Resolución de Problemas y Uso de Tecnologías Digitales en un Curso en Línea Masivo y Abierto

POVEDA-FERNÁNDEZ, William, AGUILAR-MAGALLÓN, Daniel Aurelio y OLVERA-MARTÍNEZ, María del Carmen

W. Poveda[1], D. Aguilar[1] y C. Olvera[2]

[1]Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – IPN
[2]Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas

wpoveda@cinvestav.mx

C. Cristóbal, M. Olvera, V. Vargas (Dirs.) Educación para la interdisciplinariedad. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

Digital technologies open up new routes in the mathematical learning process, not only to obtain information but also for students to share ideas, interact with each other or with experts in the discussion of mathematical concepts and ideas. How does the design and implementation of the Activities in a MOOC based on problem solving and coordinated use of digital technologies influences the construction and development of the mathematical knowledge of the participants? The results of this study indicate that the design of the activities and methodology implemented by the MOOC design team in the forums allowed and gave advantage to the discussion and analysis of how the systematic use of digital technologies is important in the representation, exploration, understanding of concepts and problem solving. The participants discussed their mathematical ideas and asked questions, problems and different ways to solve them.

Resolución de Problemas, Tecnologías Digitales, MOOC, Diseño de Actividades

1. Introducción

Las tecnologías digitales influyen cada vez más en el desarrollo de las actividades diarias de los individuos; diversas herramientas de comunicación son frecuentemente utilizadas en la búsqueda de información. Por ejemplo, un estudiante, después de su clase formal, puede consultar a través del uso de un celular, tableta o computadora: YouTube, Wikipedia o KhanAcademy para obtener información sobre conceptos o teoremas. También, es posible que encuentre cursos desarrollados por universidades, donde durante el desarrollo de las actividades, pueda interactuar planteando y discutiendo sus ideas con sus compañeros o expertos en el tema. La conectividad está alterando y cambiando los espacios y tiempos en los que se produce el aprendizaje (Gross, 2016).

Recientemente, diversas universidades a nivel mundial están compartiendo Cursos en Línea Masivos y Abiertos (*Massive Open Online Course*, MOOC por sus siglas en inglés) en los cuales cualquier persona puede inscribirse sin importar su nivel de estudios, ubicación geográfica, dominio o conocimiento previo de la materia. Dependiendo del tema y contenido que aborde un MOOC, puede ser que se solicite una cantidad mínima de requisitos a las personas interesadas. En un MOOC, no existe una restricción en cuanto al número de participantes (generalmente se inscriben miles), además, no existe un profesor encargado de responder o dar seguimiento puntual a cada participante, sino que cada participante está a cargo del desarrollo de sus actividades.

En el campo de la educación matemática, las propuestas curriculares actuales promueven un énfasis en la resolución de problemas y en el uso de herramientas digitales (NCTM, 2009). Los procesos que intervienen en la resolución de problemas son: formulación de preguntas, búsqueda de diversos métodos de solución, explorar diferentes representaciones, búsqueda de patrones, variantes y relaciones entre objetos matemáticos, presentación de argumentos, comunicación de resultados, planteamiento de preguntas y formulación de nuevos problemas (Santos-Trigo, 2014). El uso sistemático de tecnologías digitales resulta importante en los procesos anteriores de la resolución de problemas, por ejemplo, Santos-Trigo (2007) argumenta que un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), por ejemplo, GeoGebra, puede utilizarse para integrar los procesos que intervienen en la resolución de problemas ya que pueden generar representaciones o modelos dinámicos de los problemas matemáticos donde el movimiento de objetos particulares (puntos, rectas, segmentos, polígonos, etc.) puede ser explorado y explicado en términos de relaciones matemáticas. Así, las representaciones dinámicas se convierten en una fuente que involucra a los estudiantes en la reflexión e investigación matemática.

Churchill, King, y Fox (2013; 2016) proponen un marco para el diseño de ambientes de aprendizaje en línea llamado RASE, donde se deben integrar cuatro componentes: Recursos, Actividades, Soporte y Evaluación. Así, para el logro de un aprendizaje, el diseño de las actividades debe:

1. Contemplar y fomentar la participación de los estudiantes en un ambiente de reflexión, colaboración y discusión y,
2. Centrarse en un contexto donde las tareas o problemas involucren a los estudiantes en un proceso de resolución de problemas.

La pregunta de investigación que guió este estudio fue: ¿De qué manera el diseño de las Actividades basadas en la resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales y las interacciones entre los participantes de un MOOC durante el desarrollo de las tareas fomentan la construcción y desarrollo del conocimiento matemático de los participantes?**.** En esta investigación, se diseñaron cinco Actividades que comprendían tareas o situaciones reflejando la práctica de la disciplina, es decir, utilizar diversas representaciones, encontrar el significado e interpretar la solución y comunicar los resultados.

Basándose en las ideas anteriores, se construyó el MOOC llamado: Resolución de Problemas Matemáticos y Uso de Tecnologías Digitales, en la plataforma *Open edx*, (para mayor información https://open.edx.org/about-open-edx) fundamentado en los marcos de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales de Santos-Trigo (2014) y el modelo de diseño de ambientes de aprendizaje de Churchill et al. (2016). Un objetivo planteado durante del diseño de las Actividades del curso fue ofrecer la posibilidad a los participantes de involucrarse en discusiones relacionadas con los procesos de resolución de problemas. Se diseñaron cinco situaciones matemáticas, cada una fue representada dinámicamente utilizando un SGD para que los participantes tuvieran la oportunidad y la posibilidad de: explorar el problema basados en el movimiento de los objetos presentes, generar conjeturas y justificarlas a través de argumentos visuales o empíricos y posteriormente, construir un argumento que involucre propiedades y resultados matemáticos. En todo momento, se hizo conciencia en los participantes que el plantear interrogantes es punto de partida para la comprensión de ideas matemáticas.

El foro que ofrece *Open edx* se utilizó como un medio de Soporte y Evaluación, ya que es un medio de comunicación entre los participantes y les ofrece la oportunidad de plantear y aclarar sus dudas, conocer las ideas de sus compañeros y contrastar sus puntos de vista con los de otros (Poveda & Aguilar-Magallón, 2017). Interesa analizar la forma en que el diseño de las actividades matemáticas y las prácticas, tanto de los participantes como del equipo de diseño, durante la implementación del curso, promueven aspectos relacionados con el pensamiento matemático: el planteamiento de preguntas y la búsqueda de diversas maneras de responderlas; la formulación de conjeturas basadas en el movimiento de objetos matemáticos y la cuantificación de atributos como medida de segmentos, ángulos, áreas, etc.; y la búsqueda de argumentos que validen y sustenten esas conjeturas transitando desde los argumentos empíricos y visuales hasta la construcción de argumentos geométricos y algebraicos.

2. Marco Conceptual

Schoenfeld (1992) argumenta que la resolución de problemas es una actividad esencial en el aprendizaje de las matemáticas ya que es un medio que permite identificar, explorar, probar y comunicar los procesos de solución.

Un aspecto central en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes es la adquisición de estrategias, recursos[1] y una disposición para involucrarse en actividades que reflejen la práctica o actividad matemática (Santos-Trigo, 2008); es decir, identificar y contrastar diversas maneras de representar y explorar un problema, formular conjeturas y justificarlas, extender las condiciones iniciales del problema, y plantear nuevos problemas (Schoenfeld, 1985). Por otra parte, diversas tecnologías digitales proporcionan una base para transformar los materiales de aprendizaje tradicionales y ofrecer a los estudiantes otras formas para que desarrollen su pensamiento matemático (Santos-Trigo, 2014; Aguilar-Magallón & Poveda, 2017a).

Así, las tecnologías digitales juegan un papel importante en resolución de problemas, por ejemplo, si un estudiante no puede resolver el problema por falta de información sobre un concepto, puede utilizar Internet para consultarla de manera que le permita continuar con el proceso de resolución. Borba et al. (2016) comentan que los estudiantes acceden a sitios de información digitales como Wikipedia y WolframAlpha donde pueden consultar y estudiar conceptos o relaciones matemáticas referentes a un tema específico, lo que permite a los estudiantes conectar diversos temas y áreas de las matemáticas (Leung, 2013; Leung & Bolite-Frant, 2015).

En el proceso de resolución de problemas, el uso de un SGD:

Se vuelve importante para representar inicialmente el problema en términos de sus propiedades principales y más tarde para visualizar el problema de forma dinámica. Además, esta herramienta puede ser utilizada para cuantificar los atributos matemáticos como áreas, perímetros, ángulos, segmentos de longitudes, pendientes, etc., y observar cómo cambian cuando se mueven algunos objetos (puntos o líneas) dentro de la representación del problema (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2009, p. 275).

Así, el uso sistemático de tecnologías digitales resulta importante en la representación, exploración, comunicación y comprensión de conceptos matemáticos en la resolución de problemas. Aramo-Immonen, Kärkkäinen, Jussila, Joel-Edgar, y Huhtamäki (2016) afirman que el foro proporciona la oportunidad para un aprendizaje activo y colaborativo en un MOOC; también, argumentan que el carácter abierto y masivo favorece las interacciones entre sus participantes. Según Sinclair y Kalvala (2015), la eficacia de un MOOC depende del tipo de actividades o tareas propuestas a sus participantes; sugieren que éstas deben generar y promover un ambiente de discusión para el intercambio de ideas de manera que atraigan la atención de los participantes, les planteen retos y fomenten su curiosidad.

Churchill et al. (2016) argumentan que se necesita un modelo para el diseño de ambientes de aprendizaje que proporcione, a profesores e investigadores, pautas para utilizar tecnologías digitales en el contexto de la enseñanza y aprendizaje. En esta dirección, proponen el modelo de diseño RASE que integra Recursos, Actividades, Soporte y Evaluación. Los Recursos, se refieren a los materiales disponibles a los estudiantes: videos, documentos digitales, calculadoras, modelos dinámicos elaborados en un SGD, etc. Las Actividades tienen como objetivo involucrar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje, en esta ruta, recomiendan utilizar la resolución de problemas. El Soporte se refiere a que se deben incluir diversos medios de comunicación que permitan a los estudiantes obtener ayuda o retroalimentación en el momento en que lo necesiten y fomentar su independencia del profesor o tutor. Cuando un participante del MOOC comparte sus ideas o resultados obtenidos, puede modificar o refinar sus conceptos, ideas y estrategias de resolución de problemas.

[1] Son todos los conocimientos que un individuo puede utilizar cuando se enfrenta a una situación matemática específica (Schoenfeld, 1985).

La Evaluación enfatiza que se debe crear conciencia en los estudiantes sobre reflexionar acerca de la retroalimentación recibida para que continúen su proceso de aprendizaje. Durante el diseño de las Actividades del MOOC, los problemas matemáticos deben ser vistos como un medio para que los participantes planteen preguntas y busquen diversas formas de contestarlas con ayuda de los Recursos o interactuando entre ellos. El objetivo es que el participante desarrolle el hábito de cuestionamiento que le ayude a resolver problemas en matemáticas; así como en cualquier disciplina del conocimiento humano.

En el MOOC Resolución de Problemas Matemáticos y Uso de Tecnologías Digitales, el objetivo del diseño de las Actividades fue que las tareas matemáticas permitan a los participantes mover los objetos de un modelo dinámico del problema, identificar visual o empíricamente las relaciones entre éstos y conjeturar una posible solución del problema. Su validación transita desde el uso de argumentos empíricos o visuales hasta la presentación de una prueba o demostración matemática. En esta ruta, un aspecto importante a incluir es un medio de comunicación que funcione como Soporte donde los participantes puedan plantear alguna interrogante o idea en cualquier momento y recibir retroalimentación, así, pueden reflexionar y tomar decisiones, como proceso de Evaluación, hacia el cumplimiento de sus objetivos de aprendizaje.

3. Metodología

Se describen los elementos del diseño del MOOC, sus participantes, metodología utilizada durante la implementación del curso y la forma de organizar y analizar los datos obtenidos.

3.1 Diseño de las Actividades

El curso pretende enfatizar que el aprendizaje de las matemáticas requiere problematizar o cuestionar las tareas o situaciones, pensar distintas maneras de resolver un problema, comprender y utilizar diversas representaciones, encontrar el significado e interpretar la solución y comunicar los resultados. Mediante este proceso, las preguntas se convierten en un medio que permiten a los participantes construir, desarrollar, refinar, o transformar sus formas de comprender y resolver problemas. Para ello, se utilizaron diversos Recursos, Actividades, medios de Soporte y formas de Evaluación. Los Recursos incluyeron representaciones dinámicas de los problemas elaborados en GeoGebra, vínculos a la plataforma Wikipedia y videos de KhanAcademy que permitan el estudio y consulta de conceptos o relaciones matemáticas.

Las Actividades comprendieron problemas matemáticos con la finalidad de que los participantes fomentaran sus procesos de construcción o desarrollo del pensamiento matemático. En cada Actividad se resaltó:

1. El movimiento de los objetos. Inicialmente, se proporciona a los participantes un modelo dinámico que contiene figuras simples con el propósito de que identifiquen y conecten los conceptos o propiedades matemáticas asociadas al problema que representa. Los Recursos tienen la finalidad de permitir a los participantes extender o refinar su conjunto de conocimientos e involucrarse en los procesos de resolución de problemas.

2. Formulación de conjeturas. Durante el desarrollo de cada Actividad, el trabajo de los participantes es plantear interrogantes sobre el comportamiento de algunos atributos de los objetos presentes y formular conjeturas que pueden ser sustentadas o refutadas utilizando argumentos visuales o empíricos.

3. Justificación de conjeturas. Toda conjetura propuesta por los participantes debe ser justificada. Así, las Actividades propuestas, promueven y cuestionan al participante para que construya y presente un argumento que involucre propiedades y resultados matemáticos. Por ejemplo, se pueden incluir resultados geométricos, argumentos de cálculo o geometría analítica.

El medio de Soporte fue el foro de discusión ya que ofrece la posibilidad de que los participantes planteen sus dudas, compartan ideas y participen en las discusiones generadas en el desarrollo de las tareas. Así, el trabajo de los integrantes puede ser un punto de referencia para que otros retomen o extiendan las ideas, las contrasten y discutan. Además, el foro es un medio para que los participantes reciban retroalimentación acerca de las ideas que plantean, esto les permite realizar un análisis y reflexión como parte de la Evaluación.

El MOOC se desarrolló en la plataforma *Open edx*, parte de la Secretaría de Educación Pública de México (para más información https://mexicox.gob.mx). La estructura del curso, las actividades y sus objetivos se muestran en la Tabla 7.1.

Tabla 7.1 Estructura de las actividades del MOOC

Conjunto de actividades	**Objetivos**
Sesión de trabajo 1 (una semana). Importancia de formular preguntas.	Relacionar las actividades de resolución de problemas con el aprendizaje de las matemáticas. Promover que los estudiantes formulen preguntas como un camino para comprender ideas matemáticas y resolver problemas.
Sesión de trabajo 2 (una semana). El problema de los granjeros: Dividir un cuadrado en dos áreas iguales.	Importancia del movimiento de objetos y la medición de atributos tal como el área de figuras geométricas. Resaltar la búsqueda de diversas maneras de resolver el problema y plantear preguntas para extenderlo.
Sesión de trabajo 3 (una semana). Un problema de construcción: un triángulo isósceles entre dos rectas paralelas.	Comprender el concepto de punto simétrico, explorar el modelo dinámico en búsqueda de relaciones o invariantes y justificar o refutar las conjeturas planteadas utilizando argumentos matemáticos.
Sesión de trabajo 4 (dos semanas). El segmento y su recta mediatriz, el triángulo isósceles., el triángulo equilátero y el triángulo rectángulo e isósceles.	Mover objetos, observar el movimiento de las figuras y formular algunas conjeturas sobre su comportamiento tras el movimiento. Justificar o refutar las conjeturas que se identifiquen en una primera fase, la explicación puede estar sustentada a partir de argumentos visuales o empíricos, para posteriormente construir y presentar otro tipo de argumentos (geométricos, algebraicos, etc.).
Sesión de trabajo 4 (dos semanas). La parábola como lugar geométrico. Explorar el comportamiento del área de una familia de rectángulos de perímetro fijo que se puede modelar a través de un lugar geométrico.	Introducir al participante en el estudio de lugares geométricos como una estrategia para resolver problemas.

Fuente: Elaboración propia

3.2. Implementación del MOOC, sus participantes y procedimientos

El MOOC tuvo una duración de siete semanas y el requisito solicitado a los interesados fue poseer o estar cursando estudios de nivel medio superior y se plantearon cinco Actividades, donde, durante su desarrollo, los participantes, tenían la posibilidad de expresar sus ideas en el foro, las veces que consideraran necesarias. El equipo de diseño del MOOC (ED) monitoreó la actividad de los participantes en los foros de la siguiente manera:

1. Dado que es probable que muchos comentarios planteados por los participantes se repitan y generen una gran cantidad de información que, en lugar de ayudarlos, los confundan o provoquen que pierdan el interés en presentar sus ideas, en cada Actividad se clasificaron los comentarios en cuatro categorías: respuestas a las preguntas que planteaba cada Actividad, acercamientos hacia la solución del problema (correctos e incorrectos), preguntas planteadas y, extensiones del problema. Posteriormente, se eliminaron aquellos que tenían ideas similares; se tomaron dos comentarios de cada categoría y fueron colocados de tal forma que se mostraran al inicio de las conversaciones, así los participantes les daban prioridad a estos comentarios para analizarlos y discutirlos.
2. Se intervenía en el foro sólo cuando se requería orientar y extender la discusión. No se respondían de manera directa las preguntas de los participantes, sino que, se planteaban preguntas con el objetivo de generar discusión y que ellos mismos buscaran diferentes formas de solucionar la situación.
3. Al final de cada Actividad, se planteó una serie de preguntas para promover la ampliación del tema y que los participantes buscaran extender los problemas iniciales.

Los datos de este estudio se recolectaron por medio de los foros de discusión. La unidad de análisis fueron las conversaciones de los participantes en cada Actividad. Ernest (2016) argumenta que en la conversación como unidad de análisis intervienen: un hablante/proponente, un oyente/crítico y un texto matemático. El hablante/proponente plantea una idea y el oyente/crítico responde proporcionando su punto de vista, aceptando o modificando la idea original. Posteriormente, el hablante/proponente puede asumir el rol de oyente/crítico, de esta manera, se alternan sus roles.

Al finalizar el curso, el equipo de diseño del MOOC, hizo una recapitulación de las conversaciones en cada Actividad del curso y seleccionó diez de los participantes más activos durante todo el curso (Yolanda, Karol, Alejandra, Alex, Carlos, Diego, Erick, Guillermo, Jhon y Alan), este conjunto se denomina Grupo. Interesa analizar cómo el diseño de las Actividades y las interacciones en el foro fomentan el proceso de construcción y desarrollo del conocimiento matemático, de los participantes: ¿Cómo interpretaron los participantes los objetos matemáticos presentes en las construcciones dinámicas que representan los problemas? ¿Qué propiedades asociaron a los conceptos? ¿Qué significados matemáticos construyeron? ¿Qué estrategias de solución asociadas a un SGD utilizaron? ¿Qué preguntas planteaban y cómo las respondían? y ¿Cómo influyó la metodología utilizada por el equipo de diseño durante la implementación del MOOC?

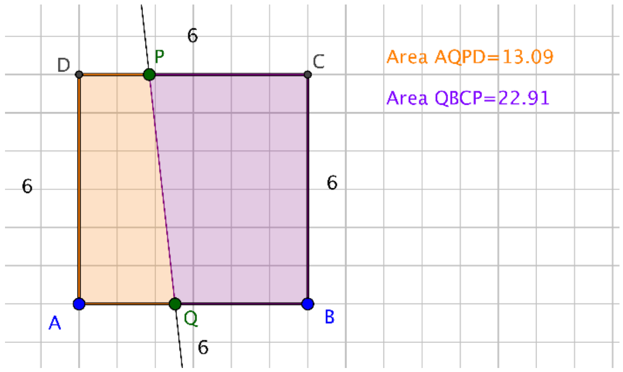
4. Presentación de Resultados

En esta sección se discute una de las Actividades del MOOC. El problema inicial fue: Dos granjeros desean sembrar un terreno que tiene forma de un cuadrado. ¿Cómo dividir el terreno para que cada granjero siembre exactamente la misma área? ¿Existen varias formas de hacer esa división? En cada Actividad se discute una solución diferente al problema.

4.1. Solución 1

En esta primera solución, los Recursos comprenden construcciones dinámicas de un cuadrado, enlaces a Wikipedia y un conjunto de preguntas para guiar el trabajo de los participantes. En el modelo dinámico del cuadrado (terreno), se trazan los puntos P y Q sobre los DC y AB, respectivamente, y la recta PQ que divide al cuadrado en dos regiones. Se resaltan los valores de las áreas de los cuadriláteros $AQPD$ y $QBCP$ (Figura 7.1). Se cuestiona a los participantes sobre: Al mover los puntos $A, B, P\ y\ Q$ ¿Qué ocurre con las áreas de las regiones? ¿Dónde situar los puntos P y Q para que las áreas de las regiones $AQPD$ y $QBCP$ sean las mismas?

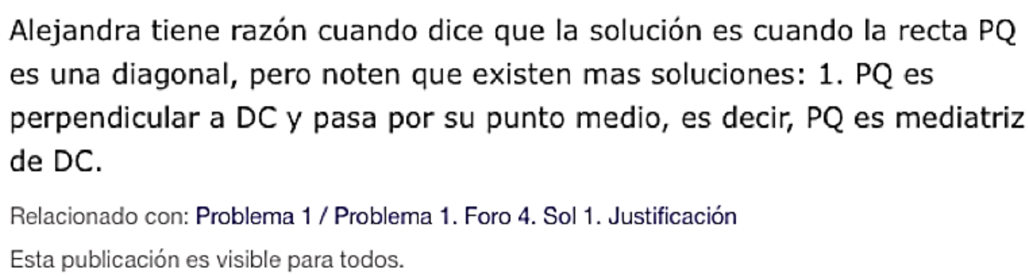
Figura 7.1 Soluciones de Karol



Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Alan, Karol, Alejandra, Carlos, Erick, Guillermo y Jhon coincidieron en que al mover los puntos P y Q es posible obtener regiones de áreas iguales y se basan en el movimiento de objetos y la medición de áreas para determinar algunas soluciones: $P = C \; y \; Q = A$; $P = D \; y \; Q = B$; $y \; PQ$ mediatriz de DC (Figura 7.2).

Figura 7.2 Soluciones de Karol



Alejandra tiene razón cuando dice que la solución es cuando la recta PQ es una diagonal, pero noten que existen mas soluciones: 1. PQ es perpendicular a DC y pasa por su punto medio, es decir, PQ es mediatriz de DC.

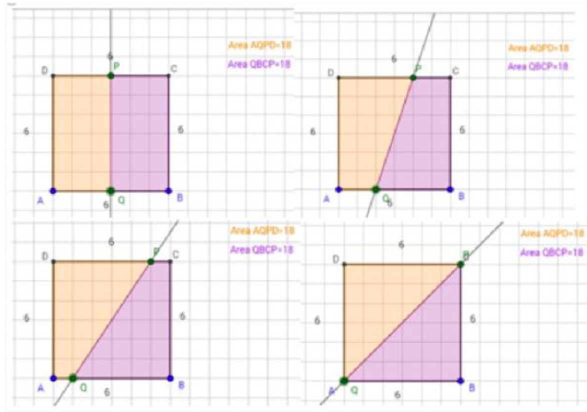
Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 4. Sol 1. Justificación

Esta publicación es visible para todos.

Fuente: MOOC Resolución de problemas matemáticos y uso de tecnologías digitales

Ninguno de los participantes logró observar la solución general: Si PQ pasa por O (centro del cuadrado) entonces el $área \; AQPD = \; área \; QBCP$. En las conversaciones, Karol compartió imágenes de cuatro soluciones basándose en argumentos visuales (valor del área de cada región) pero no identifica invariantes: no observó que, en todas las figuras que compartió, PQ pasa por O (Figura 7.3). El ED no intervino ya que en la siguiente parte de la Actividad se incluyó una serie de preguntas para que los participantes exploraran y formularan una conjetura de la solución del problema relacionada con el centro del cuadrado.

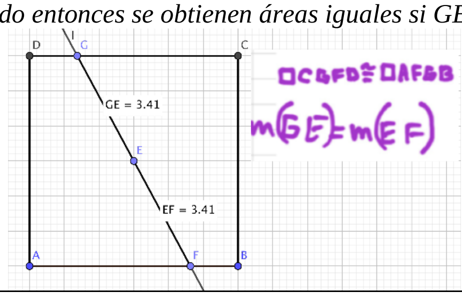
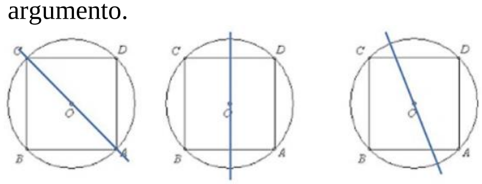
Figura 7.3 Soluciones de Karol



Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

En la siguiente parte, la conjetura, se cuestionó a los participantes: ¿Qué propiedad cumple la recta PQ para aquellos casos en que las áreas de las regiones son las mismas? ¿Resulta importante el centro del cuadrado y la posición de la recta que divide al terreno en regiones de la misma área? Los participantes exploraron y observaron algunas invariantes en los objetos involucrados en el problema. La Tabla 7.2 muestra la conjetura planteada por Alan y Erick y un resumen de las interacciones en el foro.

Tabla 7.2 Conjeturas formuladas por los participantes y sus interacciones en el foro

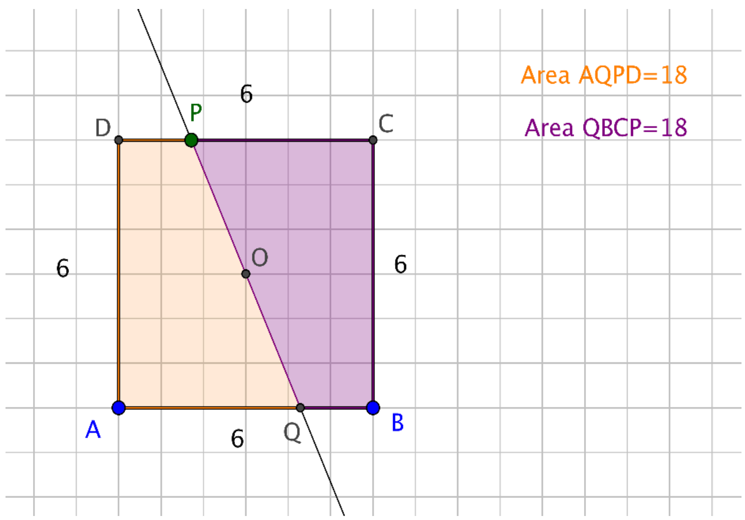
Conjetura planteadas por los participantes	**Interacciones en el foro**	**Resultados**
Alan **c**onstruyó un modelo dinámico del problema, lo compartió y formuló la conjetura: "*Si E es el centro del cuadrado entonces se obtienen áreas iguales si GE=FE*". 	Guillermo mencionó que toda recta que pasa por el centro tiene dicha propiedad, por lo cual, la conjetura se puede expresar utilizando el centro del cuadrado. Otros participantes, ninguno del Grupo, opinaron igual.	Alan menciona que la solución general se obtiene cuando la recta PQ contiene el centro de cuadrado.
Erick: "*Si PQ pasa por el centro del cuadrado entonces se convierte en un eje de simetría, por lo tanto, las áreas son iguales*". Carlos, Karol, Jhon y Guillermo presentan el mismo argumento. 	ED: "*¿Qué es un eje de simetría? ¿Cómo se define el eje de simetría de un cuadrado? ¿Cuántos ejes de simetría tiene un cuadrado?*" Los participantes, compartieron y comentaron información de Wikipedia sobre el eje de simetría, concluyeron que la conjetura es falsa.	Los participantes analizaron el concepto de eje de simetría de un cuadrado, para ello, P_x compartió información de Wikipedia. Concluyeron que los ejes de simetría del cuadrado son: cada diagonal, la mediatriz de los lados.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Para extender la discusión y guiar a los participantes en sus exploraciones, el ED cuestionó: *"¿Cuántas soluciones existen?"* Jhon, Karol y Alejandra coincidieron en que: *"Existen infinitas rectas que pasan por el punto O y cortan a los lados opuestos del cuadrado, por lo tanto, se tienen infinitas posibles formas de dividir el un cuadrado en dos regiones de área igual*". Las ideas mostradas en la Tabla 7.2 y la pregunta complementaria que planteó el ED sirvieron para identificar que la solución al problema se obtiene cuando PQ contiene a O, además, las soluciones son infinitas. Al final de las discusiones en el foro, los diez participantes del Grupo formularon su primera conjetura: "*Si la recta PQ pasa por el centro del cuadrado entonces PQ lo divide en dos áreas iguales"*, basados en el movimiento de P y Q y en la medición de las áreas de los dos polígonos que dividen el cuadrado.

Una vez que los participantes formularon una conjetura basada en las estrategias del movimiento de objetos y la medición de sus atributos, la siguiente parte consistió en hacerlos transitar a la búsqueda de relaciones matemáticas que sustentaran la conjetura. Para ello, se les proporcionó el modelo dinámico del problema representado en la Figura 7.4, el cual consistió en una modificación de la construcción original (ver Figura 7.2) ya que el punto Q no es móvil. Se les solicitó mover el punto P y observar qué pasa con las áreas de las regiones que se generan, además, cambiar la longitud de lado del cuadrado (moviendo A ó B). Luego, se plantearon las siguientes preguntas: ¿Cómo se sustenta matemáticamente la conjetura planteada? ¿Qué conceptos, propiedades y recursos matemáticos podemos usar para sustentar y demostrar la conjetura?

Figura 7.4 Modelo dinámico en la parte de Conjetura de la Actividad



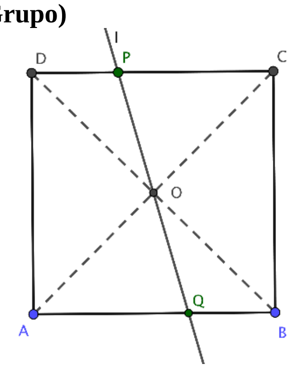
Fuente: Actividad del MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales

En esta parte de la Actividad participaron ocho de los diez integrantes del Grupo, Yolanda y Alejandra no compartieron sus ideas en el foro. Todos discutieron y concluyeron la justificación 1 que muestra la Tabla 7.3, Alex recopiló las ideas, construyó y presentó un modelo dinámico que muestra la solución. Un participante que no pertenece al Grupo (P_x) presentó otro argumento para la justificación de la conjetura (justificación 2 de la Tabla 7.3), Diego y Karol afirmaron estar de acuerdo en las ideas, pero faltó justificar la congruencia de los rectángulos $AQKD$ y $LBCP$.

Tabla 7.3 Justificaciones, recursos y estrategias discutidas en el foro

<table>
<tr><th>Justificaciones presentadas por los particiopantes</th><th>Recursos y estrategias de exploración y solución</th></tr>
<tr><td>

Justificación 1 (Grupo)



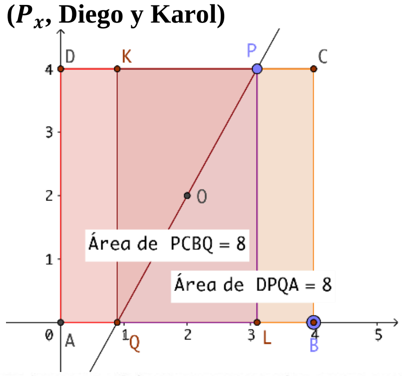
Se trazan las diagonales AC y BD, O es su punto de intersección. El triángulo DOP es congruente con el triangulo BOQ ya que tienen dos ángulos correspondientes congruentes y el lado correspondiente entre ellos también es igual, así, DP y BQ son congruentes. los cuadrilateros AQPD y QCCP tienen la misma área.

</td><td>

Recursos: Propiedades del cuadrado y sus diagonales, ángulos entre paralelas, ángulos opuestos por el vértice y congruencia de triángulos.
Estrategia: Colocar un punto móvil P sobre el lado DC, construir la recta PO y trazar las diagonales del cuadrado.
Justificación: $\Delta DOP \cong \Delta BOQ$ (por el criterio ALA), así $DP = BQ$, por lo tanto, los trapecios $AQPD$ y $QBCP$ son congruentes y tienen área igual.

</td></tr>
<tr><td>

Justificación 2 (P_x, Diego y Karol)



como vemos en esta imagen, si descomponemos las areas que se generan al atravezar un cuadrado con una linea que pase por su centro, podemos observar que cada lado esta compuesto por el area de un rectangulo y un triangulo, y que tienen las mismas medidas que las figuras complementarias, este argumento de forma grafica, demuestra que las areas son iguales. Los triángulos QKP y PLQ son congruentes por el criterio LLL. También los rectángulos son congruentes.

Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 4. Sol 1. Justificación

Esta publicación es visible para todos.

</td><td>

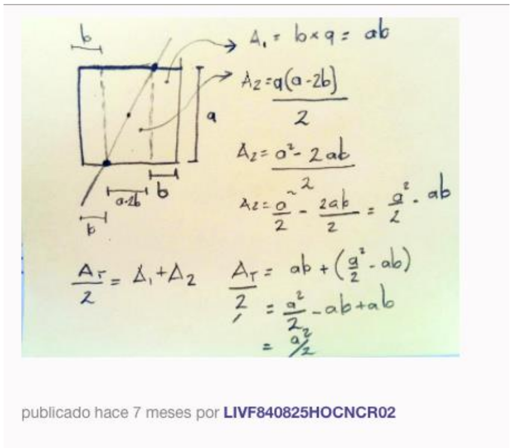
Recursos: Propiedades del cuadrado, congruencia de triángulos, ángulos entre paralelas, propiedades de rectas paralelas y perpendiculares.
Estrategia: Colocar el punto móvil P sobre DC, trazar la recta PO y construir rectas perpendiculares a DC y AB que pasan por P y Q, respectivamente.
Justificación: $\Delta QKP \cong \Delta PLQ$ (LAL) y los rectángulos $AQKD$ y $LBCP$ son congruentes (no proporciona argumentos).

</td></tr>
</table>

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Diego planteó la pregunta: *"¿Cómo sabes que AQ=PC?"*, P_x compartió un modelo algebraico tratando de justificar la conjetura (Figura 7.5), pero no sustenta que *AQ=PC*. Posteriormente, el ED realizó la misma pregunta, otro participante que no pertenece al Grupo compartió una imagen (Figura 7.6) donde utilizó las ideas de la justificación 1 de la Tabla 7.2 para mostrar, por congruencia de triángulos, que *AQ=PC*.

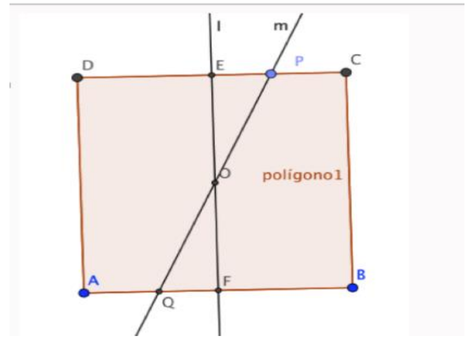
Figura 7.5 Solución algebraica de P_x



Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro.

Figura 7.6 Justificación *AQ=PC*

¿Cómo sabes que AH=CG? El triángulo EPO es congruente con el triángulo FQO, por ALA. Así EP=QF. Por otra parte, DE=FB por lo tanto AQ=PC



Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro.

Con el objetivo de buscar otras soluciones al problema, el ED planteó en el foro*: "¿Existe otra opción para dividir el terreno? ¿Cuántas?".* Guillermo fue el único que propuso otra solución al mencionar que se puede hacer la división del terreno similar a un tablero de ajedrez donde la suma de las áreas de los cuadrados blancos es igual a la suma de las áreas de los cuadrados negros (Figura 7.7).

Figura 7.7 Solución de Guillermo

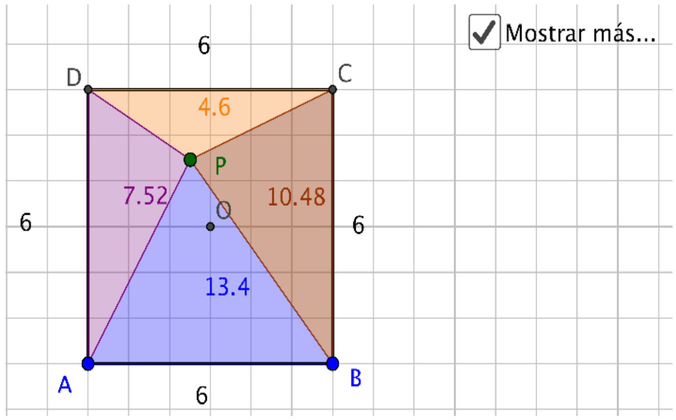
Si, por ejemplo -dado que no hay limitaciones en la división-, dividiendo el cuadrado como tablero de ajedrez y que uno tomo los cuadros blancos y otro los cuadros negros.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

4.2 Solución 2

En la búsqueda de otras soluciones, la siguiente Actividad proporcionó a los participantes un nuevo modelo dinámico del cuadrado, donde el punto P está en su interior (Figura 7.8); se les solicitó mover el punto P y observar que, efectivamente, P pertenece al interior del cuadrado $ABCD$: ¿Qué regiones se les puede asignar a los grajeros para que cada uno siembre la misma área?

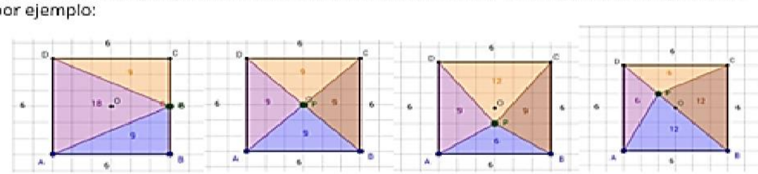
Figura 7.8 Modelo dinámico del cuadrado en la Solución 2



Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Los participantes exploraron, a través del movimiento de objetos y presentaron algunas soluciones (Tabla 7.4, P_y y P_z son participantes no pertenecientes al Grupo).

Tabla 7.4 Ideas e interacciones de los participantes en el foro

Ideas iniciales planteadas en el foro	**Discusiones en el foro**
Karol indica que es posible determinar una solución al problema cuando P pertenece a una de las diagonales del cuadrado o a la recta que une los puntos medios de AB y DC. Para ayudar a los granjeros podría decirles que pueden tomar cualesquiera dos regiones de por ejemplo:  por ejemplo del primer cuadro uno toma el color morado y el otro los que faltan, y así con los demás cuadros repartiéndolos de forma equitativa, sin embargo, hay que buscar la realidad del contexto, y una división del terreno como en cuadro 3 no sería algo muy usual, así que le diría a los granjeros que dividan el terreno como en la figura 2 para cumplir su labor. Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 5. Sol 2. Movimiento Esta publicación es visible para todos.	Los 10 participantes del Grupo comentaron que al mover los puntos A, B y P se pueden obtener las soluciones cuando: P coincide con alguno de los vértices, P es el punto medio de un lado o P es el centro del cuadrado. Ningún participante observó invariantes entre los objetos o sus atributos. No formularon una conjetura general.
Participante P_y Al mover P siempre se forman 4 triángulos Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 4. Sol 1. Justificación Esta publicación es visible para todos.	Carlos y Alejandra: “Mueve el punto P de tal forma que coincida con un vértice o que esté sobre un lado? ¿Cuántos triángulos se forman?”
Participante P_z: P debe coincidir con cualquier vértice Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 4. Sol 1. Justificación Esta publicación es visible para todos.	Carlos le indica que existen más soluciones: “Mueve el punto P, sin importar su posición, mientras esté dentro del cuadrado, la suma de las áreas de los triángulos opuestos es la mitad del área del cuadrado”.

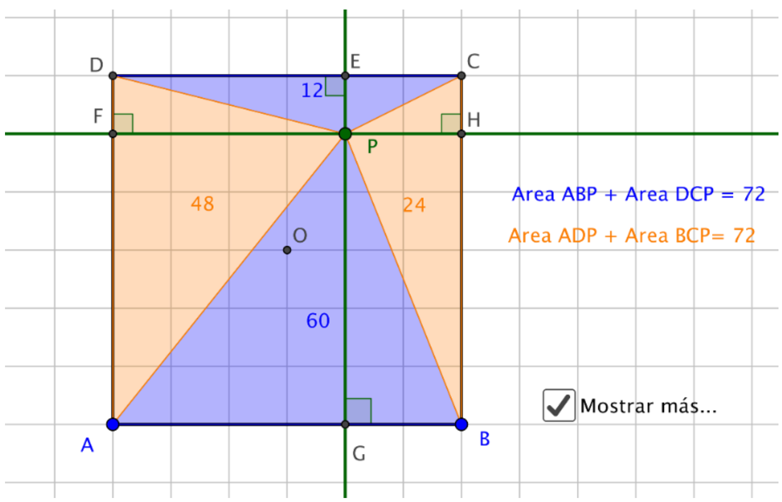
Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Alex formula la conjetura: "*Si P está sobre la mediatriz de cualquiera de los lados entonces se tiene que la suma de las áreas de los triángulos opuestos es la mitad del área del cuadrado*". Este comentario, no recibió ninguna respuesta ya que no fue jerarquizado por el ED.

Al igual que en la Solución 1, el ED no intervino, pues el diseño de la Actividad, en la siguiente sección (Conjetura) guía a los participantes a mover el punto P y observar la medida del área de cada uno de los triángulos que conforman el cuadrado: ¿Es posible identificar alguna relación entre los valores de las áreas? ¿Se cumple esta relación para cualquier posición del punto P? ¿Al variar la posición del punto P, qué ocurre con la suma de las áreas de los triángulos APB y DCP?

Todos los integrantes del Grupo formularon y compartieron la conjetura: *Si P es un punto que está dentro del cuadrado, la suma de las áreas de los triángulos opuestos es la mitad del área del cuadrado*. La sustentaron utilizando argumentos visuales y empíricos: el movimiento del punto P y la medición de áreas. Una vez establecida la conjetura, con el objetivo de buscar formas de justificarla utilizando relaciones matemáticas, se proporcionó a los participantes una modificación del modelo dinámico que se muestra en la Figura 7.8, se incluyeron las rectas FH y GE que pasan por P y perpendiculares a DC y AB, respectivamente (Figura 7.9). ¿Cómo validar matemáticamente esta conjetura? ¿Qué propiedades son importantes para presentar un argumento que sustente la conjetura? ¿Qué propiedades tienen los triángulos que se generan al trazar las rectas perpendiculares a los lados que pasan por el punto P?

Figura 7.9 Modelo dinámico del cuadrado en la Justificación de la Solución 2



Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Karol mencionó que, al trazar las rectas perpendiculares que pasan por P y mediante congruencia de triángulos, se puede justificar la relación entre sus áreas, sin embargo, no especificó cuáles triángulos tomar ni los criterios de congruencia a utilizar. Alan y Jhon retomaron tales ideas y utilizaron el criterio de congruencia de triángulos LLL y LAL para justificar la conjetura. Alex observó la existencia de triángulos rectángulos congruentes y presentó un modelo algebraico para sustentar la conjetura, finalmente, Diego planteó otra justificación basada en el movimiento del punto P y la cuantificación de las sumas de las áreas de los triángulos opuestos. La Tabla 7.5 muestra el detalle de las justificaciones.

La justificación de Diego generó una discusión entre varios de sus compañeros, algunos, en el proceso de comprensión de las ideas, utilizaron argumentos algebraicos para comprobarlo, sin embargo, no fueron del todo correctos. Por ejemplo, el participante P_x compartió un modelo algebraico para justificar la conjetura basado en un caso especial (cuadrado de lado 6), Karol y Alejandra le proporcionaron retroalimentación referida a que la justificación matemática se debe hacer en forma general y no en un caso específico. Posteriormente, P_x agradeció en el foro a Karol y Alejandra por la. La Tabla 7.6 muestra los detalles.

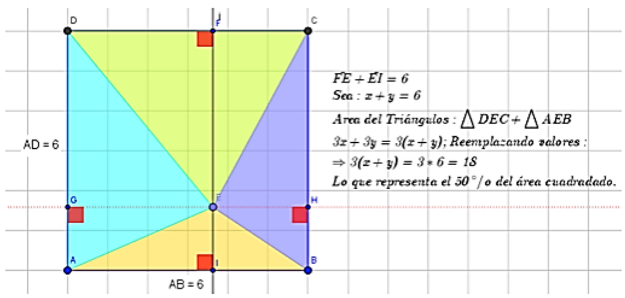
Tabla 7.5 Justificaciones de la conjetura y los recursos utilizados

Comentarios en los foros relacionados con la justificación de la Solución 2	**Recursos y justificación utilizados**
Alan y Jhon Al trazar rectas perpendiculares en P se forman rectángulos cuyas diagonales vendrían a ser los lados de los triángulos acutángulos generados en el cuadrado. En cada rectángulo se formo dos triángulos rectángulos. Para demostrar la conjetura utilizaríamos la altura y la base de cada de cada rectángulo, lo dividimos en 2 y seria el área de cada triángulo rectángulo, sumamos las áreas de acuerdo al color y demostraríamos que la suma de los triángulos opuestos por el vértice P son iguales al otro para de triángulos también opuestos por el vértice. Los triángulos AGP y AFP son congruentes ya que cumplen el criterio de congruencia LLL y AP es diagonal del rectángulo AGPF. Los triángulos FPD y EPD son rectángulos congruentes por LLL, igual para PEC y PHC y GBP y HPB, por lo tanto la suma de las áreas de los triángulos DCP y ABP es igual a la suma de las áreas de APD y BCP. Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 7. Sol 2. Justificación Esta publicación es visible para todos.	**Recursos:** Propiedades de rectas paralelas y perpendiculares, triángulos rectángulos congruentes. **Justificación 1.** ΔAGP ≅ ΔAFP (por LLL, AP es diagonal del rectángulo AGPF. ΔFPD ≅ ΔEPD (por LLL) ΔPEC ≅ ΔPHC (por LLL) ΔGBP ≅ ΔHPB (por LLL) Por lo tanto, $\Delta DCP + \Delta ABP = Area\ \Delta APD + \Delta BCP$.
Alex Propongo la siguiente justificación: JUSTIFICACIÓN DE LA CONJETURA Calculemos el área de los triángulos APD y BCP y sumémoslas: $\frac{DA \cdot FP}{2} + \frac{CB \cdot HP}{2}$ Ahora bien, dado que los segmentos DA y CB son lados del cuadrado, entonces tienen la misma longitud. Por lo que se pueden establecer las siguientes igualdades: $\frac{DA \cdot FP}{2} + \frac{CB \cdot HP}{2} = \frac{DA}{2}(FP + PH) = \frac{DA}{2}(FH)$ Análogamente calculemos la suma de las áreas de los triángulos DPC y ABP y usemos el dato de que los segmentos DC y AB tienen la misma longitud por ser lados del cuadrado: $\frac{DC \cdot EP}{2} + \frac{AB \cdot PG}{2} = \frac{DC}{2}(EP + PG) = \frac{DC}{2}(EG)$ Por otro lado, DC tiene la misma longitud que FH, ya que los segmentos AD y BC son paralelos, por ser lados del cuadrado. Por el mismo argumento DA es congruente con EG. De esto concluimos que : $\frac{DC}{2}(EG) = \frac{DA}{2}(FH)$ Que es lo que queríamos justificar Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 7. Sol 2. Justificación Esta publicación es visible para todos.	**Recursos:** Triángulos congruentes. **Justificación:** El área de ΔAPD y ΔBCP es igual a $\frac{AD \cdot FP}{2} + \frac{BC \cdot HP}{2} = \frac{AD \cdot BC}{2}\ (FP + HP) = \frac{AB \cdot AB}{2}$ dado que $AD = BC$ y $FP + HP = FH = AB$.
Diego Las suma alturas de los triángulos DCP y ABP se mantienen constantes cuando se mueve P, y su valor es igual a la longitud del lado del cuadrado. La suma de las áreas de los triángulos DCP y ABP es igual a la mitad del área del cuadrado ya que la suma de esas áreas es AB*GP/2 + DC*EP/2=AB(GP+EP)/2=AB(BC)/2=AB*AB/2. Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 7. Sol 2. Justificación Esta publicación es visible para todos.	**Justificación:** La recta perpendicular al lado DC que pasa por P es altura de los triángulos $DCP\ y\ ABP$. Así, la altura de los triángulos DCP y ABP varía pero su suma no y la suma de sus áreas es igual a la mitad del área del cuadrado.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Una vez que los participantes compartieron y discutieron las soluciones anteriores, el ED planteó la siguiente pregunta en el foro: "¿Se podrá determinar otra solución diferente a las anteriores para dividir *un cuadrado en dos áreas iguales? ¿Qué otras preguntas se pueden plantear?".*

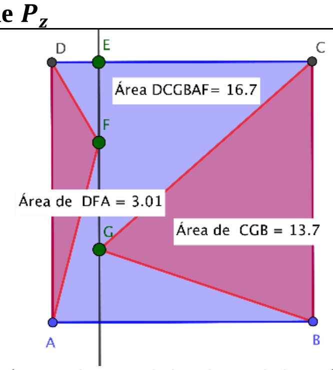
Tabla7.6 Interacciones en el foro y los resultados obtenidos

Idea inicial de P_x.	**Interacciones en el foro**	**Resultados**
 Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 7. Sol 2. Justificación Esta publicación es visible para todos.	Transcripción de las ideas de P_x: $FE + EI = 6$ Sea $x + y = 6$. $Área\ de\ \Delta DEC + \Delta AEB = 3x + 3y = 3(x + y) = 3 * 6 = 18.$ (50% del área del cuadrado). **Karol**: "*No se deben tomar valores específicos (lado del cuadrado igual a 6 unidades lineales)".* **Alejandra: "***La justificación se debe realizar en general".*	Se justifica la conjetura de Diego utilizando un modelo algebraico. Se establece que las demostraciones no se pueden basar en casos específicos.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

La Tabla 7.7 muestra otra solución del problema donde el participante P_z (no perteneciente al Grupo) construyó y compartió en el foro un nuevo modelo dinámico del problema con otra solución, basándose en la estrategia que utilizó Diego (Ver Tabla 7.5). Karol, Jhon y Alex discutieron y aprobaron la solución y su justificación, además, mencionaron que el uso de herramientas digitales tal como GeoGebra, fomenta este tipo de soluciones.

Tabla 7.7 Otra solución al problema propuesta por P_z

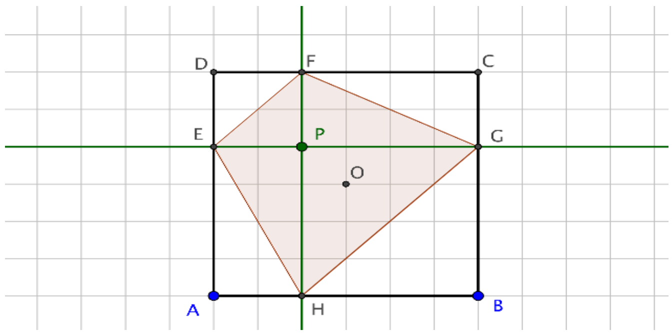
Solución de P_z	**Recursos, estrategias y justificación**
 Como mencionó Diego, la suma de las alturas de los triángulos AFD y BCG es constante y es igual al lado del cuadrado, sin importar la medida de su lado. Si sumamos las áreas de los triángulos DFA y CGB se tiene que es igual a la mitad del área del cuadrado, anteriormente Diego lo justificó: área DFA + área CGB= AD*AB/2=AB*AB/2 (AD=AB). Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 5. Sol 2. Movimiento Esta publicación es visible para todos.	**Recursos:** Propiedades de rectas paralelas y perpendiculares. **Estrategia:** Colocar un punto móvil E sobre DC, trazar la recta m perpendicular a DC que pasa por E. Colocar dos puntos móviles F y G sobre m. **Justificación 1:** La suma de las alturas de ΔAFD y ΔBCG es constante e igual a AB sin importar la posición de $E, F\ y\ G$, por lo tanto $Area\ \Delta AFD\ +\ Area\ \Delta BCG$ es la mitad del área del cuadrado. **Justificación 2:** Trazar rectas paralelas a los lados que pasan por los puntos móviles para obtener triángulos congruentes.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro.

4.3 Solución 3

Con el objetivo de que los participantes buscaran otras soluciones al problema, se les proporcionó un nuevo modelo dinámico que representa un cuadrado de lado AB, un punto móvil P en su interior y las rectas perpendiculares a los lados que pasan por P (Figura 7.10). Se cuestiona a los participantes sobre cómo asignar a los granjeros áreas iguales. A diferencia de la Solución 1 y 2, el modelo dinámico no incluyó la medida del área de cada región.

Figura 7.10 Modelo dinámico del cuadrado Solución 3

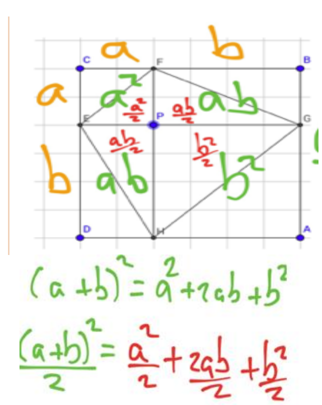


Fuente: Actividad del MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales

En esta parte, sólo participaron Alan, Karol, Alejandra y Alex del Grupo. Todos plantearon la conjetura: *El área asignada al primer granjero puede ser la del cuadrilátero EFGH y la del segundo el área restante*.

Karol complementó las ideas de otros participantes y proporcionó información adicional relacionada con recursos matemáticos, por ejemplo, comparte un link sobre la congruencia de triángulos de Wikipedia para clarificar el tema a un participante que no lo recordaba. Alan retomó esta idea y presentó una justificación no válida, Alex y Karol le proporcionaron retroalimentación al mencionarle los errores. Alan afirmó comprender, la Tabla 7.8 muestra los detalles de la conversación.

Tabla 7.8 Justificación de Alan y la retroalimentación proporcionada por otros

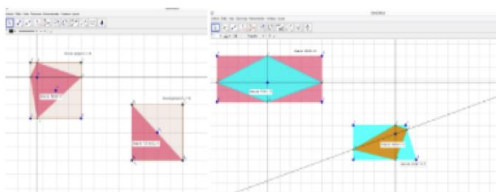
Idea de Alan	Interacciones en el foro	Resultados
	Alan: Utilizó el teorema de Pitágoras para determinar las diagonales de los cuadrados y rectángulos, utilizó áreas de triángulos para concluir que el área del cuadrilátero $EFGH$ es la mita del cuadrado original. Alex y Alejandra comentó que para ciertas posiciones del P la justificación es válida, sin embargo, no se abarcaba la totalidad de los casos. Karol y Alejandra: "¿Qué sucede si PECF no es cuadrado? Mueve el punto P hacia el lado AB".	Una justificación no se debe basar en casos especiales sino se debe hacer en forma general. El movimiento de objetos permite observar rápidamente casos donde la justificación no funciona.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Una vez concluida la Actividad, el ED planteó en el foro la siguiente pregunta: "*Hemos divido a un cuadrado en dos regiones de igual área ¿qué otras preguntas podemos plantearnos?"*. Un participante, no perteneciente al Grupo, mencionó que, tras seguir el mismo proceso para dividir el área del cuadrado en dos partes iguales, al mover el punto P, observó que la solución funcionaba también para el rectángulo, pero no para cualquier otro tipo de cuadrilátero y presentó en el foro la pregunta: "¿existe alguna forma de dividir cualquier cuadrilátero en dos áreas iguales?".

El comentario fue jerarquizado por el ED, quien al percatarse que no recibía respuesta, planteó la pregunta: "*¿Será posible determinar un cuadrilátero inscrito dentro de cualquier otro tal que sea la mitad de su área?"*. Diego resaltó la importancia de la búsqueda de información en el proceso de resolución de problemas y propuso una solución que se muestra en la Tabla 7.9

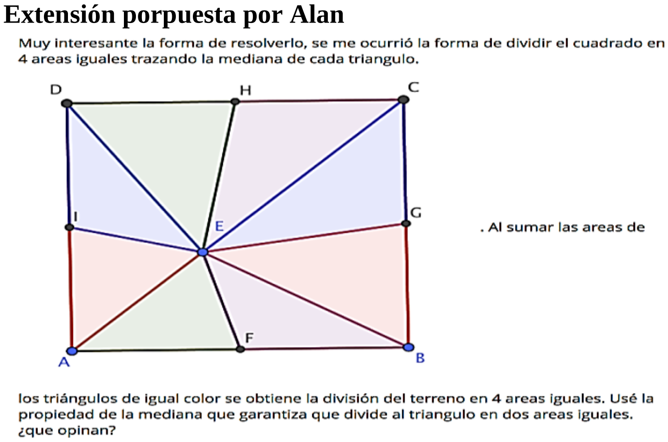
Tabla 7.9 Una extensión del problema

Extensión del problema	**Interacciones en los foros**
Extensión  ¿Será posible determinar un cuadrilátero inscrito dentro de cualquier otro tal que sea la mitad de su área?	**Diego**: Compartió información de Wikipedia relacionada con el teorema de Varignon: En cualquier cuadrilátero, los puntos medios de los lados forman un paralelogramo cuya área es la mitad del cuadrilátero original.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Alan formuló un nuevo problema: ¿Cómo dividir el cuadrado en 4 regiones con la misma área? Además, construyó y compartió en el foro un modelo dinámico del cuadrado resaltando una solución. Los detalles se muestran en la Tabla 7.10.

Tabla 7.10: Extensión del problema propuesta por Alan.

Idea de Alan	**Justificación**
Extensión porpuesta por Alan  	En la búsqueda de respuestas, Alan utilizó la propiedad: Al trazar una mediana de un triángulo, éste queda dividido en dos áreas iguales. Así, construyó y presentó un modelo dinámico donde trazó la mediana (EI, EH, EG y EF) de cada triángulo. Al sumar las áreas de los triángulos EDI y EGC, se obtiene que su valor es un cuarto del área del cuadrado.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro.

La extensión del problema anterior no fue jerarquizada por el ED ya que Alan lo presentó en la semana posterior a la que se discutió el problema de los granjeros. El comentario no recibió respuestas por parte de otros.

4.4 Discusión de los resultados

El diseño de las Actividades guio el trabajo de los participantes en la construcción y desarrollo del conocimiento matemático, ya que buscaron diversas formas de explorar los modelos dinámicos como un punto de partida para identificar conceptos, plantear conjeturas basadas en el movimiento de los objetos matemáticos presentes en la configuración dinámica y sus relaciones o invariantes. Lo anterior, permitió que todos los participantes del estudio transitaran desde soluciones visuales y empíricas (asociadas con el uso de las herramientas como el arrastre o movimiento ordenado de objetos dentro de la configuración y la cuantificación de atributos como medida de segmentos, ángulos, áreas, etc.) hasta la presentación de argumentos geométricos y algebraicos en la validación de las conjeturas formuladas.

Al inicio de las Actividades, los participantes formularon soluciones basadas en casos específicos o particulares sin observar invariantes en algunos objetos que conformaban la configuración dinámica del problema. El diseño de las Actividades los guio a ir más allá de las técnicas que se utilizan en papel y lápiz, por ejemplo, el movimiento de objetos y la medición de atributos (áreas) en forma instantánea les permitió relacionar objetos y formular conjeturas basados en la observación de invariantes (Ver Tabla 2). Otro aspecto importante del diseño de las Actividades fue incluir y propiciar el uso del foro como un medio para comunicar, discutir, contrastar y dar u obtener retroalimentación. Esto favoreció, en los participantes, la construcción o refinamiento de conceptos e ideas matemáticas y sus estrategias en la resolución de problemas. Durante la implementación del MOOC, el monitoreo y jerarquización de los comentarios que realizó el ED favoreció la discusión y refinamiento de ideas, por ejemplo, los comentarios que no fueron clasificados no recibieron respuesta, tal es el caso de la extensión del problema planteada por P_2. También, cuando el ED planteó preguntas, se fomentó en los participantes la discusión de ideas matemáticas, la formulación de nuevas soluciones y extensiones del problema (Ver Tabla 2 y 5). Otro factor que incidió en las discusiones fue el comportamiento que asumieron algunos integrantes, por ejemplo, Karol, Diego, Alex, Alejandra y Carlos proporcionaron retroalimentación a las ideas o preguntas de otros, esto promovió la independencia de los participantes y la construcción y su desarrollo del conocimiento matemático.

5 Agradecimientos

A la Universidad de Costa Rica (UCR) por el apoyo brindado.

6 Conclusiones

Los resultados muestran que las diversas tecnologías digitales utilizadas en este estudio y la integración de los componentes Recursos, Actividades, Soporte y Evaluación basados en la resolución de problemas favorecieron crear un ambiente de trabajo en colaboración. La plataforma digital permitió incluir representaciones dinámicas de los problemas elaboradas en GeoGebra, en las cuales los participantes tuvieron la oportunidad de explorar, identificar conceptos, buscar conjeturas y diversas maneras o argumentos para sustentarlas. En este proceso, utilizaron estrategias asociadas con el uso de las herramientas como movimiento de objetos dentro de la configuración dinámica y la cuantificación de sus atributos (longitudes y áreas).

Durante la etapa del diseño de un MOOC, se debe tener como objetivo que las tareas matemáticas posibiliten y fomenten crear la conciencia en los participantes para que ellos mismos monitoreen sus avances en la comprensión y uso de las ideas matemáticas en la resolución de problemas. Esto incluye reflexionar sobre las decisiones que se toman durante el proceso de resolución de problemas.

Sin la existencia de un profesor encargado de responder o dar seguimiento puntual a cada integrante del curso, resultó importante el diseño de las Actividades, ya que fueron guiando a los participantes a entender el problema, explorar la configuración dinámica basado en el movimiento de sus objetos, observar invariantes entre los objetos, formular conjeturas basadas en argumentos visuales y empíricos, justificar las conjeturas utilizando relaciones y argumentos matemáticos, analizar la generalidad de los métodos de solución y formular nuevos problemas.

Durante el desarrollo de las Actividades, las conversaciones fueron el elemento clave para que se cumpliera lo anterior. Resultaron importantes los roles que asumieron algunos participantes en las conversaciones. Un grupo de participantes tomó el rol de proporcionar retroalimentación a otros lo que favoreció la aclaración de dudas y el refinamiento de ideas relacionadas con conceptos matemáticos, la exploración del modelo dinámico, la formulación de conjeturas y su justificación. Así, los participantes avanzaron en el desarrollo y comprensión de las Actividades en forma colaborativa y sin depender de un profesor o tutor. Otro grupo de participantes daba seguimiento a los comentarios que otros plantearon con relación a las preguntas, ideas matemáticas y extensiones del problema propuestas por ellos. Esto permitió construir y desarrollar diversas formas de resolver un problema.

Las acciones que tomó el ED en sus intervenciones en el foro expandieron las discusiones, dichas acciones fueron: (1) las clasificación y jerarquización de los comentarios favoreció la creación de grupos de trabajo donde se discutían las ideas matemáticas, (2) las preguntas planteadas fueron respondidas de varias maneras fomentando la comprensión de conceptos e ideas matemáticas y, (3) las preguntas realizadas al final de cada parte de la Actividad permitieron encontrar otras soluciones y extensiones al problema.

Un factor por considerar en el trabajo a futuro es la posibilidad de que los participantes construyan y presenten sus propios modelos dinámicos de los problemas, ya que, en este estudio, pese a que no se solicitó explícitamente, el diseño de las actividades y la metodología aplicada por el ED durante la implementación del MOOC incentivó a varios participantes a construir y compartir sus construcciones dinámicas de los problemas, lo cual fomentó la discusión de ideas, las formas de resolver y extender el problema.

7 Referencias

Aguilar-Magallón, D. & Poveda, W. (2017). *Problem Posing Opportunities Whit Digital Technology in Problem Solving Environments*. En *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Aramo-Immonen, H., Kärkkäinen, H., Jussila, J., Joel-Edgar, S., & Huhtamäki, J. (2016). Visualizing informal learning behavior from conference participants' Twitter data with the Ostinato Model. *Computers in Human Behavior*, 55, 584-595.

Borba, M., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S., & Sánchez, M. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education: June 2016. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *8*(5), 589-610.

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2013). Learning design for science education in 21st century. *Journal of the Institute for educational research*, 45 (2), 404-421.

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2016). Framework for Designing Mobile Learning Environments. En D. Churchill, B. Fox, & M. King (Eds.), *Mobile Learning Design, lecture Notes in Educational Technology* (pp. 3-25). Singapore: Springer.

Ernest, P. (2016). The unit of analysis in mathematics education: bridging the political-technical divide? *Educational studies in mathematics*, *92*(1), 37-58.

Gros, B. (2016). The Dialogue Between Emerging Pedagogies and Emerging Technologies. En B. Gros, Kinshuk, & M. Maina (Eds.), *The Future of Ubiquitous Learning Designs for Emerging Pedagogies* (pp. 3-24). Berlin Heidelberg: Springer.

Leung, A. & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 191-225). New York: Springer.

Leung, F. (2013). Part III, Introduction to section C: Technology in the mathematics curriculum. En M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 517-524). New York: Springer.

National Council of Teachers of Mathematics (2009). F*ocus in High School Mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Santos-Trigo, M. (2007). La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(6), pp. 35-54.

Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho-Machín, & L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 159-192). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Santos-Trigo, M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. Segunda edición. México: Trillas, Asociación Nacional de profesores de matemáticas.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2009). Towards the construction of a framework to deal with routine problems to foster mathematical inquiry. *PRIMUS*, 19(3), 260-279.

Poveda, W. & Aguilar-Magallón, D. (2017). Mathematical Problem Solving and Digital Technologies in a Massive Online Course. En *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Schoenfeld A. (1985). *Mathematical problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-371.) New York: Macmillan.

Sinclair, J. & Kalvala, S. (2015). Engagement measures in massive open online courses. En L. Uden, D. Liberona, & T. Welzer (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud*. (Vol. 533, pp. 3-15). Switzerland: Springer International Publishing.