Construcción, exploración e integración de modelos dinámicos para el desarrollo profesional de profesores de matemáticas de bachillerato

OLVERA-MARTÍNEZ, María del Carmen & ALVARADO-MONROY, Angelina

M. Olvera & A. Alvarado

Universidad Juárez del Estado de Durango , Facultad de Ciencias Exactas

carmen.olvera@ujed.mx, aalvarado@ujed.mx

C. Cristóbal, M. Olvera, V. Vargas (Dirs.) Educación para la interdisciplinariedad. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

The incorporation of dynamic models in the teaching of mathematics demands that the teacher knows the handling of concepts, objects, processes and mathematical ideas that must be taught and also develops skills in the use of digital technologies for its construction. Thus, the professional development environments that promote the use of digital technologies in the analysis and reflection of mathematical contents have become increasingly relevant.

In this chapter we present a study which aim was to analyze and document the resources, strategies and ways of reasoning that high school teachers construct and develop in a technology enhanced problem-solving environment that involves the study of functions. The problem-solving tasks were designed and implemented to the participants had an opportunity to revise and extend knowledge about the definition of function, covariation and rate of change, family of functions and modeling, combining and transforming of functions and multiple representation of functions and its structure is based on four episodes of problem solving and the use of proposed digital technologies by Santos-Trigo and Camacho-Machín (2011).

During the implementation, the teachers explored dynamic constructions of the problems that allowed them observe relationships, patterns, variants and invariants among the mathematical objects involved through multiple representations; identify properties of these objects; and develop different forms of reasoning, encouraging a deep understanding of the concept of function. Likewise, the coordinated use of digital technologies allowed the participants to develop forms of reasoning that reflected a transition from the empirical to the formal reasoning. Similarly, they formulated conjectures based on visual arguments that later were supported through geometric and algebraic arguments. They also recognized and valued that the use of digital tools offers new routes to represent, explore and solve problems. Thus, the results give evidence to consider this proposal like a feasible professional development´s environments for develop mathematical abilities, deep knowledge and ways of reasoning in high school's teachers using digital technologies in problem-solving tasks.

Resolución de Problemas, Tecnología Digital, Formación de Profesores, Modelos Dinámicos

1. Introducción

En la actualidad, el uso de la tecnología digital abarca muchas de las actividades de la vida diaria y de manera paulatina ha impactado en el desarrollo del conocimiento matemático (Dick & Hollebrands, 2011). Es cada vez más evidente que el uso de la tecnología digital está cambiando la manera en que las matemáticas son enseñadas y aprendidas, ya que la disponibilidad de estas herramientas poderosas y versátiles ha posibilitado que muchas tareas matemáticas complejas sean realizadas fácilmente (Leung, 2013). Al respecto, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés, 2008) expone que la tecnología digital es una herramienta esencial para el aprendizaje de las matemáticas en el siglo XXI y promueve que tanto profesores como estudiantes deben tener acceso regular a las tecnologías que apoyan las actividades que favorecen el desarrollo del razonamiento, la comunicación y la resolución de problemas. En este sentido, incorporar el uso sistemático de tecnologías digitales en la resolución de problemas ofrece la posibilidad de examinar tareas matemáticas desde distintas perspectivas que involucran el uso de diversos conceptos, recursos y representaciones favoreciendo el desarrollo del pensamiento matemático.

Mientras que las matemáticas han sido una herramienta necesaria para avanzar en la investigación y desarrollo de nuevas tecnologías, en el aula de matemáticas hay un retraso en el aprovechamiento de las ventajas de usar la tecnología al servicio del avance del aprendizaje de las matemáticas (Dick & Hollebrands, 2011). Uno de los posibles factores es que la incorporación y el uso coordinado de diversas tecnologías digitales en el salón de clases representa un reto para los profesores, ya que requiere que éstos amplíen su conocimiento sobre el manejo de herramientas digitales y analicen los propósitos, potencialidades y limitaciones de cada una de ellas, así como los cambios que genera su uso dentro del aula. Además, la enseñanza de las matemáticas, dentro de este ambiente, demanda de los profesores un dominio profundo de los contenidos disciplinarios y también, un conocimiento que les permita tomar decisiones para promover el aprendizaje de sus estudiantes.

En este sentido, surge la necesidad de diseñar ambientes de desarrollo profesional en los cuales el profesor se enfrente a tareas que involucren la resolución de problemas con el uso sistemático de tecnologías digitales como plataformas u oportunidades para analizar conceptos y objetos matemáticos desde diferentes perspectivas. Algunas preguntas que pueden guiar investigaciones en esta dirección son: ¿Qué tipo de actividades deben proponerse a los profesores para desarrollar conocimiento matemático y habilidades en la resolución de problemas con el uso de tecnologías digitales?, ¿qué tipo de tecnologías digitales favorecen el análisis, la reflexión y la comprensión de conceptos y objetos matemáticos en los profesores?, ¿en qué medida el uso de tecnologías digitales puede promover el desarrollo de diversas formas de razonamiento y estrategias en los profesores?

Diversas propuestas curriculares en el ámbito internacional (Common Core State Standards Initiative, 2010; NCTM, 2000; 2009) consideran al concepto de función como parte central del currículo del nivel medio superior (Cooney, Beckmann, & Lloyd, 2010). La enseñanza de dicho concepto requiere que el profesor comprenda, analice y reflexione sobre las principales ideas que giran en torno a su estudio y, en general, de lo que espera que sus alumnos aprendan. Cooney et al. (2010) sugieren que el profesor debe conocer, a profundidad, cinco ideas fundamentales sobre funciones: el concepto de función, covariación y tasa de cambio, familia de funciones, combinación y transformación de funciones y sus múltiples representaciones. Cuando se involucra el uso de tecnologías digitales en la resolución de problemas sobre funciones, se generan diversas oportunidades para analizar, presentar, identificar y explorar relaciones, conexiones, variantes e invariantes. Por lo anterior, resulta importante incluir dentro de las actividades de los ambientes de desarrollo profesional docente de nivel medio superior el estudio del concepto de función enfatizando, con base en las sugerencias de las propuestas curriculares actuales, en la resolución de problemas y la incorporación de tecnologías digitales.

En este sentido, resulta relevante especificar cómo es entendida la resolución de problemas en este estudio. De acuerdo con Lesh y Zawojewski (2007), la resolución de problemas es un proceso que "involucra varios ciclos iterativos de expresar, probar y revisar interpretaciones matemáticas y de ordenar, integrar, modificar, revisar o refinar grupos de conceptos matemáticos dentro y más allá de las matemáticas" (p. 782). De esta definición, en este estudio, se conserva la idea de concebir a la resolución de problemas como un proceso que involucra ciclos iterativos, en donde el estudiante o la persona que resuelve problemas, con la incorporación de tecnologías digitales, transita por los episodios de comprensión del problema, exploración del problema, diferentes acercamientos hacia la solución del problema, integración de los acercamientos y extensiones del problema inicial; y al generar dicha extensión se enfrenta a un nuevo ciclo. Sin embargo, a diferencia de las ideas de estos autores, el problema que se presenta en este estudio se encuentra en un contexto puramente matemático, en términos de Barrera-Mora & Santos-Trigo (2002), es decir, la situación involucra solamente aspectos matemáticos, y posee una estructura que permita a los estudiantes formular preguntas, usar diversas representaciones, plantear conjeturas, utilizar argumentos y comunicar resultados.

En este sentido, la enseñanza de la resolución de problemas debe ser continua, por lo tanto, la discusión de problemas, la búsqueda de diversas soluciones y métodos para resolver problemas deben ser consideradas todo el tiempo (Krulik & Rudnick, 1993). Los elementos clave en la resolución de problemas son la caracterización de los problemas y lo que implican los procesos de resolución de problemas, es decir, actividades como: dar sentido a conceptos o enunciados del problema; buscar diferentes maneras de representar, explorar y resolver una tarea; extender el dominio de la tarea inicial; y desarrollar un lenguaje apropiado para comunicar y discutir resultados (Santos-Trigo, 2014). De esta manera, durante el proceso de aprender matemáticas se pone atención especial al tipo de problemas que permiten no sólo buscar respuestas o explicaciones, sino también pensar en torno al significado y formas de razonamiento asociadas con la solución de los problemas.

En este capítulo se presenta un estudio, en el cual se diseñó e implementó un ambiente de desarrollo profesional con profesores de matemáticas del nivel medio superior, que tuvo como objetivo analizar y documentar las formas en que éstos representaron, exploraron y dieron sentido a los objetos y conceptos matemáticos involucrados en la resolución de problemas que favorecen el análisis de ideas fundamentales que giran en torno al concepto de función. Para esto, se analizaron y describieron los recursos, estrategias y las formas de razonamiento que los profesores exhibieron al resolver problemas que involucraban el estudio de funciones y fomentaban el uso sistemático y coordinado de tecnologías digitales. Es decir, se promovió la deconstrucción del concepto de función, ya que los profesores se involucraron en actividades que les permitieron deshacer analíticamente los elementos que constituyen a dicho concepto y, de esta manera, refinar sus conocimientos y concepciones previas del concepto de función.

El capítulo está organizado en cuatro secciones, en las cuales se precisan las características, los resultados y las conclusiones del estudio. Primero, se presenta el marco conceptual que da sustento al estudio, el cual está conformado por las ideas sobre resolución de problemas y el marco propuesto por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011), del que se retoman los episodios de resolución de problemas cuando se incorpora el uso de tecnologías digitales; las ideas de Pea (1985) y de Moreno-Armella (2002) sobre el uso de las tecnologías digitales en la educación matemática; y, las cinco ideas fundamentales sobre funciones propuestas por Cooney et al. (2010).

Enseguida, se especifican las características de la metodología que se siguió en el estudio, se describen los participantes, la manera en que se llevó a cabo el diseño y la implementación de las actividades. Después se describen los resultados reportando los recursos, estrategias y representaciones que desarrollaron los profesores durante el trabajo en las actividades. Además, se presenta una discusión sobre la manera en que el uso de tecnologías digitales influyó para el desarrollo de las diferentes formas de razonamiento que exhibieron los profesores. Finalmente, se exponen las principales conclusiones que se obtuvieron del estudio y algunas reflexiones finales que se desprenden de los resultados obtenidos.

2. Marco Conceptual

La resolución de problemas matemáticos es un campo de investigación y práctica en educación matemática que fomenta un enfoque inquisitivo para desarrollar y comprender conocimiento matemático (Santos-Trigo, 2007). Como un campo de investigación, la agenda de resolución de problemas incluye el análisis de componentes cognitivos, sociales y afectivos que influyen y dan forma al desarrollo de la habilidad de resolución de problemas en los estudiantes. Como un acercamiento instruccional, la agenda incluye el diseño e implementación de propuestas curriculares y materiales correspondientes que mejoran las actividades de resolución de problemas. En ambos sentidos, se promueve la caracterización de los problemas y lo que implican los procesos de resolución de problemas (Santos-Trigo, 2014).

Los contenidos matemáticos que deben ser aprendidos, los problemas de los libros de texto, o bien, problemas rutinarios y no rutinarios pueden servir de plataformas para obtener y desarrollar las competencias de resolución de problemas en los estudiantes y así, participen en actividades de resolución de problemas tales como: dar sentido a conceptos u objetos matemáticos, explorar diversas estrategias de solución, formular conjeturas y, eventualmente, justificarlas. La manera de organizar e implementar actividades de resolución de problemas pueden tomar diferentes rutas dependiendo de los objetivos del instructor, el nivel de educación y los recursos o antecedentes de los estudiantes. Las estrategias de instrucción involucran fomentar y valorar la participación de los estudiantes en grupos pequeños, discusiones en grupo, desarrollo de comportamientos de resolución de problemas y la constante reflexión matemática de los estudiantes (Santos-Trigo, 2014).

En este estudio, se consideran problemas que implican el análisis y reflexión de las ideas fundamentales que giran en torno al concepto de función, ya que es considerado central en el estudio de las matemáticas por su importancia en la modelización de una amplia gama de fenómenos y se ha convertido en "una idea unificadora importante en matemáticas" (NCTM, 1989, p. 154) que se encuentra incorporada en todo el currículo de las matemáticas escolares. Dada esta relevancia de las funciones principalmente en el nivel medio superior, es necesario que el profesor deconstruya el concepto de función de manera que le permita conocer las características que las distinguen de otras relaciones y ser capaz de identificarlas en sus diferentes representaciones (Steele & Hillen, 2012).

Las ideas fundamentales sobre funciones que se abordaron en las actividades de este estudio son: el concepto de función, covariación y tasa de cambio, familias de funciones, combinación y transformación de funciones y múltiples representaciones de funciones (Cooney et al., 2010). El análisis de estas ideas pretende dar respuesta a las preguntas: ¿qué es una función?, ¿cuáles son las principales características que definen a una función?, ¿qué tipos de funciones existen?, ¿cómo se caracterizan los diferentes tipos de funciones?, ¿cómo identificar a qué tipo de familia pertenece una función?, ¿qué condiciones se deben cumplir para que dos funciones puedan combinarse?, ¿de cuántas maneras puede representarse una función?, ¿cómo están relacionadas las diferentes representaciones de una función?; y así, fomentar la deconstrucción del concepto de función.

Cuando se incorpora la tecnología digital en la resolución de problemas, ésta puede tomar dos roles: *amplificador* o *reorganizador cognitivo* (Pea, 1985). Como *amplificador*, es una extensión cognitiva que permite aumentar las capacidades mentales a través del uso de una herramienta, facilitando o extendiendo aquello que se puede hacer sin la herramienta. Moreno-Armella (2002) sugiere pensar en las tecnologías amplificadoras como una lupa; "la lupa deja ver, amplificando, aquello que podía ser visto a simple vista [sin cambiar] la estructura del objeto de nuestra visión" (p. 85). Por ejemplo, en GeoGebra se puede obtener de manera rápida la gráfica de una función y, además, tener una mejor visión de ésta al modificar las escalas o el *zoom*. Como *reorganizador cognitivo*, la herramienta digital reestructura la cognición en su funcionamiento y en la manera en que se organiza.

Es decir, una herramienta actúa como reorganizador cuando permite acceder a otro nivel y construir un nuevo conocimiento cualitativamente distinto de aquel que se podría haber construido sin el uso de la herramienta. En este sentido, Moreno-Armella (2002) sugiere pensar en un microscopio; "con el microscopio podemos ver lo que no era posible sin dicha herramienta" (p. 85). Por ejemplo, la exploración de modelos dinámicos de un problema en GeoGebra favorece la identificación de relaciones entre objetos matemáticos y la formulación de conjeturas que difícilmente podrían surgir en un ambiente de papel y lápiz.

El diseño e implementación de las actividades de este estudio tuvieron como base los episodios que proponen Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) para la resolución de problemas con la incorporación de herramientas digitales. Estos episodios ayudan a estructurar y analizar las maneras de usar las herramientas digitales en el desarrollo del pensamiento matemático cuando se resuelven problemas: *comprensión del problema, exploración del problema, diferentes acercamientos hacia la solución del problema, e integración de los acercamientos*.

El episodio de *comprensión del problema* es considerado crucial para pensar en las posibles maneras de resolverlo; aquí se identifican los elementos relevantes en el enunciado del problema y se piensa en cómo relacionarlo para explorarlo matemáticamente. En la *exploración del problema*, se utiliza la información que se identificó en la fase de comprensión y se elige la manera de representar y explorar el problema, con la finalidad de observar e identificar patrones y relaciones entre objetos matemáticos, por ejemplo, el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como GeoGebra es un medio para construir modelos dinámicos del problema que posibilitan la visualización de invariantes y patrones entre los objetos matemáticos. En el episodio *diferentes aproximaciones hacia la solución del problema*, se promueve la búsqueda de múltiples estrategias de solución con la finalidad de que se tenga la oportunidad de usar diferentes conceptos y recursos para representar, explorar y resolver problemas; por ejemplo, se pueden considerar acercamientos dinámicos, algebraicos y geométricos.

En el episodio de *integración*, se analizan los diferentes acercamientos, los argumentos que apoyan las estrategias usadas y las justificaciones de las conjeturas generadas durante las exploraciones, así como la generación de extensiones del problema inicial, o bien, de nuevos problemas. Este marco permitió estructurar y guiar el diseño de las actividades de este estudio de manera que promovieran el desarrollo del pensamiento matemático, haciendo énfasis en la construcción de modelos dinámicos que permitieran un acercamiento inicial de tipo visual o empírico hacia la solución del problema.

3. Componentes Metodológicos y Procedimientos

En una investigación cualitativa se estudian problemáticas y procesos "que no se examinan o miden en forma rigurosa en términos de cantidad, monto, intensidad o frecuencia" (Denzin & Lincoln, 1994, p. 4). Asimismo, buscan comprender cómo se crean y se da significado a situaciones relacionadas con el quehacer cotidiano de individuos o grupos, mediante un contacto prolongado con los escenarios en los que se desarrollan (Denzin & Lincoln, 1994). Así, la naturaleza de este estudio es cualitativa ya que interesa analizar, describir y discutir los recursos, estrategias y formas de razonamiento que los profesores de nivel medio superior exhiben cuando resuelven problemas sobre funciones con apoyo de tecnologías digitales; en particular, en qué medida las actividades propuestas en este ambiente de desarrollo profesional promueven una mayor comprensión del concepto de función en los profesores.

3.1 Participantes

En el estudio participaron ocho profesores de matemáticas del nivel medio superior en México durante un curso de Educación Matemática y Nuevas Tecnologías en el primer semestre de un programa de maestría en Matemática Educativa. La formación profesional de los participantes estaba relacionada con las áreas de Matemáticas Puras, Matemáticas Aplicadas, Ingeniería Industrial, Ingeniería Metalúrgica y Licenciatura en Actuaría. La experiencia docente de los participantes es principalmente en el nivel bachillerato, sólo dos profesores habían impartido clases de matemáticas en secundaria. La mayoría de los participantes estaban en sus primeros años de experiencia como profesores de matemáticas, únicamente dos contaban con más años de experiencia frente a grupo, 40 y 15 años respectivamente.

Respecto a la experiencia con el uso de tecnologías digitales, al momento de iniciar el curso, los profesores mostraron práctica en la búsqueda de información por Internet y en el manejo de un procesador de texto para elaborar los reportes de las actividades. A pesar de que seis profesores ya habían manejado alguna herramienta digital relacionada con matemáticas como Matlab, Sketchpad, Derive, Maple 12, R, Winplot, lenguajes de programación C y C++; sólo tres de ellos tenían experiencia en el manejo de GeoGebra como graficador y de la hoja de cálculo.

3.2 Diseño de las actividades

Las actividades diseñadas para este estudio se basan en problemas que promueven el desarrollo de las cinco ideas fundamentales (IF) sobre funciones: IF 1. El concepto de función, IF 2. Covariación y tasa de cambio, IF 3. Familias de funciones, IF 4. Combinación y transformación de funciones y IF 5. Múltiples representaciones de funciones (Cooney et al., 2010). En este sentido, en cada actividad se abordaba una o más ideas fundamentales (ver Tabla 3.1). Debido a que el concepto de función es muy amplio e involucra una gran de variedad de ideas matemáticas para su mayor comprensión, se decidió diseñar actividades donde se involucrara el análisis de las características y propiedades de la función; la construcción de una definición del concepto; el reconocimiento de las características de la función lineal, cuadrática, radical y exponencial; el análisis del comportamiento de la gráfica de la suma y producto de funciones lineales; la comparación entre la función lineal y exponencial; ya que se consideraron ideas fundamentales que se desarrollan en el nivel de bachillerato.

En las actividades se plantearon problemas no rutinarios que proporcionaran oportunidades para que los profesores exploraran distintas maneras de solución, usaran múltiples representaciones, formularan conjeturas, presentaran argumentos y comunicaran resultados. Se consideraron problemas que resultaran desafiantes para los participantes, es decir, que no contaran con algún método de solución inmediato; además, de que existiera más de una manera para resolverlos. La situación que se presenta está dentro de un contexto puramente matemático (Barrera-Mora & Santos-Trigo, 2002); en este sentido, un objetivo puede ser la formulación de un problema o la búsqueda de una solución a una pregunta planteada.

En este tipo de problemas el principal interés, es que los estudiantes, haciendo uso de una serie de recursos matemáticos, puedan entender la situación para poder plantear un método o camino de solución. Un paso fundamental es identificar la información relevante y acceder a un conjunto de conceptos que permitan explorar casos particulares y eventualmente presentar un plan de solución. Las ideas, relaciones, discusiones y reflexiones que surgen durante el proceso de resolución del problema se circunscriben en el ámbito puramente matemático.

Es por esto que, las actividades promueven el planteamiento de preguntas, el uso de recursos y estrategias que permitan examinar cualidades matemáticas asociadas al proceso de solución. En las actividades el uso de herramientas digitales (Internet, GeoGebra y hoja electrónica de cálculo), es un factor relevante pues posibilitan la exploración de diversas estrategias de solución a los problemas y la formulación de conjeturas basadas en las exploraciones.

En la Tabla 6.1 se expone de manera resumida el propósito e intención general de cada actividad, y las ideas fundamentales sobre funciones que se involucran en cada una de ellas.

Tabla 6.1 Actividades: propósito e ideas fundamentales

Actividades	**IF**
Actividad 1. Sobre el concepto de función. El objetivo era conocer la noción que los profesores tenían sobre el concepto de función, cómo la definían y ejemplificaban y a qué tipo de representaciones recurrían para ello. También, se deseaba identificar las características que los profesores consideran esenciales de una función, apoyándose de una búsqueda de información en Internet sobre el tema y un posterior análisis y discusión sobre esas ideas centrales.	IF 1 IF 5
Actividad 2. El problema del rectángulo. Se abordaba un problema que involucraba el estudio de una función cuadrática. Se deseaba que los profesores desarrollaran dos acercamientos: dinámico y algebraico; con la finalidad de que contrasten los resultados obtenidos, identifiquen los conceptos matemáticos involucrados, y que discutan ventajas y limitaciones de cada uno.	IF 1 IF 2 IF 3 IF 5
Actividad 3. El problema de los postes telefónicos. El propósito era abordar el estudio de una función radical. Específicamente se deseaba conocer en qué momento esa función tenía un valor mínimo. Se pretendía promover diferentes acercamientos a la solución como: numérico (hoja de cálculo), dinámico (GeoGebra), geométrico, algebraico (WolframAlpha). La idea es discutir sobre la manera en que se integran diversos conceptos matemáticos en cada uno de los acercamientos y la forma en que el uso de herramientas digitales promueve el análisis de ideas y significados matemáticos involucrados con la función radical.	IF 1 IF 2 IF 5
Actividad 4. Combinación y transformación de funciones. Se pretendía que los profesores exploraran y analizaran la suma y multiplicación de dos funciones lineales. Las preguntas que se discutieron estuvieron dirigidas a encontrar relaciones entre las características de las funciones iniciales y las características de la función resultante. Finalmente, se abordó el problema de encontrar una función lineal g, a partir de una función lineal f conocida, de tal manera que la gráfica de la función producto ($\mathrm{h} = \mathrm{f} \cdot \mathrm{g}$) sea tangente a las gráficas respectivas de las funciones lineales iniciales.	IF 1 IF 4 IF 5
Actividad 5. Inversiones bancarias. La función exponencial se abordó partiendo del análisis de una situación que involucra la inversión a plazo de cierta cantidad de dinero en un banco, con ciertas condiciones en la tasa de rendimiento. Inicialmente se promueve el uso de Excel para observar la variación h comportamiento de los datos y después se incorpora GeoGebra para explorar el efecto que tiene en la gráfica la variación de cada uno de los parámetros a, b y c.	IF 1 IF 2 IF 3 IF 5

Fuente: Elaboración Propia

Parte central en el diseño de las actividades es que cada una se analizó previamente con la finalidad de identificar las diferentes maneras de resolver los problemas, así como las formas de razonamiento que surgen con el uso de papel y lápiz y al utilizar tecnologías digitales. Se discuten las construcciones, exploraciones y estrategias de cada acercamiento con el objetivo de contrastarlos. Este análisis previo permitió el diseño de las hojas de trabajo que proporcionan preguntas que guían la reflexión de aquellas ideas matemáticas relevantes para el estudio. La idea fue que las preguntas propuestas en las actividades fueran plataformas de aprendizaje para involucrar a los participantes en el análisis y discusión de las diferentes formas de enfocar y ampliar los problemas (Santos-Trigo, Camacho-Machín, & Olvera-Martínez, en prensa).

En este capítulo se presenta la actividad denominada “El problema del rectángulo” que involucra el estudio de una función cuadrática. Con la finalidad de orientar la solución del problema, se diseñó una hoja de trabajo donde se plantearon preguntas que promovieran el análisis de los conceptos y objetos matemáticos involucrados y provocaran que los profesores desarrollaran dos tipos de acercamientos hacia la solución del problema: dinámico y algebraico. A continuación, se muestra la estructura de la hoja de trabajo utilizada.

Problema: ABCD es un rectángulo. $\overline{AB}$ tiene una longitud de 6.5 cm, $\overline{BC}$ mide 4 cm. M es un punto sobre el segmento $\overline{AB}$, N es un punto sobre el segmento $\overline{BC}$, P es un punto sobre el segmento $\overline{CD}$ y Q es un punto sobre el segmento $\overline{DA}$. Además, se tiene que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$. ¿Dónde debe ubicarse el punto M para que el cuadrilátero $MNPQ$ tenga la mínima área posible? (Santos-Trigo, Camacho-Machín, & Olvera-Martínez, 2014).

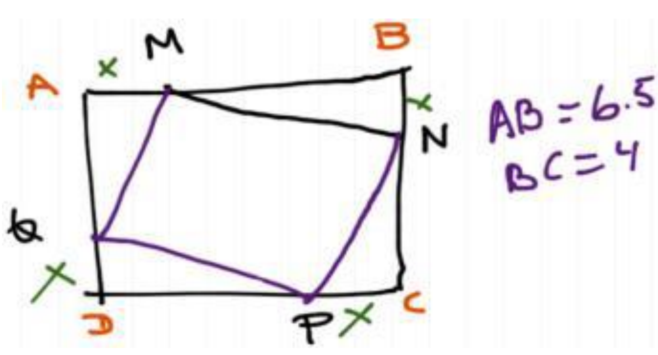
Un acercamiento dinámico usando el software de GeoGebra

1. Leer individualmente la tarea propuesta. Identificar y comentar los elementos fundamentales que ayudan a darle sentido al problema.
2. Usar el software dinámico GeoGebra para dibujar el rectángulo $ABCD$ utilizando los diferentes comandos del menú (perpendicular, rotación, círculo, etc.). Construir un modelo dinámico en el cual se pueda mover el punto M a lo largo del segmento $\overline{AB}$ para generar una familia de cuadriláteros inscritos. Comentar el proceso de construcción del modelo dinámico.
3. ¿Qué propiedades mantiene esa familia de cuadriláteros $MNPQ$? ¿Se obtiene el cuadrilátero inscrito en cualquier posición del punto M? Explicar cuál es el dominio de M para construir siempre el cuadrilátero.
4. Hallar la representación gráfica del comportamiento del área del cuadrilátero inscrito encontrando el lugar geométrico del punto que relaciona la posición del punto M sobre el segmento $\overline{AB}$ con el área del cuadrilátero correspondiente. ¿Qué propiedades tiene la representación gráfica del área?
5. Identificar visualmente en qué punto sobre la gráfica, el área del cuadrilátero alcanza su valor mínimo. ¿Existe algún patrón asociado con la posición del punto M, la longitud de los lados del cuadrilátero y el área mínima? Obtener una tabla que muestre algunos valores del segmento $\overline{AM}$ y el área del cuadrilátero correspondiente.

Sobre el modelo algebraico

1. ¿Existe alguna relación entre el área de los cuatro triángulos que aparecen en las esquinas de la siguiente figura, el área del rectángulo dado y el área del cuadrilátero inscrito? Utilizar una notación adecuada para identificar las figuras que aparecen en la representación de la tarea (Figura 6.1).

Figura 6.1 Propuesta de notación para representar algebraicamente el problema



Fuente: Elaboración propia

2. Hallar una expresión para el área del cuadrilátero $MNPQ$. Graficar esta expresión y discutir qué tipo de propiedades tiene.
3. Hallar la posición del punto M para la cual el cuadrilátero $MNPQ$ alcanza un área mínima. Comparar este valor con el obtenido previamente en GeoGebra.

4. Cambiar las dimensiones de los lados del rectángulo inicial por a y b respectivamente, y hallar el modelo general que describe el área del cuadrilátero inscrito. ¿Cuál es el valor de $\overline{AM}$ para que el área del cuadrilátero inscrito tenga un valor mínimo en términos de los lados a y b del rectángulo?
5. Explorar algebraica y dinámicamente un caso en el cual el rectángulo inicial sea reemplazado por un paralelogramo.
6. Discutir qué características del pensamiento y razonamiento matemático están involucradas tanto en el enfoque dinámico como en el algebraico para la solución del problema.

3.3 Implementación de las actividades

Las actividades se trabajaron durante diez sesiones con una duración de tres horas cada una, cada actividad se abordó en dos sesiones y se aplicaron en el orden propuesto en el nombre. La manera en que los profesores trabajaron durante las sesiones fue: individual, en pareja y grupal. En un primer momento, los profesores trabajaron de manera individual en la solución de los problemas con la finalidad de tener registro de las dificultades y limitaciones de sus primeros intentos por resolver el problema. Cuando los participantes mostraban avance en la solución de las actividades, comentaban o exponían frente al grupo las diferentes rutas de solución, las conjeturas formuladas y los resultados encontrados, además de sus pruebas o justificaciones respectivas. Antes de exponer los avances o soluciones frente a grupo, los participantes intercambiaban ideas sobre sus estrategias. En algunas actividades se solicitó el trabajo en parejas, ya que era necesaria la comparación de información y estrategias y la discusión de las situaciones planteadas.

Durante las exposiciones, se cuestionaba a los participantes el porqué de los procedimientos efectuados o de las estrategias desarrolladas, con el objetivo de identificar qué recursos y habilidades estaba poniendo en juego. Los avances en la solución del problema desarrollados por los profesores eran entregados al finalizar cada sesión. Las sesiones de trabajo eran dirigidas por el investigador, quién moderaba las discusiones grupales, cuestionaba a los participantes sobre las estrategias desarrolladas, revisaba y analizaba los reportes escritos y daba la retroalimentación respectiva durante la siguiente sesión.

Es importante señalar la relevancia que tuvo el diseño de las hojas de trabajo en el estudio pues las preguntas ahí planteadas permitieron guiar a los profesores durante el desarrollo de la solución de los problemas. La manera en que fueron estructuradas llevó a los participantes a identificar información y relaciones esenciales para la solución del problema y los resultados que iban encontrando los relacionaban y utilizaban para responder las preguntas subsecuentes. Cada uno de los cuestionamientos tuvo como objetivo conocer más sobre la forma en que estaba razonando el participante al responder, así como promover la formulación de conjeturas, la búsqueda de diferentes soluciones y la generalización.

3.4 Recolección y análisis de datos

La recolección de datos se llevó a cabo mediante diversos instrumentos: reportes escritos, archivos electrónicos de GeoGebra y Excel elaborados por los participantes, videograbaciones de las sesiones de trabajo, entrevistas no estructuradas y el registro de las observaciones durante cada sesión. Los datos se analizaron comparando inicialmente, la información recolectada, y consistió en tres fases: reducción de datos, organización y despliegue de datos, y elaboración de las conclusiones (Miles & Hubberman, 1994). Se seleccionaron aquellos datos que permitían mostrar evidencia de los diferentes acercamientos hacia la solución de los problemas.

Cada actividad se analizó de acuerdo con los objetivos planteados y las ideas fundamentales involucradas. Inicialmente, se describen los resultados obtenidos y su presentación se organizó con base en los episodios propuestos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011). Posteriormente, se comentan en una breve discusión los resultados relevantes en términos de las cinco ideas fundamentales sobre funciones y el impacto del uso sistemático de las tecnologías digitales en la actividad. Las conclusiones se elaboraron tomando en cuenta las regularidades identificadas durante el análisis de datos y contrastándolas con las ideas expuestas en el marco conceptual.

4. Presentación y discusión de los resultados

En esta sección se muestran los resultados obtenidos en la implementación de la actividad "El problema del rectángulo". Se ilustra la manera en que los profesores interactuaron con las herramientas tecnológicas y cómo las utilizaron para representar y explorar el problema. Esta actividad refleja cómo los participantes se involucraron en el uso de un sistema de geometría dinámica durante las fases de la resolución del problema que implican comprender y explorar el enunciado del problema, la identificación de relaciones, buscar argumentos para sustentar conjeturas y buscar extensiones y conexiones del problema inicial. Se identificaron las diferentes estrategias de solución que los profesores desarrollaron durante la solución del problema. Los resultados se organizaron, para su presentación, en los cuatro episodios involucrados en la resolución de problemas cuando se incorpora el uso de tecnologías digitales (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2011).

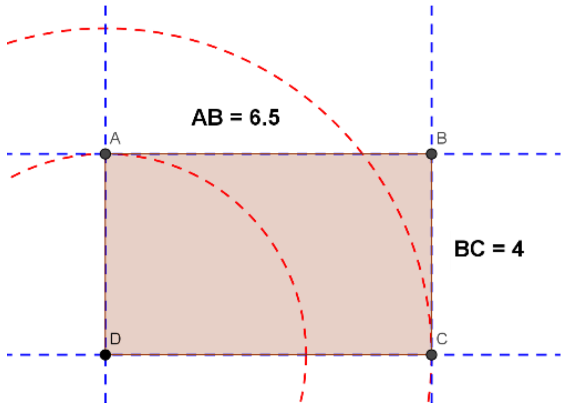
El problema planteado involucraba trabajar con la función cuadrática. Se pidió encontrar dónde debe ubicarse el punto M para que el cuadrilátero MNPQ inscrito en el rectángulo $ABCD$ tenga la mínima área posible bajo las siguientes condiciones: *$\overline{AB}$ tiene una longitud de 6.5 cm., $\overline{BC}$ mide 4 cm. M es un punto sobre el segmento $\overline{AB}$, N es un punto sobre el segmento $\overline{BC}$, P es un punto sobre el segmento $\overline{CD}$ y Q es un punto sobre el segmento $\overline{DA}$. Además, se tiene que $\overline{AM}$=$\overline{BN}$=$\overline{CP}$=$\overline{DQ}$.*

4.1 Comprensión del problema

Antes de iniciar con algún acercamiento a la solución, se les cuestionó a los profesores sobre ¿qué es un rectángulo?, ¿de qué manera se puede dibujar un rectángulo? y, ¿cómo se puede construir el cuadrilátero inscrito?, con la finalidad de que identificaran las propiedades de estos objetos geométricos y apoyados en esa información lograran construir el modelo dinámico del problema en GeoGebra. Todos los profesores lograron hacer la construcción, las diferencias encontradas entre las estrategias desarrolladas estuvieron relacionadas con los comandos de GeoGebra utilizados para construir el rectángulo inicial y controlar el movimiento de puntos. La principal estrategia que exhibieron los profesores involucró el uso de segmentos, circunferencias y rectas perpendiculares que cumplieran las condiciones del problema (Figura 6.2).

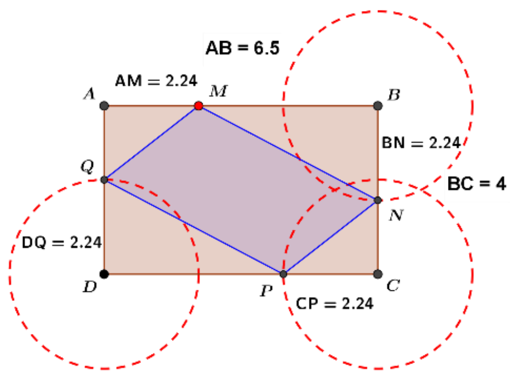
Para construir el cuadrilátero inscrito $MNPQ$, ubicaron el punto M sobre el segmento $\overline{AB}$. Localizaron los puntos N, P y Q mediante el trazo de circunferencias de radio igual a la longitud del segmento $\overline{AM}$ con centro en los puntos B, C y D, y encontraron sus intersecciones con el rectángulo $ABCD$. De esta manera, garantizaron que $\overline{AM}$=$\overline{BN}$=$\overline{CP}$=$\overline{DQ}$. Por último, unieron los puntos M, N, P y Q para formar el cuadrilátero (Figura 6.3).

Figura 6.2 Construcción del rectángulo inicial



Fuente: Producciones de los profesores

Figura 6.3 Modelo dinámico del problema



Fuente: Producciones de los profesores

4.2 Exploración del problema

¿Qué propiedades conserva la familia de cuadriláteros que se generan?, ¿se puede decir que $MNPQ$ es paralelogramo?, ¿por qué?, ¿se obtiene el cuadrilátero inscrito en cualquier posición del punto M?, ¿por qué? La búsqueda de respuestas a estas preguntas propició que los profesores comenzaran a explorar qué sucedía cuando se movía el punto M sobre el segmento $\overline{AB}$. Como primer paso, todos identificaron que los triángulos AMQ y CPN eran congruentes, de la misma manera que BNM y DQP. Tres profesores justificaron la congruencia de los triángulos por el criterio Lado-Ángulo-Lado (LAL): $\overline{AM}$=$\overline{CP}$, $\overline{QA}$=$\overline{NC}$ y los ángulos QAM y NCP miden 90° (Figura 6.4). Cinco profesores mencionaron que los triángulos AMQ y CPN eran congruentes porque sus lados correspondientes tienen la misma longitud, criterio de congruencia Lado-Lado-Lado (LLL, Figura 6.5).

Es importante señalar el uso del lenguaje matemático por parte de los profesores, quienes en sus reportes escritos mencionaron que los triángulos AMQ y CPN son *iguales*, únicamente un profesor se refiere a éstos como *congruentes*. Como resultado de este análisis, siete de los profesores concluyeron que el cuadrilátero $MNPQ$ era un paralelogramo, pues sus lados opuestos tienen la misma longitud.

También, observaron que, (1) cuando movían el punto M sobre el segmento $\overline{AB}$, el punto M se aproximaba al punto A, lo que provocaba que el cuadrilátero $MNPQ$ tendíera a coincidir con el rectángulo $ABCD$ y, (2) cuando el punto M se acercaba al punto B, de la misma manera lo hacía el punto N hacia el punto C, por las condiciones del problema (Figura 6.6). Dado que la longitud del segmento $\overline{BC}$ era de 4 *cm*, la longitud mayor que puede tener el segmento $\overline{AM}$ era de 4 *cm*. Si $\overline{AM}$ tuviera una longitud mayor a la mencionada, el cuadrilátero $MNPQ$ no se podría construir ya que no se cumpliría la condición $\overline{AM}$=$\overline{BN}$=$\overline{CP}$=$\overline{DQ}$. Así, la longitud del segmento $\overline{AM}$ debía estar en un intervalo de [0,4].

Figura 6.4 Justificación de congruencia de triángulos: caso LAL

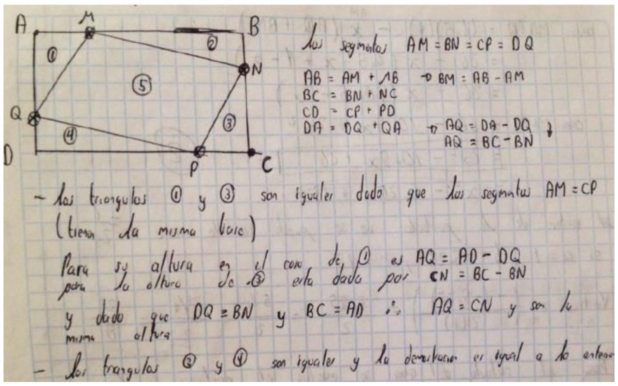
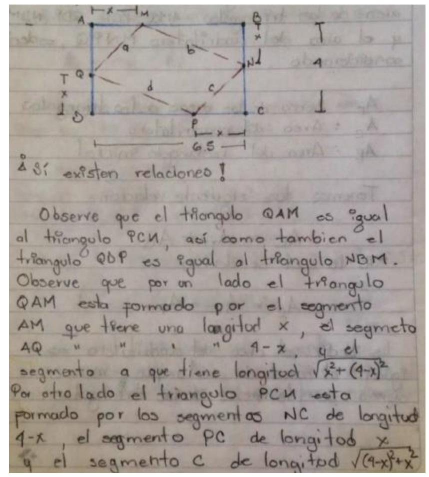
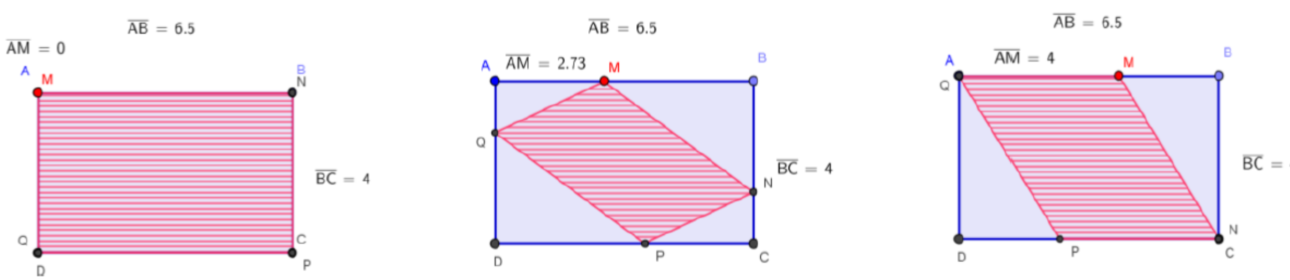


Figura 6.5 Justificación de congruencia de triángulos: caso LLL



Fuente: Producciones de los profesores

Figura 6.6 Exploración del movimiento del punto M



Fuente: Producciones de los profesores

Al mover el punto M sobre el segmento $\overline{AB}$, los profesores observaron que el área de $MNPQ$ variaba respecto a la posición que tomaba el punto M. Esta variación la representaron mediante una gráfica que relacionaba la longitud del segmento $\overline{AM}$ con el área correspondiente del cuadrilátero $MNPQ$. Para trazar esta gráfica, encontraron el lugar geométrico del punto H, el cual es la intersección de dos rectas perpendiculares a los ejes horizontal y vertical que representan la longitud del segmento $\overline{AM}$ y el valor del área de $MNPQ$ respectivamente (Figura 6.7). Únicamente tres profesores ingresaron directamente las coordenadas del punto H: $(longitud\ de\ \overline{AM}, área\ de\ MNPQ)$, para encontrar dicho lugar geométrico.

4.3 Diferentes aproximaciones hacia la solución del problema

Una vez que los profesores exploraron el problema y observaron la manera en que variaban las cantidades involucradas, comenzaron a desarrollar diferentes acercamientos hacia la solución del problema. En un inicio, todos los participantes hicieron una *aproximación empírica*. Esto es, observaron los valores de la longitud del segmento $\overline{AM}$ y el área de $MNPQ$ que se obtenían cuando el punto M se movía sobre el segmento $\overline{AB}$ e identificaron, en la representación gráfica, que cuando la longitud del segmento $\overline{AM}$ crece, el área del cuadrilátero $MNPQ$ disminuye hasta llegar a un punto (mínimo) en el que el área comienza a aumentar, incluso conjeturaron que se trataba de una parábola. Ubicaron de manera aproximada el punto mínimo y reportaron que se encuentra cuando la longitud de $\overline{AM}$ tiene un valor entre 2.57 y $2.68\ cm$, siendo $12.22\ cm^2$ el valor del área de $MNPQ$, aproximadamente. Algunos profesores complementaron su aproximación empírica identificando el punto mínimo en una tabla que mostraba el registro de las coordenadas del punto H, es decir, la relación entre la longitud del segmento $\overline{AM}$ y el área de $MNPQ$ correspondiente, aunque en esta estrategia obtuvieron diferentes valores que podían ser la solución (Figura 6.8).

Posteriormente, surgieron otras estrategias en donde los profesores hicieron uso de diversos recursos con la finalidad de acercarse más a la solución del problema. Cuatro profesores, se enfocaron en *localizar el vértice de la parábola*. Debido a que habían conjeturado que la representación gráfica parecía ser una parábola, decidieron asociarle una cónica y corroboraron que se trataba de una parte de una parábola. Así, trazaron una perpendicular al eje vertical que intersecaba a la parábola en dos puntos (T y S, en la Figura 6.9), luego trazaron la mediatriz de esos puntos y en su intersección con la parábola, ubicaron el vértice con coordenadas $(2.66, 12.22)$.

Figura 6.7 Representación gráfica de la variación

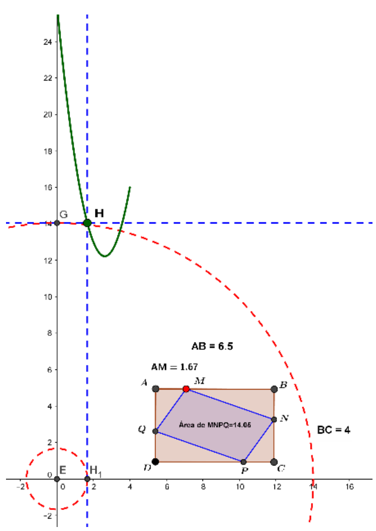
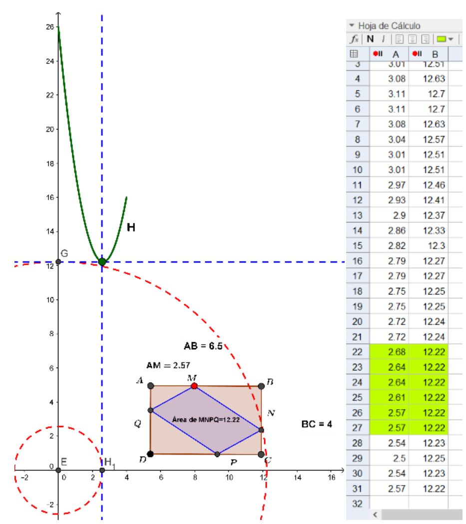


Figura 6.8 Aproximación empírica a la solución del problema



Fuente: Producciones de los profesores

Tres profesores llevaron a cabo un acercamiento en el que involucraron el *uso de la recta tangente a la parábola*. Una vez que ajustaron la cónica y obtuvieron la parábola, trazaron la recta tangente a ella que pasa por el punto H y calcularon su pendiente (Figura 6.10).

Enseguida, ingresaron en la barra de entrada un punto Z con coordenadas $(longitud\ del\ segmento\ \overline{AM}, pendiente\ de\ la\ recta\ tangente\ a\ la\ parábola)$ del cual encontraron el lugar geométrico que describe al mover el punto M y obtuvieron un segmento de recta; luego trazaron una recta sobre ese lugar geométrico para encontrar la intersección con el eje horizontal, punto T. Este punto les proporcionó el valor de la longitud el segmento $\overline{AM}$ cuando el área de $MNPQ$ es mínima (Figura 6.10). Este acercamiento es una representación geométrica de los procesos algebraicos propios para encontrar el valor mínimo de la función. Esto es, encontrar el lugar geométrico del punto que relaciona la longitud del segmento $\overline{AM}$ con el valor de la pendiente de la recta tangente a la parábola es equivalente a obtener la derivada de la función y localizar el punto T es equivalente a calcular el valor de x para el cual la derivada vale cero.

Figura 6.9 Localización del vértice de la parábola asociada al lugar geométrico

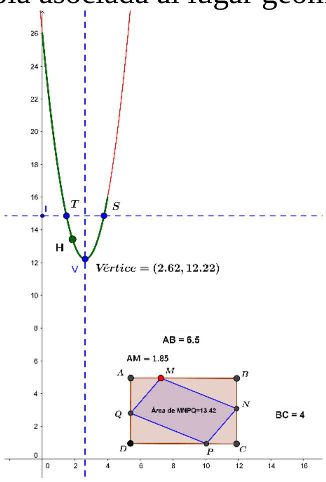
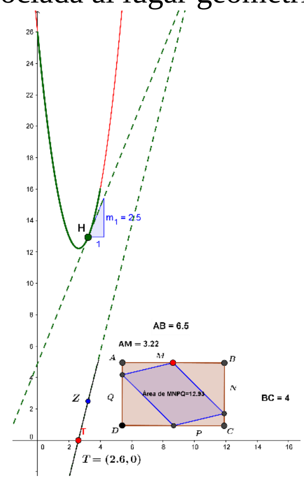


Figura 6.10 Uso de la recta tangente a la parábola asociada al lugar geométrico



Fuente: Producciones de los profesores

En el *acercamiento algebraico*, los profesores retomaron el hecho de que los triángulos AMQ y CPN son congruentes al igual que los triángulos BNM y DQP y consideraron posible encontrar el área del cuadrilátero $MNPQ$ restando el área correspondiente a los cuatro triángulos de las esquinas al área del rectángulo inicial. Encontraron:

$$A(MNPQ) = A(ABCD) - 2A(triángulo\ AMQ) - 2A(triángulo\ BNM) \qquad (1)$$

Si la longitud del segmento $\overline{AM}$ se representa como x, la expresión que representa el área de $MNPQ$ encontrada era $f(x) = 26 - 10.5x + 2x^2$. Una vez que encontraron la función que modela al problema, observaron que se trataba de una función cuadrática, la cual gráficamente es una parábola. Por lo tanto, para calcular el valor mínimo de esa función, recurrieron a procesos propios del cálculo, esto es, derivaron la función y después igualaron a cero la derivada de la función, $f'(x) = 4x - 10.5$, resolvieron la ecuación y encontraron que cuando $x = 2.625$, se obtiene un área mínima de $12.22\ cm^2$. Los profesores observaron que los valores obtenidos en los acercamientos dinámicos eran una aproximación cercana a los valores encontrados con el modelo algebraico.

Posteriormente, se planteó la pregunta ¿qué sucede cuando las dimensiones del rectángulo inicial cambian y se considera que sean $a\ y\ b$? Los profesores partieron de la misma idea algebraica anterior y obtuvieron que $A(MNPQ) = 2x^2 - (a+b)x + ab$ y cuando $x = \frac{a+b}{4}$, se obtiene el área mínima de $MNPQ$.

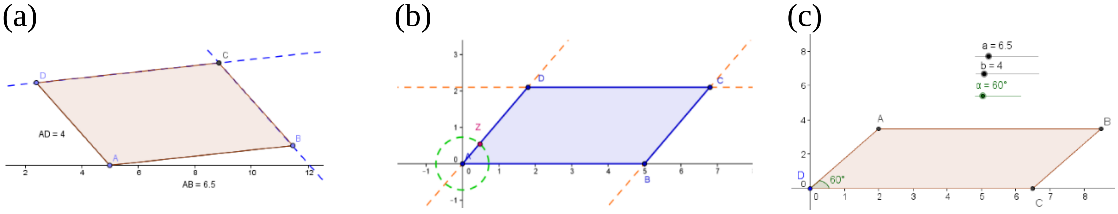
4.4 Integración

En este episodio los profesores investigaron qué sucedía si el cuadrilátero $MNPQ$ se inscribía en un paralelogramo conservando las condiciones del problema inicial. Esta extensión del problema inicial tuvo como finalidad observar qué propiedades y resultados se mantenían. Para iniciar la construcción del modelo dinámico los profesores tuvieron que considerar las propiedades de un paralelogramo para poder trazarlo se obtuvieron tres estrategias diferentes en su construcción. Una de ellas, involucró el uso del comando *segmento de longitud dada* y paralelas. En este tipo de construcción, los profesores no tuvieron control de las dimensiones de los segmentos del paralelogramo, podían mover un extremo del segmento; sin embargo, este movimiento no cambiaba su longitud, únicamente, lo rotaba afectando la medida del ángulo formado entre los segmentos (Figura 6.11a).

Otra estrategia fue similar a la del problema inicial, sólo que ahora consideraron variar el ángulo formado entre los segmentos $\overline{AB}$ y, por lo que el movimiento de la recta que pasa por el punto A, fue contralado por el punto Z que estaba definido sobre una circunferencia, con esta construcción generaron una familia de paralelogramos variando el ángulo entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ cuando movían Z (Figura 6.10b). En la tercera estrategia, utilizaron deslizadores para las longitudes de los segmentos $\overline{DC}$, $\overline{DA}$ y para la medida del ángulo entre ellos generando los parámetros a, b y α respectivamente (Figura 6.11c). La exploración en GeoGebra fue similar al caso inicial. Como resultado de las primeras exploraciones en el modelo dinámico del problema, identificaron que al mover el punto M, la longitud del segmento $\overline{AM}$ no puede ser mayor que la longitud del segmento $\overline{BC}$, pues ya no se podría dibujar el cuadrilátero $MNPQ$; conservándose así la idea del problema inicial acerca del dominio del punto M.

Figura 6.11 Estrategias para la construcción del paralelogramo $ABCD$

(a) (b) (c)



Fuente: Producciones de los profesores

Los acercamientos a la solución del problema mantuvieron la misma esencia de los desarrollados en el caso inicial: aproximación empírica, localización del vértice de la parábola, uso de la recta tangente a la parábola. Únicamente tres profesores desarrollaron el *acercamiento algebraico* y considerando que x en la longitud de $\overline{AM}$ encontraron que:

$$Área\ de\ MNPQ = (2x^2 - (a+b)x + ab)sen\alpha \quad (2)$$

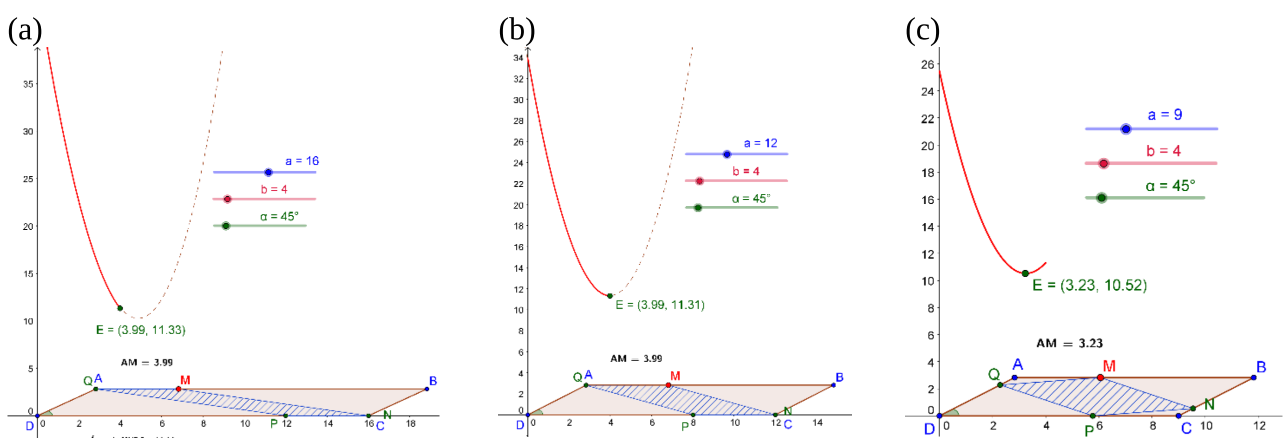
Por lo tanto, siguiendo los procedimientos de cálculo, obtuvieron que el área mínima de $MNPQ$ se alcanzaba cuando $\frac{a+b}{4}$. De esta manera, los profesores concluyeron que, independientemente de las dimensiones de los lados del paralelogramo y del ángulo formado entre ellos, siempre se iba a conservar que el valor mínimo del área de $MNPQ$ se alcanzaría cuando $\overline{AM} = \frac{a+b}{4}$.

Con la finalidad de que corroboraran si la fórmula que habían encontrado era aplicable para cualesquiera dimensiones, en la discusión grupal se promovió la exploración de casos particulares considerando diferentes longitudes de los segmentos y manteniendo fijo el ángulo formado entre ellos. Se retomó la construcción que involucraba deslizadores, se mantuvo fija la medida del ángulo α y del segmento $\overline{BC}$ (deslizador b), sólo se variaba la longitud del segmento $\overline{AB}$ (deslizador a). Al explorar ejemplos particulares, encontraron que el lugar geométrico cambiaba (Figura 6.12)

Estas observaciones llevaron a los profesores a investigar el valor mínimo en cada lugar geométrico. Una profesora señaló que en las figuras 6.12b y 6.12c el valor mínimo parece estar en el vértice de la parábola asociada mientras que, en la Figura 4.11a, el lugar geométrico no llega al vértice por lo que el valor mínimo corresponde al extremo derecho. Esta conjetura, generó que los profesores recordaran el dominio de la función en el problema. El segmento $\overline{BC}$ fue considerado el de menor longitud, por lo tanto, el dominio de la longitud del segmento $\overline{AM}$ era [0, b].

Los profesores identificaron que la fórmula les proporcionaba el vértice de la parábola asociada al lugar geométrico, pero en ocasiones ese punto no se encontraba dentro del dominio de la función del problema. Así, reconocieron dos situaciones: (1) la fórmula es aplicable cuando el vértice de la parábola asociada se encuentra dentro del dominio de la función del problema; (2) cuando el vértice de la parábola asociada está fuera del dominio de la función del problema, el valor mínimo del área de $MNPQ$ se localiza en $x = b$, siendo b la medida del segmento menor.

Figura 6.12 Lugares geométricos encontrados al variar el parámetro a



Fuente: Producciones de los profesores

Cuando se enfocaron en conocer la relación que debe existir entre las longitudes de los segmentos en cada situación, encontraron que cuando el vértice de la parábola asociada y el punto extremo del lugar geométrico coinciden se tiene que $a = 3b$.

Además, al analizar casos particulares, determinaron que (1) cuando $a = 3b$, el vértice de la parábola es el extremo derecho del lugar geométrico, en $x = b$, o bien, en $x = \frac{a+b}{4}$; (2) cuando $a > 3b$, el vértice de la parábola asociada no está dentro del dominio de la función del problema, por lo tanto el mínimo se alcanza cuando $x = b$; y, (3) cuando $a < 3b$, el mínimo coincide con el vértice de la parábola asociada, es decir, cuando $x = \frac{a+b}{4}$.

Los profesores reconocieron que las restricciones en el dominio de una función pueden hacer no válidos aquellos resultados obtenidos de manera general sin tomar en cuenta el dominio de la función del problema en particular y concluyeron que es necesario conocer las dimensiones del paralelogramo y el dominio de la función para encontrar la posición del punto M donde el valor de la función es mínimo.

4.5 Discusión de los resultados

Es importante reflexionar sobre la manera en que el trabajo con actividades como la que se presentó en este capítulo favorece en los profesores el desarrollo de habilidades y conocimientos matemáticos, así como de diversas formas de razonamiento, algunas de éstas fuertemente vinculadas con los comandos y acciones que permite GeoGebra. Cuando los profesores comenzaron la construcción del modelo dinámico del problema se adentraron en un análisis de las propiedades y relaciones de los objetos matemáticos involucrados para poder establecer sus estrategias de construcción.

La posibilidad de mover o arrastrar puntos y rectas en las construcciones dinámicas permitió que los profesores exploraran el comportamiento de los objetos matemáticos y sus atributos lo que los llevó a identificar relaciones, variantes e invariantes entre dichos objetos y así, formular conjeturas que posteriormente justificaron con argumentos matemáticos. Particularmente, las exploraciones en el modelo dinámico del problema favorecieron el desarrollo de estrategias de solución del problema sin necesidad de establecer, explícitamente, expresiones algebraicas que modelaran el problema y que son diferentes a las tradicionalmente elaboradas con papel y lápiz, por ejemplo, la estrategia que involucraba el uso de la recta tangente a la parábola. Un elemento importante en las exploraciones fue el uso de deslizadores para variar las dimensiones de los lados del paralelogramo inicial y del ángulo comprendido entre ellos, ya que ofreció la oportunidad de analizar diversos casos particulares lo que sirvió como punto de partida para reflexionar sobre la importancia del dominio de las funciones. En este sentido, el uso de GeoGebra también brindó la posibilidad de analizar ideas matemáticas como la variación y las características de una función, pues los profesores identificaron, en las exploraciones de los modelos dinámicos, las variables involucradas en el problema y su relación de dependencia: a cada valor de la variable independiente (longitud del segmento $\overline{AM}$) le corresponde uno y sólo un valor de la variable dependiente (área del cuadrilátero $MNPQ$).

Parte importante en el estudio de funciones es el uso de múltiples representaciones lo cual se vio ampliamente favorecido por el uso de GeoGebra. La posibilidad que brinda GeoGebra de contar, en una misma ventana, con diferentes representaciones como la dinámica, gráfica, tabular y algebraica permitió que los profesores identificaran y establecieran vínculos y conexiones entre las representaciones. Además, con el análisis y contraste entre distintos acercamientos hacia la solución fue posible resaltar características de la función en cada representación y valorar la utilidad y pertinencia de cada una de las representaciones y los acercamientos hacia la solución del problema.

5 Agradecimientos

Se agradece el financiamiento al Programa de Fortalecimiento de la Calidad Educativa a través de los proyectos P/PFCE-2016-10MSU0010C-06 de la DES de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez del Estado de Durango y al Programa de Apoyos Institucionales y Financiamiento a Proyectos de Investigación 2017 del Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Durango (COCYTED), a través del proyecto Reunión Nacional de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas 2017. Se extiende el agradecimiento al Grupo Internacional de Investigación Campus Viviente de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (CITeM) por el apoyo para realizar este estudio. Por último, se agradece al estudiante Carlos Michelle Díaz Leyva por su apoyo y participación en el desarrollo de este trabajo.

6 Conclusiones

El NCTM (2009) argumenta que el razonamiento en matemáticas a menudo comienza con la exploración, luego la generación de conjeturas, posibles inicios falsos y las explicaciones parciales antes de que se obtenga el resultado final. En este contexto y con base en los resultados, es posible argumentar que el uso de GeoGebra, como amplificador y reorganizador cognitivo, favoreció que los profesores construyeran conocimiento y desarrollaran diferentes formas de razonamiento que difícilmente se pudieran llevar a cabo en un ambiente de papel y lápiz. Como amplificador, permitió que los profesores exploraran el modelo dinámico del problema para identificar relaciones, patrones e invariantes entre objetos involucrados. De esta manera, los profesores pudieron formular conjeturas a partir de argumentos visuales, los cuales articularon e integraron con argumentos geométricos y acercamientos algebraicos para justificar dichas conjeturas. GeoGebra, como reorganizador cognitivo, favoreció la comprensión de conceptos matemáticos, pues permitió que los profesores integraran contenidos matemáticos, desarrollaran habilidades al resolver problemas y reorganizaran las ideas al establecer conexiones entre diferentes representaciones de los conceptos matemáticos involucrados; y, proporcionó información visual que sirvió de base para generar argumentos matemáticos que validaran sus conjeturas, reflejando un tránsito de lo visual o empírico a lo formal en el razonamiento de los problemas. GeoGebra fue crucial para conciliar los acercamientos visuales o geométricos con argumentos algebraicos para justificar las conjeturas formuladas por los profesores.

La discusión generada durante las actividades fue un elemento importante que ayudó a reflexión por parte de los profesores de su práctica docente y de la manera en que se pueden diseñar actividades que fomenten en sus estudiantes la comprensión de las ideas y características principales del concepto de función tratando de evitar las ideas erróneas que detectaron a lo largo del estudio. Los profesores reflexionaron sobre su forma de aprender y reconocieron que el uso de herramientas digitales ofrece nuevas rutas para representar, explorar y resolver problemas; además, en distintos niveles, se apropiaron de recursos, estrategias y representaciones para el diseño de actividades en el que se involucre el uso coordinado de tecnologías digitales. Así, los resultados obtenidos proporcionan fundamentos para considerar la metodología propuesta como un camino viable para la formación y desarrollo profesional de profesores de matemáticas de nivel medio superior, pues favorece la deconstrucción de conceptos, es particular en este estudio el concepto de función, al deshacer analíticamente los elementos que lo constituyen y refinar sus ideas y conocimientos preconcebidos.

Referencias

Barrera-Mora, F. & Santos-Trigo, M. (2002). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento. *Matemáticas Aplicadas y su Enseñanza. Serie Bachillerato*, 2, pp. 8-37. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Common Core State Standards Initiative (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington D.C.: National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers.

Cooney, T., Beckmann, S., & Lloyd, G. (2010). *Developing essential understanding of functions for teaching mathematics in Grades 9-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Denzin, N. & Lincoln, Y. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. En N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 1-17). Thousand Oaks: CA: Sage.

Dick, T. & Hollebrands, K. (2011). *Focus in high school mathematics: Technology to support reasoning and sense making*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Krulik, S. & Rudnick, J. (1993). Reasoning and problem solving. A handbook for elementary school teachers. Boston: Allyn and Bacon.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Leung, F. (2013). Part III, Introduction to section C: Technology in the mathematics curriculum. En M. A. (Ken) Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 517-524). New York: Springer International Handbooks of Education.

Miles, B. & Hubberman, A. (1994). *Quantitative Data Analysis*. USA: Sage Publications.

Moreno-Armella, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 81-86). Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

National Council of Teacher of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teacher of Mathematics (2008). *The role of technology in the teaching and learning of mathematics. a position of the National Council of Teachers of Mathematics.* Recuperado de http://www.nctm.org/uploadedFiles/ About_NCTM/Position_Statements/Technology%20final.pdf

National Council of Teacher of Mathematics (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pea, R. (1985). Beyond Amplification: Using the Computer to Reorganize Mental Functioning. *Educational Psychologist*, 20(4), 167-182.

Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM*, 39(5-6), 523-536.

Santos-Trigo, M. (2014). Problem solving in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 496-501). New York: Springer.

Santos-Trigo, M. & Barrera-Mora, F. (2005). Delving into conceptual frameworks: problem solving representations, and models and modeling perspectives. En G. M. Lloyd, M. Wilson, J. L. Wilkins, & S. L. Behm (Eds.), *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-8). Virginia, USA: PME

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2011). Framing a problem solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of the European society for Research in Mathematics Education* (pp. 2258-2277). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M., & Olvera-Martínez, C. (2014). Preservice high school teachers' construction and exploration of dynamic models of variation phenomena. En S. Carreira, N. Amado, K. Jones, & H. Jacinto (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving* (pp. 96-107). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M., & Olvera-Martínez, C. (en prensa). High school teachers' use of a Dynamic Geometry System to formulate conjectures and to transit from using empirical to geometric and algebraic arguments in problem solving approaches. En N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving: A Focus on Technology, Creativity and Affect*. Springer.

Steele, M. & Hillen, A. (2012). The content-focused methods course: A model for integrating pedagogy and mathematics content. *Mathematics Teacher Educator*, 1(1), 53-70.