982.850711

Modelo gráfico en Excel (con olvidos y duplicación de la dosis)



Fuente: Elaboración propia con base en los reportes de Miguel y Juana

A diferencia del primer equipo, Miguel y Juana implementaron un procedimiento algebraico para responder a qué ocurre con la concentración de la sustancia activa en el organismo cuando el paciente olvida tomar el medicamento, mediante lo que Miguel llamó “una ecuación de valor”, una herramienta utilizada en matemáticas financieras. El procedimiento para plantear la ecuación es el siguiente, a la cantidad de medicamento presente en la sangre, suponiendo que se realizaron las tomas de acuerdo con la prescripción médica, se le resta la cantidad de medicamento de la toma 7 y 19 que queda en el organismo al finalizar la semana y se le suma la cantidad de medicamento adicional que se consumió en los periodos 8 y 20.

Entonces, la cantidad de medicamento en la sangre suponiendo el olvido de las tomas 7 y 19, así como la duplicación de la dosis en las tomas 8 y 20 es igual a:

$$\frac{200\left[(0.8)^{42}-1\right]}{0.8-1}-200(0.8)^{35}-200(0.8)^{23}+200(0.8)^{34}+200(0.8)^{22}\approx 1000.23 \quad \ldots \quad (1)$$

Posteriormente, compararon los resultados obtenidos con Excel y con (1), obteniendo los mismos valores y convenciéndose así, de la validez del proceso de solución. Miguel fue capaz de llevar a cabo este proceso de razonamiento debido a sus conocimientos acerca del interés compuesto y ecuaciones de valor, al observar un comportamiento análogo entre este fenómeno y la concentración del medicamento en la sangre. Un aspecto relevante del trabajo del equipo 2 es que los participantes justificaron el comportamiento asintótico del modelo, con base en los supuestos o hipótesis del mismo.

Además, interpretaron el efecto que podrían tener los aumentos o disminuciones bruscos de la cantidad de medicamento presente en la sangre del paciente. Miguel consideró que no hay algún efecto en la salud del paciente al olvidar realizar una toma y después incrementar la dosis al doble, y justificó su razonamiento explicando que finalmente la concentración de medicamento se estabilizará en 1000 mg.

El equipo 3, formado por Jacobo y Sofía, elaboró una tabla en Excel, la columna "inicio" indica la cantidad de medicamento presente en la sangre al principio del n-ésimo periodo, después de haber recibido la dosis de medicamento correspondiente a ese periodo. Por otra parte, la columna "fin" indica la cantidad de medicamento en la sangre al final del periodo de cuatro horas.

Para simplificar la expresión que determina la cantidad de medicamento presente en la sangre del paciente, los estudiantes utilizaron el hecho de que la suma $S_n = 1+r+r^2+\cdots+r^r$, puede expresarse como $S_n = \left(1-r^{n+1}\right)/(1-r)$. Entonces $a_n = 200\left(\left(1-0.8^{n+1}\right)/(1-0.8)\right)$. Al implementar esta fórmula en Excel, los estudiantes verificaron que proporcionaba los mismos resultados que con el procedimiento recursivo elaborado previamente. Posteriormente, los participantes graficaron los datos y observaron que la cantidad de medicamento presente en la sangre no supera los 1000 mg.

Con respecto a la situación de olvido del paciente y la ingesta del doble del medicamento, Jacobo y Sofía modificaron los valores de las tomas correspondientes en el modelo elaborado en Excel, para que se satisficieran las condiciones del problema. Sofía consideró que sí podría haber algún efecto en la vida real, al llevar a cabo esta forma de consumir el medicamento, ya que si la concentración de sustancia activa disminuye, debajo de cierto nivel, podría perder su efecto terapéutico y en caso de las alzas bruscas, el exceso de sustancia activa podría ser tóxico.

Tabla 3.5 Evidencia del trabajo de Sofía y Jacobo

Modelo tabular en Excel (sin olvidos)

A	B	C	D
Periodo	Toma	Inicio	Fin
0	200	200	=C2*0.8
1	200	=B3+D2	=C3*0.8
2	200	=B4+D3	=C4*0.8
3	200	=B5+D4	=C5*0.8
41	200	=B43+D42	=C43*0.8

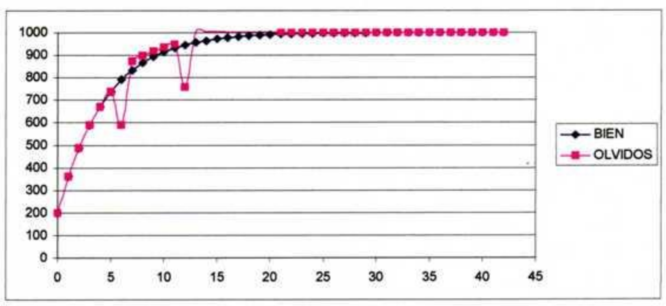
Modelo tabular en Excel (con olvidos y duplicación de la dosis)

Se construyó el modelo considerando T_k=0 en k = 6 y k = 12 y 400 en k = 7, 13, para simular los olvidos y tomas "acumuladas".

0.8	TOMA	INICIO	FIN
0	200	200	160
1	200	360	288
2	200	488	390.4
3	200	590.4	472.32
4	200	672.32	537.856
5	200	737.856	590.2848
6	0	590.2848	472.22784
7	400	872.22784	697.782272
8	200	897.782272	718.225818
9	200	918.225818	734.580654
10	200	934.580654	747.664523
11	200	947.664523	758.131619
12	0	758.131619	606.505295
13	400	1006.50529	805.204236
14	200	1005.20424	804.163389
15	200	1004.16339	803.330711
16	200	1003.33071	802.664569
17	200	1002.66457	802.131655
18	200	1002.13166	801.705324
19	200	1001.70532	801.364259

Modelo gráfico en Excel (con olvidos y duplicación de la dosis)

Se construyeron las gráficas para comparar la concentración en la sangre, obteniendo:



Los olvidos provocan caídas bruscas en la concentración y las recuperaciones alzas bruscas, aunque no muy arriba de la concentración en caso no interrumpido. A largo plazo no tienen efecto pues la concentración tiende a 1000 mg.

Fuente: Elaboración propia con base en los reportes de Jacobo y Sofía

Comentarios. Se observó que mediante la representación algebraica de un problema con un procedimiento recursivo, la obtención de una fórmula implica que el estudiante lleve a cabo un proceso de identificación de patrones. Por otra parte, cabe destacar que del trabajo de Daniel y Emilia se puede concluir que una herramienta como Excel permite a los estudiantes abordar un número más amplio de problemas que los que pueden abordar únicamente con papel y lápiz. Por ejemplo, al resolver el problema con la hipótesis adicional del olvido de tomas y en incremento de la dosis, bastó con copiar el procedimiento utilizado para resolver el problema previo en otro lugar de la tabla y modificar la fórmula en alguna de las celdas para adaptar el procedimiento a los nuevos supuestos y así solucionar el problema, y sin embargo, no fueron capaces de traducir estas acciones llevadas a cabo con la herramienta para modificar el procedimiento algebraico. El elemento que permite explorar una cantidad mayor de datos del problema con el uso de Excel, es que la herramienta mantiene implícitas ciertas relaciones algebraicas entre los datos, lo cual es posible dada la capacidad para construir lo que Moreno-Armella y Hegedus (2009) denomina *representaciones ejecutables de objetos matemáticos*.

Tabla 3.6 Elementos del pensamiento matemático (Extensión de la tarea 1)

Daniel y Emilia	Identificación y generalización de un patrón para representar a la cantidad de medicamento como una serie geométrica. Elaboración de un modelo tabular con Excel para abordar el caso de los olvidos y duplicación de la dosis.
Miguel y Juana	Identificación y generalización de un patrón para representar a la cantidad de medicamento como una serie geométrica. Uso de diferentes representaciones para abordar los problemas (tabular, gráfica y algebraica). Mediante una ecuación de valor abordaron analíticamente el caso de los olvidos y duplicación de la dosis.
Jacobo y Sofía	Identificación y generalización de un patrón para representar a la cantidad de medicamento como una serie geométrica. Uso de representaciones tabulares y gráficas para abordar los problemas. Elaboración de una representación gráfica para analizar el comportamiento de los datos.

Fuente: Elaboración propia

6 Agradecimiento

Los autores agradecemos el apoyo brindado para la realización de este trabajo a través de los proyecto Conacyt-168543 (México), y del Plan Nacional I+D+I del MCIN (España) EDU2015-65270-R y EDU2017-84276-R.

7 Conclusiones

El uso de Excel favoreció la integración de aproximaciones numéricas, gráficas y algebraicas. La herramienta permitió a los estudiantes implementar de forma numérica procedimientos recursivos, mediante el establecimiento de una “fórmula” general, la cual, posteriormente, sólo requiere de transformarse recursivamente, en las celdas adyacentes, mediante el arrastre. Esta característica para implementar procedimientos recursivos, propia de las hojas de cálculo, puede ayudar a los estudiantes, con pocas habilidades para realizar operaciones numéricas, a resolver problemas que no podrían abordar con papel y lápiz. Esto es una muestra del efecto mediador de la herramienta en los procesos de resolución de un problema, particularmente representado por el arrastre que permite amplificar las capacidades de cálculo, y reorganizar la formulación de procesos recursivos. En el ambiente de papel y lápiz los procedimientos que involucran cálculos algebraicos son difíciles de implementar para estudiantes que no poseen fluidez procedimental, ya que obtener relaciones funcionales con base en fórmulas recursivas, requiere de recursos tales como: cálculo con series o solución de ecuaciones en diferencias (ecuaciones de valor).

En el problema donde se supone que hay olvidos y duplicación de la dosis, resulta complicado elaborar un modelo algebraico, si no se toma en cuenta que el proceso de eliminación del medicamento es lineal, debido a que la tasa de eliminación es constante. Al respecto, es importante señalar que una definición recursiva de una función es, en términos pedagógicos, más complicada que una fórmula cerrada, aunque los estudiantes tienden a considerar, en primer término, una función como recursiva, más que en su forma cerrada (Noss, 2001). Nos parece que una de las dificultades pedagógicas al definir una función en forma recursiva, radica en que la obtención de una forma cerrada, requiere, en varios casos, de resolver ecuaciones en diferencias. El uso de una herramienta como Excel, puede ser una primera aproximación para abordar procesos recursivos, lo cual es una forma de amplificar las capacidades aritméticas de un resolutor. Se observó que los participantes lograron conectar procedimientos aritméticos en papel y lápiz con el uso de fórmulas en Excel, y en consecuencia obtuvieron medios para verificar por sí mismos la validez de sus resultados.

Se observó que algunas características de Excel, en particular la transformación de fórmulas mediante el arrastre, permitió a los estudiantes abordar problemas que requieren de recursos matemáticos que muchas veces exceden aquellos que poseen estudiantes promedio de bachillerato.

Lo anterior es posible, ya que las herramientas operan con relaciones matemáticas de forma implícita (recursividad), y no es necesario, en una primera aproximación, que el estudiante las conozca para obtener o aproximar la solución de un problema, o para visualizar una relación entre variables. Además, la ejecutabilidad de algunas representaciones (obtener la gráfica de un conjunto de datos), puede favorecer el desarrollo de procesos cualitativos de análisis (Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2016). El que la herramienta mantenga implícitas diversas relaciones matemáticas puede aportar elementos para que el estudiante desarrolle nuevas habilidades, como elegir una variable independiente, en una relación funcional, que sea “apropiada” para resolver un problema particular. En el caso de los problemas en contextos hipotéticos, las herramientas no tienen influencia aparente en la determinación de las hipótesis o supuestos que permiten modelar matemáticamente el problema; ya que la actividad con las herramientas parte de la consideración de un modelo matemático.

En lo que respecta a los aspectos ontológico y didáctico, Excel apoyó el desarrollo de diferentes elementos del pensamiento matemático. Sin embargo, en lo que concierne a la generación de nuevos problemas, el alcance de Excel fue limitado en la generación de nuevos problemas, ya que en las tareas propuestas se utilizó principalmente como una herramienta para implementar procesos que permitieran aproximar una solución o como medio para verificar los resultados obtenidos mediante procedimientos algebraicos. Cuando se buscó determinar la concentración de medicamente en la sangre, suponiendo diversas tomas, el ajuste de los datos mediante una función continua ($y = 500e^{-0.2231x}$), permitió a Miguel formular el problema para determinar la concentración de medicamento en la sangre considerando cualquier periodo de tiempo. Esta herramienta se utilizó para formular conjeturas relacionadas con el comportamiento a largo plazo de un fenómeno. Por ejemplo, los estudiantes conjeturaron cómo se estabiliza la concentración de medicamento en la sangre de un paciente, con base en la integración de aproximaciones numéricas y gráficas. En este caso, el uso de la herramienta favoreció que los estudiantes dispusieran de varias fuentes para contrastar la validez de los resultados, por sí mismos, sin esperar que fuese el profesor u otro experto quien avalara esos resultados.

Asimismo, el uso de esta herramienta permitió a los participantes variar las hipótesis o supuestos iniciales de los problemas, con el objetivo de establecer el efecto de estas variaciones. Se pudo constatar que el uso de Excel amplió algunos elementos del pensamiento matemático, como son: identificar y representar información, resolver casos particulares, formular conjeturas y aportar elementos para justificar y comunicar resultados, lo cual es un indicador del desarrollo de entendimiento matemático.

Las principales dificultades que experimentaron los participantes al abordar las tareas fueron: (1) en el caso del problema con olvidos, solo un participante pudo modelar algebraicamente la situación y cuando realizó la exposición plenaria de su resultado, los demás profesores no comprendieron la formulación del resultado, que como se explicó en la sección de resultados, estuvo basado en la linealidad del proceso de eliminación; (2) en este mismo problema, todos los participantes, excepto Sofía, no advirtieron de los riesgos que supone duplicar una dosis, la cual puede traer graves consecuencias para la salud, es decir, los profesores no supieron interpretar los resultados matemáticos en términos de la situación de referencia.

8 Referencias

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), International handbook of mathematics education (pp. 469-501). Dordrecht: Kluwer Academic.

Barrera-Mora, F. y Santos-Trigo, M. (2001). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamentos. En Ministerio de Educación Nacional, Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media (Ed.), Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas (pp. 166-185). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Berger, W. (2014). A more beautiful question: The power of inquiry to spark breakthrough ideas. New York, NY: Bloomsbury.

Borwein, J. M., & Bailey, D. H. (2003). Mathematics by experiment: Plausible reasoning in the 21st Century. Natick, MA: AK Peters.

Calder, N., Brown, T., Hanley, U., & Darby, S. (2006). Forming conjectures within spreadsheet environment. Mathematics Education Research Journal, 18(3), 100-116.

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2016). Youngster solving mathematical problems with technology. Cham: Springer.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nichols, J., Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second grade mathematics project. Journal for Research in Mathematics Education, 22, 3-29.

Devlin, K (2017). All the mathematical methods I learned in my university math degree became obsolete in my lifetime. The Huffington Post. Recuperado el 2 de abril de 2018 de https://www.huffingtonpost.com/entry/all-the-mathematical-methods-i-learned-in-my-university_us_58693ef9e4b014e7c72ee248

Edwards, J., Flores, A. (2018). Four corners in learning mathematics with technology. Ohio Journal of School Mathematics, 78, 45-51.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., y Human, P. (1997). Making sense: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth, NH: Heinemann.

Horton, R. M., & Leonard, W.H. (2005). Mathematical Modeling in Science: Using Spreadsheets to Create Mathematical Models and Address Scientific Inquiry. Science Teacher, 72(5), 40-45.

Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), Task design in mathematics education. New ICMI Study Series (pp. 191–225). New York: Springer.

Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A new framework for teacher knowledge. Teachers College Record, 108 (6), 1017-1054.

Moreno-Armella, L. y Elizondo-Ramírez, R. (2017). La geometría al encuentro del aprendizaje. Educación Matemática, 29(1), 9-36.

Moreno-Armella, L. & Hegedus, S. J. (2009). Co-action with Digital technologies. ZDM Mathematics Education, 41(4), 505-519.

Moreno-Armella, L., & Santos-Trigo, M. (2008). Democratic access and use of powerful mathematics in an emerging country. In L. D. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education, 2nd Edition (pp. 319-351). New York: Taylor & Francis.

Moreno-Armella, L., & Santos-Trigo, M. (2016). The use of digital technologies in mathematical practices: Reconciling traditional and emerging approaches. Handbook of International Research in Mathematics Education, 595-616.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). Principles and standards for schools mathematics. Reston, VA: NCTM.

Nobre, S., Amado, N., & Carreira, S. (2012). Solving a contextual problem with the spreadsheet as an environment for algebraic thinking development. Teaching Mathematics and its Applications, 31(1), 11-19.

Noss, R. (2001). For a Learnable Mathematics in the Digital Culture. Educational Studies in Mathematics, 48, 21-46.

Oliveira, M., & Nápoles, S. (2017). Functions and mathematical modeling with spreadsheets. Spreadsheets in Education (eJSiE), 10(2), 1-30.

Pittalis, M., Mousoulides, N., & Christou, C. (2005). Integrating technology in a mathematics cognitive intervention program. Proceedings of the Fifth Conference of the European society for Research in Mathematics Education.

Polya, G. (2009). Cómo plantear y resolver problemas (Trad. Julián Zugazagoitia). México: Trillas. (Trabajo original publicado en 1945).

Santos-Trigo, M. (2007). La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. México: Trillas.

Santos-Trigo, M. (2014). Problem solving in mathematics education. In S. Lerman (ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 496-501). New York: Springer.

Santos-Trigo, M. (2017, agosto 30). Curiosidad epistémica, preguntas y tecnología digital. C^2 Ciencia y Cultura. Recuperado el 5 de abril de 2018 de http://www.revistac2.com/curiosidad-epistemica-preguntas-y-tecnologia-digital/

Santos-Trigo, M. & Moreno-Armella, L (2016). The Use of Digital Technology to Frame and Foster Learners' Problem-Solving Experiences. In P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Eds.), Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and new perspectives (pp. 189-207). Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space Framework. ZDM Mathematics Education, 48(6), 827-842.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), Mathematical Thinking and Problem Solving (pp. 53-70). New York: Routledge.

Sherman, M. (2014). The role of technology in supporting students’ mathematical thinking: Extending the metaphors of amplifier and reorganizer. Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 14(3), 220-246.

Simon, M. A. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. Educational studies in mathematics, 26(1), 71-94.

Steen, L.A. (1988). The science of patterns. Science, 240(29), 61-616.

Wertsch, J. V. (1993). Voices of the Mind: a sociocultural approach to mediated action. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Wilson, K., Ainley, J., & Bills, L. (2005). Spreadsheet, pedagogic strategies and the evolution of meaning for variable. En Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 321-328). Melbourne, Australia: PME.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: The perspective of constructs. In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research in mathematics teaching and learning (pp. 1169–1207). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Experimentación y modelación computacional para la construcción de videojuegos: Actividades interdisciplinarias de bajo umbral y alto techo

Experimentation and computational modeling for the construction of videogames: Interdisciplinary activities of low threshold and high ceiling

PRETELÍN-RICÁRDEZ, Angel†*

ID 1er Autor: *Ángel Pretelín-Ricárdez* / **ORC ID:** 0000-0003-0440-6094, **Researcher ID Thomson:** K-5747-2015, **CVU CONACYT ID:** 48627

Instituto Politécnico Nacional, UPIITA, México

A. Pretelín

apretelin@ipn.mx

A. López, C. Lima, J. Reyes (Dirs.) Educación para todos. Tópicos Selectos de Educación en CITeM. ©ECORFAN-México, 2018.

Resumen

En este capítulo, se explora cómo estudiantes universitarios mexicanos (Licenciatura en Matemáticas Aplicadas) pusieron en práctica y desarrollaron sus conocimientos matemáticos, físicos y de ingeniería de manera interdisciplinaria, a través del diseño y programación de videojuegos, y de esa manera adquirir experiencia con respecto a la modelación computacional de sistemas ingenieriles.

La idea de que los estudiantes fueran diseñadores y programadores de videojuegos, se fundamentó en el paradigma del construccionismo (Papert & Harel, 1991), en el *Game Design Project* (Kafai, 1994) y también utilizando Actividades de Bajo Umbral y Alto Techo (ABUAT). Las actividades fueron diseñadas tomando en consideración los seis principios de la metodología de Actividades Inductoras de Modelos (*Model-Eliciting Activities* / *MEAs*): Realidad, construcción del modelo, documentación del modelo, autoevaluación, generalización del modelo, prototipo simple (Hamilton et al., 2008).

Durante la implementación de las actividades, se analizaron los siguientes aspectos:

(1) Cómo llevaron a cabo los estudiantes el proceso de modelación computacional; (2) cómo realizaron los estudiantes la experimentación y la modelación computacional para la construcción de los videojuegos; y (3) cómo usaron la matemática y cómo la integraron con la física y la programación durante las actividades.

Las conclusiones muestran las aportaciones que tiene este trabajo como una metodología construccionista en el nivel superior, a través de un enfoque interdisciplinario de experimentación, modelación y construcción de videojuegos.

Construccionismo, Interdisciplinario e integrado, Modelación computacional, Actividades inductoras de modelos, Videojuegos

Abstract

In this chapter, I explore how Mexican university students (Bachelor of Applied Mathematics) used and developed their knowledge of mathematics, physics and engineering, in an interdisciplinary way, through the design and programming of videogames, and in that way gain experience with respect to the mathematical and computational modeling of engineering systems.

The idea of students as designers and programmers of videogames was based on the constructionism paradigm (Papert & Harel, 1991), Game Design Project (Kafai, 1994) and also using Low Threshold High Ceiling Activities (LTHCA). The activities were designed considering the six principles of the Model Eliciting Activities (MEA) methodology: reality, model construction, model documentation, self-evaluation, model generalization, simple prototype (Hamilton et al., 2008).

During the implementation of the activities, I analyzed the following aspects:

(1) How the students carried out the computational modeling process; (2) how the students carried out their processes of experimentation and of computational modeling for the construction of the videogames; and (3) how they integrated the mathematics with the physics and programming during activities.

The conclusions show the contributions that my work has as a constructionist methodology for higher education, that used an interdisciplinary approach of experimentation, modeling and construction of videogames.

Constructionism, Interdisciplinary and integrated, Computational modeling, Model inducing activities, Video games

1 Introducción

El paradigma del construccionismo (Papert & Harel, 1991) plantea que el aprendizaje se facilita a través de actividades de construcción de objetos externos y compartibles (i.e. objetos en el mundo – no sólo objetos físicos, también puede ser algo como un programa de cómputo, un poema, una teoría, etc.). El construccionismo va más allá de manipular objetos para aprender: se enfoca en crearlos, recrearlos, construirlos y reconstruirlos, y plantea que es a través de esos procesos de construcción y creación (cuando se tiene como meta desarrollar productos significativos y compartibles), que los individuos aprenden.

En este capítulo se presentan algunos resultados cualitativos, producto de implementar una metodología (*experimentación - modelación - construcción de videojuegos*) basada en el paradigma del construccionismo con estudiantes universitarios de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Juárez del Estado de Durango (UJED), en México. Dicha metodología establece tres actividades: (i) Actividad de experimentación; (ii) Actividad de simulación (modelación computacional); y (iii) Actividad de construcción de un producto interdisciplinario (en este caso un videojuego).

Los objetivos que se persiguen al implementar esta metodología construccionista son que:

- Los estudiantes construyan un videojuego cuya mecánica de juego o *puzzles* esté basada en los modelos computacionales de ciertos sistemas físicos propuestos en forma de retos.
- Los estudiantes puedan “construir puentes” para complementar y relacionar diferentes disciplinas como la matemática, la física y la programación, a través de la creación de videojuegos.

También, cabe destacar que una de las características importantes de la metodología descrita aquí, fue darle a las actividades el carácter de “bajo umbral”, pero de “alto techo”, es decir, que las actividades pudieran ser realizadas por cualquiera de los estudiantes, no importando el semestre que cursaran, pero que a la vez les permitiera a todos acceder a ideas poderosas (Papert & Resnick, 1996) relacionadas con el uso de la tecnología como medio para “construir puentes” entre las disciplinas (conceptos implícitos) que estaban poniendo en práctica. Para cumplir lo anterior, se diseñaron las actividades tomando en consideración la teoría de Actividades Inductoras de Modelos (*Model-Eliciting Activities* o *MEAs*) propuesta por Lesh y Doerr (2003).

Para describir el diseño, el desarrollo, los resultados y las conclusiones de la propuesta metodológica, el capítulo está organizado en cinco secciones. Primero, se presenta el marco conceptual donde se sitúa la propuesta a partir de cuatro temas: construccionismo (Papert & Harel, 1991), modelación computacional, Actividades Inductoras de Modelos de Lesh y Doerr (2003) y el aprendizaje basado en videojuegos, donde se hace referencia al trabajo de Kafai (1994).

Después, se especifican las características de la metodología que se siguió en esta propuesta, se describen los participantes, las herramientas tecnológicas utilizadas, la manera en que se llevó a cabo el diseño y la implementación de las actividades, para finalizar con la recolección de datos.

Enseguida, se presentan y discuten los resultados para cada una de las actividades realizadas por los estudiantes. Finalmente, se exponen las principales conclusiones que se obtuvieron del estudio y algunas reflexiones finales que se desprenden de los resultados obtenidos.

2 Situando la propuesta a partir del marco conceptual

2.1 El construccionismo y su implementación

Las teorías del constructivismo (derivadas de las propuestas de Piaget, 1968) consideran que la construcción del conocimiento no es un proceso simple y aislado donde todos los sujetos perciben y procesan la realidad de la misma forma; más bien, cada sujeto necesita construir y reconstruir su conocimiento de acuerdo a sus experiencias previas.

Estas teorías son la base del paradigma educativo conocido como "construccionismo" (Papert & Harel, 1991) el cual plantea que a partir de actividades de construcción externa (concretas) se puede favorecer el aprendizaje interno (abstracto) de los estudiantes.

Partiendo de lo anterior, se propuso una secuencia de actividades orientada a que los estudiantes resolvieran retos de modelación computacional (simulación) a través de la experimentación y construcción dentro de un motor de videojuegos o *game engine* (Unity 2D). En este sentido, se considera muy importante la idea expuesta por Ackerman (2001):

El enfoque de Papert [el construccionismo] nos ayuda a entender cómo las ideas se forman [construyen] y transforman [reconstruyen] cuando son expresadas a través de diferentes medios, cuando son actualizadas en determinados contextos, cuando se llevan a cabo por mentes individuales. (p. 441).

De esta manera, se elaboró un conjunto de actividades, donde se quería analizar e intentar entender la manera en que se construyen y reconstruyen las ideas (pero sobre todo las experiencias) de los estudiantes respecto a la modelación computacional de sistemas físicos, a través del uso de ciertos medios, en donde se esperaba que pusieran sus ideas en acción. Los medios a través de los cuales los estudiantes expresaron esas formaciones y transformaciones de ideas fueron: la conceptualización del modelo del sistema a través de bosquejos o diagramas (lápiz y papel), la simulación del modelo que se conceptualizó (programación) y la implementación de la simulación del modelo en las mecánicas de juego de un videojuego (programación).

Tomando en consideración lo expuesto arriba, para hablar de la forma en la que se implementa el construccionismo, se tiene que hablar de sus fundamentos en las construcciones computacionales.

Para Papert, las computadoras tenían un papel central en el construccionismo, como un medio para ofrecer a los estudiantes mejores oportunidades para construir su aprendizaje. En su libro *Desafío de la mente*, Papert (1981) explica que se busca:

convertir a las computadoras en instrumentos lo suficientemente flexibles para que muchos niños logren crear, cada uno para sí mismo, algo parecido a lo que los engranajes fueron para mí. (p. 13)

Por tanto, el construccionismo, desde sus orígenes en los años 60s, plantea el potencial de las computadoras para que los sujetos, por sí mismos, a través de la programación, puedan crear y construir cosas que sean significativas para ellos.

Otros conceptos importantes dentro del paradigma del construccionismo que son necesarios para comprender a lo que se refería Papert cuando hablaba de "mejores oportunidades para aprender", y que sirven para situar mejor la metodología que se está proponiendo (ver la sección 3 de este capítulo) son: objetos para pensar (*Objects-to-think-with*) y entidades públicas (*public entities*).

2.1.1 Los objetos para pensar

Papert (1981) hace un recuento de la gran influencia que tuvieron en su infancia los engranes y explica cómo estos "objetos" funcionaron para que él pudiera pensar y construir sobre otras cosas (proporciones matemáticas en su caso) situadas en distintos contextos. Estos engranes son un ejemplo concreto de lo que es un objeto para pensar dentro del paradigma construccionista. Un objeto para pensar es un medio que puede ser utilizado para experimentar con él, reconstruirlo, observar su funcionamiento y compartirlo; y, de esta forma, inducir a pensar y construir sobre otras cosas. "Los objetos para pensar […] pasan a ser una parte inherente de la construcción de conocimiento" (Badilla & Chacón, 2004, p. 8) y de experiencias.

Durante la implementación de la metodología construccionista que se describe en este capítulo, los estudiantes trabajaron con varios objetos para pensar: computadoras, motores de videojuegos (Unity 2D), simulaciones, modelos y videojuegos.

2.1.2 Las entidades públicas

Una entidad pública es una construcción que permite representar, de manera visual o auditiva, ideas y conceptos para experimentar con ellos (Badilla & Chacón, 2004). En términos generales, es posible decir que es todo lo que se puede mostrar o compartir para aprender: un proceso, un producto, etc. Papert y Harel (1991) dan como ejemplos de entidades públicas a castillos de arena en la playa o teorías del universo.

En lo que respecta a la propuesta presentada aquí, los diagramas, esquemas, bosquejos, las simulaciones y videojuegos que construyen los estudiantes, así como la socialización del proceso que ellos siguen para construirlos, se pueden considerar como entidades públicas, ya que son cosas que se discuten y comparten con otros y, de esta manera, pueden reforzar el aprendizaje y las experiencias.

2.2 Modelación computacional (exploratoria y expresiva)

Para situar el tema de modelación computacional con el de la metodología construccionista que se aborda en este capítulo, son necesarias algunas definiciones que se utilizan en el diseño y desarrollo de las actividades: sistema, modelo y simulación. Se hace la definición de estos tres conceptos, porque comúnmente un licenciado en matemáticas aplicadas debería de saber construir y validar modelos matemáticos de sistemas (físicos) auxiliándose de la construcción de simulaciones computacionales.
Se partirá entonces, de la definición del concepto de sistema dada por Hestenes (2010):

Un *sistema* es un conjunto de *objetos* relacionados, que pueden ser reales o imaginarios, físicos o mentales, simples o compuestos. La *estructura* de un sistema es un conjunto de relaciones entre sus objetos. El sistema en sí se llama el *referente* del modelo (p. 17).

La definición anterior establece en su última oración, la relación que guarda un sistema respecto a un modelo, el cual el mismo Hestenes (2010) define, de manera breve pero concisa, como "una representación de la estructura en un sistema dado" (p. 17).

Situándose un poco más en el ámbito de la matemática educativa, una definición más extensa de modelo la ofrecen Lesh y Harel (2003):

Los modelos son sistemas conceptuales que por lo general tienden a ser expresados usando una variedad de medios de interacción y representación, que pueden incluir símbolos escritos, lenguaje hablado, gráficos por computadora, diagramas o gráficas en papel, o metáforas basadas en experiencia. Sus propósitos son construir, describir o explicar otro(s) sistema(s).

Los modelos incluyen tanto: (a) un sistema conceptual para describir o explicar los objetos matemáticos pertinentes, relaciones, acciones, patrones y regularidades que son atribuidos a la situación de resolución de problemas; y (b) los procedimientos de acompañamiento para generar construcciones útiles, manipulaciones o predicciones para el logro de objetivos claramente reconocidos. Los modelos matemáticos son distintos de otras categorías de modelos principalmente porque se centran en las características estructurales (en lugar de, por ejemplo, características físicas, biológicas, o artísticas) de los sistemas que describen. (p. 159)

Ahora bien, en el ámbito de la matemática aplicada, cuando un estudiante de esta disciplina construye un modelo, éste debe utilizar como medios de interacción y representación una gran variedad de entornos digitales de simulación. Así, se enuncia la siguiente definición de Dodge (2008) respecto a la simulación:

La simulación es un método para analizar, diseñar y operar sistemas complejos. […] implica el diseño de un modelo de un sistema y la realización de experimentos sobre él a medida que se avanza (p. 498).

En esta definición se observa que, simular tiene que ver con la realización de experimentos que nos permitan analizar, diseñar y operar sistemas. Esta experimentación se realiza para poder llegar a la mejor simulación (o representación) de un modelo.

Cabe recalcar que durante la implementación de la metodología, los estudiantes no solo experimentaron la manipulación de variables o parámetros en una simulación computacional, sino que la idea principal fue que la construyeran y reconstruyeran para que, posteriormente, experimentaran insertando valores iniciales a ciertas variables físicas virtuales (i. e. gravedad, fuerza, fricción, tipo de material, elasticidad/"rebotabilidad") que permitan modificar los parámetros de un modelo simulado de forma computacional.

Siguiendo con lo planteado en el párrafo anterior, la simulación computacional de un modelo es definida por Ifenthaler (2012) como "un programa informático o algoritmo que simula cambios de un sistema modelado en respuesta a señales de entrada" (p. 710). Esta definición se acerca más a lo que los estudiantes estuvieron realizando en las actividades que se les plantearon.

Sin embargo, como se mencionó antes, los estudiantes no solo manipularon los parámetros de un modelo a través de una simulación (o software de simulación), sino que construyeron (programaron de manera implícita, pues no escribieron ninguna línea de código) dicha simulación; es decir, que ellos modelaron computacionalmente los sistemas para después poderlos implementar dentro de un videojuego diseñado y programado por ellos.

La diferencia entre simulación computacional y modelación computacional, es abordada por Araujo, Veit, y Moreira (2007), quienes afirman que "estos dos tipos de actividades se distinguen por el acceso que el alumno tiene al modelo matemático […] subyacente a la implementación de la actividad" (p. 504). Una descripción más extensa de estas diferencias se puede encontrar en López, Veit, y Araujo (2011):

En una simulación computacional que representa un modelo físico, el alumno puede insertar valores iniciales para variables, alterar parámetros y, de forma limitada, modificar las relaciones entre las variables; pero no tiene autonomía para modificar la estructura de la simulación (modelo matemático o icónico pre-especificado); o sea, acceso a los elementos más básicos que la constituyen.

La interacción del estudiante con la simulación tiene un carácter eminentemente exploratorio; mientras que, en la modelación computacional el estudiante tiene acceso a los primitivos que constituyen el modelo computacional, pudiendo construirlos desde el principio y reconstruirlos conforme desee. (p. 205)

Después de haber mostrado algunas características que permiten diferenciar la simulación computacional con respecto de la modelación computacional, se puede decir que la primera presenta un carácter exploratorio de la modelación, mientras que la segunda un carácter expresivo. Lo del carácter exploratorio y expresivo de la modelación (o los modelos), se puede describir citando el siguiente fragmento de Doerr (1995), que retoma algunos conceptos desarrollados por Bliss y colegas (Bliss & Ogborn, 1989; Bliss et al., 1992):

Modelos exploratorios [o modelación exploratoria] son aquellos modelos que son construidos por expertos para representar saberes o conocimientos en algún dominio de contenido […]. Los estudiantes típicamente exploran las consecuencias de sus acciones dentro de los límites de estos modelos de dominio de contenido. Estos modelos son en esencia micromundos que proporcionan al estudiante un conjunto de mundos simulados e idealizados que encarnan, por ejemplo, las leyes newtonianas del movimiento, permitiendo al estudiante explorar las consecuencias de los cambios en los parámetros de la simulación. […]. Estos modelos exploratorios proporcionan una manera de preguntarse si los estudiantes pueden entender la manera de pensar de un experto sobre un problema.

La construcción de modelos (o modelación expresiva), por otro lado, proporciona a los estudiantes la oportunidad de expresar sus propios conceptos y aprender a través del proceso de representación de sus conceptos, definiendo relaciones y explorando las consecuencias de esas relaciones. […]. Estos modelos expresivos [o modelación expresiva] proporcionan una manera de preguntarse si los estudiantes pueden entender su propia manera de pensar sobre un problema. Este es un cambio importante en la perspectiva de la actividad de explorar un modelo pre-construido, que necesariamente encarna los conceptos y estructuras de un experto. (Doerr, 1995, pp. 5-6) Araujo, Veit, y Moreira (2011, citando a Bliss y Ogborn, 1989) sitúan los conceptos de modelación exploratoria y expresiva en la modelación computacional, y hacen alusión a:

Dos modos básicos de usar las actividades de modelación computacional: el modo exploratorio y el modo expresivo. Las actividades exploratorias son caracterizadas por la observación, análisis e interacción del sujeto con modelos computacionales ya construidos, en el intento de permitir al alumno la percepción y la comprensión de las eventuales relaciones entre la matemática subyacente al modelo y el fenómeno físico en cuestión. En este tipo de actividad, el alumno tiene acceso a la estructura básica del modelo implementado, pudiendo modificarlo si desea. Las actividades de modelación computacional de tipo expresivo se caracterizan por el proceso de construcción del modelo desde su estructura matemática hasta el análisis de los resultados generados por él. El alumno puede interactuar totalmente con su modelo, pudiendo reconstruirlo tantas veces como le parezca necesario para la producción de resultados que le sean satisfactorios. (Araujo, Veit, & Moreira, 2011, pp. 205-206)

Después de haber expuesto estos conceptos en torno a la modelación y la modelación computacional, se puede establecer que los estudiantes que realizaron las actividades de experimentación, modelación computacional y construcción de un videojuego, realizaron un trabajo más cercano a una modelación computacional expresiva.

Este tipo de modelación es ampliamente practicada en la formación de ingenieros, y en la ingeniería en general, y debería ser parte de las actividades desarrolladas durante la formación de un estudiante de matemática aplicada, debido a que constituye un paso previo para la implementación de productos, procesos o sistemas, y dónde dichos estudiantes pueden experimentar con los modelos de sistemas sin ningún riesgo para ellos y para el sistema mismo.

2.3 Actividades inductoras de modelos

La metodología propuesta se compone de tres actividades orientadas a la construcción de videojuegos a través de la experimentación y la modelación computacional. Estas se diseñaron tomando en cuenta la teoría de Actividades Inductoras de Modelos (*Model-Eliciting Activities* o *MEAs*) propuesta por Lesh y Doerr (2003).

> Son llamadas así, porque los productos que los estudiantes producen van más allá de respuestas cortas a preguntas específicas, e implican el uso de herramientas conceptuales compartibles, manipulables, modificables y reutilizables, para construir, describir, explicar, manipular, predecir o controlar sistemas matemáticamente significativos. (p.3)

En este caso, interesa particularmente los seis principios de diseño de las *MEAs*: realidad, construcción del modelo, documentación del modelo, autoevaluación, generalización del modelo, prototipo simple (Hamilton et al., 2008). Estos principios se volverán a abordar en la sección 3, en el apartado relacionado con el diseño de las actividades.

2.4 Aprendizaje basado en construcción de videojuegos

En referencia a la aplicación del construccionismo en el aprendizaje basado en la construcción de videojuegos, la presente propuesta se situará a partir de lo expuesto en (Kafai, 1994) respecto al *Game Design Project* (GDP), el cual se desarrolló siguiendo un enfoque construccionista, donde la idea principal era darle a los niños el rol de diseñadores y creadores de juegos de computadora, con la finalidad de favorecer su aprendizaje matemático y computacional. Dicho enfoque contrasta con el enfoque tradicional que se tenía del aprendizaje basado en videojuegos (*Game-Based Learning*) en la década de 1990, en donde los niños o estudiantes asumían el papel de consumidores pasivos.

El desarrollo de este proyecto de investigación significó, en su momento, romper con el paradigma de aprender a través de los juegos que otros construían y distribuían, para sustituirlo por el de aprender a través del proceso de diseño y construcción de los juegos.

En resumen, el proyecto GDP fue abordado desde un enfoque construccionista, donde la idea principal era transformar el aula en “un estudio de diseño de juegos” (Kafai, 1994), donde los estudiantes aprendieron programación, escribieron historias y diálogos (para el juego); construyeron representaciones relacionadas con números fraccionarios; diseñaron las interfaces gráficas y las estrategias de enseñanza que se utilizarían en el juego; e incluso diseñaron las “cajas comerciales” del “producto” y anuncios para el juego (como si fuera a comercializarse).

3 Componentes y procedimientos de la metodología experimentación - modelación - construcción de videojuegos

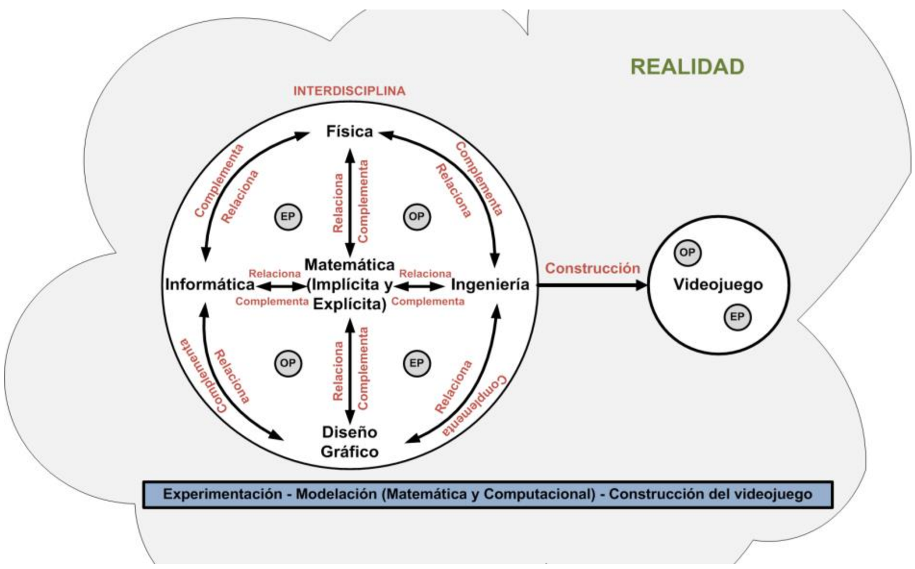
En esta ocasión, el estudio de la metodología *experimentación - modelación - construcción de videojuegos*, es producto de las actividades realizadas en el Taller Experimentación y modelación (matemática y computacional) para la construcción de videojuegos, llevado a cabo en la Facultad de Ciencias Exactas de la UJED (Durango, México) en abril de 2018. Este taller tuvo una duración de 15 horas, divididas en cinco sesiones de tres horas diarias.

3.1 La metodología experimentación - modelación - construcción de videojuegos

La idea de situar a los estudiantes en el rol de constructores o creadores de videojuegos ha sido explorada en otros proyectos de investigación (*e.g.* Kafai, 1994; Harel, 1990; Hoyles & Noss, 2005). Sin embargo (como se muestra también en la revisión hecha por Kafai & Burke, 2015), muchos de los proyectos mencionados en la literatura están enfocados en estudiantes que cursan el nivel preescolar, primaria, secundaria o preparatoria. En contraste, la metodología construccionista utilizada en este taller tiene sus antecedentes en el trabajo reportado en Pretelín-Ricárdez y Sacristán (2015) y fue diseñada para ser implementada con estudiantes universitarios, aunque esto no es algo restrictivo.

La metodología establece tres actividades en donde se espera que los estudiantes lleven a cabo ciclos de construcción para resolver uno o varios problemas de modelación: (i) Actividad de experimentación; (ii) Actividad de modelación (matemática y computacional); y (iii) Actividad de construcción del videojuego (Figura 4.1), en las que se expresa la matemática de maneras diferentes y se complementa y relaciona con otras disciplinas como la física, la ingeniería, la informática y el diseño gráfico.

Figura 4.1 La metodología Experimenta-Modela-Construye videojuego



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 4.1 se representa cómo se espera que la matemática se relacione y complemente, de manera explícita e implícita con otras disciplinas (en este caso: física, ingeniería, informática y diseño gráfico) a través de la experimentación, construcción y reconstrucción de objetos para pensar (OP) y entidades públicas (EP): modelos matemáticos y computacionales. Todo esto orientado a la creación de un producto interdisciplinario (videojuego), el cual a su vez, se convertirá en un nuevo OP y EP.

Es importante mencionar que esta metodología fue diseñada para la realización de proyectos de larga duración (de cuatro a seis meses), debido a la naturaleza interdisciplinaria de los problemas que se pretende que los estudiantes resuelvan. No obstante, la implementación en un taller corto de 15 horas resultó muy enriquecedora, gracias al ajuste en el tipo de problemáticas (retos) a resolver (ver sección 3.4).

3.2 Participantes

En el estudio participaron catorce estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UJED. De estos catorce estudiantes, cinco eran de segundo semestre, uno de cuarto semestre, cuatro eran de séptimo semestre y cuatro de octavo semestre. Ninguno de los estudiantes tenía experiencia previa utilizando el motor de videojuegos *Unity 2D* (https://unity3d.com/es), sin embargo, dos estudiantes reportaron haber utilizado los siguientes motores de videojuegos: *Scumm* y *Unreal engine*; además, todos los estudiantes reportaron experiencia en alguno de los siguientes lenguajes de programación: *C*, *C++*, *C#*, *Java*, *PHP*, *Pascal*, *Html*, *Latex*, *Python*, *Basic*, *JavaScript*; y en los siguientes entornos digitales: *Matlab* y *Visual Basic*; lo que permitió intuir que sí contaban con competencias en el uso de tecnología.

3.3 Las herramientas tecnológicas

Se clasificaron las herramientas tecnológicas que utilizaron los estudiantes, en dos categorías: herramientas para la construcción y herramientas de apoyo. En el primer grupo incluimos al motor de videojuegos *Unity*, es decir, el software con que se llevan a cabo las actividades de experimentación, construcción de los modelos computacionales y videojuegos; y en el segundo grupo están los procesadores de texto, editores de imágenes o algún otro software que puede auxiliar el proceso de documentación y construcción de los productos requeridos para cada actividad.

Para este caso, se utilizaron las siguientes herramientas:

- Herramientas de construcción: el motor de videojuegos *Unity* (en este caso se utilizó en el modo 2D).
- Herramientas de apoyo (recursos): un conjunto de recursos prediseñados para la integración de personajes, escenarios, música y sonidos, los cuales son de licencia libre. En el caso del motor de videojuegos *Unity*, estos recursos son conocidos como *Assets* y pueden descargarse directamente desde el motor de videojuegos, o bien, desde una búsqueda directamente por los estudiantes desde un navegador.

Con relación a la herramienta (*Unity*) utilizada para la construcción de los experimentos, las simulaciones y videojuegos, ésta cumple con los siguientes principios o características:

- Es una herramienta de propósito específico, que permite una rápida y óptima implementación de un videojuego, pero también de un modelo computacional (ver Tabla 4.1).
- Permite la construcción de modelos computacionales y videojuegos través de la programación basada en código (uso de scripts de lenguajes de propósito general: *C#* y *Java Script*), o bien, sin programar una sola línea de código (esta característica fue la que se utilizó para poder garantizar el “bajo umbral y alto techo” de las actividades). También, cuenta con su propia biblioteca de comandos y recursos (*e.g.* motor físico; editor de imágenes de fondos y *sprites* (imágenes de personajes en un videojuego); editor de música y sonido; etc.).
- El motor de videojuegos incorpora un motor físico 2D y 3D (en este caso, se utilizó sólo el motor físico en 2D: *Box2D*), para asegurar que las simulaciones físicas dentro del videojuego puedan llevarse a cabo. Esta característica es muy importante debido a que si se quisiera replicar lo expuesto en este capítulo con otro motor, se debe asegurar que el motor de videojuegos incorpore un motor físico.
- La herramienta permite experimentar a través de la construcción, y favorece que los estudiantes aprendan y ganen experiencia respecto a los modelos y la modelación computacional.

El propósito y justificación de por qué se escogieron estas herramientas, se muestran en la Tabla 4.1

Tabla 4.1 Propósito de cada herramienta tecnológica

Elemento	**Propósito y justificación**
Herramienta de construcción: Motor de videojuego (*Unity 2D*)	(1) Proveer a los participantes con las herramientas suficientes para implementar un modelo computacional en un videojuego. El motor de videojuegos cuenta con un motor físico que permite construir simulaciones que se rigen por las principales leyes físicas del mundo real (cuando esto sea necesario). (2) La elección del motor de videojuegos 2D se debió a que se buscaba que los estudiantes analizaran a profundidad los modelo a implementar. Se quería que tuvieran ciertas restricciones al momento de abstraer las ecuaciones o relaciones matemáticas y físicas en un ambiente de simulación 2D. También, se quería que el entorno digital fuera fácil de aprender a utilizar, respecto a otros motores de videojuegos especializados, o bien, un lenguaje de programación de propósito general. Con esto se esperaba que el estudiante se centrara en el desarrollo y la integración de la parte matemática (de manera implicíta) con otras disiciplinas y que no se perdiera en los detalles de aprender a utilizar o programar un entorno digital complejo.
Herramientas de apoyo: Recursos prediseñados y *Assets*	Lo que se busca con el uso de estos recursos, es que los estudiantes logren productos visualmente atractivos (simulaciones y videojuegos), pero que no tengan que consumir tiempo en la creación de los mismos.

Fuente: Elaboración propia

3.4 Diseño de las actividades

Como se ha mencionado, la metodología que se está abordando está compuesta por tres actividades: (i) Actividad de experimentación; (ii) Actividad de simulación (modelación computacional); y (iii) Actividad de construcción de un producto interdisciplinario (en este caso un videojuego).

Con base en lo anterior y en el hecho de que el taller donde se implementarían las actividades era un taller corto de quince horas, se decidió orientar todas las actividades a que los estudiantes asumieran el papel de un desarrollador de videojuegos desde el principio. De esta forma, la problemática a resolver era la de implementar “física” o sistemas físicos a un videojuego, es decir, implementar modelos computacionales de sistemas físicos en un videojuego a través de la aplicación de conocimientos interdisciplinarios.

Además, se necesitaba darle a las actividades el carácter de “bajo umbral” y “alto techo”. Para cumplir con la característica de “bajo umbral”, las actividades se tendrían que poder desarrollar por cualquier estudiante con conocimientos y experiencia básica en el uso de una computadora. Para poder solventar esto, se decidió que los estudiantes utilizarán el motor de videojuegos *Unity*, pero sin escribir una sola línea de código, lo cual es posible en dicho motor de videojuegos. Por otro lado, para cumplir con la característica de “alto techo”, las actividades tendrían que servir como medio para acceder a ideas poderosas (Papert & Resnick, 1996), así como un medio para “construir puentes” entre las disciplinas que son necesarias para poder producir un videojuego. Ahora bien, como la construcción de los videojuegos, en este caso, se centraría en la implementación de modelos computacionales, entonces se diseñaron las actividades tomando en consideración los seis principios de las Actividades Inductoras de Modelos o MEAs (*Model Eliciting Activities*) de Hamilton et al. (2008), las cuales se enlistan a continuación:

- Principio de realidad.
- Principio de construcción del modelo.
- Principio de documentación del modelo.
- Principio de autoevaluación.
- Principio de generalización del modelo.
- Principio de prototipo simple.

La forma en que se relacionan estos principios de diseño, con cada una de nuestras actividades, se muestran a continuación:

3.4.1 Principio de realidad

De acuerdo con Hamilton et al. (2008), este principio debe contestar las siguientes preguntas de diseño: "[1] ¿Puede pasar esto en la “vida real”?, [2] ¿Puede motivar a los estudiantes a dar sentido a la situación, con base en la extensión de sus propios conocimientos y experiencias personales?" (p. 7).

En lo que respecta a la primera pregunta, ésta fue el primer filtro para elegir y diseñar la problemática principal a resolver en nuestras actividades: Que los estudiantes tomaran el papel de un desarrollador de videojuegos que necesita implementar modelos computacionales de sistemas físicos en un videojuego a través de la aplicación de conocimientos interdisciplinarios.

La respuesta a la segunda pregunta se responde con parte de la respuesta anterior, pues se trabajaría con estudiantes de matemática aplicada, y las actividades que les pedimos realizar están orientadas a resolver una problemática que puede presentársele a un profesional de esa disciplina, es decir, que en su contexto sociocultural es una actividad que puede ser altamente significativa para ellos.

Resumiendo, queríamos "alejarnos" lo más posible de los problemas tradicionales que se encuentran en los libros de matemáticas –inclusive en los del nivel superior– y en donde la aplicación de las matemáticas se realiza de forma alejada de la realidad y otras disciplinas, lo cual es muy distinto de lo que sucede en la problemática que planteamos.

3.4.2 Principio de construcción del modelo

De acuerdo con Hamilton et al. (2008), este principio debe contestar las siguientes preguntas de diseño: "[1] ¿involucra la construcción, explicación, manipulación, predicción, o control de un sistema estructural significativo?, [2] ¿crea la tarea, la necesidad de que el modelo sea construido (o modificado, o extendido, o refinado)?" (p. 7). Respecto a la pregunta 1, durante la realización de las actividades por parte de los estudiantes, se espera que sus acciones expresen el desarrollo estructurado de la puesta en práctica de las matemáticas explícitas e implícitas desde un enfoque interdisciplinar.

En cuanto a la pregunta 2, se planteó la resolución de la problemática principal como un conjunto de retos que requerirán de la modelación y construcción de un videojuego, en donde se espera que los estudiantes se vean en la necesidad de realizar ciclos iterativos de construcción en donde la modelación computacional sea la parte esencial.

3.4.3 Principio de documentación del modelo

Este principio debe contestar las siguientes preguntas de diseño: "[1] ¿Pueden los estudiantes revelar de forma explícita la manera en que están pensando respecto a la situación o problemática (datos, metas, rutas de solución posible)? [2] ¿En qué tipo de sistemas (objetos matemáticos, relaciones, operaciones, patrones, regularidades) están ellos pensando?" (Hamilton et al., 2008, p. 7).

La primera pregunta tiene que ver con los instrumentos (cuestionarios) que respondieron los estudiantes, en los cuales se les pide que describan la forma en la que llevan a cabo algunas de las experimentaciones, la modelación computacional, así como el desarrollo del videojuego. También, los mismos programas de las simulaciones y videojuegos sirven para documentar el proceso de modelación y revelar las formas de pensar de los alumnos acerca de la situación o problemática.

Desde el punto de vista de esta investigación, se aprovecha ese proceso de documentación de los alumnos, al igual que, sus programas (simulaciones y videojuegos), como medios importantes de información de sus procesos creativos. Esto se complementa con videograbaciones de las sesiones.
Para la segunda pregunta, se clasificó la forma en que lo estudiantes aplicaban y utilizaban las matemáticas en: matemática explícita e implícita. Además, se clasificó la actividad (acciones observadas. Ver sección 4) realizada por los estudiantes, y que se relacionan con la experimentación, modelación y construcción de los videojuegos. Estas acciones observadas no revelan en qué están pensando los estudiantes, sin embargo, sí permiten intuirlo.

3.4.4 Principio de autoevaluación

Este principio debe contestar las siguientes preguntas de diseño: "[1] ¿Sugiere fuertemente el planteamiento del problema, los criterios que son apropiados para la evaluación de la utilidad de respuestas alternativas? [2] ¿Pueden los estudiantes juzgarse (evaluarse) a sí mismos cuando sus respuestas son lo suficientemente buenas? [3] ¿Es claro el propósito que abordan los resultados?, [4] ¿para quién?, ¿cuándo?" (Hamilton et al., 2008, p. 7).

Con base en este principio y sus cuatro preguntas de diseño, se esperaba que el proceso de autoevaluación por parte de los estudiantes se pudiera observar en varios momentos de cada una de las actividades. Por ejemplo, durante los ciclos o proceso de construcción, donde se esperaba también poder observar y documentar las acciones realizadas por ellos durante cada una de las actividades.

Por experiencias previas se esperaba que, en cada una de estas acciones, los estudiantes tuvieran que comprobar, modificar, experimentar, validar, verificar y ajustar sus modelos computacionales, variables, parámetros, etc. Además, que al llevar a cabo estas acciones, los estudiantes deberían realizar autoevaluaciones respecto a lo que estaban construyendo, para decidir si continuar o detener la etapa iterativa del ciclo de construcción en el que estarían inmersos.

3.4.5 Principio de generalización del modelo

Las preguntas de diseño que se deben contestar en este principio son: "¿Es el modelo, no sólo poderoso (para la situación específica), sino también compartible (con otros) y reutilizable (en otras situaciones)?" (Hamilton et al., 2008, p. 7).

En esta pregunta, se esperaba que en el momento en que los estudiantes plantearan un modelo computacional (o simulación) de la problemática a resolver, generaran las restricciones y relaciones necesarias en el motor de videojuegos, que permitieran la reutilización de dicho modelo en otras situaciones, otros videojuegos e inclusive –con algunos cambios— en otras herramientas tecnológicas.

Además, en algunos casos se espera que, aunque las actividades se realizaran de manera individual, no existiera una restricción sobre el hecho de que los estudiantes pudieran compartir ideas de cómo construir algunos modelos computacionales o videojuegos.

3.4.6 Principio del prototipo simple

Las preguntas relacionadas con este principio son: "[1] ¿Es la situación lo más simple posible, creando al mismo tiempo la necesidad de un modelo significativo? [2] ¿La solución proporcionará un prototipo útil (o metáfora) para interpretar otras situaciones estructuralmente similares?" (Hamilton et al., 2008, p. 7).

Se esperaba que los estudiantes representaran de manera preliminar las características generales de los modelos a implementar a través de un "tanteo dirigido" de los valores de las propiedades físicas de los objetos virtuales involucrados. Es decir, que los estudiantes experimentaran con la matemática y la física del modelo de manera implícita, pues esto es la base para que los estudiantes puedan acceder a la creación de un modelo más complejo en las actividades de modelación y construcción del videojuego.

3.5 Implementación de las actividades

Como se comentó en al inicio de la sección 3, el taller tuvo una duración de 15 horas, las cuales se dividieron en cinco sesiones de tres horas cada una. De tal forma que, la primera sesión estuvo destinada a la Actividad de experimentación, en la segunda y tercera sesiones se abordó Actividad de modelación, y en la cuarta y quinta sesiones la Actividad de construcción del videojuego.

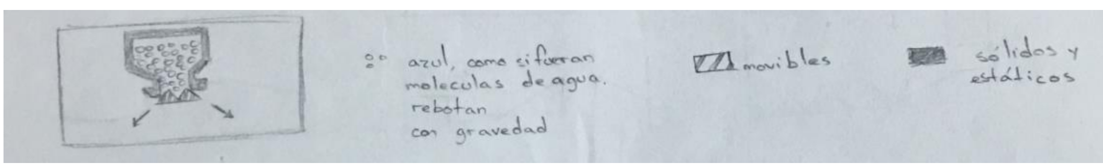
Durante la primera sesión se les dio a los estudiantes una breve plática acerca de la metodología que se llevaría a cabo (ver Figura 4.1, sección 3.1).

Después de esto, se pidió a los estudiantes que contestaran un cuestionario exploratorio que contenía seis secciones: (1) conocimientos técnicos, (2) sobre modelos matemáticos, (3) sobre simulación, (4) sobre modelado y simulación, (5) simulación y videojuegos y (6) emotiva y contextual. Este cuestionario sirvió para definir el perfil de los participantes, conocer sus competencias tecnológicas; su conocimiento de conceptos relacionados con los modelos matemáticos, modelado y simulación; así como, las diferencias entre simulación y videojuego; además de conocer sus motivaciones para asistir al taller.

Posteriormente, se comenzó a explicar el funcionamiento de los objetos virtuales y los objetos físicos virtuales en *Unity*. Además, se les comentó que las construcciones que se realizarían durante el taller no involucrarían la programación a través de código escrito. Después, se pidió a los estudiantes que comenzaran a experimentar, a base de tanteos dirigidos, con los parámetros físicos de los objetos físicos virtuales y que realizaran sus primeras simulaciones experimentales. En esta Actividad de experimentación los estudiantes no trabajaron de manera explícita con ecuaciones o fórmulas matemáticas sino que, al principio, ellos crearon objetos virtuales, que comenzaron a manipular para observar su comportamiento. De esta manera, es posible intuir que ellos crearon ciertas relaciones implícitas (sin usar ninguna fórmula o ecuación matemática) entre los parámetros físicos virtuales y las fórmulas o conceptos relacionados con dichos comportamientos. Debido a lo anterior, esta etapa resultó crucial para el entendimiento, por parte de los estudiantes, del funcionamiento del motor físico en general.

En la sesión dos y tres, ya que los estudiantes habían experimentado libremente, se les pidió que realizaran predicciones antes de construir una nueva simulación experimental. Se les propuso que dibujaran los escenarios y objetos que pretendían construir y predijeran el comportamiento de la simulación o modelo computacional que tendrían en *Unity*. Un ejemplo de estas predicciones puede observarse en la Figura 4.2 y 4.3.

Figura 4.2 Moléculas de agua en un contenedor. Predicción de Alonso



Fuente: Producción de los estudiantes

Este ejercicio de predecir a partir de dibujos o bosquejos, como en la Figura 4.2, se considera (en esta investigación) en términos muy básicos, un tipo de modelación matemática donde, tanto los conceptos matemáticos como físicos estaban implícitos, pues no contienen ningún tipo de ecuación o fórmula, sin embargo constituye el paso previo para construir un modelo computacional como el de la Figura 4.3.

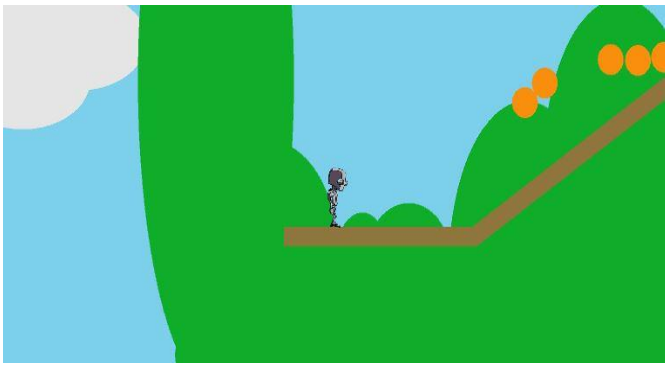
Además, es un ejercicio que permitió que los estudiantes comenzaran a incubar ideas poderosas respecto a la herramienta digital que estaban manejando y en torno al modelado computacional como una actividad interdisciplinaria donde se complementa la matemática, la física, la informática y hasta el diseño gráfico, al momento de crear los escenarios que sirven como interfaces de usuario.

Figura 4.3 El modelo computacional de las moléculas de agua de Alonso

Fuente: Producción de los estudiantes

Al inicio de la cuarta sesión se pidió a los estudiantes que descargaran un *Asset* que contenía varios recursos (fondos, sonidos, escenarios y *sprites*) que facilitarían la construcción de un videojuego; luego, que construyeran un videojuego que incorporara, en su modo de juego, alguno de los modelos con los que habían estado experimentando.

Figura 4.4 El primer videojuego “físico” de Alonso

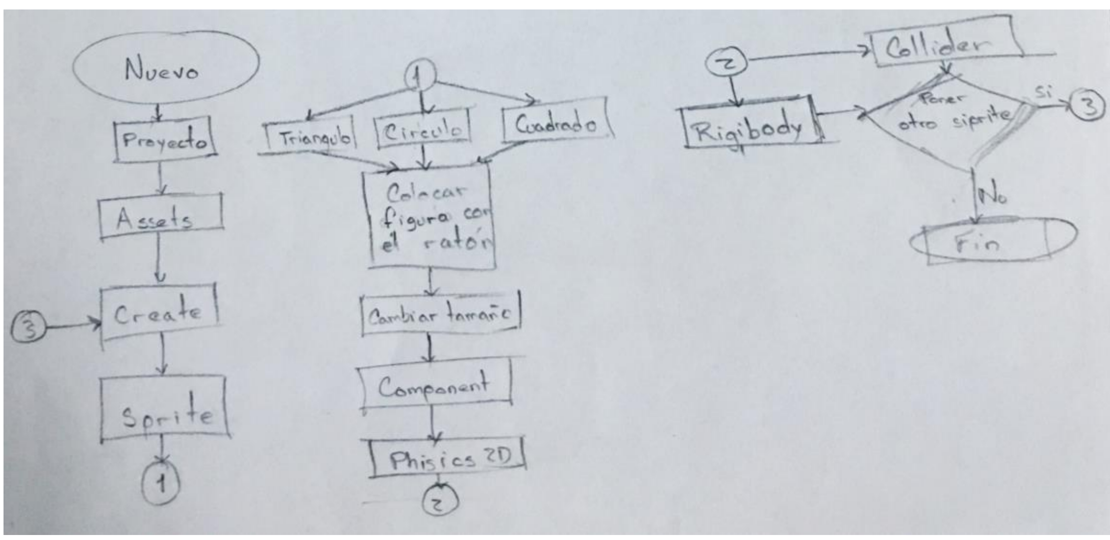


Fuente: Producción de los estudiantes

En la Figura 4.4, se muestra una captura de pantalla del primer videojuego de Alonso, en donde incorpora además de los elementos estéticos y un personaje, varios obstáculos en forma de “pelotas” que rebotan y caen por acción de la gravedad (virtual), impidiéndole el paso al personaje que es manipulado por el usuario.

En la quinta y última sesión se les pidió a los estudiantes que dibujaran un diagrama que representara la forma en la que habían llevado a cabo su ciclo de construcción de los modelos computacionales que, posteriormente, eran incorporados al videojuego. En la Figura 4.5, se muestra la representación del ciclo de construcción de Alonso.

Figura 4.5 El ciclo de construcción de Alonso



Fuente: Producción de los estudiantes

En el ciclo de construcción de la Figura 4.5, se observa que Alonso basa su ciclo de construcción en los elementos que se tienen que manipular o configurar desde *Unity* y los relaciona con la forma en la que configura la física y la apariencia de un objeto virtual.

Después, en la última sesión se entregó una hoja de “retos” a los estudiantes, donde se mostraban tres imágenes de modelos físicos: El primero era un mecanismo biela – manivela – corredera, el segundo eran las “orugas” de un tanque y el último era un puente colgante. La idea de darles estos retos fue que los construyeran y, posteriormente, los incorporaran en un videojuego. En la Figura 3.6, se muestra el modelo computacional de un mecanismo biela – manivela – corredera incorporado en el videojuego de Alonso.

Figura 4.6 Mecanismo biela – manivela – corredera en el videojuego de Alonso

Fuente: Producción de los estudiantes

La incorporación de estos sistemas físicos en los videojuegos enfrentó a los estudiantes con el reto de tener que construir sistemas con los que no están acostumbrados a “trabajar” debido a su formación, pero lo hicieron de forma correcta, ya que los sistemas operaban de manera adecuada. Al final, los estudiantes quedaron muy sorprendidos, porque al principio se habían declarado un poco escépticos con los alcances que podrían tener, construyendo modelos computacionales y videojuegos sin utilizar una sola línea de código. Al término del taller, habían diseñado y construido varios modelos computacionales de sistemas físicos y dos videojuegos, lo que reafirma el hecho de que esta metodología tiene un potencial alto si se requiere tener actividades con un bajo umbral y un alto techo.

3.6 Recolección de datos

La recolección de datos se llevó a cabo a través de:

- Videograbaciones de las sesiones.
- Cuestionarios hechos a los estudiantes (individuales), las cuales siempre se realizaban al principio de cada sesión. En ellos describieron sus avances, reflexiones y dificultades en la realización de las diferentes actividades.
- El programa de las simulaciones y videojuegos, el cual se consultó al momento de revisar a detalle alguno de los procedimientos descritos, o bien, alguno de los modelos computacionales implementados.

Aunque se cruzó la información recabada con cada uno de estos instrumentos, se puso especial énfasis en lo que los estudiantes respondieron en los cuestionarios personales y en las videograbaciones, en donde se pudo observar cómo habían desarrollado sus ciclos de construcción (qué habían hecho, cómo lo habían hecho y para qué lo habían hecho). Sin embargo, también se notó que algunas “acciones observadas” no fueron externadas (probablemente no fueron concientizadas) por los estudiantes –cuando contestaban sus cuestionaros– al describir sus ciclos de construcción.

4 Presentación y discusión de los resultados

Las “acciones realizadas” por los estudiantes en los ciclos o proceso de construcción de cada una de las simulaciones y videojuegos que realizaron, se presentan de manera condensada en tres tablas que las clasifican por tipo de actividad: Tabla 4.2 para la actividad de experimentación; Tabla 4.3 para la actividad de modelación computacional; y, Tabla 4.4 para la actividad de construcción del videojuego.

4.1 Experimentación

Este proceso de experimentación fue visto por los estudiantes como una etapa previa a la modelación matemática y computacional, donde a través de “tanteos dirigidos” se manipulaba o “jugaba” libremente con los objetos virtuales y sus propiedades físicas. A través de dichos procesos, los estudiantes podían comprender el comportamiento físico-matemático de los objetos virtuales de manera implícita; es decir, sin utilizar ecuaciones matemáticas o procedimientos analíticos de comprobación, sino sólo mediante la observación.

Las “acciones observadas” durante la actividad de experimentación, representan la forma en la que los estudiantes llevaron a cabo, o pusieron en práctica, la matemática de manera implícita. En conjunto, estas acciones muestran el proceso por medio del cual los estudiantes lograron abstraer la “información” o significados matemáticos (o físicos) que necesitaban para realizar la experimentación a través de la manipulación de objetos virtuales (Tabla 4.2).

Tabla 4.2 Acciones observadas en la experimentación

Actividad: Experimentación	Código de acción
Actividad 1: Experimentación y validación de propiedades físicas de los objetos a modelar en la problemática.	
Se definen los objetos (en el mundo real).	1.1
Se obtienen o crean recursos gráficos y estéticos para la experimentación.	1.2
Se crean objetos virtuales en *Unity 2D.*	1.3
Se definen propiedades físicas de los objetos virtuales.	1.4
Se prueba la simulación (modelación computacional).	1.5
Se experimenta y observa el comportamiento de los objetos.	1.6
Si el objeto en la simulación no se comporta de acuerdo con la realidad, se experimenta cambiando sus propiedades “físicas” virtuales	1.7
Se concluye el ciclo de refinamiento en la construcción de la simulación al comprobar su funcionamiento correcto	1.8

Fuente: Elaboración propia

4.2 Modelación computacional

En la Tabla 4.3, se enlistan las “acciones observadas” durante las actividades de modelación computacional desarrolladas por los estudiantes. Se considera que hay un conjunto de tres “acciones observadas” (2.2, 2.4 y 2.5) donde es posible inferir claramente que los estudiantes hicieron uso de una matemática implícita. La acción 2.2 es una de ellas, porque en el momento que los estudiantes hacen un bosquejo o dibujo acerca del modelo que deberían de plantear en una simulación (modelación computacional) y cómo deberían presentarlo, están abstrayendo información y/o significados matemáticos para poder generar cada una de las ideas. Respecto a las otras dos acciones, 2.4 y 2.5, el uso de la matemática implícita es aún más claro. La primera acción se refiere a la manipulación de objetos virtuales y sus propiedades para entender su funcionamiento en los “mundos físicos” creados en *Unity*. La segunda se refiere a la realización de experimentos con matemática implícita.

Tabla 4.3 Acciones observadas en la modelación computacional

Actividad: Modelaciones computacional	Código de acción
Actividad 2: Construcción de la simulación (modelación computacional) de la problemática	
Se lleva a cabo una lluvia de ideas	2.1
Se hace un bosquejo o dibujo para representar el modelo.	2.2
Se familiarizan con comandos básicos y configuración del motor físico de Unity 2D.	2.3
Se crean y manipulan objetos virtuales para entender cómo funcionan en *Unity*; se manipulan (se “juega” con) sus propiedades físicas.	2.4
Se llevan a cabo experimentos con matemática y física implícita.	2.5
Se obtienen o crean recursos gráficos y estéticos para la simulación. Se crean *sprites*.	2.6
Se definen objetos en *Unity*, así como sus propiedades físicas, para implementarlos en la simulación	2.7
Se asignan *sprites* a los objetos.	2.8
Se modifican los *sprites* para que sean estéticamente más funcionales [a juicio del estudiante].	2.9
Se prueba el programa (el modelo) de *Unity* para validar los parámetros (propiedades) físicos virtuales.	2.10
Se llevan a cabo ajustes en las propiedades físicas (gravedad, densidad, forma, fricción, etc.) y la forma de los objetos físicos virtuales.	2.11
Se concluye el ciclo de refinamiento en la construcción de la simulación, al comprobar visualmente su funcionamiento correcto	2.12

Fuente: Elaboración propia

4.3 Construcción del videojuego

Por último, en la Tabla 4.4 se muestran las "acciones observadas" durante las actividades de construcción del videojuego. En esta tabla se observa que dos de las acciones (3.2 y 3.3) corresponden al uso de una matemática implícita.

Cabe mencionar, que estas "acciones observadas" en los estudiantes (Tabla 4.2, 4.3 y 4.4) se desarrollaron en algunos casos de manera recursiva, debido a que los ajustes que los estudiantes hacían a ciertos parámetros físicos en los objetos se basaban en las ideas erróneas que tenían de algunos conceptos físicos. Por ejemplo, muchos de ellos relacionaban erróneamente el concepto de "peso" (fuerza gravitacional que actúa sobre un objeto) con el de "masa" (cantidad de materia de un objeto); también, relacionaban el concepto de "masa", solamente con el "tamaño" (área) del objeto físico virtual, y no tomaban en cuenta la "densidad" del mismo, lo que en algunos casos los llevaba a realizar pruebas cambiando sólo las dimensiones del objeto y, por consiguiente, no obtenían los resultados esperados.

Tabla 4.4 Acciones observadas en la construcción del videojuego

Acciones observadas en los ciclos de construcción	Código de acción
Actividad 3: Construcción del videojuego	
Se aprenden funciones especializadas del motor físico.	3.1
Se realizan pruebas de funciones de propósito específico.	3.2
Se genera una lluvia de ideas para escoger una propuesta de videojuego.	3.3
Se crean o se reutilizan *sprites* (personajes, enemigos, etc.), así como los escenarios.	3.6
Se crean objetos y se les asignan *sprites*.	3.7
Se produce la validación y funcionamiento del juego.	3.8
Se lleva a cabo el ajuste del modelo en el programa con respecto a las propiedades físicas de los objetos virtuales (gravedad, densidad, amortiguamiento lineal y angular, coeficiente de restitución).	3.9
Se realiza la simulación y depuración del videojuego.	3.10
Se concluye el ciclo de refinamiento en la construcción del videojuego al comprobar su funcionamiento correcto.	3.11

Fuente: Elaboración propia

5 Agradecimiento

Esta investigación es producto de las actividades realizadas en el taller "Experimentación y modelación (matemática y computacional) para la construcción de videojuegos", llevado a cabo y financiado en la Facultad de Ciencias Exactas de la UJED (Durango, México) en abril de 2018, dentro del ciclo "Variedades Matemáticas" en el marco del VIII Encuentro de Matemáticas y es parte también de los productos desarrollados y financiados en el Proyecto SIP2018083 en el Instituto Politécnico Nacional (México).

Por lo anterior, se extiende mi más sincero agradecimiento a la Facultad de Ciencias Exactas de la UJED y al Instituto Politécnico Nacional. Además quiero extender mi profundo agradecimiento a los estudiantes Dulce María Reyes Rojas, Eybette Mercado Favela, Alonso Eloy Ávila Dévora y Jafed A. Martínez Sánchez por haber compartido sus simulaciones y videojuegos desarrollados durante el taller.

6 Conclusiones

Sobre la interdisciplinariedad e integración del conocimiento

Implementar un modelo matemático en un videojuego puede ser una actividad nueva en el contexto de algunas especialidades. De hecho, algunos de los estudiantes comentaron que era algo que nunca habían hecho. Y, como se observó, fueron actividades que los enfrentaron a nuevas formas de representar sus conocimientos e ideas.

En consecuencia, se considera que este tipo de actividades pueden enriquecer significativamente el acervo de experiencias formativas de un alumno de educación superior.

Se considera esto como un aporte importante para los estudiantes de matemática aplicada, ya que la implementación de un modelo matemático en la construcción de un videojuego abre la posibilidad de que los estudiantes se enfrenten a nuevas experiencias de aprendizaje y creación a partir de la resolución de una problemática interdisciplinaria real.

Más específicamente, al tener que implementar un modelo matemático en un videojuego se tienen que poner en práctica matemáticas del mundo real, de manera que éstas estén articuladas e integradas con las otras disciplinas, y así, se fortalezca el conocimiento y la experiencia de cada disciplina en particular. En contraste, con lo que sucede desde una enseñanza de conocimiento fragmentado. ¿Por qué es importante la integración del conocimiento?, una respuesta puede ser: porque prepara a los estudiantes, para la vida profesional, poniéndolos en la zona de conflicto, donde la pregunta constante es, ¿cómo aplico todo el conocimiento teórico que tengo en una problemática real?

Sobre la matemática implícita

Como resultado de la implementación de las actividades, se ha observado entre otras cosas, que en muchas ocasiones la actividad matemática de los estudiantes no se manifiesta de manera explícita, es decir de una manera clara y directa a través, por ejemplo, del uso de ecuaciones o fórmulas para calcular o inferir un resultado; sino que, los estudiante abstraen la "información" o significados matemáticos (o a veces físicos o ingenieriles) que necesitan, de la experimentación o manipulación que realizan de ciertos objetos (en este caso virtuales) para construir una simulación o un videojuego.

Se infiere que dicha experimentación ha tenido como consecuencia que los estudiantes construyeran relaciones abstractas de las interacciones entre objetos virtuales, sus parámetros físicos y el mundo virtual, por ejemplo en el apartado 3.5 de este capítulo, se muestra cómo el estudiante Alonso construyó un mecanismo biela-manivela-corredera a partir de observar una imagen y varias animaciones del mecanismo, para después a partir de varios ciclos de experimentación (y manipulación de parámetros físicos), lograr que el mecanismo funcionara cumpliendo las leyes físicas del mundo virtual. También, se observó que los estudiantes manifestaban las relaciones a través de conceptos, diagramas o enunciados que describían el comportamiento de los objetos, sin utilizar ninguna ecuación matemática, fórmula física o código de programación. En estos casos, se consideró, por tanto, que ponían en práctica, o usaban la matemática de manera implícita.

Sobre el trabajo a futuro

Por otro lado se espera que esta propuesta no funcione como una "receta de cocina" la cual hay que seguir al pie de la letra o no se obtiene el sazón adecuado, sino al contrario, la idea es continuar probándola en diversos escenarios o contextos, con diferentes herramientas tecnológicas, y con estudiantes de otros niveles o áreas de estudio, para ver qué tanto puede refinarse, adaptarse o mejorar, para que los estudiantes puedan definir, refinar, transformar y extender los conocimientos teóricos que tiene hasta poderlos aplicar de manera integral a problemas de la vida real.

7 Referencias

Ackermann, E. (2001). Piaget's constructivism, Papert's constructionism: What's the difference. Future of learning group publication, 5(3), 438-449.

Araujo, I.S., Veit, E.A., & Moreira, M.A. (2007). Um estudo exploratôrio sobre as potencialidades do diagrama AVM na aprendizagem significativa de tópicos de Física. Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía VIII, 503-514.

Badilla, E. & Chacón, A. (2004). Construccionismo: Objetos para pensar, entidades públicas y micromundos. Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación, 4(1), 1-12. Recuperado de: http://revista.inie.ucr.ac.cr/uploads/tx_magazine/construccionismo.pdf

Dodge, Y. (2008). The Concise Encyclopedia of Statistics. New York: Springer.

Bliss, J., Ogborn, J., Boohan, R, Briggs, J., Brosnan, T., Brough, D., Mellar, H., Miller, R., Nash, C., Rodgers, C., & Sakonidis, B. (1992). Reasoning supported by computational tools. Computers in Education, 18(1-3), 1-9.

Bliss, J. & Ogborn, J. (1989). Tools for exploratory learning. Journal of Computer Assisted Learning, 5(1), 37–50.

Doerr, H.M. (1995). An integrated approach to mathematical modeling: A classroom study. Paper presented at the Annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA, April 18-22.

Hamilton, E., Lesh, R., Lester, F., & Brilleslyper, M. (2008). Model-eliciting activities (MEAs) as a bridge between engineering education research and mathematics education research. Advances in Engineering Education, 1(2), 1-25.

Harel, I. (1990). Children as Software Designers: A Constructionist Approach for Learning Mathematics. Journal of Mathematical Behavior, 9(1), 3-93.

Hestenes, D. (2010). Modeling theory for math and science education. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), Modeling students' mathematical modeling competencies (pp. 13–41). New York: Springer.

Hoyles, C. & Noss, R. (2005). Crear reglas en el diseño de juegos de colaboración. En J. Siraj-Blatchford (Comp.), Nuevas Tecnologías para la educación infantil y primaria (pp. 72-91). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Ifenthaler, D. (2012). Computer Simulation Model. In N. Seel (Ed.), Encyclopedia of the sciences of learning (pp. 710–713). Springer US. doi:10.1007/978-1-44191428-6_500

Kafai, Y. (1994). Minds in Play: Computer Game Design as a Context for Children's Learning. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kafai, Y. B. & Burke, Q. (2015). Constructionist gaming: Understanding the benefits of making games for learning. Educational Psychologist, 50(4), 313–334.

Lesh, R. & Doerr, H. M., (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism. Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching, (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. Mathematical thinking and learning, 5(2&3), 157-189.

López, S., Veit, E., & Araujo, I. (2011). Modelación computacional apoyada en el uso del diagrama V de Gowin para el aprendizaje de conceptos de dinámica newtoniana. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, V10(1), 202-226.

Papert, S. (1981). Desafío de la mente. Buenos Aires, Argentina: Galápagos.

Papert, S. & Harel, I. (1991). Situating Constructionism. En I. Harel & S. Papert (Eds.) Constructionism. Recuperado de http://www.papert.org/articles/SituatingConstructionism.html

Papert, S. & Resnick, M. (1996). Rescuing the powerful ideas, en NSF Symposium, MIT.

Piaget, J. (1968). Educación e instrucción. Buenos Aires, Argentina: Proteo.

Pretelín-Ricárdez, A. y Sacristán, A. I. (2015). Videogame Construction by Engineering Students for Understanding Modelling Processes: The Case of Simulating Water Behaviour. Informatics in education, 14(2), 265-277. doi:10.15388/infedu.2015.15

Diseño de actividades matemáticas basadas en resolución de problemas en un ambiente de aprendizaje MOOC

Design of mathematical activities based on problem solving in a MOOC learning environment

[1]POVEDA-FERNÁNDEZ, William†*, AGUILAR-MAGALLÓN, Daniel Aurelio y [2]OLVERA-MARTÍNEZ, María del Carmen

ID 1[er] Autor: *William, Poveda-Fernández* / **ORC ID:** 0000-0002-7245-8278, **Researcher ID Thomson:** V-1424-2018, **CVU CONACYT ID:** 627826

ID 1[er] Coautor: *Daniel Aurelio, Aguilar-Magallón* / **ORC ID:** 0000-0001-7520-4508, **Researcher ID Thomson:** V-2050-2018, **CVU CONACYT ID:** 486327

ID 2[do] Coautor: *María del Carmen, Olvera-Martínez* / **ORC ID:** 0000-0001-7361-1687, **Researcher ID Thomson:** U-9456-2018, **CVU CONACYT ID:** 230198

[1]*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – IPN*
[2]*Universidad Juárez del Estado de Durango*

W. Poveda, D. Aguilar y C. Olvera

wpoveda@cinvestav.mx

A. López, C. Lima, J. Reyes (Dirs.) Educación para todos. Tópicos Selectos de Educación en CITeM. ©ECORFAN-México, 2018.

Abstract

In this study, a massive and open online course was designed and implemented based on a problem-solving environment and the use of digital technologies. The research question was: How does the design and implementation of mathematical activities, in a problem-solving environment and coordinated use of digital technologies in a MOOC scenario, influence the construction of the mathematical thinking of the participants? The results indicate that the design of the activities and the methodology used during the course implementation promoted episodes of problem solving. In this route the participants, after interacting with dynamic representations of a problem, posed questions and looked for different ways to answer them, formulated conjectures based on the movement and measurement of attributes of mathematical objects present in the dynamic configuration and went from visual and empirical solutions to the presentation of geometric and algebraic arguments in the validation of the formulated conjectures, in a collaborative environment and through the discussion forum.

Problem Solving, Digital Technologies, MOOC, Design of activities

1 Introducción

Los avances tecnológicos han cambiado la forma en que los individuos se comunican e interactúan. Un estudiante, con el uso de las tecnologías digitales puede acceder a información sobre contenidos disciplinarios a través de diversas plataformas, compartir y discutir ideas o dudas en cualquier momento y desde cualquier sitio. De esta manera, las tecnologías digitales abren nuevas rutas en el proceso de aprendizaje (Santos-Trigo, Moreno-Armella, & Camacho-Machín, 2016), lo que ha originado que las instituciones educativas desarrollen o amplíen las opciones de aprendizaje, principalmente, en escenarios de aprendizaje en línea. Algunas organizaciones han explorado estas alternativas, como es el caso de KhanAcademy[2] quien, a través de su plataforma, proporciona una serie de videos que explican conceptos en diversas disciplinas, incluida matemáticas. Este tipo de alternativas permite que el alumno pueda estudiar a su propio ritmo, dentro y fuera de su clase, consultando videos las veces que considere necesarias.

Gracias a la conectividad de las tecnologías digitales se han creado plataformas digitales para que universidades e instituciones educativas ofrezcan Cursos en Línea Masivos y Abiertos (*Massive Open Online Course*, MOOC por sus siglas en inglés). El carácter abierto y masivo de un MOOC abre la posibilidad de que la comunidad de participantes sea numerosa (generalmente participan miles de personas) y heterogénea, es decir, con diferentes niveles de estudios, edad, conocimiento de la tecnología y dominio o conocimiento previo de la materia. Durante el desarrollo de las actividades no existe un profesor o tutor encargado de responder o dar seguimiento puntual a cada participante, sino que, cada integrante está a cargo del desarrollo y participación en las actividades. Dependiendo de los intereses y las posibilidades de tiempo de cada participante, se puede involucrar de una manera más profunda en una o varias de las actividades de aprendizaje que plantea el MOOC.

Con base en estas ideas, se presenta un estudio que se centró en un ambiente de aprendizaje MOOC dirigido a estudiantes de educación media y bachillerato, sin embargo, su carácter masivo y abierto implicó que cualquier individuo interesado podía inscribirse. Se utilizó el modelo de diseño de aprendizaje de Churchill, King, y Fox (2016) donde se integran Recursos, Actividades, Soporte y Evaluación con el objetivo de fomentar la participación activa de los participantes en un ambiente de reflexión, colaboración y discusión, en un contexto donde las tareas o problemas involucren a los estudiantes en un proceso de resolución de problemas.

El diseño de las tareas matemáticas se basó en la resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales de Santos-Trigo (2014). Aprender matemáticas está relacionado con la resolución de problemas ya que es un medio que permite identificar, explorar, probar y comunicar las estrategias de solución.

[2] Para más información https://www.khanacademy.org/about

Además, cuando se involucra una tecnología digital, como un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), puede utilizarse para integrar los procesos que intervienen en la resolución de problemas ya que pueden generar representaciones o modelos dinámicos de los problemas matemáticos donde el movimiento de objetos particulares (puntos, rectas, segmentos, polígonos, etc.) puede ser explorado y explicado en términos de relaciones matemáticas (Santos-Trigo, 2014).

Así, el MOOC se enfocó en el desarrollo de tareas para promover la práctica de tendencias o hábitos del quehacer matemático. Es decir, pretendió enfatizar que el aprendizaje de las matemáticas requiere problematizar o cuestionar las tareas o situaciones, pensar distintas maneras de resolver un problema, comprender y utilizar diversas representaciones de un concepto matemático, encontrar el significado e interpretar la solución y comunicar los resultados.

Con base en estas ideas y en las etapas de resolución de problemas propuestas por Polya (1945) y Schoenfeld (1985), Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) proponen una forma para caracterizar el pensamiento matemático de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales en cuatro episodios: la comprensión del problema, exploración del problema, búsqueda de múltiples acercamientos (dinámico, algebraico, geométrico, etc.) e integración de los acercamientos hacia la solución del problema (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2011).

En este contexto, en el estudio que se presenta, la pregunta de investigación guía fue: ¿De qué manera el diseño y la implementación de las actividades matemáticas, en un ambiente de resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales en un escenario MOOC, influye en la construcción y desarrollo del pensamiento matemático de sus participantes? Interesó analizar y documentar de qué manera las actividades influyeron en la construcción y desarrollo del pensamiento matemático de los participantes, cuando se involucran en un ambiente de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales dentro de un MOOC: qué tipo de preguntas plantean; qué medios utilizan para obtener información; qué conjeturas formulan y cómo las justifican; y, qué influencia tiene la interacción y discusión de las ideas entre los participantes y con el equipo que diseñó el curso.

2 Marco Conceptual

En el campo de la educación matemática, las propuestas curriculares actuales promueven un énfasis en la resolución de problemas y en el uso de herramientas digitales (NCTM, 2000; 2009). Investigadores como Santos-Trigo (2014) y Schoenfeld (1992), señalan que la resolución de problemas está relacionada con el aprendizaje de la matemática ya que permite identificar, explorar, probar y comunicar las estrategias de solución; además de que intervienen procesos como: formular conjeturas, buscar de diversos métodos de solución, explorar diferentes representaciones, buscar patrones, variantes y relaciones entre objetos matemáticos, presentar argumentos, comunicar resultados, plantear preguntas y proponer nuevos problemas (Santos-Trigo, 2014).

La resolución de un problema va más allá de aplicar un procedimiento mecánico, por lo que es necesario que el estudiante adquiera un hábito de cuestionamiento, mediante el cual, pueda resolver problemas matemáticos (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013). En este contexto, el reto de la enseñanza de las matemáticas es crear condiciones para generar un ambiente de aprendizaje que refleje la práctica o actividad matemática.

Las tecnologías digitales juegan un papel importante en resolución de problemas, por ejemplo, el uso de un SGD se vuelve importante para representar el problema en términos de sus propiedades principales y, después, visualizar el problema de forma dinámica. Esta herramienta también puede ser utilizada para cuantificar los atributos matemáticos como ángulos, segmentos de longitudes, pendientes, etc., y observar cómo cambian cuando se mueven algunos objetos (puntos o líneas) dentro de la representación dinámica del problema.

Aguilar-Magallón y Poveda (2017) argumentan que el uso de las herramientas digitales requiere no sólo transformar el trabajo del aula; sino también valorar las exploraciones que incluyen el razonamiento visual, empírico y formal. Indican que es importante reconocer que la herramienta por sí misma no proporciona los medios o las formas necesarias para que los estudiantes las utilicen eficientemente en las actividades de resolución de problemas.

Por ello, un elemento esencial es que los estudiantes planteen preguntas relevantes y busquen contestarlas en términos de relaciones matemáticas: "La formulación de preguntas debería conducir al estudiante a identificar e investigar relaciones matemáticas, para buscar evidencia o información que ayude a fundamentar dichas relaciones y para presentar y comunicar resultados" (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2009, p. 276).

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) presentan un marco para caracterizar las formas de razonamiento matemático en cuatro episodios que surgen como resultado del uso sistemático de la tecnología digital, en particular un SGD, en el proceso de resolución de problemas.

Comprensión del problema es el primer episodio que consiste en identificar los objetos matemáticos involucrados y establecer sus propiedades matemáticas, para posteriormente, construir un modelo dinámico que lo represente. Por ejemplo, si el problema contempla un rectángulo, el estudiante debe identificar las propiedades de sus lados, ángulos, diagonales, etc., para representarlo dinámicamente en un SGD.

El segundo episodio comprende *la exploración del problema*. La representación dinámica de la situación matemática se convierte en un medio para que el estudiante observe el comportamiento de los atributos de los objetos matemáticos al mover algunos elementos dentro del modelo dinámico. Esto permite efectuar exploraciones que llevan a la formulación de conjeturas. Por ejemplo, se puede observar la variación del valor del área de una familia de rectángulos de perímetro fijo cuando se modifica la longitud de uno de sus lados.

El tercer episodio, *diferentes acercamientos hacia la solución del problema*, promueven la búsqueda de diversas estrategias de solución. El uso de un SGD juega un papel importante ya que, por ejemplo, un acercamiento dinámico puede consistir en identificar las propiedades, patrones o invariantes de un objeto cuando se mueve, y argumentarlos por medios visuales (gráfica) o empíricos (datos numéricos y tablas en la hoja de cálculo). El objetivo es utilizar diferentes conceptos y recursos para generar diferentes estrategias de solución: dinámicas, algebraicas, geométricas, entre otras.

El cuarto episodio es la *integración*. Aquí se deben relacionar los diversos acercamientos a la solución del problema, hacer explícitos y relacionar los conceptos matemáticos utilizados. Otra característica importante de este episodio es la extensión del problema; por ejemplo, generalizar los resultados obtenidos mediante el cambio de alguna o varias condiciones del problema inicial.

En el diseño de ambientes de aprendizajes, Churchill, King, y Fox (2016) sugieren que estos deben incluir una propuesta sobre los contenidos y una posible ruta de cómo estudiarlos en un ambiente de trabajo en equipo y colaboración, donde cada persona participa activamente en un proceso de discusión ya sea preguntando, comentando o proporcionando sugerencias o diferentes formas de encontrar la solución a un problema. En este sentido, proponen un marco para el diseño de ambientes de aprendizaje en línea llamado RASE (Resources-Activities-Support-Evaluation)[3], basado en la premisa de que un ambiente de aprendizaje debe incluir e integrar cuatro componentes:

1. **Recursos.** Se refieren a los materiales disponibles para los estudiantes: videos, imágenes, documentos digitales, calculadoras, software, etc.
2. **Actividades.** El objetivo es involucrar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje a través del uso de Recursos en diversas tareas, como experimentos y resolución de problemas. En un ambiente de resolución de problemas las tareas que se presenten a los participantes deben generar la oportunidad de que éstos se involucren en un proceso de cuestionamiento, búsqueda de relaciones y reflexión conceptual (Santos-Trigo, 2008).
3. **Soporte.** Es necesario contemplar los medios para proporcionar ayuda a los estudiantes en el momento en que se les presente alguna interrogante relacionada con la tarea que están realizando. En este sentido, la herramienta foro de discusión de, se convierte en un medio de comunicación entre sus participantes y les ofrece la oportunidad de plantear y aclarar sus dudas, conocer las ideas de sus compañeros y contrastar sus puntos de vista con los de otros (Poveda & Aguilar-Magallón, 2017).

[3] Los cuatro componentes RASE se referencian con la primera letra en mayúscula (Recursos, Actividades, Soporte, Evaluación).

4. **Evaluación.** La evaluación debe ser formativa para permitir a los estudiantes mejorar constantemente su aprendizaje, es decir, una Actividad debe favorecer que los estudiantes trabajen en tareas, desarrollen y evidencien su aprendizaje mediante algún mecanismo (por ejemplo, escribir las ideas, resultados o solución de la tarea o problema). La Evaluación enfatiza que los alumnos puedan analizar la retroalimentación recibida, proporcionada a través de los medios de soporte, en función de refinar o ampliar los conceptos o ideas iniciales.

Por otra parte, en un ambiente MOOC se reúne virtualmente a un grupo de personas que tiene la posibilidad de participar en conversaciones, sobre algún tema de su interés, a través del foro de discusión. Según Ernest (2016), en una conversación, como unidad de análisis, interviene: un hablante o proponente, un oyente o crítico y un texto Matemático. El hablante o proponente plantea una idea (texto Matemático) y el oyente o crítico responde proporcionando su punto de vista, aceptando o modificando la idea original. Posteriormente, el hablante o proponente puede asumir el rol de oyente o crítico, de esta manera, se alternan sus roles. Este proceso se repite varias veces y se complementa con la incorporación de otros participantes. En una conversación se requiere que el número de personas involucradas sean dos o más y se pueden dar a través de textos escritos utilizando medios de comunicación electrónicos asíncronos, por ejemplo, el foro (Ernest, 2016).

3 Metodología

En esta sección se describen los elementos considerados en el diseño de las actividades del MOOC, sus participantes, la metodología utilizada durante la implementación del curso y la forma de organizar y analizar los datos obtenidos.

3.1 Diseño de las Actividades

Se diseñaron cinco actividades en total con el objetivo de que los participantes vieran los problemas matemáticos como un medio que les permitiera plantear preguntas y buscar diversas formas de contestarlas con ayuda de los Recursos, o bien, interactuando entre ellos en el foro de discusión. Así, un principio fundamental en el desarrollo de las actividades fue que los participantes continuamente formularan preguntas como un medio para comprender conceptos y resolver problemas; también, tuvieron la finalidad de promover el trabajo autónomo en los participantes. Para ello, se incorporaron los siguientes Recursos:

1. **Consulta de información.** Las plataformas digitales que se consideraron son Wikipedia y KhanAcademy. La primera proporciona información puntual acerca de definiciones, teoremas y propiedades de objetos matemáticos tales como polígonos, círculos, cónicas, etc. Por su parte, KhanAcademy incluye videos donde se abordan y explican conceptos y teoremas matemáticos.
2. **Modelos dinámicos.** Toda actividad proporcionó un conjunto de modelos dinámicos para que los participantes movieran y exploraran los objetos presentes e identificaran posibles relaciones, invariantes o patrones en sus atributos y formularan preguntas acerca de estos.

Las Actividades del MOOC fueron estructuradas en tres fases:

1. **Movimiento.** A partir de un modelo dinámico, creado en GeoGebra, que representa una situación matemática, el objetivo fue que los participantes exploraran el problema y plantearan preguntas sobre el comportamiento de los objetos y sus propiedades o atributos. Las plataformas Wikipedia y KhanAcademy fueron utilizadas para consultar y estudiar los conceptos matemáticos involucrados en el problema.
2. **Formulación de conjeturas.** Las preguntas planteadas en la etapa anterior tuvieron como objetivo la identificación y formulación de conjeturas. En una primera instancia, éstas debieron ser sustentadas o refutadas mediante argumentos visuales o empíricos, para ello se pueden utilizar las estrategias de movimiento de objetos, medición de sus atributos y lugares geométricos para modelar la variación de los atributos (área, perímetro de triángulos y cuadriláteros).
3. **Justificación de conjeturas.** Toda conjetura identificada debió ser justificada utilizando conceptos y relaciones matemáticas, por ejemplo, mediante argumentos algebraicos, geométricos, entre otros.

Debido a que en el MOOC no existe un profesor encargado de responder las dudas o dar seguimiento puntual a sus integrantes, el diseño de las actividades incluyó los medios para que los participantes obtuvieran ayuda sin depender de la figura del profesor o tutor. Todas las Actividades incorporaron el foro como medio de Soporte, el objetivo fue que los participantes tuvieran la oportunidad de plantear sus dudas y recibieran retroalimentación por parte de la comunidad, además, compartir ideas y participar en las discusiones que se generen en el desarrollo de las tareas y problemas propuestos. Así, el trabajo de los integrantes podría ser un punto de referencia para que otros retomen o extiendan las ideas y las contrasten o discutan dentro de la comunidad que genera el curso masivo.

El foro de discusión fue utilizado como el medio que permite al participante presentar sus ideas a los demás y obtener retroalimentación, así, una persona puede contrastar su punto de vista con el de los demás para ampliar sus recursos matemáticos y estrategias al resolver un problema.

A manera de ejemplo, la segunda actividad del MOOC presentó una representación dinámica del problema, a partir de una construcción que involucra rectas paralelas, perpendiculares y un punto simétrico de otro con respecto a una recta, el objetivo del diseño de la actividad fue que los participantes movieran los objetos matemáticos y formularan preguntas acerca del comportamiento de algunos de ellos. No existió un enunciado explícito del problema, sino que, inicialmente en el modelo dinámico solo es posible observar el punto A sobre la recta m. Con la ayuda de controles programados en el modelo, los participantes tuvieron la oportunidad de visualizar la construcción paso a paso. La Figura 5.1 muestra capturas de pantalla del modelo. La Tabla 5.1, detalla los objetivos de las fases de movimiento, conjetura y justificación de la actividad dos.

Figura 5.1 Modelo dinámico de la actividad 2

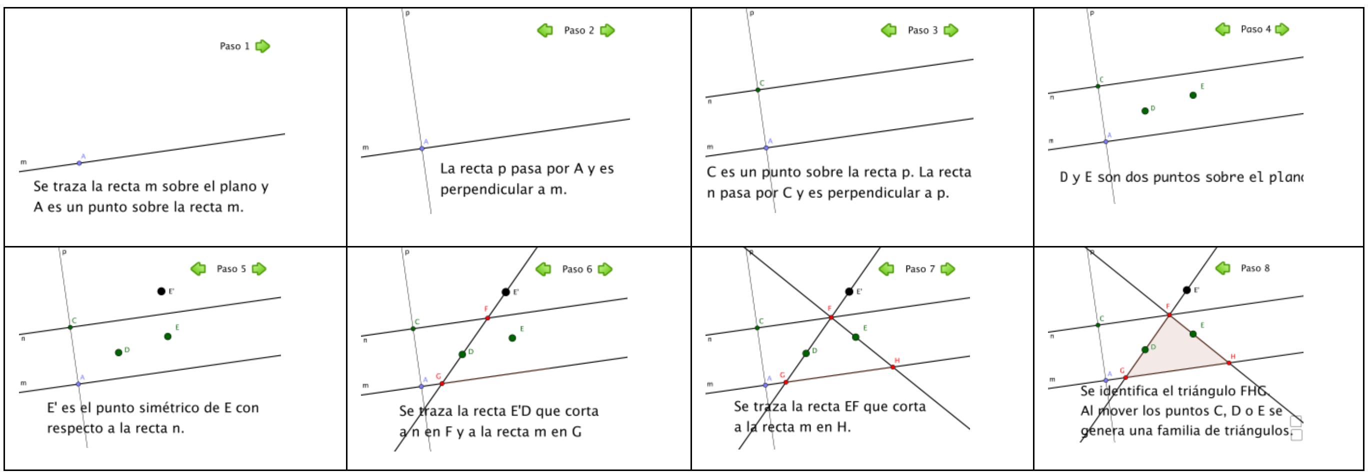
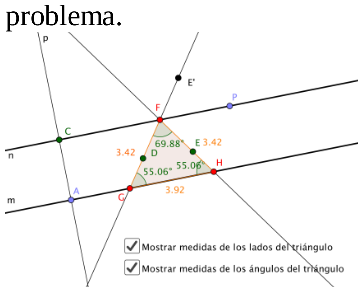


Tabla 5.1 Diseño de la actividad dos: Episodios de la resolución de problemas

El problema Entendimiento del problema	**Movimiento** Exploración	**Conjetura** Solución visual-empírica	**Justificación** Argumentación
Identificar conceptos y relaciones matemáticas. Identificar condiciones del problema. 	Visualizar el comportamiento de los objetos presentes en la configuración dinámica: rectas paralelas, rectas perpendiculares, punto simétrico a otro con respecto a una recta, mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, tipos de ángulos, triángulo isósceles y equilátero.	¿Qué propiedades tiene la familia de triángulos FGH? ¿Se conservan las propiedades para cualquier posición de los puntos E y D? ¿Existe alguna relación entre los lados de la familia de triángulos FGH? ¿Existe alguna relación entre sus ángulos?	¿Cómo justificar que todo elemento de la familia de triángulos FGH que se genera es "siempre" isósceles? ¿Qué relación existe entre los ángulos $E'FP$ y PFH? ¿En qué ayuda lo anterior para justificar que cada elemento de la familia de triángulos FGH es isósceles?

Fuente: MOOC Resolución de problemas Matemáticos y uso de tecnología digital

3.2 Participantes del MOOC y procedimientos

El MOOC fue construido en la plataforma digital *Open Edx*, a través de *MéxicoX* parte la Secretaría de Educación Pública de México. Tuvo una duración de seis semanas y el requisito solicitado a los interesados fue poseer estudios de nivel medio superior. Se inscribieron un total de 2889 personas. Es importante mencionar que 10% de estas personas participaron en los foros en las seis actividades del curso expresando sus ideas las veces que consideraron necesarias y se involucraron en el desarrollo de algunas tareas matemáticas, dependiendo de sus intereses.

El equipo de diseño del MOOC (ED) monitoreó la actividad de los participantes en los foros de la siguiente manera:

1. En cada Actividad se clasificaron los comentarios en cuatro categorías: respuestas a las preguntas que planteaba cada Actividad, acercamientos hacia la solución del problema (correctos e incorrectos), preguntas planteadas y, extensiones del problema. Posteriormente, se eliminaron aquellos que tenían ideas similares; se tomaron dos comentarios de cada categoría y fueron colocados de tal forma que se mostraran al inicio de las conversaciones, así los participantes les daban prioridad a estos comentarios para analizarlos y discutirlos.
2. Se intervenía en el foro solo cuando se requería orientar y extender la discusión. No se respondían de manera directa las preguntas de los participantes, sino que se les cuestionaba con el objetivo de generar discusión y que ellos mismos buscaran diferentes formas de solucionar la situación.
3. Al final de cada Actividad, se planteó una serie de preguntas para promover la ampliación del tema y que los participantes buscaran extender los problemas iniciales.

3.3 Recolección y análisis de datos

Los datos de este estudio se recolectaron por medio de los foros de discusión y la unidad de análisis fueron las conversaciones en el foro según el marco de Ernest (2016).

Al finalizar el curso, el equipo de diseño analizó las conversaciones en cada Actividad y seleccionó diez de los participantes más activos durante todo el curso. Se detectó que Yolanda, Karol, Ale, Alex, Carlos, Diego, Erick, Guillermo, José y Alan fueron los participantes que frecuentemente utilizaron el foro para expresar sus ideas.

Interesa analizar y documentar cómo el diseño de las Actividades, las interacciones en el foro y la metodología utilizada por el equipo de diseño fomentan el proceso de construcción del conocimiento matemático de los participantes, según el marco de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales de Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011).

4 Presentación de Resultados

En esta sección describe el trabajo de los participantes durante el desarrollo de la actividad dos el curso, se resalta cómo el diseño de las tareas matemáticas, las interacciones entre los participantes y la intervención del ED en el foro favorecieron promovieron que los participantes exploraran las representaciones dinámicas del problema, formularan conjeturas y las sustentaran mediante argumentos visuales, empíricos y formales, plantearan preguntas y buscaran diferentes formas de responderlas.

4.1 Entendimiento del problema

En la etapa inicial de la resolución del problema el objetivo fue que los participantes se cuestionaran sobre el significado de rectas paralelas, rectas perpendiculares y punto simétrico con la finalidad de observar las propiedades del triángulo FGH construido con base en esos objetos geométricos. Así, en este episodio de resolución de problemas, los participantes analizan los conceptos utilizados en la construcción del modelo dinámico y las relaciones que existen entre ellos. Las preguntas planteadas fueron las siguientes:

1. ¿Se puede afirmar que la recta n es paralela a m?

2. ¿Qué significa que E' sea el punto simétrico de E respecto a la recta n? ¿Qué propiedades cumple?

Al inicio de las conversaciones, los participantes coincidieron en que las rectas m y n son paralelas ya que visualmente parecía que no se llegaban a intersecar en algún punto. Los participantes Carlos, Karol y Yolanda les ayudaron a comprender la necesidad de justificar matemáticamente el paralelismo de las rectas m y n: les indicaron que se debe argumentar el por qué son rectas paralelas, para ello, les proporcionaron un enlace a Wikipedia (https://es.wikipedia.org/wiki/Quinto_postulado_de_Euclides) relacionado con el quinto postulado de Euclides (Figura 5.2).

Figura 5.2 Información compartida y relacionada con el V Postulado de Euclides

V postulado de Euclides

Postúlese... Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los [[ángulos]] menores que dos rectos.

Euclides

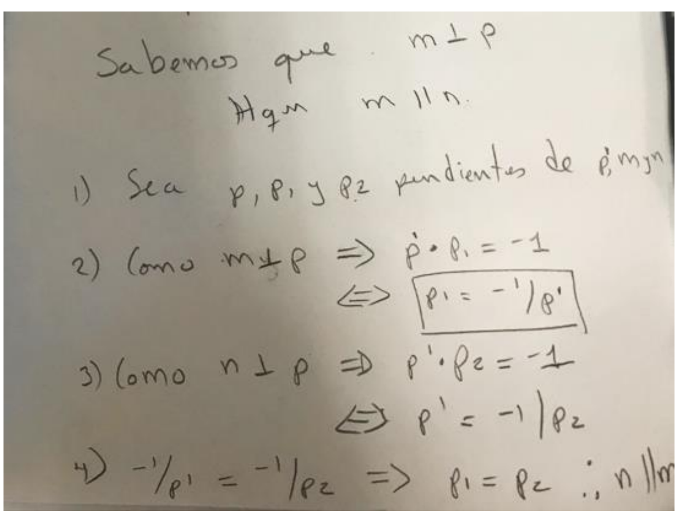
https://es.wikipedia.org/wiki/Quinto_postulado_de_Euclides

Fuente: Conversaciones de los participantes Carlos, Karol y Yolanda

Otros participantes no observaron relación entre la información compartida y la pregunta. El ED formuló la siguiente pregunta en el foro: *"¿Qué interpretan ustedes del V postulado de Euclides?"* Erick y Yolanda sugirieron a los otros centrar la atención en tres elementos de la construcción, las rectas m, n y p, dado que m es perpendicular a la recta p, entonces el ángulo que forman es de 90^o. Luego, como n es perpendicular a P, entonces el ángulo que forman es de 90^o. La recta p corta a m y n y los ángulos que se forman miden 90^o y la suma de dos ángulos internos del mismo lado suma 180^o por lo tanto al prolongar las rectas m y n nunca se cortarán.

José construyó y presentó otra justificación basada en geometría analítica. Utilizó los recursos: pendiente de recta, pendientes de rectas paralelas y pendientes de rectas perpendiculares. Su argumento consistió en relacionar las pendientes de las tres rectas y concluir que las pendientes de m y n son iguales (Figura 5.3).

Figura 5.3 Argumento presentado por José para justificar que m y n son rectas paralelas


Sabemos que $m \perp p$
Hqm $m \parallel n$.
1) Sea p, p_1 y p_2 pendientes de p, m y n
2) Como $m \perp p \Rightarrow p \cdot p_1 = -1$
$\Leftrightarrow \boxed{p_1 = -1/p'}$
3) Como $n \perp p \Rightarrow p' \cdot p_2 = -1$
$\Leftrightarrow p' = -1/p_2$
4) $-1/p' = -1/p_2 \Rightarrow p_1 = p_2 \therefore n \parallel m$

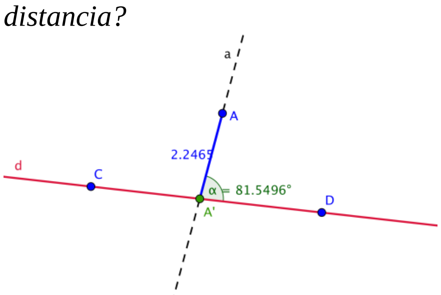
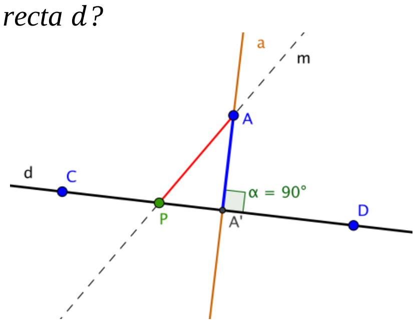
Fuente: Comentario de José en el foro

El comentario no recibió respuesta de otros participantes, el equipo de diseño consideró que la justificación algebraica reunía varios conceptos y relaciones, así que planteó la pregunta: "*¿Qué opinan de la justificación de José? ¿Qué conceptos matemáticos utiliza para sustentar la conjetura?*" Los participantes Yolanda, Erick, Alex y Karol aprobaron las ideas de José. Erick afirmó que, pese a saber el concepto de pendiente de una recta y las relaciones entre rectas paralelas y perpendiculares, no hubiera logrado conectar tales recursos como lo hizo José.

Respecto a la segunda pregunta, la discusión giró en torno a la definición de puntos simétricos. Ale y Diego no participaron en esta parte. Todos coincidieron en que E es simétrico a E' respecto a la recta n si la distancia de E a la recta es la misma que de E' a la recta, sin embargo, no mencionaron la relación que existe entre la distancia de un punto a una recta y la recta perpendicular. El ED decidió abordar el tema y presentó un modelo del problema (Tabla 4.1) y un conjunto de preguntas para guiar el trabajo de los participantes en búsqueda del significado del concepto de distancia de un punto a una recta.

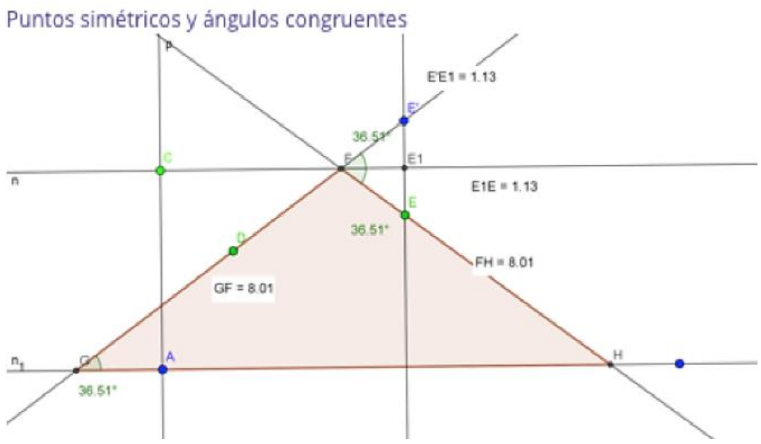
Erick, Yolanda, Carlos y Alex utilizaron las estrategias de movimiento de objetos y cuantificación de atributos (longitud de segmentos y medida de ángulos) como una ruta para formular una conjetura basada en argumentos visuales y empíricos. Guillermo reconstruyó y compartió una construcción dinámica similar a la de Alex, utilizó la estrategia de medición de segmentos y ángulos para medir la longitud de los segmentos $E'E_1$ y EE_1 y los ángulos α y β; también, afirmó que se cumplen las relaciones establecidas por Alex al mover el punto E (Figura 5.4).

Tabla 5.2 Preguntas planteadas por el ED sobre distancia de un punto a una recta

Preguntas planteadas por el ED	**Comentarios en el foro**	**Conclusiones**
Wikipedia proporciona la definición de distancia de un punto a una recta como la distancia más corta entre un punto A y un punto A' de la recta d, *¿cómo obtener tal distancia?*  *Al mover el punto A', ¿es posible obtener un segmento AA' de longitud mínima?*	**Erick** mencionó que la distancia más corta de A a la recta d se obtiene cuando el ángulo α mide 90^0. **Yolanda** coincidió con Erick y agregó: "*la distancia de un punto A a una recta d se debe medir sobre la recta perpendicular a d que pasa por C*". **Alex** cuestionó: "*¿Cómo justificar o probar lo que plantean Erick y Yolanda?*"	El movimiento de los objetos y la visualización, de manera instantánea, de sus atributos permitió a los participantes observar y formular la conjetura: "*La distancia de un punto A a una recta d se debe medir sobre la recta perpendicular a d que pasa por C*".
¿Qué sucede si la distancia mínima no se encuentra sobre la recta perpendicular a la recta d?  	**Carlos** mencionó: "*Si P es diferente de A' no es posible que AP sea menor que AA'*" y, además: "*Si la medida del ángulo $DA'A$ es diferente a 90° no es posible que AA' sea la mínima distancia entre A y la recta d*". **Alex** y **Guillermo** sustentaron la conjetura: "*El triángulo AA'P es rectángulo, la hipotenusa AP siempre es mayor que AA'*".	El segmento de menor distancia entre un punto A y una recta d se localiza sobre la recta perpendicular a d que pasa por A.

Fuente: Conversación en el foro relacionada con el concepto de distancia de un punto a una recta

Figura 5.4 Modelo dinámico construido por Guillermo



Fuente: Foro del MOOC Resolución de Problemas Matemáticos y uso de Tecnologías Digitales

Yolanda mencionó que el segmento $E'E$ (Figura 5.4) es perpendicular a la recta n y también, pese a que al mover el punto E y observar la relación de igualdad entre los ángulos α y β, no tenía argumentos para justificarlo (Figura 5.5).

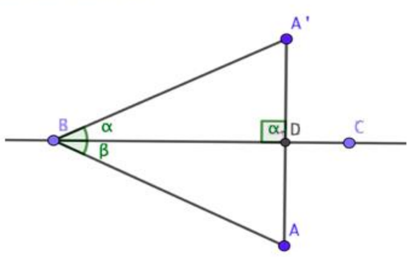
Figura 5.5 Argumento presentado por Yolanda para justificar que m y n son rectas paralelas

Según yo, E y E´ son simétricos pero respecto a la recta n, ahi si cumple que el segmento que une a dichos puntos es perpendicular al eje (n) y la distancia que hay de E al eje de simetría (n) y de E´al eje de simetría es la misma. En cambio en la recta m, situándonos en cualquier punto, no encontramos la misma distancia de E a dicho punto, y de E´al mismo punto. Por lo ´tanto, E y E´ no son simétricos respecto a m.

Fuente: Conversación en el foro relacionada con el concepto de puntos simétrico

En otro comentario, Yolanda compartió información de Internet y la utilizó para justificar la igualdad entre los ángulos α y β. Los detalles de la justificación y las conclusiones de las conversaciones en el foro se muestran en la Tabla 4.2

Tabla 5.3 Justificación de Yolanda y conclusiones de las conversaciones en el foro

Justificación de Yolanda	Recursos y Justificación	Resultados del foro
En otros foros ha surgido la pregunta de comó demostrar que el ángulo alta y beta son congruentes. Las respuestas que he leído no mencionan el porque lo son. han mencionado: E' es el simetrico de E con respecto a la recta n entonces los ángulos alga y beta son congruentes ¿eso siempre ser cierto? ¿por que? Busque la definición de punto simétrico y nunca mencionan eso, http://www.vitutor.com/geo/vec/a_10.html, PUNTO SIMÉTRICO RESPECTO DE UN PUNTO El punto simétrico A' de un punto A respecto de otro punto M, será el punto tal que la distancia del punto A al punto M es igual a la distancia del punto A' al punto M, es decir, d (A,D)= d (A',D). Por tanto, podemos decir que el punto D es el punto medio del segmento AA'. (http://matematica.laguia2000.com/general/punto-simetrico#ixzz4YR93zzEe).  La recta BC es mediatriz de A'A o en el caso del problema, la recta n es mediatriz de EE'. Por congruencia de triangulos (LAL) el angulo A'BA es congruente con DBA. Otra propiedad que es que el triángulo ABA' es isósceles y BD es bisectriz de A'BA	**Recursos:** Recta mediatriz de un segmento, congruencia de triángulos, bisectriz de un ángulo. **Justificación:** Sea la recta BC, A cualquier punto en el plano y A' es simétrico a A respecto a la recta BC. Por definición de punto simétrico, $A'D = AD$ $(AA' \perp BC)$. Por lo tanto, BC es mediatriz de AA'. $\Delta A'BD \cong \Delta ABD$ (por el criterio de congruencia LAL), así $\measuredangle A'BD \cong \measuredangle ABD$, es decir, BC es bisectriz de $\measuredangle ABA'$.	**Guillermo y Alex** retoman la justificación de Yolanda y concluyen: 1. A' es punto simétrico de A respecto a la recta BC, si la recta AA' es perpendicular a CB en D y $A'D = AD$, es decir, BC es mediatriz del segmento $A'A$. 2. Si B es un punto sobre BC, entonces el triángulo $A'BA$ es isósceles, ya que B está sobre la mediatriz del lado desigual AA'. Por lo tanto, BC es bisectriz de $\measuredangle ABA'$.

Fuente: Conversación en el foro relacionada con el concepto de punto simétrico

Al final de las conversaciones, Yolanda y los demás participantes establecieron la definición de punto simétrico respecto a una recta.

4.2 Exploración del problema y formulación de una conjetura

En el foro, José mencionó que la familia de triángulos FGH son acutángulos, Guillermo le indicó que no necesariamente se cumple tal hecho y le sugirió: "*mueve el punto C de tal forma que se acerque a A y observa el valor del ángulo FGH*", (Ver Tabla 3.1).

Por otra parte, Ale observó algunas propiedades de la construcción dinámica y, con base en el movimiento y medición de segmentos, formula la conjetura de que los triángulos formados son isósceles. Los nueve participantes restantes, también llegaron a tal resultado: "*bajo las condiciones del problema, el triángulo FGH es isósceles*".

En otro comentario, Alex cuestionó por qué se genera una familia de triángulos FGH isósceles (Figura 5.6).

Figura 5.6 Conjetura de Alex sobre triángulos isósceles

Fuente: Conversación en el foro relacionada con la formulación de una conjetura

La formulación de una conjetura, basado en el movimiento y observación de objetos y sus atributos, no fue un obstáculo para los participantes ya que en los primeros comentarios pudieron observar la relación de igualdad entre dos lados del triángulo cuando movían los puntos D y E (ver Tabla 3.1). Esto fue posible gracias a la participación del Grupo y el objetivo del diseño de las actividades de incorporar medios de Soporte y Evaluación para que, una vez propuesto el problema, cualquier participante pudiera expresar sus ideas y proporcionar retroalimentación a otros.

El uso del SGD, a partir del movimiento de objetos, permitió a los participantes experimentar con los objetos geométricos y en conjunto con la observación de sus atributos (en este caso la longitud de segmentos) encontraron invariantes en la construcción dinámica del problema necesarias para relacionar el triángulo FGH con un triángulo isósceles, de acuerdo con las condiciones establecidas en el problema.

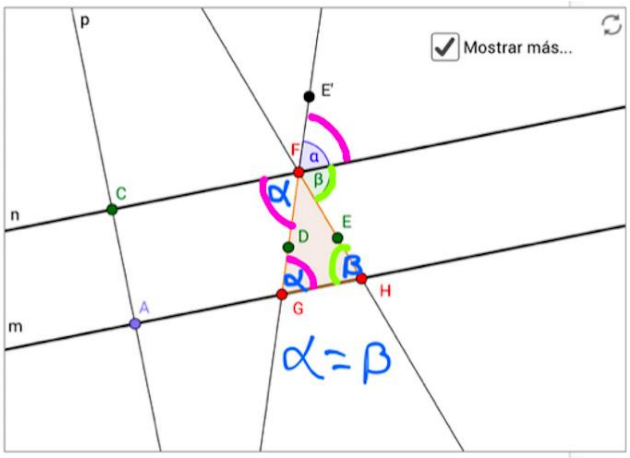
4.3 En búsqueda de una justificación

En esta parte el objetivo del diseño de la Actividad fue que los participantes se cuestionaran lo siguiente:

1. ¿Cómo se sustenta matemáticamente que la familia de triángulos FGH es isósceles?
2. ¿Qué conceptos, propiedades y recursos matemáticos es posible usar para sustentarlo?

Alex construyó y presentó una justificación basada en las propiedades del punto simétrico de E respecto a la recta n, los detalles se muestran en la Tabla 4.3.

Tabla 5.4 Justificación de Alex

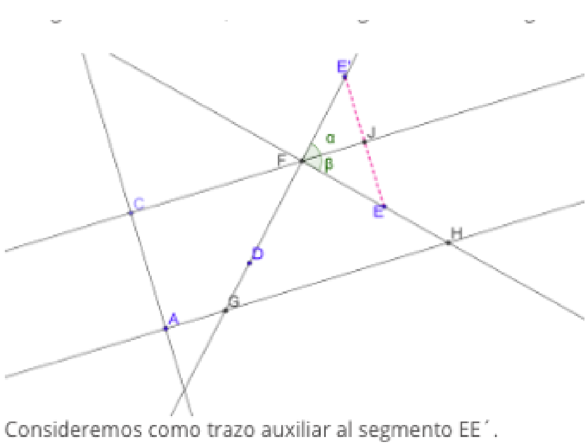
Justificación Alex	**Recursos, estrategias y justificación**
	**Recursos:** Punto simétrico respecto a una recta, distancia de un punto a una recta, bisectriz de un ángulo y ángulos entre paralelas. **Estrategia:** Relación entre los ángulos α y β entre rectas paralelas. **Justificación:** "Sea E' el punto simétrico de E respecto a la recta n, esto significa que están a la misma distancia de n. Así, n es bisectriz del ángulo $E\acute{}FE$ y, con ello, muestra que los ángulos α y β tienen la misma medida.

Fuente: Conversación en el foro relacionada con la justificación de la conjetura de Alex

Carlos, Karol, Erick y José estuvieron de acuerdo con la justificación de Alex. Por su parte, Alex retomó las ideas que expresó en la parte anterior de la actividad y en conjunto con Diego justificaron la conjetura utilizando ángulos entre paralelas y ángulo exterior de un triángulo, sin embargo, no dejaron clara la relación que existe entre los ángulos α y β. La Tabla 4.4 muestra los recursos y estrategias de esta justificación. Algunos participantes cuestionaron por qué $\angle\alpha \cong \angle\beta$, Alex sugirió que revisaran la parte anterior de la actividad donde se concluyó tal relación.

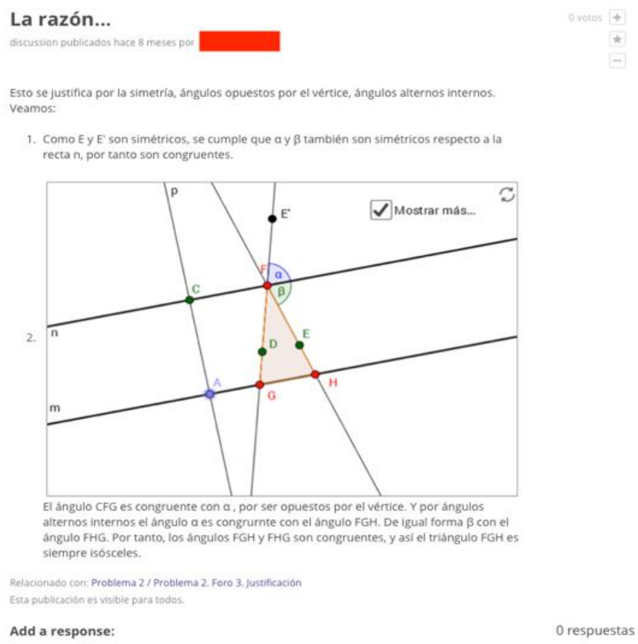
José proporcionó otra justificación de la conjetura, afirmó que los ángulos α y β son "*simétricos respecto a la recta n y por lo tanto congruentes*", este tema se había analizado en la parte anterior de la actividad, sin embargo, José no participó en las conversaciones. Yolanda le propuso que analizara lo discutido (Figura 5.3 y 5.4 y Tabla 5.1). José agradeció a Yolanda por la aclaración y afirmó estar de acuerdo en la justificación del por qué α y β son congruentes. La justificación de José hizo referencia a $\angle CFG \cong \angle\alpha$ por ser angulos opuestos por el vértice y $\angle\alpha \cong \angle FGH$ por ser alternos internos entre paralelas, análogamente $\angle\beta \cong \angle FGH$, por lo tanto $\angle FGH \cong \angle FHG$ (Figura 5.7).

Tabla 5.5 Recursos, estrategias y justificación de Alex y Diego

Justificación Alex y Diego	**Recursos, estrategias y justificación**
	**Recursos:** Punto simétrico respecto a una recta, ángulo externo de un triángulo de un ángulo y ángulos entre paralelas. **Estrategia:** Relación entre los ángulos α y β entre rectas paralelas. **Justificación:** Como $AH \parallel CF$ se tiene $\angle FHG \cong \angle\beta$ (alternos internos) y $\angle GHF \cong \angle\alpha$ (conjugados). Además, $\angle E'FE$ es ángulo externo de ΔGHF por lo que $\angle E'FE = \angle FGH + \angle GHF = \angle FGH + \angle\beta$ por lo tanto $\angle FGH \cong \angle\alpha$ Como $\angle\alpha \cong \angle\beta$ (por simetría de puntos) entonces ΔFGH es isósceles.

Fuente: Conversación en el foro relacionada con la justificación de la conjetura

Figura 5.7 Argumento presentado por José para justificar que m y n son rectas paralelas



Fuente: Conversación en el foro relacionada con la justificación de la conjetura

Durante el desarrollo de esta actividad, los participantes interactuaron entre ellos en el proceso de dar significado a los conceptos y refinar ideas que conduzcan a la justificación de la conjetura planteada. Algunos de ellos (Karol, Carlos, Diego, Erick) solo contestaron puntualmente las preguntas de la Actividad mientras que, Yolanda y José dieron seguimiento a las ideas que plantean en el foro y comentaron las ideas de otros cuando les responden.

4.4 Discusión de los resultados

El diseño de las actividades del curso masivo guio el trabajo de los participantes en dos direcciones, la primera hacia la búsqueda de diversas formas de explorar los modelos dinámicos donde el movimiento de objetos permitió de manera instantánea observar sus atributos; y la segunda, ver la representación dinámica de las tareas como una plataforma para identificar conceptos, plantear conjeturas basadas en el movimiento de los objetos matemáticos y sus relaciones o invariantes.

Las preguntas que se incluyeron en el diseño de la actividad promovieron que los participantes movieran y exploraran los objetos que conformaron el modelo dinámico, en este proceso identificaron los siguientes conceptos: rectas paralelas, rectas perpendiculares, punto simétrico a otro respecto a una recta, mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, tipos de ángulos, características y propiedades del triángulo isósceles y equilátero.

El uso del foro favoreció y permitió la comunicación y discusión de ideas matemáticas. Por ejemplo, al inicio de la actividad los participantes tenían ideas básicas del concepto de punto simétrico: E es simétrico a E' respecto a la recta n si existe la misma distancia de E y E' a la recta n. Sin embargo, cuando el equipo de diseño del curso cuestionó sobre el significado de distancia de un punto a una recta, los participantes no mostraron ideas concretas, por lo cual fue necesario ampliar el tema en el foro (Ver Tabla 5.1 y Figura 5.5).

La discusión generada en las conversaciones permitió a los participantes proporcionar retroalimentación a otros, o bien, recibirla de otros. Lo anterior favoreció el surgimiento o refinamiento de conceptos e ideas matemáticas, por ejemplo, emergieron los conceptos de mediatriz y bisectriz en la discusión de punto simétrico (Tabla 5.3).

El uso del foro como medio de Soporte y Evaluación favoreció el trabajo colaborativo, entre los participantes, durante el desarrollo de la Actividad. Además, el foro fue un espacio donde se comunicaron y explicaron las ideas, soluciones y resultados de los participantes, se compartieron imágenes y enlaces a modelos dinámicos elaborados por ellos mismos, y se favoreció el uso de notación matemática para explicar los pasos seguidos.

Las preguntas que se plantearon en la actividad y la intervención del equipo de diseño en el foro se convirtieron en un vehículo que permitió a los participantes construir, refinar, o transformar sus formas de comprender y resolver problemas. La evidencia muestra que los integrantes del estudio transitaron desde soluciones visuales y empíricas (movimiento de objetos y observación de relaciones o invariantes en sus atributos) hasta la presentación de argumentos de tipo geométricos y algebraicos en la validación de las conjeturas formuladas.

Durante el desarrollo del curso, el monitoreo que realizó el equipo de diseño en los comentarios dio lugar a la discusión y refinamiento de conceptos e ideas matemáticas y también, de los episodios de la resolución de problemas. Por ejemplo, el grupo de participantes conformado por José, Alex, Guillermo, Karol, Diego, Alex y Yolanda formularon conjeturas basadas en las estrategias de movimiento y medición de segmentos y ángulos relacionadas con la pendiente de una recta y la definición y propiedades de un punto simétrico con respecto a una recta, además, presentaron argumentos para justificarlas (Figuras 4.2, 4.3 y 4.4). Las preguntas planteadas por el ED fomentaron la discusión de ideas matemáticas y permitió dar significado a conceptos de punto simétrico con respecto a una recta y la distancia de un punto a una recta (Ver Tabla 4.1).

Es importante resaltar que, durante las conversaciones, algunos integrantes (Carlos, Erick, Ale, Guillermo, Karol y Yolanda) asumieron un comportamiento relacionado con proporcionar retroalimentación a las ideas y preguntas de otros, esto promovió el trabajo colaborativo y fomentó la independencia de los participantes en el proceso de la construcción y su desarrollo del conocimiento matemático.

5 Agradecimientos

A la Universidad de Costa Rica (UCR) por el apoyo brindado.

6 Conclusiones

Los resultados muestran que las diversas tecnologías digitales utilizadas en este estudio bajo el marco de diseño RASE y la resolución de problemas favorecieron un ambiente de trabajo de colaboración. La plataforma digital *Open Edx* permitió crear una secuencia de Recursos, Actividades, medios de Soporte y Evaluación en un mismo sitio. Mediante el uso de Recursos tales como modelos dinámicos elaborados en GeoGebra, videos de KhanAcademy y enlaces a Wikipedia, se diseñaron Actividades en las cuales los participantes tuvieron la oportunidad de explorar e identificar conceptos, formular conjeturas y buscar diversas maneras o argumentos para sustentarlas. En este proceso, los participantes utilizaron estrategias asociadas al uso del SGD tales como el movimiento de objetos dentro de la configuración dinámica y la cuantificación de sus atributos (longitudes y áreas).

El uso coordinado de tecnologías digitales tales como GeoGebra, la plataforma MéxicoX y el foro de discusión por sí mismas no proporcionan los medios o las formas necesarias para que los participantes se involucren en las actividades de resolución de problemas. El diseño de las actividades debe proporcionar una guía de trabajo y ser complementada en el foro mediante la intervención del equipo de diseño. En este sentido, las acciones que implementó el ED en el foro favorecieron la discusión de los diferentes episodios de la resolución de problemas y la comprensión de conceptos e ideas matemáticas.

Durante el desarrollo del curso, se identificó un grupo de participantes que asumió la tarea de aclarar dudas o contestar preguntas a otros, lo que favoreció el refinamiento de ideas y conceptos matemáticos involucrados con: el problema, la exploración del modelo dinámico, la formulación de conjeturas y con su justificación. Esto fue un factor para que los participantes avanzaran en el desarrollo y comprensión de las tareas matemáticas sin depender de un profesor o tutor.

Durante la etapa del diseño e implementación de un MOOC, es importante fomentar que los participantes sean el centro de las actividades sin depender de la figura de un tutor, por ello, se debe buscar que, ellos mismos, creen la conciencia de monitorear sus avances en la comprensión y uso de las ideas matemáticas en la resolución de problemas. En este sentido, el foro como medio de Soporte y Evaluación favoreció que los participantes colaboraran y trabajaran juntos en el desarrollo de todas las actividades.

7 Referencias

Aguilar-Magallón, D. & Poveda, W. (2017). Problem Posing Opportunities Whit Digital Technology in Problem Solving Environments. In Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2016). Framework for Designing Mobile Learning Environments. En D. Churchill, B. Fox, & M. King (Eds.), Mobile Learning Design, lecture Notes in Educational Technology (pp. 3-25). Singapore: Springer.

Ernest, P. (2016). The unit of analysis in mathematics education: bridging the political-technical divide? Educational studies in mathematics, 92(1), 37-58.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2009). Focus in High School Mathematics: Reasoning and sense making. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pólya, G. (1945). How to Solve it. Princeton: Princeton University Press.

Santos-Trigo, M. (2008). An inquiry approach to construct instructional trajectories based on the use of digital technology, Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 4, 347–357.

Santos-Trigo, M. (2014). La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. Segunda edición. México: Trillas, Asociación Nacional de profesores de matemáticas.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2009). Towards the construction of a framework to deal with routine problems to foster mathematical inquiry. PRIMUS, 19(3), 260-279.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2011). Framing a problem-solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the Seventh Conference of the European society for Research in Mathematics Education (pp. 2258-2277). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. The Mathematics Enthusiast, 10(1), 279-302.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 48(6), 827-842.

Poveda, W. & Aguilar-Magallón, D. (2017). Mathematical Problem Solving and Digital Technologies in a Massive Online Course. In Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Schoenfeld A. (1985). Mathematical problem Solving. New York: Academic Press.

Schoenfeld A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 334-371.) New York: Macmillan.

El uso de un Sistema de geometría dinámica para formular y resolver problemas

The use of a Dynamic Geometry System to formulate and solve problems

AGUILAR-MAGALLÓN, Daniel†*, [1]POVEDA-FERNÁNDEZ, William y [2]OLVERA-MARTÍNEZ, Carmen

ID 1[er] Autor: *Daniel Aurelio, Aguilar-Magallón* / **ORC ID:** 0000-0001-7520-4508, **Researcher ID Thomson:** V-2050-2018, **CVU CONACYT ID:** 486327

ID 1[er] Coautor: *William, Poveda-Fernández* / **ORC ID:** 0000-0002-7245-8278, **Researcher ID Thomson:** V-1424-2018, **CVU CONACYT ID:** 627826

ID 2[do] Coautor: *María del Carmen, Olvera-Martínez* / **ORC ID:** 0000-0001-7361-1687, **Researcher ID Thomson:** U-9456-2018, **CVU CONACYT ID:** 230198

[1]*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – IPN*
[2]*Universidad Juárez del Estado de Durango*

D. Aguilar, W. Poveda, C. Olvera

aguilarm@cinvestav.mx

A. López, C. Lima, J. Reyes (Dirs.) Educación para todos. Tópicos Selectos de Educación en CITeM. ©ECORFAN-México, 2018.

Abstract

This chapter reports and analyzes different types of problems that nine students in a Master's Program in Mathematics Education posed during a course on problem solving. What opportunities can a dynamic geometry system (GeoGebra) offer to allow in-service and in-training teachers to formulate and solve problems, and what type of heuristics and strategies do they exhibit during this process? Results show that combining semi-structured problems with the use of GeoGebra can be useful in motivating and involving teachers in various episodes of problem formulation. In this context, important strategies included analyses of the variation in the attributes of figures using dynamic points and loci.

Problem solving, Problem formulation, Use of digital technologies, Teacher training

1 Introducción

En los últimos treinta años, la resolución de problemas ha sido un dominio o área de investigación en educación matemática que relaciona el quehacer de la disciplina con el aprendizaje de los estudiantes (Santos-Trigo, 2014). Un principio fundamental en la resolución de problemas es la importancia de formular preguntas relevantes como medio para comprender, representar, explorar y resolver problemas (Polya, 1965). Así, estas preguntas son el medio para explorar conceptos y para desarrollar habilidades de resolución de problemas. Misfeldt y Johansen (2015) resaltan que la actividad de formular preguntas y problemas es un aspecto crucial y no trivial de la práctica profesional de los matemáticos. Actualmente, se reconoce que la formulación o planteamiento de problemas es una actividad central de la práctica matemática profesional y una componente fundamental del pensamiento matemático (Cai et al., 2013). En esta dirección, en las últimas dos décadas la resolución y formulación de problemas se han identificado como temas centrales para la educación matemática (Rosli et al., 2015). Osana y Pelczer (2015) comentan que:

> Un movimiento creciente en la educación matemática que pone a la resolución de problemas en el centro de las matemáticas escolares ha conducido a los investigadores a prestar atención en el planteamiento de problemas, particularmente en su papel en la enseñanza y aprendizaje. (p. 470).

Desde esta perspectiva, en escenarios de enseñanza y aprendizaje la actividad matemática es concebida como una forma de pensar donde una comunidad (profesor y estudiantes) formula preguntas y nuevos problemas para dar sentido y resolver situaciones problemáticas. En este camino, dicha comunidad reconoce la importancia de buscar distintas maneras de sustentar sus respuestas. Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Ortega-Moreno (2015) comentan que un objetivo de la actividad matemática es identificar y contrastar diversas maneras de representar, explorar, conjeturar, resolver y formular nuevos problemas. Dentro de estas comunidades, el papel del profesor es determinante para el aprendizaje de sus estudiantes, pues es el responsable de escoger y plantear las tareas que permitan desarrollar habilidades de resolución y formulación de problemas. Sin embargo, algunos investigadores reconocen que, en general, profesores y futuros profesores tienen serias dificultades para enfrentarse a tareas de planteamiento de problemas (Rosli et al., 2015; Lavy, 2015).

¿Cuál es el papel que juega el uso de tecnologías digitales en comunidades de aprendizaje que promueven y valoran la formulación y resolución de problemas? El uso de tecnologías digitales en la educación matemática puede ser un camino útil para desarrollar conocimiento matemático y para transformar escenarios de enseñanza alrededor del planteamiento y la resolución de problemas (Aguilar-Magallón & Reyes-Martínez, 2016). No obstante, existen pocas investigaciones sobre el papel de la tecnología en el diseño e implementación de tareas que tengan como objetivo el desarrollo de habilidades para formular y resolver problemas (Abramovich & Cho, 2015).

Por lo tanto, resulta importante investigar en qué medida el uso de distintas herramientas digitales, en particular el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), permite a los participantes involucrarse en actividades de planteamiento de problemas a partir de interrogantes que surgen en ambientes de resolución de problemas. Así, el objetivo principal de este estudio es analizar cómo el uso sistemático de un (SGD) por parte de profesores en servicio y formación, contribuye en los procesos de formulación y resolución de problemas.

Así, la pregunta que orienta esta investigación es: ¿Qué oportunidades puede ofrecer un sistema de geometría dinámica (GeoGebra) para que profesores y futuros profesores formulen y resuelvan problemas y qué tipo de recursos, heurísticas y estrategias exhiben en este proceso?

2 Marco Conceptual

En la literatura se caracteriza al proceso de plantear problemas alrededor de dos actividades centrales: la formulación y reformulación. La formulación consiste en generar problemas nuevos a partir de cierta información, situación o contexto. La reformulación involucra generar problemas mediante la modificación de las condiciones y/o objetivos de un problema dado (Silver, 1994). La actividad de reformulación también está presente cuando se transforma o replantea un problema que se está resolviendo con el objetivo de simplificarlo (Silver, Mamona-Downs, Leung, & Kenney, 1996). En resumen, la formulación de problemas consiste en: (1) generar un problema original a partir de cierta información o datos, (2) reformular un problema que se está resolviendo o (3) formular un problema nuevo modificando los objetivos o condiciones de un problema que ya ha sido resuelto. A partir de la caracterización anterior, el proceso de planteamiento de problemas puede ocurrir en tres momentos en relación con la resolución de problemas: i) antes de la resolución de problemas, cuando se formula un problema nuevo a partir de cierta información o situación; ii) durante la resolución de los problemas, cuando se reformula un problema que se está resolviendo con el objetivo de simplificarlo; iii) después de la resolución de problemas, cuando se formula un problema nuevo modificando, extendiendo o generalizando los objetivos o condiciones de un problema que ya ha sido resuelto (Rosli et al., 2015).

Siguiendo estas ideas, Stoyanova y Ellerton (1996) presentan una clasificación del tipo de problemas como abiertos, semi-estructurados y estructurados en función de las actividades de formulación o reformulación involucradas. En los problemas abiertos el individuo requiere plantear problemas a partir de cierta información presentada en forma de figuras, tablas, números, etcétera. En el enunciado de este tipo de problemas no hay requerimientos u objetivos específicos. En los problemas semi-estructurados el individuo requiere generar y/o agregar condiciones para resolverlos, en otras palabras, el anunciado de este tipo de problemas contiene información o condiciones parciales. Finalmente, en los problemas estructurados se proporciona el objetivo, así como toda la información y condiciones necesarias para conseguirlo. Los problemas abiertos involucran principalmente actividades de formulación, mientras que los estructurados comprenden tareas de reformulación. Los problemas semi-estructurados pueden motivar actividades tanto de formulación como de reformulación. Silver (1997) afirma que los problemas abiertos o semi-estructurados pueden ser útiles para motivar episodios de planteamiento de problemas.

Por otro lado, Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Aguilar-Magallón (2015) resaltan la importancia de utilizar de forma sistemática distintas herramientas digitales en ambientes de formulación y resolución de problemas. En esta dirección, se busca que el individuo constantemente identifique y examine distintos tipos de relaciones, plantee conjeturas, determine y analice patrones, utilice distintos sistemas de representación, establezca conexiones, emplee distintos argumentos, generalice y extienda problemas iniciales, comunique sus resultados y plantee sus propios problemas. Algunas investigaciones se han enfocado en estudiar procesos de planteamiento de problemas con herramientas digitales particulares como un SGD (Leikin, 2015; Lavy, 2015). De acuerdo con Lavy (2015), el uso de un SGD representa un apoyo cognitivo visual basado en interacciones inmediatas entre la herramienta y el usuario; lo cual puede facilitar procesos de planteamiento de problemas.

El planteamiento de problemas usando geometría dinámica implica una serie de interacciones únicas entre las acciones o entendimientos del estudiante y la interface del software. A los estudiantes se les ofrece la oportunidad de utilizar razonamiento visual en matemáticas, ayudándolos por medio de las facilidades del arrastre lo cual permite que el estudiante pueda generalizar problemas o examinar la validez de un problema planteado. (Lavy, 2015, p. 398).

En cuanto al diseño de actividades de formulación de problemas, Imaoka, Shimomura y Kanno (2015) recomiendan tareas que motiven la exploración de atributos variables de figuras como áreas, perímetros, longitudes, ángulos, entre otros. Además, argumentan que las actividades deben incluir algunos elementos que sean adecuados para utilizar un SGD. En otras palabras, que las actividades motiven y faciliten la experimentación, exploración y análisis de conjeturas más que la simple aplicación de algoritmos conocidos.

Por otro lado, Leikin (2015) afirma que es importante que las actividades diseñadas puedan representarse y resolverse de distintas maneras. Además, afirma que una estrategia importante para diseñar actividades de planteamiento de problemas consiste en transformar problemas estructurados en problemas abiertos o semi-estructurados. Es decir, recomienda eliminar condiciones u objetivos específicos de problemas estructurados para motivar la exploración e investigación con ayuda de un SGD; esto está basado en la estrategia *What if not?* para formular problemas propuesta por Brown y Walter (2005).

3 Metodología

3.1 Participantes

En este estudio participaron nueve estudiantes de un curso de Maestría en Educación Matemática durante catorce sesiones semanales con duración de tres horas cada una. El grupo estuvo conformado por seis profesores en servicio y tres futuros profesores. Todos los participantes tenían formación académica relacionada con matemáticas.

3.2 Diseño de las actividades

Para el estudio se implementaron, en total, cinco actividades tomando en cuenta las ideas propuestas por Imaoka et al. (2015) y Leikin (2015). Es decir, se partió de problemas estructurados relacionados con áreas de figuras y se transformaron en problemas semi-estructurados de investigación. Para este reporte se analizan los resultados de uno de los problemas; el cual surgió cuando el investigador transformó el problema estructurado, usado por Schoenfeld (1985), al modificar sus condiciones iniciales (Tabla 6.1).

3.3 Implementación de la actividad y recolección de datos

El desarrollo de la actividad se puede caracterizar en tres fases: trabajo individual o por parejas, discusiones plenarias y discusiones en línea. El trabajo individual o por parejas consistió en tres sesiones presenciales (semanales) de tres horas cada una dentro de un laboratorio de cómputo, es decir, cada estudiante tuvo acceso a una computadora personal con Internet. En las discusiones plenarias los participantes comentaban al grupo sus ideas o avances relacionados con la solución de la actividad. Para las discusiones en línea, se utilizó un muro digital (Padlet) donde los participantes podían continuar la discusión fuera de las sesiones presenciales. Los datos del estudio se recolectaron por medio de video grabaciones de las sesiones presenciales, registros de participaciones en el muro digital, hojas de trabajo de GeoGebra, reportes escritos de forma individual y entrevistas.

Tabla 6.1 Transformación de un problema estructurado en semi-estructurado

Problema Estructurado	Problema semi-estrucrturado
Se te da un triángulo T con base B. Muestra que siempre es posible construir, con regla y compás, una línea recta que es paralela a B y que divide al triángulo T en dos partes de misma área. ¿Puedes de forma similar dividir el triángulo en cinco partes de misma área? Schoenfeld (1985, p.16).	**P.1.** Dado un triángulo cualquiera, dividirlo en dos regiones con misma área.

Fuente: Elaboración propia

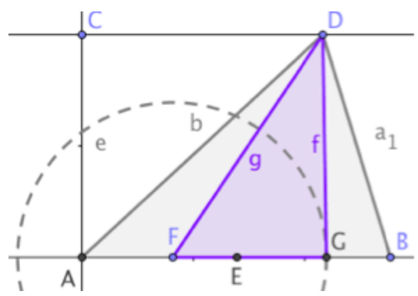
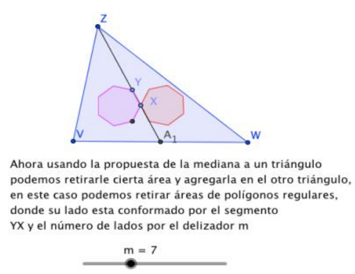
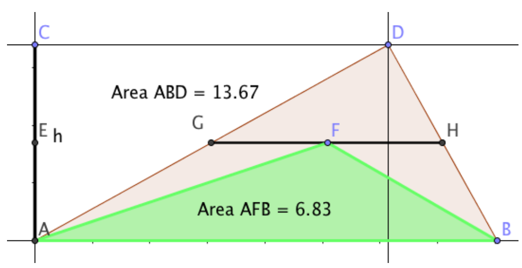
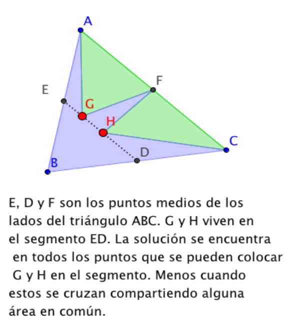
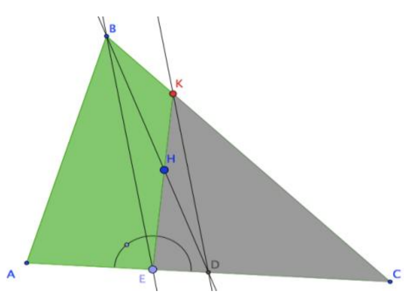
4 Resultados

En la primera parte de esta sección se muestran algunas soluciones iniciales que exhibieron los participantes (Sección 4.1). Posteriormente en la sección 4.2, se describen algunos problemas formulados por los participantes relacionados con nuevas formas de resolver el problema inicial (P1). En particular, se discutirán los recursos, heurísticas y estrategias presentes en este proceso. Finalmente, en la sección 4.3, se discuten algunas oportunidades que ofreció el SGD para formular y analizar nuevos problemas a través de la extensión o generalización de los acercamientos dinámicos iniciales. Estos problemas surgieron del planteamiento de preguntas detonadoras por parte del investigador; las cuales fueron trabajadas por los participantes.

4.1 Soluciones iniciales

En una primera instancia, los participantes resolvieron el problema usando dos ideas: 1) bisecar el área del triángulo por medio de la mediana (dividir base en dos partes iguales y conservar altura) y, 2) bisecar el área dividiendo la altura en dos partes iguales conservando la base inicial. Los participantes usaron estrategias de solución tanto estáticas como dinámicas. Algunas soluciones iniciales dinámicas se muestran en la (Tabla 6.2). Un aspecto esencial en estos acercamientos es la búsqueda de diversas maneras de identificar regiones con la misma área.

Tabla 6.2 Algunas soluciones dinámicas iniciales del problema

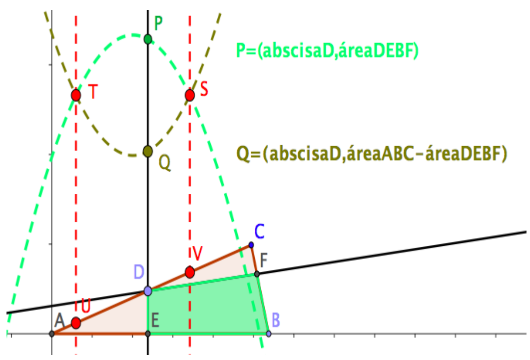
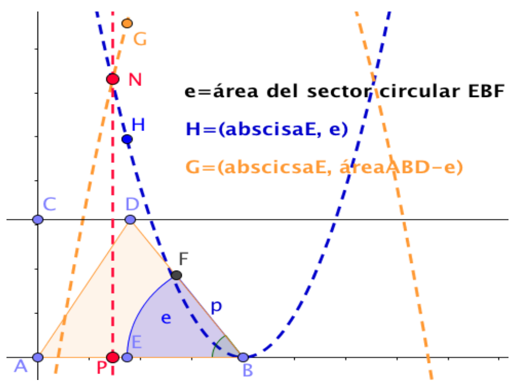
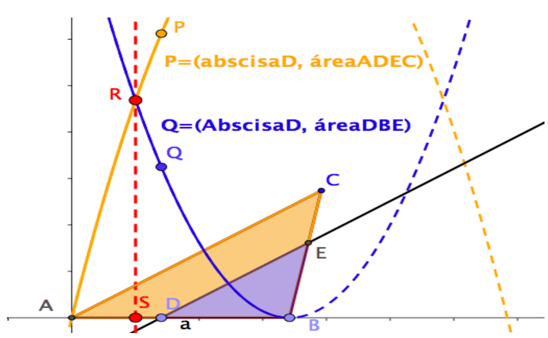
Solución	Recursos y estrategias
1. 	***Recursos:*** circunferencia para trasladar medidas, punto móvil sobre segmento, punto medio, triángulo. ***Estrategia dinámica***: Punto F móvil sobre AB. Construir un triángulo FGD dinámico con misma altura que el triángulo ABD, pero con base móvil FG de longitud constante igual a AE, donde $AE = \frac{1}{2}AB$ (infinidad de soluciones).
2. 	***Recursos:*** Mediana, polígono regular, punto móvil sobre segmento. ***Estrategia dinámica*:** usar un deslizador "m" para trazar un polígono regular de m lados y reflejarlo a partir de la mediana; sumar y restar polígonos dinámicos de misma área en ambos lados de la mediana (infinidad de soluciones).
3. 	***Recursos***: paralela media, postulado 37 de Euclides. ***Estrategia dinámica:*** Punto F móvil sobre la paralela media y construcción de triángulo ABF con misma base AB pero con la mitad de altura (infinidad de soluciones).
4. 	***Recursos:*** paralela media, punto medio, triángulo, punto móvil sobre segmento, postulado 37 de Euclides. *Estrategia dinámica:* dividir la altura en dos partes con la paralela media ED y construir dos triángulos que tienen misma base (igual a la mitad del lado AC) y vértices móviles G y H sobre la paralela media (infinidad de soluciones). El área de la región verde es igual a la comprendida por la región azul.
5. 	***Recursos***: mediana y postulado 37 de Euclides. ***Solución dinámica***: colocar punto E móvil sobre base AC para trazar recta EB y su paralela KD, a partir del punto medio D del lado AC. La recta EK divide al triángulo en dos secciones de misma área sin importar la posición del punto E.

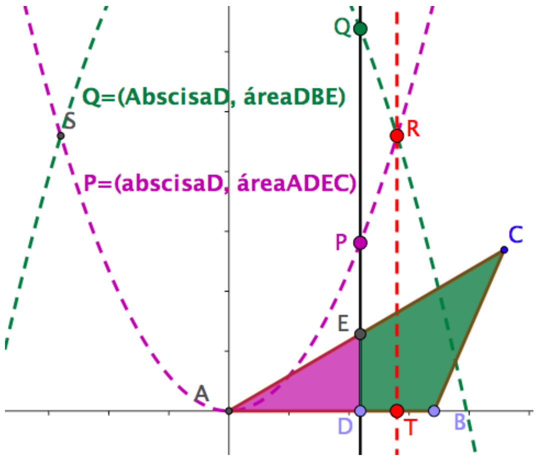
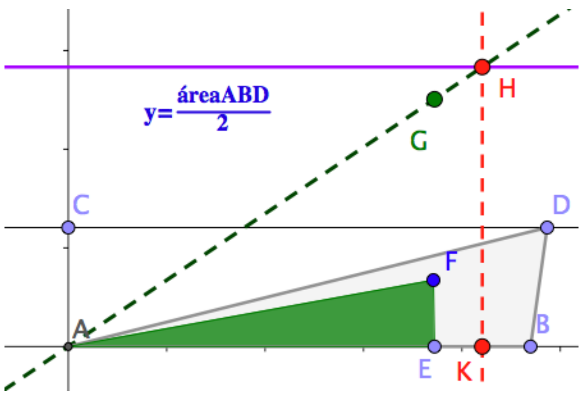
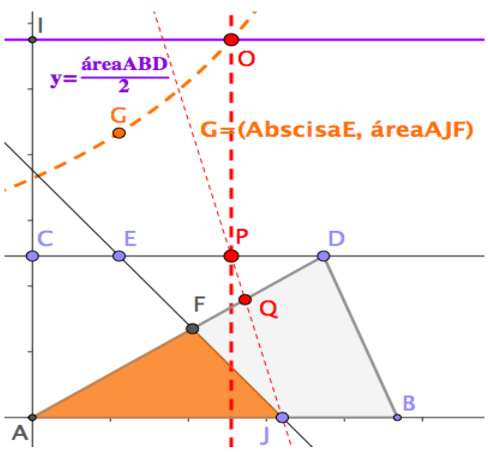
Fuente: Producciones de los participantes

4.2 Problemas planteados por los participantes

Después de presentar las soluciones iniciales en una discusión plenaria, los participantes propusieron nuevas formas de encontrar regiones con misma área en el triángulo dado; motivadas por la exploración dinámica de elementos dentro de la configuración (Tabla 6.3). Por ejemplo, un participante propuso utilizar un sector circular para dividir el triángulo en dos secciones de misma área. Otro enfocó la atención hacia una construcción que involucraba un cuadrilátero. Estas nuevas formas de explorar el problema surgen a partir de las oportunidades que ofrece la herramienta para arrastrar objetos y de la formulación de preguntas relevantes. La idea matemática central detrás de todos estos acercamientos dinámicos es la variación. Las preguntas planteadas están dirigidas al análisis de la variación del área de figuras con ciertas propiedades. El trabajo posterior de los participantes consistió en analizar estas variaciones por medio de puntos dinámicos y lugares geométricos. Se debe resaltar que, en este análisis, es crucial que la variación se produzca a partir del movimiento controlado de puntos dinámicos (arrastre de puntos por trayectorias bien definidas como rectas, circunferencias o cónicas), pues de lo contrario, no es posible construir lugares geométricos. Esta característica del SGD resulta determinante para la resolución de problemas de variación.

Tabla 6.3 Problemas planteados y estrategias de exploración y solución

Problema planteado	Recursos y estrategias de solución
1.1. Dividir el triángulo con un cuadrilátero de lados perpendiculares a dos lados del triángulo (variación de un punto D sobre el lado AC).  	***Exploración.*** Construcción de una familia de cuadriláteros a partir del punto móvil D y con lados perpendiculares a los lados del triángulo. ***Pregunta relevante:*** ¿dónde colocar el punto D sobre el lado AC para que el cuadrilátero EBFD tenga la misma área que la suma de las áreas de los triángulos AED y DFC? ***Solución.*** Construir los puntos dinámicos $P = (x(D), áreaDEBF)$ y $Q = (x(D), áreaABC - áreaDEBF$. Las intersecciones T y S de los lugares geométricos descritos por P y Q al mover D determinan las soluciones U y V.
1.2. Usar un sector circular para dividir el triángulo (variación de un punto E sobre el lado AB).  	***Exploración.*** Construcción de una familia de sectores circulares de área variable "*e*" partir del punto móvil E. ***Pregunta relevante:*** ¿Dónde colocar el punto E, sobre el lado AB, para que el sector circular BEF tenga la misma área que la sección AEFD? ***Solución.*** Crear los puntos $H = (x(E), e)$ y $G = (x(E), área\ ABD - e)$. La intersección N de los lugares geométricos descritos por H y G al mover E determina la solución P.
1.3. División por medio de una recta paralela a uno de los lados (variación de un punto D sobre el lado).  	***Exploración.*** Construcción de una familia de triángulos DBE con D móvil sobre AB y lado DE paralelo al lado AC. ***Pregunta relevante****:* ¿Dónde colocar el punto D sobre el lado AB para que el cuadrilátero ADEC y el triángulo DBE tengan misma área? ***Solución.*** Crear los puntos $P = (x(D), áreaADEC)$ y $Q = (x(D), área\ DBE)$. La intersección R de los lugares geométricos descritos por P y Q al mover D determina la solución S.

1.4. División por medio de una recta perpendicular a uno de los lados (variación de un punto móvil D sobre el lado).  	***Exploración.*** Construcción de una familia de triángulos rectángulos ADE, a partir del punto D móvil, sobre lado AB y con lado DE perpendicular al lado AB del triángulo inicial ABC. ***Pregunta relevante****:* ¿Dónde colocar el punto D sobre el lado AB para que el cuadrilátero DBCE y el triángulo ADE tengan misma área? ***Solución.*** Crear los puntos $P = (x(D), áreaADE)$ y $Q = (x(D), áreaDBCE)$ La intersección R de los lugares geométricos descritos por P y Q al mover D determina la solución T.
1.5. Bisecar el área por medio de un punto móvil F libre dentro del triángulo inicial y otro punto móvil E sobre la base.  	***Exploración.*** Construcción de una familia de triángulos AEF a partir de los puntos móviles F y E. El punto F se mueve libremente dentro del triángulo ABD. El punto E se mueve sobre el lado AB. ***Pregunta relevante:*** ¿Dónde colocar los puntos E y F para que el triángulo AEF tenga la mitad del área del triángulo ABD? ***Solución.*** Crear el punto $G = (x(E), áreaAEF)$ La intersección H del lugar geométrico descrito por G (al mover E) y la recta $y = \frac{áreaABD}{2}$ determina la solución K.
1.6. Usar una recta cualquiera para dividir el triángulo.  	***Exploración.*** Construcción de una familia de triángulos AJF a partir de los puntos móviles J y E. ***Pregunta relevante:*** ¿Dónde colocar los puntos E y J para que el triángulo AJF tenga la mitad del área del triángulo ABD? ***Solución.*** Crear el punto $G = (x(E), áreaAJF)$ La intersección O del lugar geométrico descrito por G (al mover E) y la recta $y = \frac{áreaABD}{2}$ determina la solución Q.

Fuente: Producciones de los participantes

El proceso que siguieron los participantes para resolver los problemas formulados se puede caracterizar en tres etapas: estrategia de exploración, planteamiento de pregunta relevante y estrategia de solución. La estrategia de exploración consistió en la división del triángulo inicial por medio de figuras móviles con ciertas propiedades (cuadriláteros, sectores circulares, triángulos, entre otros); en general, estas figuras no bisecaban el área del triángulo. Esta estrategia de exploración permitió formular preguntas relevantes a los participantes que a su vez determinaron una estrategia de solución. La estrategia de solución consistió en buscar por medio de las facilidades de la herramienta (arrastre) cuando las figuras móviles bisecaban el área del triángulo inicial. En la estrategia de exploración, el SGD motivó el uso de heurísticas de reformulación de problemas como analizar casos particulares, analizar casos extremos, relajar las condiciones del problema y explorar una familia de casos.

Para la solución fue determinante la mediación de dichas heurísticas por el SGD en términos de la estrategia *análisis dinámico de relaciones (ADR);* que consistió en construir puntos dinámicos (que representaban la variación de áreas) y visualizar sus respectivos lugares geométricos.

En una discusión plenaria los participantes mostraron a todo el grupo sus métodos de solución de los problemas y, de forma grupal, se reflexionó en tres cuestiones:

i) Variación. Existe una diferencia entre la variación analizada en los problemas 1.1,1.2, 1.3, 1.4 y en los problemas 1.5 y 1.6. Mientras en el primer grupo de problemas la variación se controla por medio de un solo punto dinámico, en el segundo grupo la variación depende de dos puntos dinámicos. Esta diferencia es importante, pues para analizar la variación, en el segundo grupo de problemas, se requiere primero considerar fijo alguno de los puntos dinámicos para generar un lugar geométrico a partir de la variación del otro punto. A diferencia del primer grupo de problemas, en el segundo se generan una familia de lugares geométricos que depende de la variación del punto que se consideró fijo en un principio. En otras palabras, si la variación depende de dos puntos dinámicos, uno de ellos generará un lugar geométrico y el otro modificará dicho lugar geométrico creando una familia de lugares geométricos.

ii) Naturaleza de las preguntas relevantes y estrategias de solución. Se resaltó la diferencia entre la naturaleza de las preguntas relevantes de los problemas 1.1,1.2, 1.3, 1.4 y los problemas 1.5 y 1.6 y su impacto en las estrategias de solución. Por un lado, en el primer grupo de problemas la pregunta relevante está asociada al análisis y comparación de la variación del área de dos sectores dentro del triángulo; esto tiene como consecuencia que la estrategia de solución consista en encontrar el punto de intersección de dos lugares geométricos. Por otro lado, en el segundo grupo de problemas la pregunta relevante compara la variación de un sector del triángulo con la mitad del área del triángulo original (la cual es constante); así, mediante este enfoque la estrategia de solución consiste en encontrar el punto de intersección de un lugar geométrico con la recta paralela al eje X: $y = \frac{\acute{A}rea\ del\ tri\acute{a}ngulo\ original}{2}$.

iii) Necesidad de buscar distintas formas de resolver los problemas planteados. Debido a las limitaciones del SGD, en cuanto a la estabilidad del comando *cónica dados cinco puntos* (comando necesario para encontrar puntos de intersección entre dos lugares geométricos que se suponen cónicas), se reflexionó sobre la necesidad de buscar maneras de extender y generalizar el análisis y, eventualmente, buscar distintas maneras de resolver los problemas.

4.3 Episodios de formulación de problemas adicionales

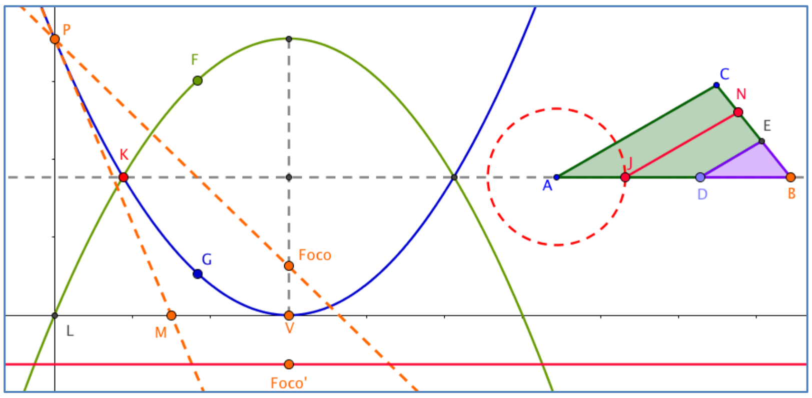
Como consecuencia de la discusión del punto iii) el investigador formuló nuevos problemas relacionados con el análisis de los lugares geométricos encontrados; en términos de sus representaciones algebraicas y sus elementos importantes (focos, vértices, ejes de simetría, etcétera). En este camino, fueron importantes las siguientes preguntas: ¿los lugares geométricos son cónicas? ¿en caso de ser cónicas cómo encuentro sus elementos importantes? ¿cómo encuentro la representación algebraica de los lugares geométricos? Cabe mencionar que el objetivo de esta fase de planteamiento de problemas, además de validar las soluciones encontradas previamente, fue extender la discusión para intentar dar una solución general a los problemas en términos de los datos conocidos del triángulo inicial. En otras palabras, los participantes buscaron generalizar las soluciones encontradas previamente por medio de una representación algebraica de los lugares geométricos (Tabla 6.3), a partir de parámetros definidos por las dimensiones conocidas del triángulo inicial.

Elementos importantes de cónicas

Para encontrar los elementos importantes de las cónicas, los participantes tuvieron que revisar (en distintos recursos en línea) sus propiedades geométricas. En la Figura 6.1 se muestra el método seguido por uno de los participantes para encontrar el vértice, foco y directriz de la parábola generada en la solución del problema 1.3. Este método consistió en encontrar de forma robusta un punto sobre la parábola y su vértice, es decir, puntos particulares que dependan únicamente de los parámetros conocidos del triángulo inicial como la longitud de sus lados y su área. Así, propuso el punto P = (0, $\acute{a}reaABC$) sobre la parábola y el vértice V = (AB, 0).

En este análisis, la parábola es generada por el punto $G = (AD, áreaDBE)$; cuando $AD = 0$ el área del triángulo DBE coincide con el área del triángulo inicial ABC, por lo tanto, el punto $P = (0, áreaABC)$ pertenece a la parábola. Por otro lado, cuando $AD = AB$ el área del triángulo DBE es cero por lo tanto el punto $V = (AB, 0)$ es el punto mínimo de la parábola, es decir, su vértice. Es importante recalcar que en esta estrategia de encontrar puntos específicos del lugar geométrico, el SGD sirve como mediador para las heurísticas de analizar casos particulares (extremos). Una vez teniendo el vértice V y un punto P de la parábola, el participante usó la propiedad reflexiva de la parábola para encontrar su foco y directriz; M es el punto medio de LV y la recta $PFoco$ es la reflexión de la recta PL sobre la recta PM.

Figura 6.1 Método geométrico para encontrar foco y directriz de una parábola, conociendo el vértice V, un punto P sobre la parábola y su eje de simetría

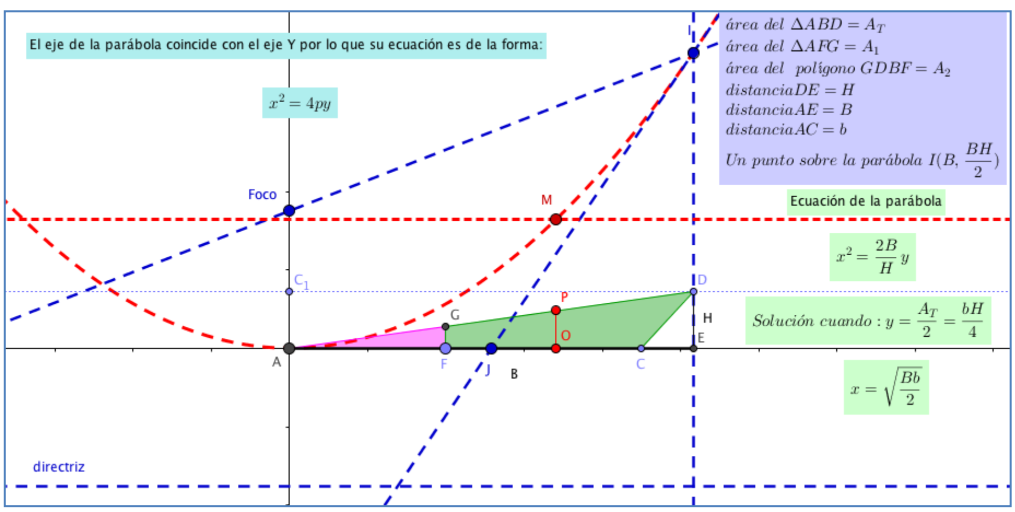


Fuente: Producciones de los participantes

Ecuaciones de cónicas

Los participantes no tuvieron dificultades para encontrar las ecuaciones de las parábolas presentes en las soluciones de los problemas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4, pues dichas parábolas eran verticales y era posible determinar su vértice y un punto sobre ellas de manera robusta en función de los parámetros conocidos de la configuración dinámica. En este camino, la heurística de explorar casos particulares y extremos fue fundamental para encontrar puntos que pertenecían a los lugares geométricos (Figura 6.2).

Figura 6.2 Parametrización y uso de casos extremos para encontrar la ecuación de la parábola usada para resolver el problema 1.4

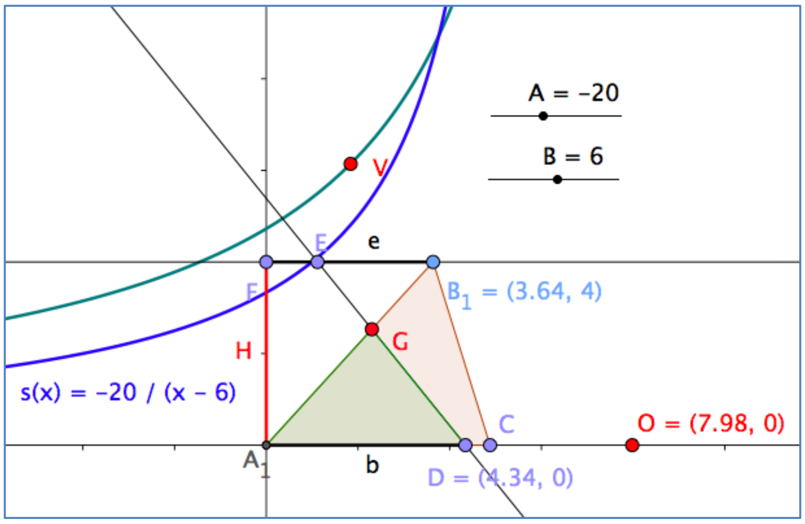


Fuente: Producciones de los participantes

A diferencia de encontrar las ecuaciones de las parábolas, no fue fácil encontrar la ecuación de la hipérbola usada para resolver el problema 1.6 de bisección por medio de una recta cualquiera. Un tipo de solución propuesta por los participantes, motivada por el SGD, fue asociar la gráfica de la hipérbola con una función racional. Algunos participantes trabajaron en un principio con una función racional del tipo $y = \frac{A}{x-B}$, pues identificaron que una asíntota era el eje X .

Así, por medio del uso de deslizadores exploraron varios valores posibles de A y B para que la gráfica de la función se empatara con la gráfica de la hipérbola (Figura 6.3). Se tuvieron dificultades para encontrar los valores de A y B, sin embargo, conjeturaron que A tendría que ser negativo y B positivo. Después de discutir ideas de forma grupal, reconocieron que B tendría que ser el valor de la abscisa del centro de la hipérbola encontrada en sesiones anteriores.

Figura 6.3 Uso de deslizadores para encontrar los valores de $\boldsymbol{A}$ **y** $\boldsymbol{B}$ de la función racional

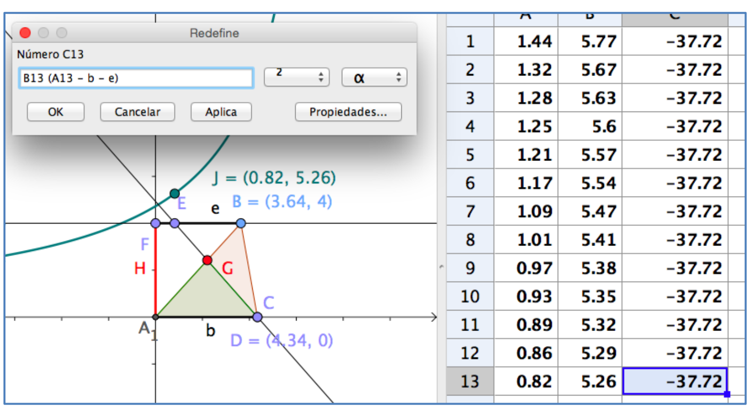


Fuente: Producciones de los participantes

Los participantes identificaron que la gráfica de la hipérbola estaba determinada por una función racional con asíntotas perpendiculares $y = 0$ y $x = e + b$ (recta perpendicular al eje X por el centro de la hipérbola encontrado previamente). Así, afirmaron que la función tendría la forma $y = \frac{A}{x-(e+b)}$. Posteriormente, encontraron el valor de A por medio de un análisis numérico y de una búsqueda de patrones. Para ello, registraron las coordenadas del punto que generaba la hipérbola en la hoja de cálculo y calcularon el valor de $A = y(x - e - b)$; donde x e y son las coordenadas del punto J sobre la hipérbola (Figura 6.4).

De este análisis encontraron varios casos particulares para distintos valores de b y H para descubrir que, $A = -\frac{Hb^2}{2}$. Así, logran encontrar la ecuación de la hipérbola (Figura 6.5). Finalmente, en una discusión grupal, los participantes se dieron cuenta de que todos los problemas se podían resolver aplicando semejanza de triángulos. En La Tabla 6.4 se muestra la semejanza aplicada para resolver los problemas 1.3, 1.4 y 1.6. Es importante resaltar que estas soluciones fueron encontradas por los participantes hasta el final del episodio de formulación y resolución de problemas antes descrito.

Figura 6.4 Registro en la hoja de cálculo del punto J que genera la hipérbola para encontrar el valor de $A = y(x - e - b)$; donde x e y son las coordenadas del punto J



Fuente: Producciones de los participantes

Figura 6.5 Análisis de casos particulares para detectar un patrón

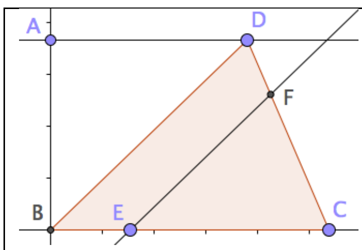
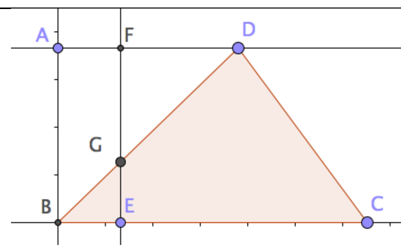
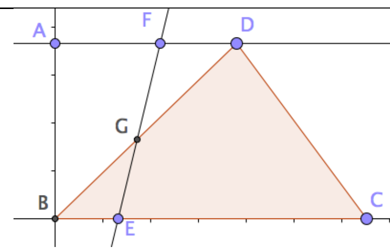
H	b	A
1	1	-1/2
	2	-2
	3	-9/2
	4	-8
2	1	-1
	2	-4
	3	-9
	4	-16
3	1	-3/2
	2	-6
	3	-27/2
	4	-24

De la tabla se deduce que $A = -\frac{Hb^2}{2}$, por lo tanto se obtiene la ecuación de la hipérbola:

$$y = -\frac{Hb^2}{2[x-(b+e)]}$$

Fuente: Producciones de los participantes

Tabla 6.4 Soluciones a los problemas aplicando semejanza de triángulos

 Semejanza de los triángulos BCD y EFD para encontrar que cuando $EC = \frac{\sqrt{2}}{2}BC$ se resuelve el problema.	 Semejanza de los triángulos BEG y DFG para encontrar que cuando $BE = \sqrt{\frac{AD*BC}{2}}$ se resuelve el problema.	 Semejanza de los triángulos BEG y DFG para encontrar que cuando $AF = \frac{-2BE^2}{BC} + BE + AD$ se resuelve el problema (considerando BE fijo).

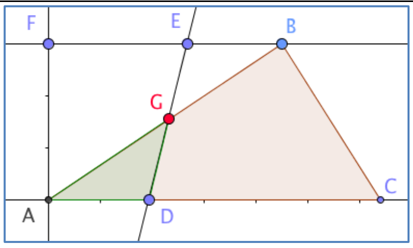
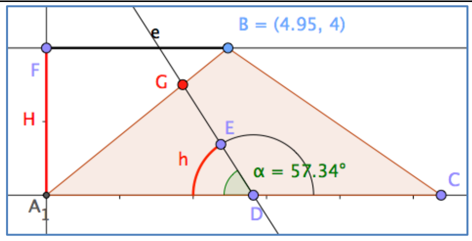
Fuente: Producciones de los participantes

Elección de variables en la estrategia ADR

Para implementar la estrategia ADR, una habilidad fundamental mediada por el SGD es escoger las variables (independiente y dependiente). Esta habilidad es crucial tanto para la resolución como para el planteamiento de problemas. Para resolver problemas se espera que el lugar geométrico descrito por el punto dinámico, que representa la relación, sea simple de manipular dentro del SGD (rectas, cónicas, circunferencias).

La estrategia ADR es útil para formular nuevos problemas pues una sola variación se puede estudiar en términos de una gran cantidad de variables independientes (lugares geométricos) que a su vez representan una oportunidad para plantear distintas reflexiones matemáticas. Por ejemplo, cuando apareció la hipérbola por primera vez al resolver el problema 1.6, un participante mencionó que tendría que ser una parábola. Su argumento fue que la variación de áreas se describe siempre por medio de funciones cuadráticas. En esta dirección, el investigador planteó el problema de realizar varios análisis dinámicos de la variación del área del triángulo escogiendo distintas variables dependientes e independientes. Algunos ejemplos de puntos dinámicos explorados por los participantes aparecen en la Tabla 6.5.

Tabla 6.5 Algunos ejemplos de variables dependientes e independientes exploradas por los participantes para resolver el problema de bisecar el área de un triángulo con una recta oblicua

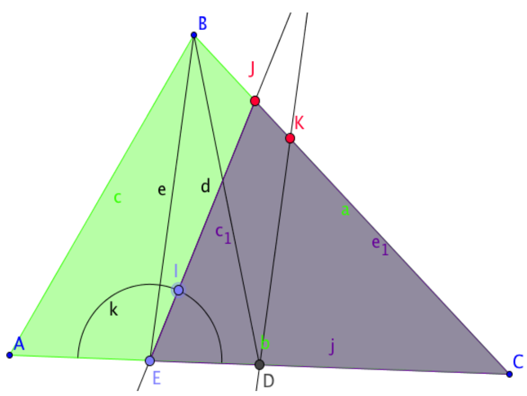
 $(ED, áreaADG), (EB, áreaADG),$ $(GB, áreaADG), (x(G), áreaADG)$ $(y(G), áreaADG), (x(G), áreaADG)$ $(x(E), áreaADG - áreaDGBC),$ $(áreaADG, áreaDGBC)$	 $(\alpha, áreaADG), (x(E), áreaADG)$ $(h, áreaADG), (y(E), áreaADG)$ $(sen\alpha, áreaADG), \left(x(G), \frac{áreaADG}{áreaDGBC}\right)$

Fuente: Producciones de los participantes

Argumentación de soluciones

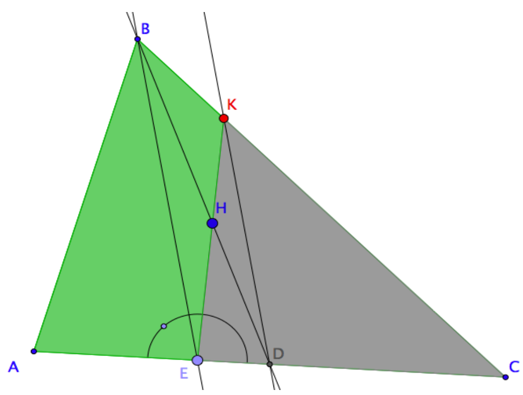
La solución 5 mostrada en la Tabla 6.2 surgió a partir de la exploración de una configuración dinámica relacionada con la mediana. Esta exploración utiliza una recta oblicua controlada por un punto móvil I sobre una semicircunferencia y un punto móvil E sobre un lado del triángulo inicial (Figura 6.6). Un participante trazó la recta paralela a EB por el punto medio D y encontró su punto K de intersección con el lado del triángulo. Además, trazó el triángulo ECJ donde J es el punto de intersección de la recta oblicua móvil con el lado del triángulo. Luego conjetura, a partir de comparar las áreas para distintos casos, que cuando el punto J y K coinciden se encuentra la solución al problema. Así, la solución se encuentra trazando el triángulo ECK (Figura 6.7). Un episodio importante de planteamiento de problemas se dio cuando se cuestionó a los participantes para que dieran un argumento geométrico de esta solución (adicional al dado por la herramienta). En esta dirección, se planteó el problema de demostrar que los triángulos EDK y BDK tienen misma área, lo que llevó a los participantes a explorar las propiedades del trapecio $EDKB$. Los participantes demostraron que dichos triángulos tienen la misma área usando la proposición 37 de Euclides (ambos triángulos comparten la base DK y tienen su vértice en una paralela a la base).

Figura 6.6 El triángulo EKC resuelve el problema por medio de una recta oblicua a partir del punto dinámico E (infinidad de soluciones)



Fuente: Producciones de los participantes

Figura 6.7 Solución al problema por medio de una recta oblicua EK; E móvil sobre AC



Fuente: Producciones de los participantes

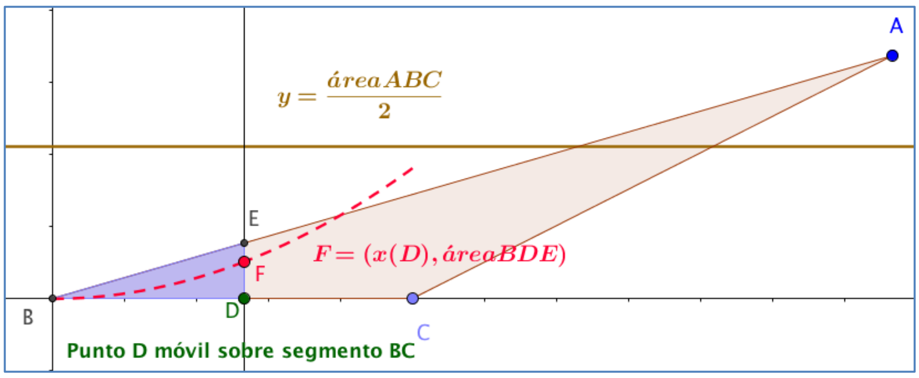
Dominio de soluciones dinámicas

Al resolver problemas, resulta importante preguntarse si el problema siempre tiene solución y si esta es única, o si existen varias o una infinidad de soluciones. Si el problema no siempre tiene solución, entonces un problema subsidiario que se puede formular es determinar cuáles son las condiciones necesarias para que la tenga. Desarrollar esta habilidad para plantear este tipo de interrogantes no es fácil por medio del uso de lápiz y papel; tampoco es fácil con ayuda de un SGD, sin embargo, éste ofrece oportunidades para implementar este tipo de reflexiones.

Existen diferencias entre el dominio de la solución general (condiciones necesarias para que la solución a un problema exista) y el dominio de la solución dinámica (cuando el alcance de una configuración dinámica está limitado por aspectos de su construcción).

Para ejemplificar lo anterior considere la solución propuesta por la mayoría de los participantes al problema de bisecar el área de un triángulo por medio de una recta perpendicular a un lado que pasa por un punto sobre dicho lado. Si el movimiento del punto que controla la recta perpendicular está restringido en el lado del triángulo, entonces existen triángulos para los cuales el problema no tiene solución dinámica (Figura 6.8). Esto no significa que esos triángulos no puedan dividirse en dos secciones de misma área por medio de una recta perpendicular. Este hecho llevó al investigador a plantear problemas relacionados en primera instancia con el dominio de la solución dinámica ¿para qué casos la configuración dinámica puede usarse para resolver el problema? Posteriormente, esta reflexión permitió a los participantes analizar el dominio de la solución general.

Figura 6.8 Triángulo para el cual la construcción no permite encontrar una solución



Fuente: Producciones de los participantes

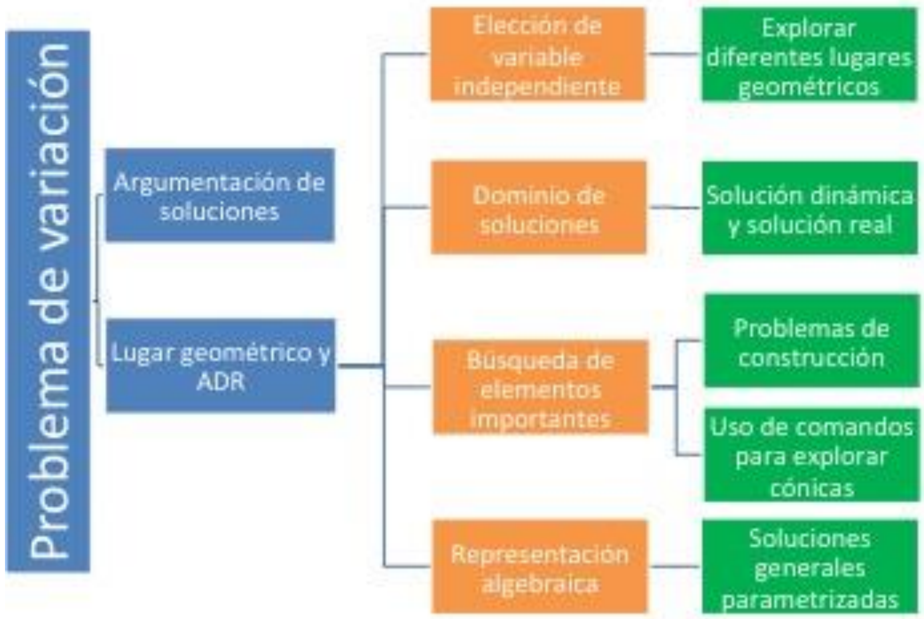
5 Conclusiones

Los resultados mostrados sugieren que con el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (GeoGebra) es posible generar procesos de planteamiento de problemas al transformar un problema tradicional (estructurado) en un problema de investigación (semi-estructurado). Dicha transformación se logró al no hacer explícitos ciertos objetivos o condiciones. En el problema inicial, no hacer explícita la condición de dividir el triángulo por medio de una recta paralela a uno de los lados fue determinante para que los participantes formularan y resolvieran diversos problemas.

Debido a la posibilidad de arrastrar objetos dentro de las configuraciones dinámicas, los participantes pudieron resolver el problema por medio de acercamientos dinámicos. Estos enfoques les permitió encontrar soluciones que sería complicado visualizar con herramientas estáticas tradicionales como lápiz y papel. Por otro lado, la exploración dinámica de la tarea motivó el planteamiento de una serie de problemas para los cuales la solución requirió analizar la variación del área de figuras. Para este análisis el uso de puntos dinámicos y sus respectivos lugares geométricos, por medio de la estrategia ADR, fue crucial. Posteriormente, otra fase de planteamiento de problemas se dio cuando los participantes exploraron los lugares geométricos (cónicas) para encontrar sus elementos importantes (foco, directriz, vértice, etcétera), sus ecuaciones y finalmente soluciones algebraicas a los problemas.

En resumen, en la exploración de este problema por medio del SGD se formularon diversos problemas adicionales para encontrar la solución del problema inicial. En ocasiones, el SGD permite encontrar soluciones por medio de la exploración y el método de prueba y error; en este camino, un episodio importante de formulación de problemas se da en la búsqueda de argumentos que fundamenten dichas soluciones. La estrategia ADR para explorar y resolver problemas ofrece diversas oportunidades para formular problemas como la elección de variable independiente, el dominio de la configuración dinámica y de las soluciones, el análisis de elementos importantes de lugares geométricos y su representación algebraica general parametrizada. Con la finalidad de responder la primera parte de la pregunta de investigación, en la Figura 6.9 se muestra una caracterización de los procesos de formulación de problemas que pueden surgir durante la resolución de problemas que involucran la variación de parámetros y la estrategia ADR.

Figura 6.9 Caracterización del proceso de formulación de problemas presente en la resolución de problemas que involucren variación y la estrategia ADR



Fuente: Elaboración propia

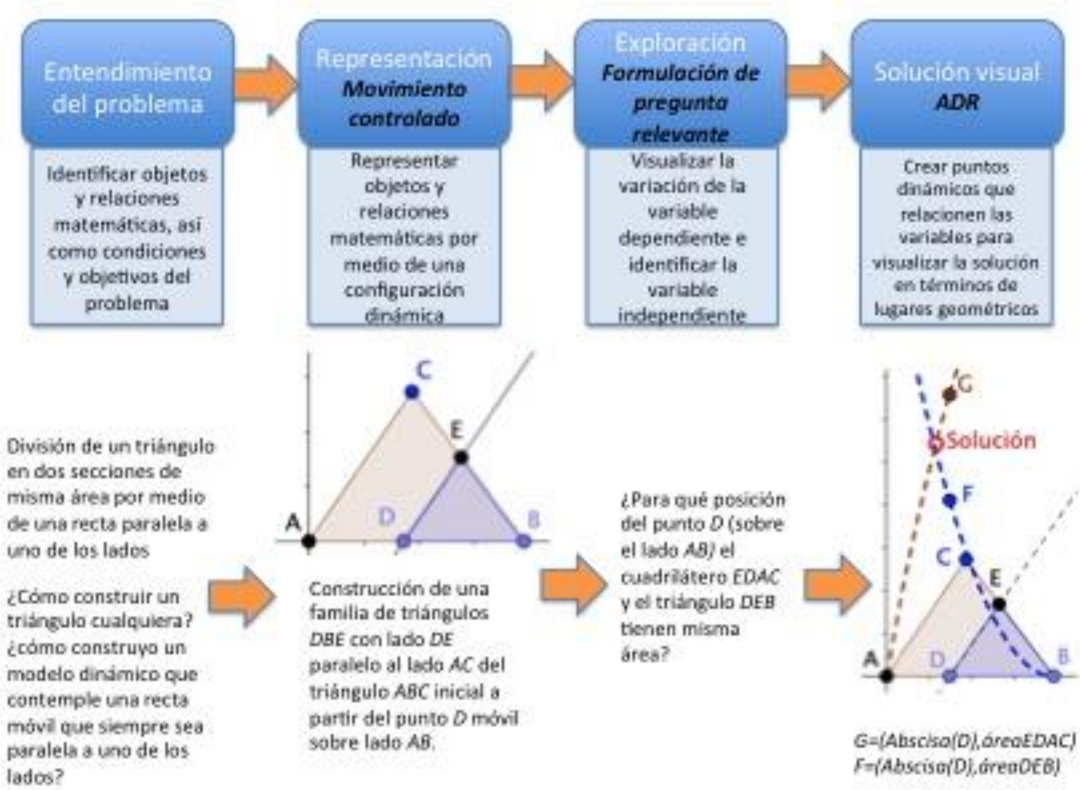
Respecto a la segunda parte de la pregunta de investigación, referente a los recursos, heurísticas y estrategias importantes para la formulación y resolución de problemas, se argumenta que el uso del SGD ofreció la posibilidad de implementar la estrategia ADR que es útil tanto para formular como para resolver problemas. Esta estrategia depende de un recurso esencial que es el movimiento controlado (MC). El movimiento controlado ocurre cuando una configuración dinámica depende del movimiento de puntos sobre trayectorias geométricas reconocidas por el SGD como rectas, circunferencias y cónicas. En otras palabras, si los puntos no se mueven por rectas (segmentos), circunferencias o cónicas, entonces es imposible implementar la estrategia ADR.

La estrategia ADR se puede utilizar principalmente en problemas que involucran el análisis y comparación de la variación de atributos de figuras como áreas, longitudes, ángulos, pendientes, entre otros. En este sentido, otro recurso matemático fundamental detrás de esta estrategia es la variación y covariación desde el punto de vista de relaciones y funciones matemáticas; por esta razón, el uso de los ejes coordenados del SGD resulta de vital importancia. En esta estrategia, los lugares geométricos son generados por puntos dinámicos (incrustados en el sistema de referencia creado por los ejes coordenados) que relacionan dos atributos variables dentro de la configuración dinámica.

La implementación de la estrategia ADR para resolver problemas de variación se puede caracterizar en cuatro fases principalmente: entendimiento del problema, representación dinámica del problema, exploración del modelo dinámico y solución visual (Figura 6.10). La fase de entendimiento del problema requiere identificar objetos y relaciones matemáticas, así como las condiciones y objetivos del problema. La etapa de representación consiste en construir un modelo dinámico que tome en cuenta los objetos y relaciones matemáticas identificadas en la etapa anterior. En esta etapa es importante la optimización de la configuración dinámica tomando en cuenta el uso apropiado de los ejes coordenados y el movimiento controlado. La fase de exploración consiste en visualizar la variación del atributo de interés en función del movimiento de puntos dentro del modelo dinámico. En esta fase normalmente se plantea (a veces no de forma explícita) la pregunta relevante que está detrás de la implementación de la estrategia ADR. Aquí, resulta importante identificar la variable independiente (otro atributo variable) que se tomará en cuenta para el análisis.

Por último, la solución visual se encuentra en términos de lugares geométricos descritos por puntos dinámicos que relacionan las variables (atributos) dentro del modelo. Las heurísticas relevantes en la implementación de la estrategia ADR son el análisis de casos particulares mediante el arrastre de la configuración y, la visualización y análisis de patrones e invariantes por medio de lugares geométricos.

Figura 6.10 Caracterización de la implementación de la estrategia ADR en problemas de variación



Fuente: Elaboración propia

Cualquier intento por incluir al planteamiento y resolución de problemas en escenarios de enseñanza y aprendizaje de matemáticas depende en primera instancia de los profesores. En este sentido, para los profesores el planteamiento o formulación de problemas es importante tanto para su formación disciplinar como para su práctica docente. Por medio de la formulación de problemas, los profesores en servicio y en formación pueden desarrollar su creatividad y construir o robustecer conocimiento matemático. Además, la formulación de problemas es una habilidad pedagógica fundamental, pues constantemente necesitan formular o reformular problemas en función de las necesidades, recursos, ideas o errores de sus estudiantes. En esta dirección, se requiere atender dos cuestiones importantes: 1) formación de profesores y 2) diseño de tareas de formulación de problemas.

En este estudio se mostró un ejemplo del diseño e implementación de una tarea de formulación de problemas. El uso de un SGD fue fundamental, pues permitió transformar un problema tradicional en una actividad de exploración e investigación. Así, se puede concluir que el SGD puede motivar procesos de exploración e investigación que eventualmente conducen a la formulación y resolución de distintos problemas. Esta idea, podría ser un elemento esencial para el diseño de programas de formación de profesores alrededor del planteamiento y resolución de problemas con ayuda de tecnologías digitales.

6 Referencias

Abramovich, S. & Cho, E. K. (2015). Using Digital Technology for Mathematical Problem Posing. En F. M. Singer, N. F. Ellerton, J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 71-102). Springer New York.

Aguilar-Magallón, D. & Reyes-Martínez, I. (2016). Digital technology and formulation of problems during the process of solving problems. In M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, & J. A. Eli (Eds.), Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 1432-1446). Tucson, AZ: The University of Arizona.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (2005). The art of problem posing. Psychology Press. Cai (Ed.), Mathematical Problem Posing (pp. 3-34). New York: Springer.

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B., & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. Educational Studies in Mathematics, 83(1), 57-69.
Imaoka, M., Shimomura, T., & Kanno, E. (2015). Problem Posing in the Upper Grades Using Computers. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 257-272). New York: Springer.

Lavy, I. (2015). Problem-Posing Activities in a Dynamic Geometry Environment: When and How. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 393-410). New York: Springer.

Leikin, R. (2015). Problem Posing for and Through Investigations in a Dynamic Geometry Environment. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 373-391). New York: Springer.

Osana, H. P. & Pelczer, I. (2015). A Review on Problem Posing in Teacher Education. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 469-492). New York: Springer.

Rosli, R., Capraro, M. M., Goldsby, D., Gonzalez, E. G., Onwuegbuzie, A. J., & Capraro, R. M. (2015). Middle-Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 333-354). New York: Springer.
Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I. & Aguilar-Magallón, D. (2015). The Use of Digital Technology in Extending Mathematical Problem Solving Reasoning. In Learning Technology for Education in Cloud (pp. 298-309). Springer International Publishing.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Ortega-Moreno, F. (2015). Fostering and supporting the coordinated use of digital technologies in mathematics learning. International Journal of Learning Technology, 10 (3), 251-270.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. For the learning of mathematics, 19-28.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. ZDM, 29(3), 75-80.

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. Journal for research in mathematics Education, 293-309.

Stoyanova, E. & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. Technology in mathematics education, 518-525.

La construcción de modelos geométricos dinámicos para formular y resolver problemas

The construction of dynamic geometric models to formulate and solve problems

AGUILAR-MAGALLÓN, Daniel†, [1]POVEDA-FERNÁNDEZ, William y [2]OLVERA-MARTÍNEZ, Carmen*

ID 1[er] Autor: *Daniel Aurelio, Aguilar-Magallón* / **ORC ID:** 0000-0001-7520-4508, **Researcher ID Thomson:** V-2050-2018, **CVU CONACYT ID:** 486327

ID 1[er] Coautor: *William, Poveda-Fernández* / **ORC ID:** 0000-0002-7245-8278, **Researcher ID Thomson:** V-1424-2018, **CVU CONACYT ID:** 627826

ID 2[do] Coautor: *María del Carmen, Olvera-Martínez* / **ORC ID:** 0000-0001-7361-1687, **Researcher ID Thomson:** U-9456-2018, **CVU CONACYT ID:** 230198

[1]*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados* **-** *Instituto Politécnico Nacional*
[2] *Universidad Juárez del Estado de Durango*

D. Aguilar, W. Poveda, C. Olvera

carmen.olvera@ujed.mx

A. López, C. Lima, J. Reyes (Dirs.) Educación para todos. Tópicos Selectos de Educación en CITeM. ©ECORFAN-México, 2018.

Abstract

We report and analyze episodes of problem solving related to the construction of dynamic configurations during a master's course in Mathematics Education. What are the heuristics and strategies that teachers and future teachers exhibit in the process of constructing dynamic representations of the figure in a geometric problem? The results show that the use of GeoGebra can be useful to motivate and involve teachers in various episodes of problem posing and problem solving. In this way, some important strategies were to relax the conditions of the problem, the exploration of particular cases, the search of patterns and invariants and the visualization of loci of intersection points.

Problem Solving, Technology, Geometric Thinking, Preparation of Teachers in Training

1 Introducción

La resolución de problemas es un tema importante en la agenda de investigación en Educación Matemática. Por un lado, se ha usado como marco conceptual que ayuda a comprender cuestiones cognitivas, metacognitivas y afectivas relacionadas con el proceso de solución de problemas; en particular, las formas en que un individuo utiliza sus recursos matemáticos, estrategias y heurísticas cuando se enfrenta a situaciones problemáticas desafiantes o problemas no rutinarios (Schoenfeld, 1985). Por otro lado, la resolución de problemas ha sustentado propuestas de currículos matemáticos y prácticas de enseñanza (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2011). Actualmente, se reconoce que el uso de tecnologías digitales, como un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), permite transformar escenarios de enseñanza alrededor de la resolución de problemas al generar oportunidades para desarrollar conocimiento matemático (Santos-Trigo, Reyes-Martínez & Aguilar-Magallón, 2016). En esta dirección, surge la necesidad de conocer cómo el uso de distintas herramientas digitales ofrece a los individuos diversos caminos y oportunidades para representar, explorar, comprender, resolver, formular, generalizar y extender problemas.

En el enfoque de la resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales, un principio fundamental es el desarrollo de una actitud inquisitiva en el individuo, es decir, que reconozca a la resolución de problemas como una oportunidad para plantear preguntas relevantes de forma constante y sistemática que le ayuden en su actividad matemática (Santos-Trigo, Reyes-Martínez, & Aguilar-Magallón, 2015). Es por esto que, la habilidad para plantear nuevos problemas ha sido foco de atención de investigadores y educadores quienes se interesan en los procesos de planteamiento de problemas como un aspecto fundamental de las matemáticas y su aprendizaje (Misfeldt & Johansen, 2015).

Con base en estas ideas y considerando que la habilidad de plantear problemas debe ser un aspecto fundamental de la educación no solo matemática, sino de la formación integral de todo individuo (Arikan & Unal, 2014), resulta importante investigar en qué medida el uso de tecnologías digitales, en particular el uso del SGD GeoGebra, permite a los individuos involucrarse en actividades de planteamiento de problemas. En este sentido, el estudio que se presenta se enfoca en conocer cuáles son los recursos, heurísticas y estrategias que exhiben profesores de matemáticas de bachillerato al formular y resolver problemas relacionados con la construcción de representaciones dinámicas de figuras presentes en problemas geométricos de demostración.

2 Marco Conceptual

La formulación de preguntas relevantes o actitud inquisitiva al enfrentarse a situaciones problemáticas es un aspecto central de la actividad matemática de un individuo (Polya, 1965). Comúnmente, el planteamiento de preguntas durante todo el proceso de resolución de problemas conduce a la formulación de nuevos problemas (Osana & Pelczer, 2015). En este sentido, la formulación de preguntas y nuevos problemas puede presentarse dentro del proceso de resolución de problemas en tres etapas: 1) *antes de resolver problemas*, cuando se genera un problema original a partir de una situación dada (Leikin, 2015); 2) *durante la resolución de problemas*, cuando se reformula un problema aplicando algunas heurísticas como relajar condiciones del problema (que implica resolver un problema más simple), analizar casos particulares o resolver un problema similar con el objetivo de hacer más accesible su solución (Cai et al., 2013); y, 3) *después de resolver problemas*, cuando se formula un problema nuevo modificando, extendiendo o generalizando los objetivos o condiciones de un problema que ya ha sido resuelto (Brown & Walter, 2005).

El planteamiento de preguntas y problemas es importante no solo para el desarrollo de habilidades matemáticas en profesores y futuros profesores, sino también para el desarrollo de habilidades didácticas (Tichá & Hošpesová, 2009). El profesor comúnmente necesita formular y reformular problemas, que van más allá de los problemas tradicionales del libro de texto, con objetivos didácticos específicos en función de las necesidades de sus estudiantes como: enseñar o reforzar un concepto particular o ayudar al estudiante a superar errores e ideas mal entendidas (Osana & Pelczer, 2015). En la literatura se reconoce que, en general, profesores y futuros profesores tienen serias dificultades al enfrentarse a tareas de planteamiento de problemas (Rosli et al., 2015). En esta dirección, se resalta la necesidad de programas de formación de profesores y futuros profesores en donde tengan la oportunidad de enfrentarse a diversas tareas de planteamiento de problemas para mejorar su habilidad matemática y didáctica.

¿Cuál es el papel de las herramientas digitales en el planteamiento de preguntas y problemas y en la formación de profesores para desarrollar habilidades de formulación y reformulación problemas? Leikin (2015) argumenta que el uso de un SGD es útil para formular preguntas y problemas relacionados con el análisis de relaciones matemáticas presentes en figuras que se usan para resolver problemas geométricos de demostración. Aguilar-Magallón y Reyes-Martínez (2016) afirman que las permisibilidades de un SGD como el arrastre de objetos geométricos, la medición de atributos (longitudes, ángulos, áreas, etc.), el uso de deslizadores y la visualización de lugares geométricos son estrategias que permiten motivar diversos episodios de formulación y resolución de problemas. Aguilar-Magallón y Poveda Fernández (2015) mencionan que algunas heurísticas fundamentales para formular y resolver problemas con ayuda de un SGD son relajar las condiciones del problema, analizar casos particulares y visualizar patrones e invariantes.

3 Metodología

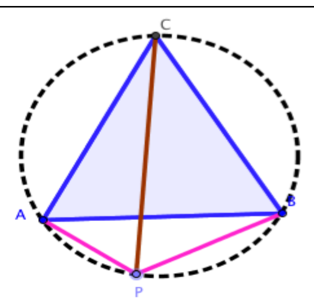
3.1 Participantes

En el estudio participaron nueve profesores de matemáticas de bachillerato durante cuatro sesiones semanales con duración de tres horas cada una, dentro de un curso de Maestría en Educación Matemática. Los participantes contaban con perfil matemático ya que su formación académica estaba relacionada con esta disciplina.

3.2 El problema

Para este reporte se analizan los procesos de formulación y resolución de problemas que surgieron a partir del análisis de la figura presente en el problema geométrico de demostración mostrado en la Figura 7.1.

Figura 7.1 Problema geométrico de demostración

	Sea ABC un triángulo equilátero y P cualquier punto de la circunferencia que lo circunscribe, demostrar que $AP + BP = CP$.

Fuente: Problema propuesto en el curso de maestría en Educación Matemática del CINVESTAV

3.3 Implementación de la actividad y recolección de datos

La actividad se implementó de forma presencial, en un laboratorio de cómputo, durante cuatro sesiones semanales de tres horas cada una. Una primera parte de las sesiones consistió en el trabajo individual o por parejas de los participantes y todos tuvieron acceso a una computadora. Otra fase importante en el desarrollo de las sesiones fueron las discusiones plenarias de las ideas de los participantes para explorar o resolver el problema; cada participante exponía sus avances a todo el grupo.

La formulación de preguntas y problemas fue un aspecto esencial en el desarrollo e implementación de este estudio. Así, el problema sirvió como punto de partida para plantear y resolver diversos problemas.

Los datos para el estudio se recolectaron a través de videograbaciones de las sesiones presenciales, las hojas de trabajo de GeoGebra y reportes escritos por los participantes en procesador de texto.

4 Resultados

En esta sección se exponen los episodios de formulación y resolución de problemas que fueron motivados por el uso de GeoGebra. En particular, el análisis se centró en las formas de razonamiento, recursos y heurísticas que exhibieron los participantes en este proceso.

4.1 Construcción de una representación dinámica del problema

En un principio, todos los participantes fueron capaces de resolver el problema de manera algebraica utilizando distintos recursos como trigonometría y semejanza. Posteriormente, en una discusión plenaria, surgió la siguiente pregunta: dada la figura del problema ¿cómo se construye utilizando el SGD? Todos los participantes afirmaron que para construirla bastaba con trazar primero un triángulo equilátero y después su circunferencia circunscrita. Sin embargo, ningún participante se preguntó si había otra forma de construirla, por lo que el investigador cuestionó ¿será la única manera de obtener la construcción? Así, los participantes formularon el siguiente problema:

PP1. Dada una circunferencia cualquiera, trazar un triángulo equilátero inscrito en dicha circunferencia

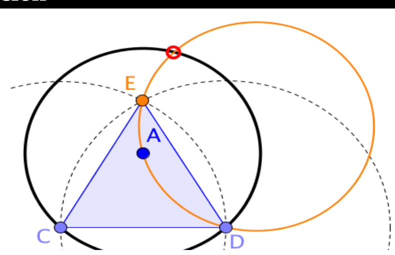
Las soluciones iniciales que presentaron los participantes fueron estáticas, es decir, estaban apoyadas en el concepto de rotación y el método con regla y compás para trazar un hexágono regular. Luego, desarrollaron acercamientos dinámicos en los que involucraron la visualización de lugares geométricos, en los cuales la principal heurística de resolución de problemas fue la de relajar las condiciones del problema.

En otras palabras, los participantes trazaron triángulos que cumplían de forma parcial las condiciones del problema; por ejemplo, construyeron un triángulo equilátero con dos vértices sobre la circunferencia (el tercer vértice no estaba sobre la circunferencia) y un triángulo isósceles inscrito en la circunferencia (el triángulo no era equilátero). Después, mediante el movimiento de la construcción plantearon las condiciones necesarias para resolver el problema.

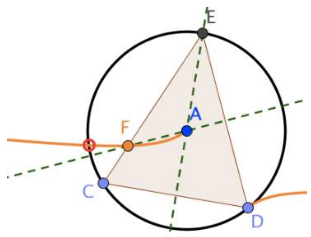
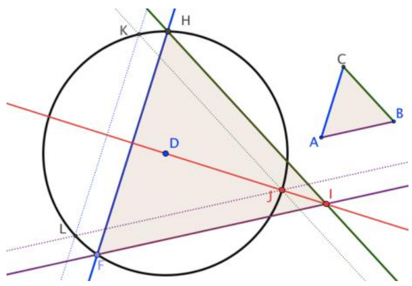
En la Tabla 7.1 se muestran los acercamientos dinámicos y las respectivas estrategias de solución del problema. Se observa el uso de lugar geométrico como herramienta para resolver problemas, sin embargo, en una primera instancia las soluciones se quedan en un nivel visual y empírico debido a que en GeoGebra no es posible intersecar lugares geométricos.

Esta dificultad motivó la formulación de nuevos problemas relacionados con el análisis de los lugares geométricos para conseguir la solución al problema en términos de intersecciones de éstos.

Tabla 7.1 Acercamientos dinámicos exhibidos por los participantes

<table>
<tr><th>Construcción</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>

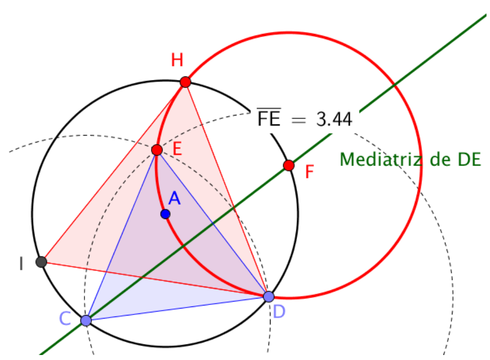
1. Puntos C y D móviles. Se traza el triángulo CDE equilátero por medio de circunferencias. Lugar geométrico descrito por el punto E cuando se mueve el punto C.</td><td>Recursos. Triángulo equilátero y lugar geométrico.
Estrategia dinámica. Relajar las condiciones del problema. El triángulo CDE es equilátero, pero tiene sólo dos vértices inscritos en la circunferencia. Así, la estrategia de exploración consiste en mover el punto C hasta que el punto E pertenezca a la circunferencia inicial.
Solución empírica. La intersección del lugar geométrico descrito por el punto E con la circunferencia inicial define uno de los vértices del triángulo equilátero inscrito (otro es el punto D y el último se encuentra por construcción).</td></tr>
</table>

 2. Puntos C y D móviles en la circunferencia. Mediatriz de segmento CD. Punto E de intersección de la mediatriz con la circunferencia. Mediatriz del segmento ED y su punto de intersección F con la recta CE. Lugar geométrico del punto F al mover el punto C.	***Recursos.*** Triángulo isósceles inscrito a una circunferencia, lugar geométrico y mediatriz. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema. El triángulo CDE es isósceles inscrito a la circunferencia, pero no es equilátero. Así, la estrategia de exploración consiste en mover el punto C hasta que el triángulo CDE sea equilátero. ***Solución empírica.*** Cuando el punto F y el punto C coincidan, el triángulo CDE será equilátero. El punto de intersección del lugar geométrico descrito por F con la circunferencia inicial define la posición exacta de un vértice del triángulo equilátero (siendo el punto D otro de los vértices del triángulo solución).
 3. Triángulo ABC equilátero cualquiera. Punto F móvil sobre la circunferencia. Paralela al lado CA que pasa por el punto F y su punto de intersección H con la circunferencia inicial. Paralela al lado BC por el punto H y paralela al lado AB que pasa por el punto F; punto de intersección I entre esas dos paralelas. Lugar geométrico del punto I al mover F.	***Recursos.*** Triángulo equilátero, semejanza y lugar geométrico. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema. El triángulo FIH es equilátero, pero tiene sólo dos vértices inscritos en la circunferencia. Así, la estrategia de exploración consiste en mover el punto F hasta que el punto I pertenezca a la circunferencia inicial. ***Solución robusta.*** El punto J de intersección del lugar geométrico descrito por I (recta DI) con la circunferencia inicial define la posición exacta de un vértice del triángulo solución. Para encontrar el triángulo inscrito se trazan paralelas a los lados de los triángulos ABC o FIH, a partir del punto J.

Fuente: Elaboración propia con producciones de los participantes.

Para poder intersecar lugares geométricos (en GeoGebra) se requiere transformarlos en objetos geométricos robustos; en otras palabras, que su construcción dependa de ciertos elementos bien definidos. Por ejemplo, para robustecer un lugar geométrico que es una recta se requieren dos puntos que pertenezcan a dicha recta; para robustecer una circunferencia se necesita su centro y radio; una parábola robusta se construye a partir de su foco y directriz. Las exploraciones dinámicas hechas por los participantes culminaron en la visualización de tres lugares geométricos y conjeturaron que, el primer lugar geométrico era una circunferencia, el segundo una hipérbola y el tercero una recta. En la búsqueda del centro para trazar de forma robusta la supuesta circunferencia, los participantes se dieron cuenta que la intersección F de la mediatriz del segmento variable DE con la circunferencia original era invariante (Figura 7.2). Así, supusieron que el punto F era el centro de la circunferencia y midieron la distancia al punto E para verificar que era constante. La detección de invariantes en la exploración de los modelos dinámicos de la Tabla 7.1 permitió a los participantes encontrar tres soluciones sintéticas (se pueden construir con regla y compás) al problema (Tabla 7.2).

Figura 7.2 El punto F de intersección de la mediatriz de DE con la circunferencia inicial es invariante y es el centro de la circunferencia descrita por el punto E



Fuente: Producciones de los participantes.

A continuación, se muestra la transcripción de un video donde un participante discute, de forma plenaria, el lugar geométrico del primer acercamiento (circunferencia) y cómo trazarlo de forma robusta.

1029 2:52 Participante: Entonces me di cuenta que al mover el punto E recorre un lugar, entonces lo que hice fue ver qué es lo que pasa con el lugar geométrico de E cuando muevo C y me da una circunferencia.

1029 3:32 Investigador: a ver antes, lo que preguntaba yo es ¿cómo estamos seguros de que ese lugar es una circunferencia? Entonces ahí el software también nos puede ayudar para ver que ese lugar geométrico es una circunferencia, porque ¿podría ser elipse no? Hay elipses que parecen circunferencias.

1029 4:10 Participante: Entonces tengo que encontrar el centro para ver si la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia es el mismo por la definición de circunferencia. Entonces lo que hice, bueno había varias formas de encontrar la circunferencia. Yo pensaba en poner un triángulo dentro de la circunferencia, cualquier triángulo, tres puntos en la circunferencia, agarrar el triángulo y trazar las mediatrices para encontrar el circuncentro, pero bueno también Cristina comentó que si tomábamos una secante (señala cuerda DE) y trazábamos su mediatriz, ésta sería un diámetro de la circunferencia y pues resultó que este punto donde se interseca esta mediatriz con la circunferencia (original) es exactamente el centro.

1029 5:16 Investigador: ¿Cómo descubriste eso?

1029 5:17 Participante: Bueno empíricamente, si mueves este punto (señala el punto C móvil), pues ese punto queda invariante, ¿no? (se refiere a la intersección F de la mediatriz de CE con la circunferencia inicial)

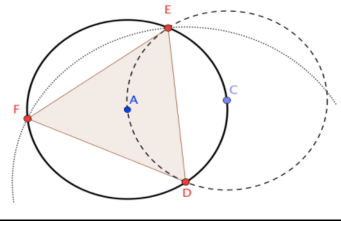
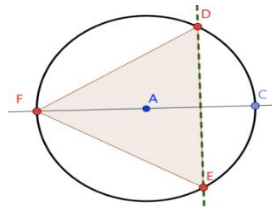
1029 5:32 Investigador: Fíjense aquí algo importante del uso de la herramienta es detectar invariantes. Intentando encontrar el centro traza la mediatriz (de DE) y resulta que el punto de intersección de dicha mediatriz y la circunferencia original es el centro de rotación de la mediatriz. Entonces es posible que sea el centro de la circunferencia.

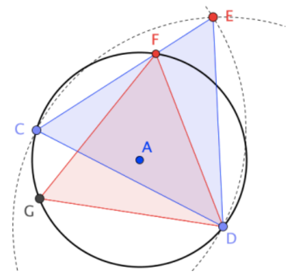
1029 6:00 Participante: Para ver si era cierto medí las distancias para ver si eran iguales y pues resulta que sí, entonces ya con el centro puedo trazar la circunferencia y ahora sí puedo encontrar el punto de intersección con la circunferencia original.

1029 8:00 Participante: Pero luego el investigador me preguntó que qué pasaba con esta circunferencia y la original, que qué observaba. Entonces pues parece ser que son iguales ¿no? Y si calculamos sus radios pues son iguales. Entonces así podría agarrar una circunferencia inicial, agarrar otra con el mismo radio y poner el centro en un punto de la circunferencia inicial y entonces ya me va a dar este segmento de aquí (lado DH del triángulo inscrito solución).

Fuente: Transcripción de videograbación sesión de trabajo

Tabla 7.2 Soluciones sintéticas encontradas por los participantes después de analizar los modelos dinámicos

Solución sintética	Descripción
1 	Punto C cualquiera sobre la circunferencia inicial con centro en A. Circunferencia con centro en C y radio CA. Los puntos de intersección E y D de las dos circunferencias formarán uno de los lados del triángulo equilátero inscrito. El tercer vértice F se encuentra con la circunferencia de centro D y radio DE.
2 	Punto C sobre la circunferencia inicial de centro A. Mediatriz del radio AC. Las intersecciones D y E de la mediatriz con la circunferencia inicial son dos vértices del triángulo equilátero inscrito. El otro vértice es la intersección de la recta AC con la circunferencia.

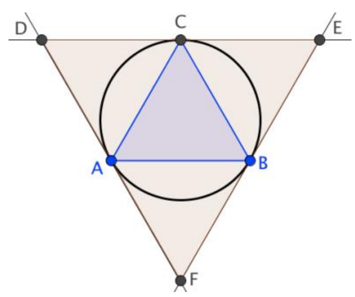
3 	Se traza cualquier triángulo equilátero con dos vértices en la circunferencia inicial tal que el vértice que no está en la circunferencia quede fuera de ella (triángulo CDE). El punto de intersección F del lado CE permanece invariante al mover el punto C. Así, los puntos D y F son dos vértices del triángulo equilátero inscrito. El tercero se encuentra por construcción tradicional.

Fuente: Elaboración propia con producciones de los participantes

4.2 Formulación de un nuevo problema

Un participante, mediante la exploración de modelos dinámicos, descubre que existe una relación entre el triángulo equilátero inscrito y el circunscrito a una circunferencia. Así, afirma que los tres puntos de tangencia de un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia definen un triángulo equilátero inscrito a la misma (Figura 7.3). Dicho participante planteó el problema de circunscribir un triángulo equilátero a la circunferencia para poder encontrar el triángulo equilátero inscrito.

Figura 7.3 Relación entre triángulo equilátero inscrito y circunscrito a una circunferencia



Fuente: Producción del participante

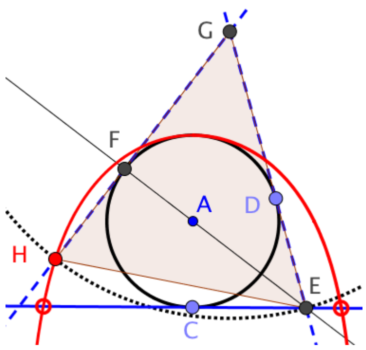
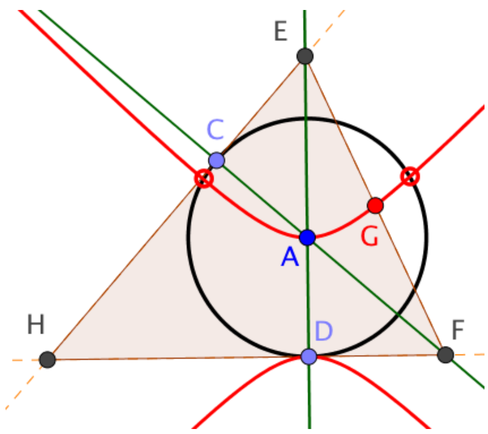
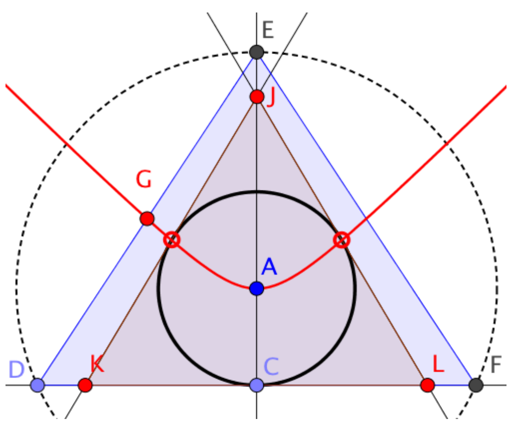
Con base en esta idea, se formuló a todo el grupo el siguiente problema:

PP2. Dada una circunferencia cualquiera trazar un triángulo equilátero circunscrito a dicha circunferencia

Algunos de los acercamientos que expusieron los participantes para resolver este problema les permitieron encontrar soluciones exactas y otros, únicamente soluciones empíricas. En las Tablas 3 y 4 se muestran exploraciones que no permitieron encontrar la solución exacta robusta debido a que no es posible intersecar lugares geométricos en GeoGebra. En la Tabla 7.4 se muestran acercamientos en donde los lugares geométricos generados fueron curvas polares. En todas estas soluciones empíricas, se usó la heurística de relajar las condiciones del problema.

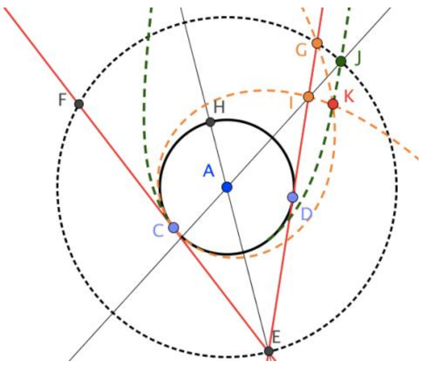
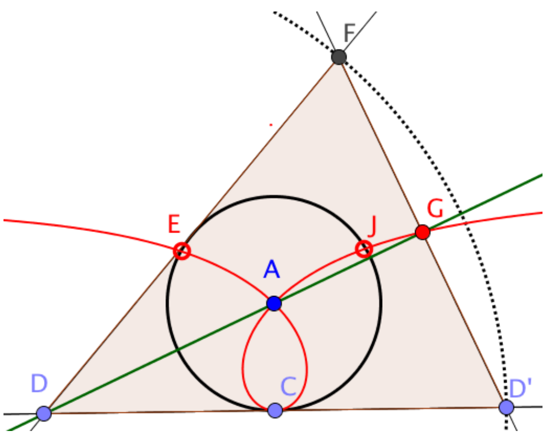
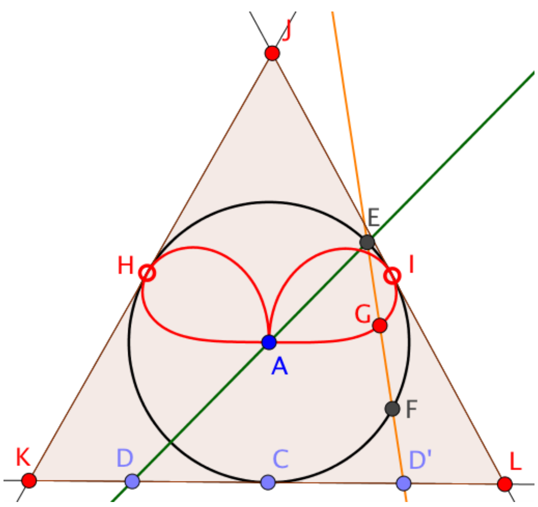
En estos acercamientos los participantes escogieron una condición del triángulo circunscrito y la relajaron para construir un modelo dinámico más simple, en otras palabras, que cumplieran de manera parcial las condiciones del problema. Por ejemplo, algunos participantes decidieron construir una familia de triángulos isósceles, mientras que otros construyeron una familia de triángulos equiláteros con dos lados circunscritos. Luego, mediante el movimiento buscaron el momento en que la construcción cumplía con todas las condiciones del problema.

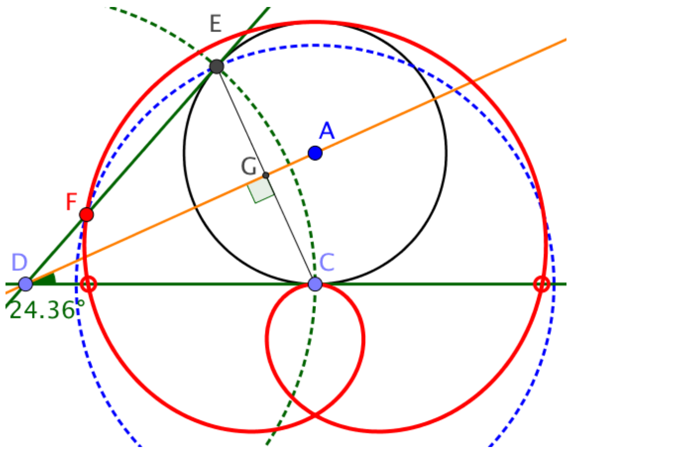
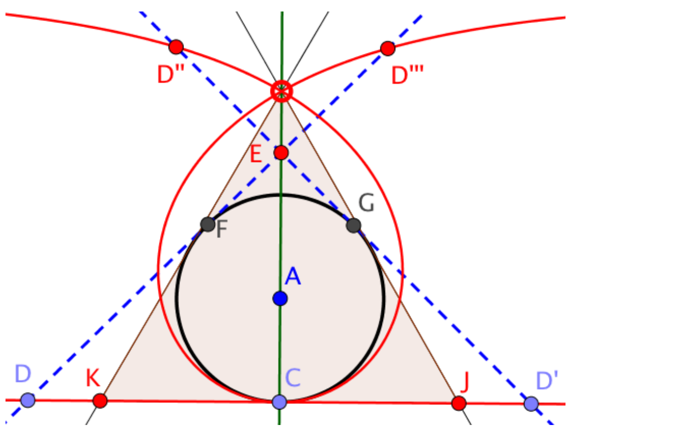
Tabla 7.3 Acercamientos dinámicos que involucran el uso de lugares geométricos y soluciones empíricas

Construcción	**Análisis**
 Tangentes a la circunferencia por los puntos C y D móviles. Punto E de intersección de las tangentes. Punto F de intersección entre la recta AE y la circunferencia inicial. Tangente a la circunferencia por el punto F. Punto G de intersección entre las tangentes que pasan por D y F. Circunferencia con centro en G y radio GE; punto H de intersección de dicha circunferencia con la tangente que pasa por F. Lugar geométrico del punto H al mover el punto D.	***Recursos.*** En un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia, las alturas pasan por el centro de dicha circunferencia y por el punto de tangencia. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan relaciones matemáticas específicas. Triángulo HEG es isósceles y tiene dos lados tangentes a la circunferencia. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto D el triángulo HEG es equilátero y con el lado HE tangente a la circunferencia? ***Estrategia de solución.*** Mover el punto D hasta que el punto H se encuentre sobre la recta tangente a la circunferencia que pasa por C. ***Solución empírica.*** La intersección del lugar geométrico descrito por el punto H (al mover el punto D) con la recta tangente que pasa por C determina dos vértices del triángulo equilátero circunscrito. El tercero se encuentra por construcción.
 Tangentes a la circunferencia por los puntos C y D móviles. Punto H de intersección de las tangentes. Rectas perpendiculares a las tangentes por los puntos D y C. Puntos E y F de intersección de las perpendiculares con las tangentes. Punto medio G de segmento EF. Lugar geométrico del punto G al mover el punto C.	***Recursos.*** En un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia, las alturas pasan por el centro de dicha circunferencia y por el punto de tangencia. El punto medio de los lados del triángulo equilátero circunscrito es el punto de tangencia. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan las relaciones matemáticas específicas. Triángulo HFE es isósceles y tiene dos lados tangentes a la circunferencia. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto C el punto medio G de EF se convierte en punto de tangencia? ***Estrategia de solución.*** Mover el punto C hasta que el punto G se encuentre sobre la circunferencia inicial. ***Solución empírica.*** Las intersecciones del lugar geométrico descrito por el punto G (al mover el punto C) con la circunferencia inicial determinan dos puntos de tangencia del triángulo equilátero circunscrito. El tercer punto de tangencia es el punto D.
 Punto C móvil sobre circunferencia. Tangente a la circunferencia por el punto C. Punto D móvil sobre recta tangente. Circunferencia con centro en A y radio AD; punto F de intersección de dicha circunferencia con la tangente que pasa por C. Recta CA. Punto E de intersección de la recta CA y la circunferencia de radio AD. Triángulo DFE. Punto medio G de lado DE. Lugar geométrico de punto G al mover el punto D.	***Recursos.*** El punto medio de los lados del triángulo equilátero circunscrito es el punto de tangencia. Circunferencia inscrita y circunscrita a un triángulo equilátero tienen el mismo centro. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan las relaciones matemáticas específicas. Triángulo DFE es isósceles y tiene un lado tangente a la circunferencia. Además, el punto C de tangencia es el punto medio del lado DF del triángulo. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto D el punto medio G de ED se convierte en punto de tangencia? ***Estrategia de solución.*** Mover el punto D hasta que el punto G se encuentre sobre la circunferencia inicial. ***Solución empírica.*** La intersección del lugar geométrico descrito por el punto G (al mover el punto D) con la circunferencia inicial determina dos puntos de tangencia faltantes del triángulo equilátero circunscrito.

Fuente: Elaboración propia con producciones de los participantes

Tabla 7.4 Acercamientos dinámicos que involucran el uso de curvas polares y soluciones empíricas

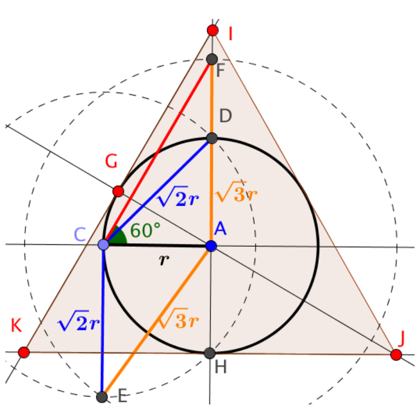
Construcción	Análisis
 Puntos C y D móviles sobre la circunferencia inicial (de centro A) y sus respectivas tangentes. Punto E de intersección de las rectas tangentes. Circunferencia con centro en A y radio AE; puntos F y G de intersección de dicha circunferencia con las rectas tangentes. Mediatriz de segmento FE y sus puntos de intersección I y J con la tangente y la circunferencia de radio AE respectivamente. Lugar geométrico de los puntos G y J.	***Recursos.*** En un triángulo equilátero la mediatriz de un lado pasa por el vértice opuesto. Circunferencia circunscrita. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan ciertas relaciones matemáticas. Triángulo FEG es isósceles y tiene dos lados tangentes a la circunferencia. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto D la mediatriz del segmento FE pasa por el vértice G del triángulo FEG? ***Estrategia de solución.*** Mover el punto D hasta que los puntos G y J coincidan. ***Solución empírica.*** La intersección (punto K) de los lugares geométricos descritos por los puntos G y J al mover el punto D determina un vértice del triángulo equilátero circunscrito; A partir del cual se trazan las tangentes a la circunferencia para obtener los otros vértices.
 Punto C móvil sobre la circunferencia inicial. Tangente a la circunferencia por el punto C. Punto D móvil sobre tangente y su reflexión D' respecto al punto C. Tangente a la circunferencia que pasa por el punto D. Circunferencia con centro en D y radio DD'; intersección F de dicha circunferencia con la tangente que pasa por D. Punto medio G del segmento FD'. Lugar geométrico del punto G al mover el punto D.	***Recursos.*** En un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia el punto de tangencia es el punto medio del lado correspondiente del triángulo. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan las relaciones matemáticas específicas. Triángulo FDD' es isósceles y tiene dos lados tangentes a la circunferencia, además, el punto de tangencia C es punto medio del lado DD'. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto D el punto medio G del segmento FD' se convierte en punto de tangencia? ***Estrategia de solución.*** Mover el punto D hasta que el punto G esté sobre la circunferencia inicial. ***Solución empírica.*** Las intersecciones (E, J y C) del lugar geométrico descrito por el punto G (al mover el punto D) con la circunferencia inicial determina los tres puntos de tangencia del triángulo equilátero circunscrito.
 Punto C móvil sobre la circunferencia inicial. Tangente a la circunferencia en el punto C. Punto D móvil sobre tangente y su reflexión D' respecto al punto C. Recta DA. Intersección E de recta DA con circunferencia inicial. Recta ED' y su intersección F con la circunferencia. Punto medio G de cuerda EF. Lugar geométrico del punto G al mover punto D.	***Recursos.*** En un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia el punto de tangencia es el punto medio del lado correspondiente del triángulo. La bisectriz de un ángulo del triángulo equilátero circunscrito pasa por el centro de la circunferencia inscrita y por el punto de tangencia del lado opuesto. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan las relaciones matemáticas específicas. Se suponen las rectas DD' y ED' como lados del triángulo circunscrito y la recta DA una bisectriz. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto D la recta ED' es tangente a la circunferencia inicial? ***Estrategia de solución.*** Mover el punto D hasta que los puntos E, F y G coincidan. Visualizar el lugar geométrico del punto G. ***Solución empírica.*** Las intersecciones (H e I) del lugar geométrico descrito por el punto G (al mover el punto D) con la circunferencia inicial determinan los dos puntos de tangencia faltantes del triángulo equilátero circunscrito (C es el otro).

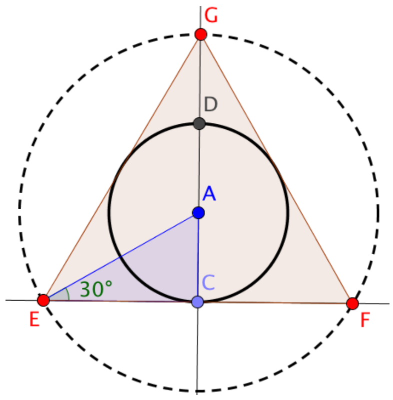
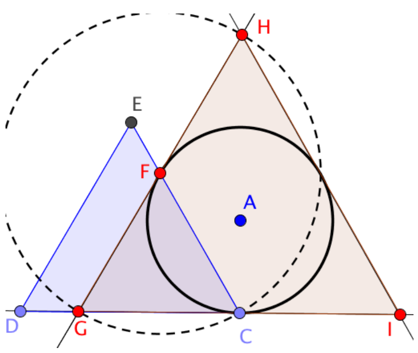
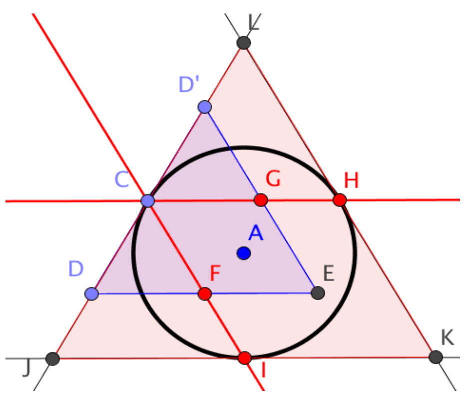
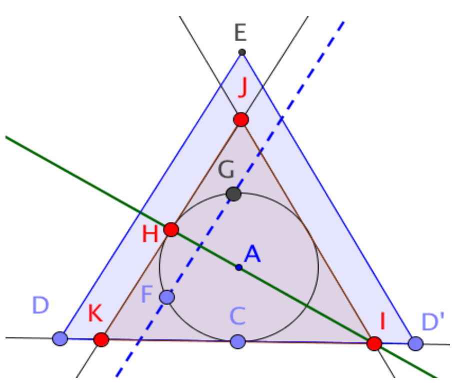
Construcción	Análisis
 Tangente a la circunferencia por el punto C móvil. Punto D móvil sobre tangente. Recta DA. Circunferencia con centro en D y radio DC; y su intersección E con la circunferencia inicial. Recta DE. Punto medio G de cuerda EC. Circunferencia con centro en C y radio CE; y su intersección F con la recta DE. Lugar geométrico del punto F al mover el punto D.	***Recursos.*** Las distancias del vértice de un triángulo circunscrito a los puntos de tangencia con la circunferencia inscrita (determinados por los lados que forman el vértice) son iguales. En un triángulo rectángulo con un ángulo de 30º se cumple que el cateto opuesto a dicho ángulo es la mitad de la hipotenusa. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan relaciones matemáticas específicas. Se suponen las rectas DD' y DE como lados del triángulo circunscrito y la recta DA una bisectriz. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto D el ángulo CDG es de 30º ? ***Estrategia de solución.*** La circunferencia con centro en C y radio CE sirve para duplicar la longitud del cateto CG, así CF mide dos veces CG. Mover el punto D hasta que la hipotenusa CD sea el doble del cateto CG, es decir, hasta que F y D coincidan. ***Solución empírica.*** Las intersecciones del lugar geométrico descrito por el punto F con la recta tangente que pasa por C determinan dos vértices del triángulo solución.
 Tangente a la circunferencia por el punto C móvil. Punto D móvil sobre tangente y su reflexión D' respecto al punto C. Tangentes a la circunferencia que pasan por D y D' y sus respectivos puntos de tangencia F y G. Reflexiones D''' y D'' de los puntos D y D' con respecto a F y G respectivamente. Lugar geométrico de los puntos D'' y D'''.	***Recursos.*** En un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia el punto de tangencia es el punto medio del lado correspondiente del triángulo. ***Estrategia dinámica.*** Relajar las condiciones del problema y mover elementos de la configuración hasta que se cumplan las relaciones matemáticas específicas. Se suponen las rectas DD', DF y $D'G$ como lados del triángulo circunscrito. Triángulo $DD'E$ es isósceles con tres lados tangentes a la circunferencia. ***Pregunta relevante.*** ¿Para qué posición del punto D Los puntos de tangencia F y G se vuelven puntos medios de los lados DE y $D'E$ respectivamente? ***Estrategia de solución.*** La solución se encuentra cuando las reflexiones D'' y D''' coincidan con el punto E. ***Solución empírica.*** La intersección del lugar geométrico descrito por los puntos D'' y D''' con la recta AC es el vértice buscado.

Fuente: Producciones de los participantes

Las exploraciones dinámicas y los acercamientos a la solución del problema mostrados en las tablas 3 y 4 permitieron a los participantes encontrar algunas soluciones exactas sintéticas (Tabla 7.5).

Tabla 7.5 Soluciones sintéticas

Construcción	Análisis
	***Recurso clave.*** Un triángulo rectángulo en el que la proporción entre sus catetos es de $\sqrt{3}$ tendrá un ángulo de 60º. ***Estrategia.*** Construir de forma geométrica un triángulo rectángulo con un ángulo de 60º. ***Solución.*** Las rectas AC y AD son perpendiculares. Así la longitud del segmento CD es $\sqrt{2}r$. Con la circunferencia de centro en C y radio CD y la perpendicular a la recta CA por el punto C se garantiza que el segmento CE mida $\sqrt{2}r$. Del triángulo rectángulo CEA se tiene que EA mide $\sqrt{3}r$. Se traza una circunferencia con centro en A y radio AE para trasladar la longitud $\sqrt{3}r$ a la recta AD (segmento AF). Así, el triángulo ACF tiene catetos de longitud $AF = \sqrt{3}r$ y $AC = r$. Por lo que el ángulo ACF mide 60º. Finalmente se traza la recta perpendicular a CF que pasa por A y se encuentra el punto de intersección G con la circunferencia inicial. G será otro punto de tangencia.

	***Recurso clave.*** En un triángulo rectángulo con un ángulo de 30º se cumple que el cateto opuesto a dicho ángulo es la mitad de la hipotenusa. El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero es el doble del radio de la circunferencia inscrita. ***Estrategia.*** Construir una circunferencia con centro en A y con el doble del radio de la circunferencia inicial. ***Solución.*** Se traza la tangente a la circunferencia inicial por un punto cualquiera C (móvil). Se traza una circunferencia con centro en A y radio $2AC$. Los puntos de intersección E y F de la circunferencia de radio $2AC$ con la recta tangente (que pasa por C) determinan dos vértices del triángulo equilátero circunscrito.
	***Recurso clave.*** Semejanza de triángulos. ***Estrategia.*** Dado un triángulo equilátero con un lado tangente a la circunferencia inicial y un vértice sobre la misma, construir otro triángulo equilátero con dos lados tangentes a la circunferencia. ***Solución.*** Se traza la tangente a la circunferencia inicial por un punto cualquiera C (móvil). Se traza un punto móvil D sobre esta tangente y un triángulo DCE equilátero de lado DC. El lugar geométrico del punto E al mover el punto D es el lado EC. Así, se encuentra el punto de intersección F del lado (o su prolongación) del triángulo equilátero con la circunferencia inicial. El punto F es invariante sin importar el movimiento del punto D y determina otro de los puntos de tangencia del triángulo solución.
	***Recurso clave.*** Semejanza de triángulos. ***Estrategia.*** Trazar un triángulo equilátero DED' con un lado tangente a la circunferencia inicial y dos vértices (D y D') simétricos respecto al punto de tangencia (C). Luego trazar un triángulo semejante que cumpla con las condiciones del problema. ***Solución.*** Se encuentran los puntos medios G y F de los lados $D'E$ y DE respectivamente y se observa que para alguna posición del punto D estos serán los puntos de tangencia. Los lugares geométricos descritos por los puntos F y G son rectas paralelas a los lados del triángulo equilátero $DD'E$ auxiliar. Así, para resolver el problema se trazan las rectas paralelas a los lados $D'E$ y DE que pasen por el punto C y se encuentran sus puntos de intersección I y H con la circunferencia inicial. Los puntos I y H serán los puntos de tangencia faltantes del triángulo solución.
	***Recurso clave.*** Semejanza de triángulos. ***Estrategia.*** Trazar un triángulo equilátero $DD'E$ con un lado tangente a la circunferencia inicial y dos vértices (D y D') simétricos respecto al punto de tangencia (C). Luego trazar un triángulo semejante que cumpla con las condiciones del problema. ***Solución.*** Se coloca un punto móvil F sobre la circunferencia por el que se traza una recta paralela al lado DE del triángulo equilátero auxiliar. Se encuentra el punto G de intersección de la paralela con la circunferencia inicial y se traza la mediatriz de FG. El punto H de intersección de la mediatriz de FG con la circunferencia será un punto de tangencia del triángulo solución.

Fuente: Producciones de los participantes

5 Discusión de resultados

Con ayuda del SGD, los participantes pudieron encontrar tres tipos de soluciones a los problemas planteados PP1 y PP2: soluciones empíricas, exactas robustas y exactas sintéticas. En una primera instancia, debido a que en GeoGebra no se pueden intersecar lugares geométricos, las soluciones encontradas fueron visuales o empíricas. Para encontrar las soluciones robustas (en términos de intersecciones) se requirió transformar (robustecer) los lugares geométricos en objetos reconocidos por la herramienta. Es importante mencionar que esta transformación es posible únicamente si los lugares geométricos son rectas, circunferencias, cónicas o si se tiene su ecuación.

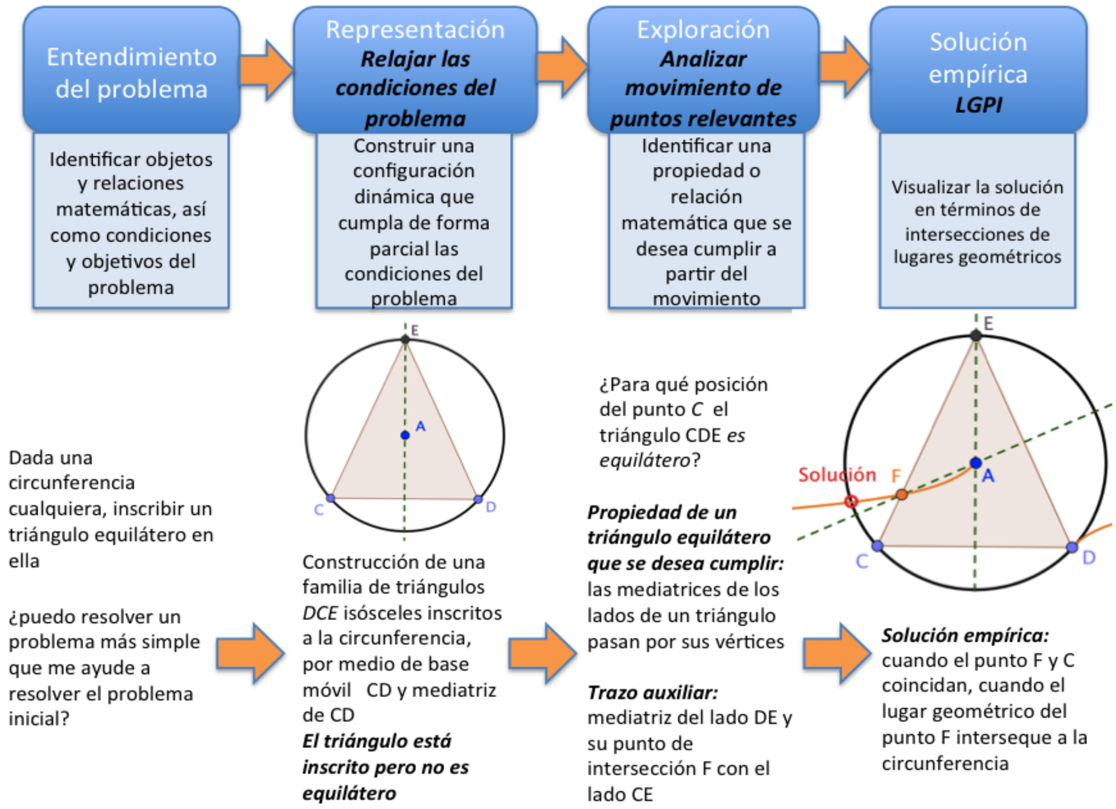
Así, un camino para transformar lugares geométricos en objetos geométricos robustos consiste en encontrar ciertos elementos importantes. Por ejemplo, los participantes tuvieron que obtener el centro de la supuesta circunferencia usada en la primera solución empírica (Tabla 7.1). Por otro lado, las soluciones sintéticas consisten únicamente de trazos geométricos básicos (regla y compás), es decir, no dependen de lugares geométricos. No obstante, en este estudio se mostraron ejemplos en donde la exploración de configuraciones dinámicas por medio de la variación y análisis de lugares geométricos permitió a los participantes obtener soluciones sintéticas (Tabla 7.2 y Tabla 7.5). Tanto para las soluciones empíricas como para las soluciones exactas (robustas y sintéticas), fueron importantes las heurísticas de visualizar patrones o lugares geométricos, explorar casos particulares y detectar invariantes. En la Figura 7.4, se muestra una caracterización del tipo de soluciones que se encontraron con ayuda del SGD y el proceso involucrado.

Figura 7.4 Caracterización del tipo de soluciones a los problemas encontradas con el SGD

Fuente: Elaboración propia

Los resultados de este estudio se pueden caracterizar alrededor de la estrategia de visualizar lugares geométricos de puntos de intersección (LGPI), la cuál puede ser útil para resolver problemas de construcción de figuras geométricas con relaciones y propiedades matemáticas específicas. En esta estrategia son importantes las heurísticas de relajar las condiciones del problema y realizar trazos auxiliares para mover elementos del modelo dinámico hasta que se cumplan las relaciones matemáticas buscadas; las cuáles se convierten en heurísticas de formulación de problemas. Un momento determinante para usar esta estrategia es la elección de la relación o propiedad matemática que se desea cumplir a partir del movimiento y que determinará la formulación de distintos problemas. Así, centrar la atención en una u otra propiedad o relación matemática arrojará problemas subsidiarios y soluciones distintas (véase Tabla 7.1). La implementación de la estrategia se puede caracterizar en cuatro fases: entendimiento, representación, exploración y solución visual (Figura 7.5).

Figura 7.5 Caracterización de la implementación de la estrategia LGPI en problemas de construcción



Fuente: Elaboración propia

La fase de entendimiento involucra identificar los objetos y relaciones matemáticas, así como las condiciones y objetivos del problema. La fase de representación requiere aplicar la heurística de relajar las condiciones del problema para construir una representación dinámica que cumpla de forma parcial las condiciones del problema. Posteriormente, la fase de exploración requiere realizar trazos auxiliares y analizar el movimiento de puntos relevantes en función de propiedades o relaciones matemáticas que se deseen cumplir a partir del movimiento. Finalmente, se visualiza la solución en términos de intersecciones de lugares geométricos de los puntos relevantes.

Los resultados mostrados en este estudio sugieren que el uso de GeoGebra para analizar y reconstruir modelos dinámicos de figuras, que comúnmente están presentes en problemas de demostración geométricos, representa una oportunidad para involucrarse en diversos procesos de formulación y resolución de problemas. En este camino, las facilidades que ofrece el SGD para arrastrar objetos y visualizar lugares geométricos permite implementar, de forma dinámica, estrategias y heurísticas de resolución de problemas como el análisis de patrones e invariantes y relajar las condiciones del problema para encontrar distintos tipos de soluciones (robustas, sintéticas y empíricas).

6 Conclusiones

Existe una gran variedad de problemas geométricos en los cuales la información o condiciones son presentados por medio de figuras o configuraciones geométricas. Comúnmente, cuando se resuelven problemas de forma tradicional (con papel y lápiz) la tarea de reconstruir las figuras que aparecen en los enunciados no es relevante, pues únicamente interesan las relaciones matemáticas implícitas en dichas figuras. Cuando se trabaja dentro de un SGD resulta primordial pensar en las formas de obtener representaciones dinámicas para explorar los problemas. Así, considerar distintas maneras de representar una situación problemática puede motivar episodios de planteamiento de problemas. Reflexionar sobre los posibles caminos para obtener una representación dinámica de una figura puede permitir problematizar y conectar diversas relaciones matemáticas y propiedades de figuras básicas como triángulos y circunferencias. En esta dirección, formular la pregunta ¿de cuántas maneras se puede construir un modelo dinámico de cierta figura? es una reflexión que siempre se debe motivar en ambientes de resolución de problemas geométricos que busquen desarrollar habilidades inquisitivas de los individuos.

Las heurísticas de relajar las condiciones del problema, analizar casos particulares, realizar trazos auxiliares y visualizar patrones e invariantes (lugares geométricos) son heurísticas fundamentales dentro de estos ambientes de formulación y resolución de problemas alrededor del uso de un SGD. Dichas heurísticas de resolución de problemas se convierten en heurísticas de formulación de problemas, pues relajar las condiciones del problema y analizar casos particulares lleva implícito la formulación de nuevos problemas (normalmente más simples). Por otro lado, realizar trazos auxiliares también lleva implícito un proceso de formulación de problemas, pues es necesario plantear qué propiedad se analizará en términos de dichos trazos auxiliares y luego cómo utilizarlos para resolver el problema por medio de la visualización de lugares geométricos de puntos de intersección.

Finalmente, se concluye que la formulación y resolución de problemas son dos actividades matemáticas que no se pueden separar y que deben ser parte de la formación integral de todo individuo. Profesores y estudiantes deben poseer la habilidad para formular preguntas relevantes que les ayuden a resolver cualquier problema (no solo matemático) que se les presente. Desde el punto de vista matemático y apoyado de los resultados de este estudio, es posible diseñar programas de formación de profesores que busquen desarrollar habilidades de formulación y resolución de problemas alrededor del uso de tecnologías digitales y la construcción de modelos dinámicos con ayuda de un SGD.

7 Referencias

Arikan, E. E. & Unal, H. (2014). Development of the structured problem posing skills and using metaphoric perceptions. European Journal of Science and Mathematics Education, 2(3), 155-166.

Aguilar-Magallón, D. & Reyes-Martínez, I. (2016). Digital technology and formulation of problems during the process of solving problems. In M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, & J. A. Eli (Eds.), Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 1432-1446). Tucson, AZ: The University of Arizona.

Aguilar-Magallón, D. & Poveda-Fernández, W. (2017). Problem Posing Opportunities whit Digital Technology in Problem Solving Environments. En M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, & J. A. Eli (Eds.), Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 1432-1446). Tucson, AZ: The University of Arizona.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (2005). The art of problem posing. Psychology Press. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 3-34). New York: Springer.

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B., & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. Educational Studies in Mathematics, 83(1), 57-69.

Leikin, R. (2015). Problem Posing for and Through Investigations in a Dynamic Geometry Environment. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 373-391). New York: Springer.

Misfeldt, M. & Johansen, M. W. (2015). Research mathematicians’ practices in selecting mathematical problems. Educational Studies in Mathematics, 1-17.

National Council of Teachers of Mathematics (2011). Technology in teaching and learning of mathematics: A position of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: The Council.

Osana, H. P. & Pelczer, I. (2015). A Review on Problem Posing in Teacher Education. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 469-492). New York: Springer.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Rosli, R., Capraro, M. M., Goldsby, D., y Gonzalez, E. G., Onwuegbuzie, A. J., & Capraro, R. M. (2015). Middle-Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing. En F. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing (pp. 333-354). New York: Springer.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Aguilar-Magallón, D. (2015). The Use of Digital Technology in Extending Mathematical Problem Solving Reasoning. En Learning Technology for Education in Cloud (pp. 298-309). Springer International Publishing.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Aguilar-Magallón, D. (2016). Digital Technologies and a Modeling Approach to Learn Mathematics and Develop Problem Solving Competencies. En International Workshop on Learning Technology for Education in Cloud (pp. 193-206). Springer International Publishing.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Tichá, M. & Hošpesová, A. (2009). Problem posing and development of pedagogical content knowledge in pre-service teacher training. En meeting of CERME (Vol. 6). Lyon, Francia:CERME.

Apéndice A. Directorio Universidad Juárez del Estado de Durango

ARROYO - CISNEROS, Edgar Alán. PhD
Encargado del Despacho de Rectoría

MIER - CISNEROS, Rafael. PhD
Secretario General

PÉREZ - HERRERA, María Eugenia. MsC
Subsecretaria General Académica

MARTÍNEZ - AGUILAR, Manuel de Jesús. BsC
Subsecretario General de Administración

ALDAMA - RAMÍREZ, Raúl. BsC
Abogado General

MUÑOZ - MARTÍNEZ, Martha Elia. MsC
Directora Institucional de Posgrado e Investigación

MATA - ROMERO, Armando. PhD
Director de la Facultad de Ciencias Exactas

Apéndice B. Comité Arbitral Universidad Juárez del Estado de Durango

CAMACHO - MACHÍN, Matías. PhD
Universidad de la Laguna, Tenerife, España

RODRÍGUEZ - VÁZQUEZ, Flor Monserrat. PhD
Universidad Autónoma de Guerrero, México

GARCÍA - TORRES, Erika. PhD
Universidad Autónoma de Querétaro, México

ARCINIEGA - NEVÁREZ, José Antonio. PhD
Universidad de Guanajuato, México

CONDE - SOLANO, Luis Alexander. PhD
Universidad de Medellín, Colombia

MARTÍNEZ - HERNÁNDEZ, César. PhD
Universidad de Colima, México

PÁEZ, David Alfonso. PhD
Universidad Autónoma de Aguascalientes, México

PARADA - RICO, Sandra Evely. PhD
Universidad Industrial de Santander, Colombia

REYES - RODRÍGUEZ, Aarón. PhD
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México

BARRAZA - BARRAZA, Diana. PhD
Universidad Juárez del Estado de Durango, México

REYES - VALDÉS, José R. PhD
Universidad Autónoma de Coahuila, México

ALVARADO - MONROY, Angelina. PhD
Universidad Juárez del Estado de Durango, México

OLVERA - MARTÍNEZ, María del Carmen. PhD
Universidad Juárez del Estado de Durango, México

CRISTÓBAL - ESCALANTE, César. PhD
Universidad de Quintana Roo (UQRoo), México

SOLÍS - CAMPOS, Alicia. PhD
Centro de Investigación e Innovación para el Desarrollo Educativo, Durango, México

Capítulo Correspondiente [Times New Roman y Negritas No. 14]

[Título en Times New Roman y Negritas No. 14 en Español e Inglés]

Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 1er Autor†*, Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 1er Coautor, Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 2do Coautor y Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 3er Coautor

International Identification of Science - Technology and Innovation

ID 1er Autor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 1er autor: (Becario-PNPC o SNI-CONACYT) (No.10 Times New Roman)

ID 1er Coautor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 2do autor: (Becario-PNPC o SNI-CONACYT) (No.10 Times New Roman)

ID 2do Coautor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 3er autor: (Becario-PNPC o SNI-CONACYT) (No.10 Times New Roman)

ID 3er Coautor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 4to autor: (Becario-PNPC o SNI-CONACYT) (No.10 Times New Roman)

Institución de Afiliación del Autor incluyendo dependencia (en Times New Roman No.10)

Primera letra del Nombre. Apellido del 1er Autor, Primera letra del Nombre. Apellido 1er Coautor, Primera letra del nombre, Apellido 2do Coautor y Primera letra del Nombre. Apellido 3er Coautor

Correo institucional (Times New Roman No.10)

Primera letra de Nombre Editores, Apellido (eds.) *Título del Acta [Times New Roman No.10],* Temas Selectos del área que corresponde ©ECORFAN-Filial, Año.

Resumen (En Español, 150-200 palabras)

Objetivos.
Metodología.
Contribución.

Indicar 3 palabras clave en Times New Roman y Negritas No. 12 (En Español)

Resumen (En Inglés, 150-200 palabras)

Objetivos.
Metodología.
Contribución.

Indicar 3 palabras clave en Times New Roman y Negritas No. 12 (En Inglés)

Indicar Área de investigación CONACYT (Times New Roman No. 12)

Área:
Campo:
Disciplina:
Subdisciplina:

1 Introducción

Texto redactado en Times New Roman No.12, espacio sencillo.

Explicación del tema en general y explicar porque es importante.

¿Cuál es su valor agregado respecto de las demás técnicas?

Enfocar claramente cada una de sus características.

Explicar con claridad el problema a solucionar y la hipótesis central.

Explicación de las secciones del Capítulo.

Desarrollo de Secciones y Apartados del Capítulo con numeración subsecuente

[Título en Times New Roman No.12, espacio sencillo y Negrita]

Desarrollo de Capítulos en Times New Roman No.12, espacio sencillo.

Inclusión de Gráficos, Figuras y Tablas-Editables

En el *contenido del Capítulo* todo gráfico, tabla y figura debe ser editable en formatos que permitan modificar tamaño, tipo y número de letra, a efectos de edición, estas deberán estar en alta calidad, no pixeladas y deben ser notables aun reduciendo la imagen a escala.

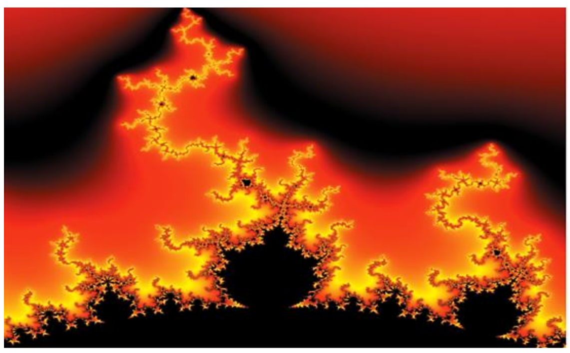
[Indicando el título en la parte Superior con Times New Roman No.12 y Negrita, señalando la fuente en la parte Inferior centrada con Times New Roman No. 10]

Tabla 2.1 Título

Variable	Descripción	Valor
V_V	Volumen de Venta	20000
P_V	Postura de venta	490.61
V_C	Volumen de Compra	20000
P_c	Postura de Compra	485.39
P^{Uh}	Precio último Hecho	491.61
V_o	Volumen Operado	1241979
P_u	Precio/Utilidad	0
P^{VL}	Precio/Valor Libro	0
U_a	Utilidad p/Acción	0
V^{La}	Valor Libro p/Acción	0

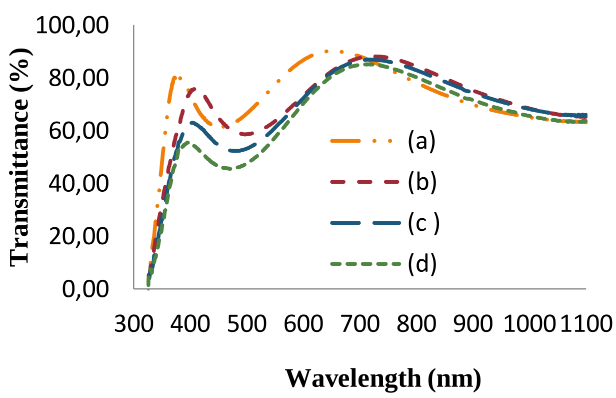
Fuente de Consulta:
(No deberán ser imágenes, todo debe ser editable)

Figura 1.1 Título



Fuente de Consulta:
(No deberán ser imágenes, todo debe ser editable)

Gráfico 1.1 Título



Fuente de Consulta:
(No deberán ser imágenes, todo debe ser editable)

Cada Capítulo deberá presentar de manera separada en **3 Carpetas**: a) Figuras, b) Gráficos y c) Tablas en formato .JPG, indicando el número en Negrita y el Titulo secuencial.

Para el uso de Ecuaciones, señalar de la siguiente forma:

$$\int_{lim^{-1}}^{lim^{1}} = \int \frac{lim^{1}}{lim^{-1}} = \left[\frac{1\,(-1)}{lim}\right]^{2} = \frac{(0)^{2}}{lim} = \sqrt{lim} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \rightarrow \propto \tag{1}$$

Deberán ser editables y con numeración alineada en el extremo derecho.

Metodología a desarrollar

Dar el significado de las variables en redacción lineal y es importante la comparación de los criterios usados.

Resultados

Los resultados deberán ser por sección del artículo.

Anexos

Tablas y fuentes adecuadas.

Agradecimiento

Indicar si fueron financiados por alguna Institución, Universidad o Empresa.

Conclusiones

Explicar con claridad los resultados obtenidos y las posibilidades de mejora.

Referencias

Utilizar sistema APA. **No** deben estar numerados, tampoco con viñetas, sin embargo en caso necesario de numerar será porque se hace referencia o mención en alguna parte del Capítulo. Utilizar Alfabeto Romano, todas las referencias que ha utilizado deben estar en el Alfabeto romano, incluso si usted ha citado un Capítulo, libro, etc. en Chino o Japonés, debe escribir la referencia en escritura romana y no en Chino o Japonés.

Ficha Técnica

Cada Capítulo deberá presentar un documento Word (.docx):

Nombre del Acta
Título del Capítulo
Abstract
Keywords
Secciones del Capítulo, por ejemplo:

1. *Introducción*
2. *Descripción del método*
3. *Análisis a partir de la regresión por curva de demanda*
4. *Resultados*
5. *Agradecimiento*
6. *Conclusiones*
7. *Referencias*

Nombre de Autor (es)
Correo Electrónico de Correspondencia al Autor
Referencias

Requerimientos de Propiedad Intelectual para su edición:

- Firma Autógrafa en Color Azul del Formato de Originalidad del Autor y Coautores
- Firma Autógrafa en Color Azul del Formato de Aceptación del Autor y Coautores

Reserva a la Política Editorial

ECORFAN Actas se reserva el derecho de hacer los cambios editoriales requeridos para adecuar la Obra Científica a la Política Editorial del ECORFAN Actas. Una vez aceptada la Obra Científica en su versión final, el ECORFAN Actas enviará al autor las pruebas para su revisión. ECORFAN® únicamente aceptará la corrección de erratas y errores u omisiones provenientes del proceso de edición de la revista reservándose en su totalidad los derechos de autor y difusión de contenido. No se aceptarán supresiones, sustituciones o añadidos que alteren la formación de la Obra Científica.

Código de Ética – Buenas Prácticas y Declaratoria de Solución a Conflictos Editoriales

Declaración de Originalidad y carácter inédito de la Obra Científica, de Autoría, sobre la obtención de datos e interpretación de resultados, Agradecimientos, Conflicto de intereses, Cesión de derechos y distribución

La Dirección de ECORFAN-México, S.C reivindica a los Autores de la Obra Científica que su contenido debe ser original, inédito y de contenido Científico, Tecnológico y de Innovación para someterlo a evaluación.

Los Autores firmantes de la Obra Científica deben ser los mismos que han contribuido a su concepción, realización y desarrollo, así como a la obtención de los datos, la interpretación de los resultados, su redacción y revisión. El Autor de correspondencia de la Obra Científica propuesto requisitara el formulario que sigue a continuación.

Título de la Obra Científica:

- El envío de una Obra Científica a ECORFAN Actas emana el compromiso del autor de no someterlo de manera simultánea a la consideración de otras publicaciones seriadas para ello deberá complementar el Formato de Originalidad para su Obra Científica, salvo que sea rechazado por el Comité de Arbitraje, podrá ser retirado.

- Ninguno de los datos presentados en esta Obra Científica ha sido plagiado ó inventado. Los datos originales se distinguen claramente de los ya publicados. Y se tiene conocimiento del testeo en PLAGSCAN si se detecta un nivel de plagio Positivo no se procederá a arbitrar.

- Se citan las referencias en las que se basa la información contenida en la Obra Científica, así como las teorías y los datos procedentes de otras Obras Científicas previamente publicados.

- Los autores firman el Formato de Autorización para que su Obra Científica se difunda por los medios que ECORFAN-México, S.C. en su Holding México considere pertinentes para divulgación y difusión de su Obra Científica cediendo sus Derechos de Obra Científica.

- Se ha obtenido el consentimiento de quienes han aportado datos no publicados obtenidos mediante comunicación verbal o escrita, y se identifican adecuadamente dicha comunicación y autoría.

- El Autor y Co-Autores que firman este trabajo han participado en su planificación, diseño y ejecución, así como en la interpretación de los resultados. Asimismo, revisaron críticamente el trabajo, aprobaron su versión final y están de acuerdo con su publicación.

- No se ha omitido ninguna firma responsable del trabajo y se satisfacen los criterios de Autoría Científica.

- Los resultados de esta Obra Científica se han interpretado objetivamente. Cualquier resultado contrario al punto de vista de quienes firman se expone y discute en la Obra Científica.

Copyright y Accesso

La publicación de esta Obra Científica supone la cesión del copyright a ECORFAN-Mexico, S.C en su Holding México para su ECORFAN Actas, que se reserva el derecho a distribuir en la Web la versión publicada de la Obra Científica y la puesta a disposición de la Obra Científica en este formato supone para sus Autores el cumplimiento de lo establecido en la Ley de Ciencia y Tecnología de los Estados Unidos Mexicanos, en lo relativo a la obligatoriedad de permitir el acceso a los resultados de Investigaciones Científicas.

Título de la Obra Científica:

Nombre y apellidos del Autor de contacto y de los Coautores	Firma
1.	
2.	
3.	
4.	

Principios de Ética y Declaratoria de Solución a Conflictos Editoriales

Responsabilidades del Editor

El Editor se compromete a garantizar la confidencialidad del proceso de evaluación, no podrá revelar a los Árbitros la identidad de los Autores, tampoco podrá revelar la identidad de los Árbitros en ningún momento.

El Editor asume la responsabilidad de informar debidamente al Autor la fase del proceso editorial en que se encuentra el texto enviado, así como de las resoluciones del arbitraje a Doble Ciego.

El Editor debe evaluar los manuscritos y su contenido intelectual sin distinción de raza, género, orientación sexual, creencias religiosas, origen étnico, nacionalidad, o la filosofía política de los Autores.

El Editor y su equipo de edición de los Holdings de ECORFAN® no divulgarán ninguna información sobre la Obra Científica enviado a cualquier persona que no sea el Autor correspondiente.

El Editor debe tomar decisiones justas e imparciales y garantizar un proceso de arbitraje por pares justa.

Responsabilidades del Consejo Editorial

La descripción de los procesos de revisión por pares es dado a conocer por el Consejo Editorial con el fin de que los Autores conozcan cuáles son los criterios de evaluación y estará siempre dispuesto a justificar cualquier controversia en el proceso de evaluación. En caso de Detección de Plagio a la Obra Científica el Comité notifica a los Autores por Violación al Derecho de Autoría Científica, Tecnológica y de Innovación.

Responsabilidades del Comité Arbitral

Los Árbitros se comprometen a notificar sobre cualquier conducta no ética por parte de los Autores y señalar toda la información que pueda ser motivo para rechazar la publicación de la Obra Científica. Además, deben comprometerse a mantener de manera confidencial la información relacionada con la Obra Científica que evalúan.

Cualquier manuscrito recibido para su arbitraje debe ser tratado como documento confidencial, no se debe mostrar o discutir con otros expertos, excepto con autorización del Editor.

Los Árbitros se deben conducir de manera objetiva, toda crítica personal al Autor es inapropiada.

Los Árbitros deben expresar sus puntos de vista con claridad y con argumentos válidos que contribuyan al que hacer Científico, Tecnológica y de Innovación del Autor.

Los Árbitros no deben evaluar los manuscritos en los que tienen conflictos de intereses y que se hayan notificado al Editor antes de someter la Obra Científica a evaluación.

Responsabilidades de los Autores

Los Autores deben garantizar que sus Obras Científicas son producto de su trabajo original y que los datos han sido obtenidos de manera ética.

Los Autores deben garantizar no han sido previamente publicados o que no estén siendo considerados en otra publicación seriada.

Los Autores deben seguir estrictamente las normas para la publicación de Obra Científica definidas por el Consejo Editorial.

Los Autores deben considerar que el plagio en todas sus formas constituye una conducta no ética editorial y es inaceptable, en consecuencia, cualquier manuscrito que incurra en plagio será eliminado y no considerado para su publicación.

Los Autores deben citar las publicaciones que han sido influyentes en la naturaleza de la Obra Científica presentado a arbitraje.

Servicios de Información

Indización - Bases y Repositorios

- RESEARCH GATE (Alemania)
- MENDELEY (Gestor de Referencias bibliográficas)
- GOOGLE SCHOLAR (Índices de citaciones-Google)
- REDIB (Red Iberoamericana de Innovación y Conocimiento Científico- CSIC)

Servicios Editoriales:

Identificación de Citación e Índice H.
Administración del Formato de Originalidad y Autorización.
Testeo de s con PLAGSCAN.
Evaluación de Obra Científica.
Emisión de Certificado de Arbitraje.
Edición de Obra Científica.
Maquetación Web.
Indización y Repositorio
Publicación de Obra Científica.
Certificado de Obra Científica.
Facturación por Servicio de Edición.

Política Editorial y Administración

244 - 2 Itzopan Calle. La Florida, Ecatepec Municipio México Estado, 55120 Código postal, MX. Tel: +52 1 55 2024 3918, +52 1 55 6159 2296, +52 1 55 4640 1298; Correo electrónico: contact@ecorfan.org www.ecorfan.org

Oficinas de Gestión

244 Itzopan, Ecatepec de Morelos–México.
21 Santa Lucía, CP-5220. Libertadores -Sucre–Bolivia.
38 Matacerquillas, CP-28411. Moralzarzal –Madrid-España.
18 Marcial Romero, CP-241550. Avenue, Salinas l - Santa Elena-Ecuador.
1047 La Raza Avenue -Santa Ana, Cusco-Peru.
Boulevard de la Liberté, Immeuble Kassap, CP-5963.Akwa- Douala-Cameroon.
Southwest Avenue, San Sebastian – León-Nicaragua.
6593 Kinshasa 31 – Republique Démocratique du Congo.
San Quentin Avenue, R 1-17 Miralvalle - San Salvador-El Salvador.
16 Kilometro, American Highway, House Terra Alta, D7 Mixco Zona 1-Guatemala.
105 Alberdi Rivarola Captain, CP-2060. Luque City- Paraguay.
Distrito YongHe, Zhongxin, calle 69. Taipei-Taiwán.

ISBN 978-607-8534-41-8

www.ecorfan.org