# Formas de razonamiento de profesores de bachillerato al resolver problemas sobre lugares geométricos con GeoGebra

ORTEGA-MORENO, Francisco, REYES-RODRÍGUEZ, Aarón y VARGAS-ALEJO, Verónica

F. Ortega[1], A. Reyes[2] y V.Vargas[3]

[1]Universidad Tecnológica de Nezahualcoyotl
[2]Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
[3]Universidad de Guadalajara

aaronr@uaeh.edu.mx

C. Cristóbal, M. Olvera, V. Vargas (Dirs.) Educación para la interdisciplinariedad. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

**Abstract**

The systematic use of Dynamic Geometry Systems (DGS) can promote integration of learning scenarios useful for building dynamic models associated with analytic geometry problems. Performing accurate draws, measuring attributes, identifying relationships between mathematical objects, formulating conjectures, proposing new problems, looking for justifications and communicating result are mathematical activities that can be enhanced with the use of GeoGebra. In this study we analyze and document how the systematic use of GeoGebra can influence the ways of thinking of six high school mathematics teachers, when they explored and solved problems about loci, which can be found in commonly used textbooks. Collected data were analyzed from a socioconstructivist epistemological perspective as well as from a didactical view that privileges development of mathematical understanding through problem solving. The analysis units were the reasoning sequences constructed by the participants during a problem solving seminar. The main results are that participants exhibited exploratory ways of reasoning that allowed them discover serendipitous relations between geometric objects and generate mathematical ways of thinking. Those discoveries were grounded on the use of auxiliary objects, which originated sub-configurations through which relationships between geometric objects were made explicit when teachers dragged relevant points into a dynamic configuration.

**Tecnología Digital, Resolución De Problemas, Razonamiento, Lugares Geométricos, Profesores**

## 1. Introducción

El uso de las tecnologías digitales puede promover formas de razonar al resolver problemas matemáticos que difieren de aquellas que se llevan a cabo al trabajar con otras herramientas (papel y lápiz, manipulativos físicos, entre otras), debido a que el conocimiento humano es un producto de la interacción entre nuestras estructuras mentales y las acciones que llevamos a cabo al resolver problemas con los artefactos o tecnologías, materiales o simbólicas, disponibles en un entorno sociocultural (Vygotsky, 1962, 1978). Es decir, cualquier actividad cognitiva es una actividad mediada por las herramientas o artefactos utilizados (Werstch, 1991). En este sentido, las herramientas influyen en las formas de pensar y razonar de las personas, ya que registros de representación tales como palabras, dibujos, símbolos alfanuméricos, gráficas, configuraciones dinámicas, tablas, entre otros, permiten externalizar y organizar ideas, así como reflexionar acerca de nuestros procesos de pensamiento (Pea, 1987; Koehler y Mishra, 2009). Es decir, estos medios representacionales son recursos mediadores para dar sentido o significado a los objetos matemáticos (Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2008).

Las herramientas que se utilizan para realizar cualquier actividad influyen en nuestras formas de actuar y pensar, en ocasiones sin que lo percibamos, ya que su uso sistemático moldea nuestros recursos mentales, amplificando y reorganizando diversos procesos cognitivos (Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2008). Por ejemplo, la escritura es una herramienta mediante la cual hemos *amplificado* algunas limitaciones biológicas de nuestra memoria (recordar una extensa lista de productos) y que nos ha permitido *reorganizar* procesos de reflexión acerca de nuestras formas de pensar y razonar que no serían posibles sin esta herramienta. Al disponer de un texto, podemos analizar lo escrito y así modificar y refinar los pensamientos e ideas plasmados en el papel o en la pantalla de una computadora, tableta o Smartphone. Este proceso de reflexión transforma la arquitectura funcional del cerebro e impacta profundamente en la actividad cognitiva que desarrollamos (Donald, 2001). Otro ejemplo de tales herramientas es el sistema de numeración decimal. Por una parte, este sistema nos ha permitido amplificar las capacidades de cálculo que podemos realizar con él, y por otra ha moldeado (reorganizado) las formas en que realizamos cálculos aritméticos (Kaput y Schorr, 2008, p. 212).

Las representaciones generadas en un medio digital como los *Sistemas de Geometría Dinámica* (SGD) se caracterizan por la posibilidad que tiene un usuario de relacionarlas entre sí, de modo que un cambio en una de ellas se verá reflejado, en tiempo real, en las otras representaciones con las que la primera se encuentra ligada, manteniéndose cierto conjunto de relaciones estructurales definidas al momento en el que se elaboró una construcción dinámica (Moreno-Armella, 2002). En este sentido, se dice que las representaciones creadas con software como GeoGebra, son *representaciones ejecutables* (Moreno-Armella, Hegedus y Kaput, 2008). En otras palabras, las representaciones ejecutables son aquellas que, por un lado, externalizan funciones cognitivas, principalmente algorítmicas, que anteriormente eran del dominio exclusivo de los seres humanos; por ejemplo, la revisión ortográfica que realiza un procesador de textos; el trazo de una gráfica que realiza un software cuando el usuario introduce una ecuación y presiona la tecla enter; las operaciones sobre representaciones algebraicas que realiza un CAS para encontrar las raíces de una ecuación o para obtener derivadas e integrales de funciones, cuando se proporciona como dato la expresión algebraica de la ecuación o la función; la obtención de la ecuación de una recta que un usuario dibuja en un sistema coordenado; el procesamiento numérico para mostrar el resultado con cantidades reales o complejas, entre otras. Por otro lado, las representaciones ejecutables permiten visualizar acciones que antes sólo ocurrían en nuestra imaginación, como la realización de un zoom sobre una gráfica, el trazo de un lugar geométrico que describe un punto, o la aplicación de una transformación rígida a un objeto geométrico, etcétera (Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2008).

Dada la relevancia de las tecnologías digitales como medios amplificadores y reorganizadores de la cognición humana, resulta importante reflexionar acerca de cómo transformar los ambientes de aprendizaje aprovechando las características de estas tecnologías (Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2016). Algunas preguntas relevantes al respecto son: ¿Cómo se extienden las aproximaciones para resolver problemas al usar GeoGebra, con respecto al uso de otras herramientas? ¿Qué formas de razonamiento emergen como resultado de usar GeoGebra como una herramienta para resolver problemas? ¿Cuáles son las características de las soluciones y del proceso de razonamiento que desarrollan profesores de bachillerato al resolver problemas sobre lugares geométricos con GeoGebra?
Nos interesa identificar cuáles son las características del conocimiento que construyen profesores de bachillerato, particularmente qué tipo de procesos de razonamiento llevan a cabo, cuando se les ofrecen oportunidades para aprender matemáticas significativas, con el uso de artefactos digitales, en formas que se espera que ellos implementen con sus estudiantes.

Lo anterior es importante porque las conceptualizaciones de las matemáticas y su aprendizaje que los profesores sostienen influyen en el tipo de actividades que proponen en el aula y en la forma en que organizan el proceso de instrucción (Moreno-Armella, 1996). A su vez, las tareas y experiencias en el salón de clase moldean las características del conocimiento (conocimiento atomizado o conocimiento altamente estructurado) que los estudiantes construyen (Stein y Smith, 1998). Así, los resultados de este trabajo puede ser de utilidad para diseñar e implementar programas de formación que promuevan entre los profesores una conceptualización de las matemáticas como una actividad de búsqueda y sistematización de patrones (Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2008) y al aprendizaje como un proceso de resolución de problemas, cuya finalidad es el desarrollo de significados para las ideas matemáticas. Estas dos metas constituyen una primera etapa de un proyecto de cambio en la didáctica en los salones de clase.

## 2. Revisión de la literatura

Diversos trabajos de investigación en educación matemática han aportado evidencia de que el uso de SGD puede permitir a los estudiantes desarrollar una actividad cognitiva diferente a aquella que se lleva a cabo al resolver problemas en ambientes de papel y lápiz (Espinosa-Pérez, 2012). Al utilizar herramientas como GeoGebra es posible utilizar heurísticas que no se pueden implementar en otros ambientes, por ejemplo, la *heurística movimiento controlado*, que consiste en restringir el movimiento de un punto a un segmento, recta, circunferencia, polígono o cónica, la cual es indispensable para utilizar la *heurística de visualizar lugares geométricos*. La utilización de un SGD para resolver problemas geométricos favorece la utilización de diferentes elementos del pensamiento matemático, entre los que se encuentran: (1) interpretar los trazos realizados, (2) utilizar heurísticas ligadas al movimiento y al arrastre, (3) explorar en tiempo real el movimiento de objetos geométricos y (4) comunicar resultados (Espinosa-Pérez, 2012).

En la literatura se resaltan algunas ventajas de usar SGD en actividades de resolución de problemas, entre las que destacan facilidades para representar dinámicamente condiciones de un problema en términos de objetos y relaciones matemáticas (Santos-Trigo y Reyes-Rodríguez, 2011); capacidad para identificar y explorar dinámicamente relaciones útiles en la generación de conjeturas a partir de información visual (arrastre) y empírica (medición); facilidad para implementar heurísticas generales como *considerar el problema resuelto* y *relajar condiciones de un problema*, o de heurísticas particulares como encontrar el lugar geométrico de puntos móviles. Por otra parte, el uso de un SGD favorece la construcción de conexiones entre distintos contenidos matemáticos, por ejemplo, el uso de cónicas como herramientas para resolver problemas y la generación e interrelación entre diferentes tipos de argumentos (visuales, empíricos, transformacionales, deductivos) o evidencia para justificar resultados matemáticos (Arzarello et al., 2002).

Se han caracterizado también diferentes tipos de arrastre de puntos u objetos que puede realizar un usuario, el arrastre directo o el indirecto, que se produce como consecuencia del arrastre directo de otro elemento (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010). En otros estudios, el arrastre se reconoce como una herramienta cognitiva que permite la construcción de significados mediante la visualización de invariantes o patrones asociados con conceptos matemáticos (Leung, 2008); mientras que en otros, se aporta evidencia de que el uso sistemático del arrastre y la visualización de lugares geométricos proporciona oportunidades para crear vínculos entre el razonamiento empírico y el razonamiento deductivo (Guven, 2008).

El empleo sistemático de diferentes herramientas digitales para resolver problemas requiere que los profesores conozcan el potencial de esos artefactos y sean capaces de identificar estrategias que les permitan utilizarlos en sus prácticas de enseñanza, además es importante que ellos mismos hayan experimentado cómo utilizar esta herramienta para resolver problemas, participando en actividades matemáticas que involucran explorar relaciones, conjeturar y justificar resultados (Cullen et al., 2013) y, con base en este conocimiento, construir e implementar rutas potenciales de instrucción que apoyen el aprendizaje de sus estudiantes (Santos-Trigo y Barrera-Mora, 2011). Otros estudios resaltan la importancia de incorporar diferentes herramientas tecnológicas (SGD, CAS, hojas de cálculo; calculadoras, apps como Photomath, entre otros) en los programas de formación de profesores ya que además de ejemplificar cómo usar la tecnología en resolución de problemas, se puede mostrar cómo usarla en los procesos de enseñanza y esto, a su vez, puede ayudar en la construcción de puentes sólidos entre los profesores y los estudiantes, y una vez construidos esos puentes, los estudiantes pueden participar en actividades cognitivas que mejoren el desarrollo de sus habilidades en resolución de problemas (Karatas, 2011).

Santos-Trigo y Camacho-Machin (2011) reportan el trabajo desarrollado por profesores de nivel bachillerato al usar diversas herramientas tecnológicas para resolver problemas matemáticos. Los autores identificaron y caracterizaron episodios o etapas que organizan y estructuran el proceso de resolución de problemas con base en las cuatro fases de Polya (2009), enfatizando los diferentes acercamientos de solución con la finalidad de caracterizar cómo los profesores usan de manera sistemática un SGD. Se destaca que en el desarrollo de los episodios se deben proponer o formular y dar seguimiento a preguntas relevantes que favorezcan la utilización de diversas representaciones de un problema. Las etapas del modelo son las siguientes: (1) comprensión del problema, (2) exploración del problema, (3) construcción de diferentes aproximaciones para resolver el problema y finalmente la última etapa, (4) integración de conocimientos.

Con base en la revisión de la literatura, se identificó que los trabajos han enfatizado la existencia de diferencias sustanciales entre las características del conocimiento que estudiantes o profesores construyen con un SGD o la combinación de diversas tecnologías digitales, sin embargo, consideramos que es necesario realizar investigación en la que se profundice en los procesos de razonamiento que estudiantes o profesores desarrollan al resolver problemas geométricos, enfatizando el efecto amplificador y reorganizador de la herramienta sobre las formas de razonamiento.

## 3. Elementos teóricos

Recientemente, investigadores en educación matemática han tendido a combinar más de una perspectiva para analizar el comportamiento de profesores al incorporar la tecnología como parte de su actividad profesional, ya que se ha considerado que algunas dificultades relacionadas con la implementación de las tecnologías digitales en el aula pueden tener su origen en la falta de una base teórica para enmarcar el uso de estas herramientas en el salón de clase (Mishra y Koehler, 2006). Al respecto, en este trabajo utilizamos diversos elementos teóricos, para sustentar la elección de las tareas, la organización del escenario de instrucción y el análisis de los resultados.

En primer término, consideramos que las matemáticas son la ciencia de los patrones (Steen, 1988) y que aprender matemáticas consiste en adquirir una disposición a ver el mundo a través de los lentes de un matemático (Schoenfeld, 1992), más que únicamente memorizar hechos y adquirir fluidez para llevar a cabo algoritmos o procedimientos rutinarios. Esta disposición incluye llevar a cabo actividades entre las que se incluye experimentar, explorar relaciones matemáticas, formular conjeturas, justificar y comunicar resultados, así como resolver problemas por diferentes rutas (Polya, 2009) y desarrollar una actitud inquisitiva; es decir, habilidad para formular sistemáticamente preguntas o nuevos problemas (Santos-Trigo, 2007; Berger, 2014). Esta perspectiva ontológica fue de utilidad para determinar las características de las tareas, así como del escenario de instrucción; los cuales debían favorecer el que los participantes llevaran a cabo “intentos sistemáticos, basados en la observación y experimentación para determinar la naturaleza o principios de regularidades en sistemas definidos axiomática o teóricamente” (Schoenfeld, 1992, p. 335). En pocas palabras, al abordar las tareas los profesores debieran llevar a cabo actividades de búsqueda de patrones sobre la base de evidencia empírica proporcionada por los recursos de GeoGebra.

También adoptamos una postura epistemológica de corte socio constructivista (Simon, 1994), por lo cual suponemos, por un lado, que cada individuo construye su propio conocimiento, más que absorberlo o copiarlo de otros, independientemente del contexto, o la presencia y naturaleza del proceso de enseñanza, al enfrentar problemas que desequilibran sus estructuras cognitivas. Por otra parte, también suponemos que el aprendizaje es un proceso que se lleva a cabo en una comunidad donde se construyen significados o entendimientos considerados-como-compartidos (Cobb et al., 1991).

Dado que el aprendizaje es un proceso social, el medio cultural y sus producciones influyen en las características del conocimiento que cada persona construye activamente (Werstch, 1991). Particularmente, la naturaleza de la actividad cognitiva se encuentra ligada a la generación y uso de representaciones semióticas (Moreno-Armella y Hegedus, 2009, p. 501), dado que estas estructuras simbólicas constituyen un medio que permite a los seres humanos pensar con, y a través de ellas. Las herramientas materiales y simbólicas impactan en la mente, rediseñando su arquitectura funcional mediante el efecto de los recursos que nos proporcionan para actuar sobre el mundo y las regulaciones que imponen a nuestro pensamiento acerca del mundo (Moreno-Armella, Hegedus y Kaput, 2008; Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2016).

Estos supuestos epistemológicos se aplicaron tanto para determinar las características del contexto de instrucción, como el proceso de análisis de la información. En lo que respecta a la organización del contexto de instrucción, los profesores debían estar inmersos en una comunidad de práctica (el seminario de resolución de problemas), donde se valora el desarrollo de hábitos y disposición para ver a los problemas o situaciones en términos matemáticos. Es decir, se presentaron los problemas, sin explicar previamente cómo obtener las respuestas, y se esperaba que además de obtener la solución, los participantes reflexionaran acerca de le legitimidad de las soluciones y de las estrategias que implementaron (Lampert, 1990). En lo que respecta al análisis de los datos, la perspectiva socioconstructivista fue de utilidad para centrar la atención en cómo características específicas de las representaciones generadas con GeoGebra, particularmente la propiedad de ejecutabilidad, influye en las formas de razonamiento de los participantes y en el tipo de significados considerados-como-compartidos (taken-as-shared) que emergen dentro de la comunidad de práctica.

Por otra parte, desde una perspectiva didáctica, consideramos que el proceso de instrucción tiene la finalidad de influir sobre las características del aprendizaje que las personas construyen. Particularmente, estamos interesados en que los profesores desarrollen un *entendimiento profundo* de las ideas matemáticas que enseñan (Hiebert, et al. 1997), lo que implica la construcción de conexiones significativas entre un conocimiento nuevo y conocimientos previos, para originar *organizaciones locales* de ideas, representaciones, procedimientos, entre otros, a partir conocimientos desarticulados (Moreno, 1996); o para robustecer y refinar organizaciones locales de conocimientos previas. Estas organizaciones locales se crean a partir de los procesos de reflexión y comunicación de ideas que se llevan a cabo durante procesos de resolución de problemas durante los cuales se generan conceptos o ideas nuevas al utilizar los recursos o conocimientos previos que poseen.

Al respecto, consideramos que un concepto o idea se ha entendido cuando se ha almacenado en la memoria a largo plazo y existen mecanismos que permiten recuperar ese conocimiento con la finalidad de utilizarlo. Los objetos matemáticos adquieren sentido y significado cuando se *utilizan* para resolver algún problema o satisfacer alguna necesidad, ya sea práctica o teórica; por ejemplo, los logaritmos surgieron para satisfacer la necesidad de realizar operaciones aritméticas complejas con mayor facilidad; mientras que la definición aritmética de límite se creó con la finalidad de sustentar rigurosamente diversos resultados del cálculo.

Dado que sostenemos una perspectiva didáctica basada en la resolución de problemas, esperamos que los participantes generen por sí mismos algunas ideas o herramientas matemáticas, pero también promovemos que consulten hechos, definiciones o teoremas de fuentes como Wikipedia para recuperar conocimientos institucionalmente constituidos, con la finalidad de que puedan integrar esos conocimientos en organizaciones locales de conocimientos.

Así, nos alejamos de la perspectiva cultural tradicional que moldea la experiencia escolar, en la cual "*hacer* [énfasis en el original] matemáticas significa seguir las reglas establecidas por el profesor; *conocer* [énfasis en el original] matemáticas significa recordar y aplicar la regla correcta cuando el maestro formula una pregunta; y donde *la verdad matemática* [énfasis en el original] se determina a través de la ratificación de una respuesta por parte del profesor" (Lampert, 1990, p. 32). Es decir, proponemos un cambio en las normas sociales convencionales del salón de clase, permitiendo nuevas formas de interacción entre la persona que aprende y el conocimiento institucionalmente constituido.

Desde una perspectiva cultural tradicional, generalmente las definiciones o teoremas se almacenan en la memoria a largo plazo como información puramente anecdótica que difícilmente se pueden transferir a contextos diferentes a aquellos en los que se generó. Por ejemplo, en Reyes-Rodríguez (2009) se aporta evidencia de que profesores, formados en una perspectiva cultural tradicional, quienes conocían la definición de parábola, así como la definición y las propiedades de la mediatriz de un segmento, no fueron capaces de utilizar ese conocimiento para demostrar que un punto en una configuración dinámica describía una parábola. En contraste, profesores quienes consultaron resultados matemáticos relacionados con triángulos equiláteros en Wikipedia, particularmente el teorema de Viviani, con la finalidad de encontrar teoremas que les permitieran generar varias formas de construir un triángulo equilátero con Geogebra, fueron capaces de almacenar en la memoria a largo plazo y transferir ese conocimiento en la solución de otros problemas (Santos-Trigo y Reyes-Rodríguez, 2016). En resumen, permitir que los estudiantes revisen conceptos o resultados matemáticos de diversas fuentes (impresas o electrónicas) no se contrapone con el desarrollo de organizaciones locales de conocimiento y de entendimiento matemático.

En lo que concierne a los procesos de razonamiento, concebimos a este concepto (el razonamiento) como la línea de pensamiento que una persona sigue para producir afirmaciones y obtener conclusiones al resolver un problema (Lithner, 2008). Una secuencia de razonamiento se puede pensar como una gráfica dirigida en la que cada vértice representa un estado momentáneo de nuestro conocimiento sobre un problema. Cada arista en la gráfica representa el tránsito desde un estado de conocimiento a otro. Una razón es, entonces, la justificación que sustenta la transición entre dos vértices de la gráfica entre los cuales existe una arista. Dado que, no es posible tener acceso directo a los procesos de pensamiento de las personas, se tomará como indicador de los mismos a las acciones que realizan sobre ciertas representaciones externas, plasmadas en sus explicaciones orales o en sus producciones escritas.

## 4 Metodología

Este trabajo forma parte de un proyecto amplio cuyo objetivo es analizar las características del conocimiento y las formas de razonamiento que profesores de bachillerato construyen al resolver problemas con el uso sistemático de tecnologías digitales. Estamos interesados, particularmente, en los procesos de razonamiento que emergen al resolver problemas sobre lugares geométricos, mientras se utiliza de forma sistemática el software GeoGebra. Analizamos las secuencias de razonamiento de un grupo de seis profesores, quienes trabajaron tres horas a la semana durante un semestre en un seminario de resolución de problemas (ocho sesiones), el cual fue coordinado por dos investigadores.

Los participantes en el estudio contaban con formaciones profesionales diversas: licenciatura en matemáticas, ingeniería industrial, ingeniería electrónica, ingeniería en computación, y licenciatura en educación media. Todos los participantes tenían experiencia docente en bachillerato, excepto uno de ellos, quien sólo había impartido asesorías individuales de matemáticas.

Únicamente tres profesores habían usado GeoGebra previamente y por esta razón se implementó una sesión introductoria en la que se ejemplificaron las principales funcionalidades de esta herramienta, enfatizando la utilidad de recursos tales como el *movimiento controlado* y el comando *Lugar Geométrico*, ya que en diversos trabajos se ha demostrado la utilidad de ambas herramientas en el descubrimiento y generación de resultados geométricos, tanto en estudiantes como en profesores de matemáticas de diversos niveles educativos (Espinosa-Pérez, 2012). Los participantes contaron con acceso a Internet para realizar consultas sobre algún concepto que no recordaran, sobre todo en sitios como Wikipedia (https://es.wikipedia.org/) o utilizar alguna aplicación de acceso libre en línea, como el CAS WolframAlpha (https://www.wolframalpha.com/).

Durante el seminario se abordaron cuatro problemas sobre lugares geométricos, adaptados de problemas de libros de texto clásicos de geometría analítica, utilizados en diversas instituciones de nivel bachillerato en México (Kindle, 1970; Lehmann, 1990) y de un artículo de investigación en educación matemática (Glaister y Glaister, 2006). En este reporte se analizan los procesos de razonamiento que emergieron cuando los profesores trataron de resolver un problema que se abordó durante la quinta y sexta sesiones. El problema consiste en identificar cuál es el lugar geométrico de un punto $P$ que es el centro de una circunferencia $c$, la cual es tangente a la recta $l$, cuya ecuación es $x$=-1, y a la circunferencia $c_1$ con centro en (2,0) y radio uno (adaptado de Glaister y Glaister, 2006). Para resolver el problema los profesores trabajaron en parejas y posteriormente realizaron una exposición plenaria del proceso de solución. Los instrumentos de recolección de información incluyeron archivos electrónicos de GeoGebra, producciones escritas elaboradas por los profesores, un reporte de sesión en el que expresaron sus reflexiones acerca de las soluciones propuestas en el seminario, así como videograbaciones de las presentaciones plenarias de las soluciones. La unidad de análisis fueron las secuencias de razonamiento y dentro de estas secuencias se identificaron las estrategias de resolución de problemas utilizadas.

La línea general de solución del problema, en un ambiente de papel y lápiz, consiste en representar algebraicamente las relaciones geométricas entre el punto $P$, y los otros objetos involucrados en el problema (rectas y circunferencias), con la finalidad de encontrar una ecuación del lugar geométrico que describe el punto $P$ en el plano. Algunos autores de libro de texto (Lehmann, 1990), resumen el proceso para encontrar la ecuación de un lugar geométrico en cuatro pasos:

1. Se supone que el punto P, de coordenadas ($x$,$y$) es un punto *cualquiera* [énfasis en el original] que satisface la condición o condiciones dadas, y, por tanto, un punto del lugar geométrico.

2. Se expresa, analíticamente, la condición o condiciones geométricas dadas, por medio de una ecuación o ecuaciones en las coordenadas variables $x$, $y$.

3. Se simplifica, si hace falta, la ecuación obtenida en el paso 2 de tal manera que tome la forma (1). [La forma (1) se refiere a la ecuación $f(x,y)$=0].

4. Se comprueba el recíproco: sean (x1, y1) las coordenadas de cualquier punto que satisfacen (1) de tal manera que la ecuación:

   $$f(x1, y1)=0 \qquad (2)$$

   Es verdadera. Si de (2) se puede deducir la condición analítica de la condición o condiciones geométricas dadas, cuando se aplica al punto (x1, y1), entonces (1) es la ecuación del lugar geométrico que se buscaba. (p. 51)

En la práctica se omite, generalmente el paso 4, ya que la repetición del trabajo del paso 3 al paso 2 es, generalmente inmediata. Nótese en el paso 1 que, al tomar P como un punto *cualquiera* [énfasis en el original] del lugar geométrico, estamos considerando *todos* [énfasis en el original] los puntos del lugar geométrico. (p. 51)

Aplicaremos los primeros tres pasos del procedimiento anterior para encontrar la ecuación del lugar geométrico del problema que nos ocupa, para analizar el proceso de razonamiento involucrado, el cual se contrastará posteriormente con los procesos de razonamiento que emergieron al resolver el problema con GeoGebra.

1. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico, el cual debe ser tangente a la recta l, de ecuación $x$=-1 y a la circunferencia $c_1$ con centro en (2,0) y radio uno.

2. Es importante observar que la circunferencia $c_1$ se encuentra a la derecha de la recta $l$, entonces el punto $P$ debe estar en el primer o cuarto cuadrantes ya que, en caso contrario, la circunferencia $c$ no podría ser tangente de forma simultánea a $c_1$ y $l$. Como la recta $l$, de ecuación $x$=-1 es paralela al eje horizontal, y debido a la condición de tangencia, debe de ser perpendicular a un radio de la circunferencia $c$, entonces el radio de $c$ es igual a $x$+1, ya que la circunferencia $c$ tiene centro en el punto de coordenadas ($x$,$y$). Por otra parte, el punto de tangencia de las circunferencias $c$ y $c_1$ se encuentra sobre la recta que une sus centros. Además, se tiene que, cuando las circunferencia $c$ y $c_1$ son tangentes exteriormente, el radio de $c$ también debe ser igual a la distancia entre los puntos ($x$,$y$) y (2,0) menos una unidad, la cual corresponde al radio de $c_1$. Entonces por las condiciones anteriores se tiene que $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-1=x+1$. Puede darse el caso de que la circunferencia $c_1$ sea tangente interiormente a la circunferencia $c$, en este caso, el radio de c es igual a $\sqrt{(x-2)^2+y^2}+1$.

3. Elevando al cuadrado la ecuación que se obtiene al considerar que las circunferencias son tangentes exteriormente se tiene que $(x+2)^2=(x-2)^2+y^2$, y de ahí que $y^2=8x$, la cual representa la ecuación de una parábola.

El proceso de razonamiento para resolver el problema de la manera anterior requiere de:

1. Formarse una imagen mental o realizar un bosquejo en papel del “problema resuelto”, el cual sirve de apoyo al proceso de representar algebraicamente las relaciones geométricas establecidas en el enunciado del problema. Un bosquejo siempre es inexacto, en el sentido de que las representaciones en papel y lápiz no son capaces de externalizar las relaciones entre los objetos bosquejados, por ello, el estudiante debe tener en mente esas relaciones (tangencia con la recta y la circunferencia), y recuperarlas u obtener relaciones equivalentes o asociadas cuando se requiera, durante el proceso de solución. La elaboración del bosquejo requiere también de conocimientos previos sobre el plano coordenado, sobre cómo ubicar puntos en éste y sobre cómo graficar ecuaciones lineales, y saber que este tipo de ecuaciones representan rectas.

2. Representar algebraicamente las relaciones geométricas entre los objetos presentes en el bosquejo. Para llevar a cabo lo anterior, son necesarios conocimientos previos sobre tangencia entre rectas y circunferencias. Por ejemplo, los estudiantes deben saber que si una recta y una circunferencia son tangentes, entonces el radio de la circunferencia que pasa por el punto de tangencia debe ser perpendicular a la recta tangente; además, que si dos circunferencias son tangentes, entonces el punto de tangencia se encuentra sobre la recta que une los radios de tales circunferencias. Después, estos conocimientos geométricos se deben representar algebraicamente, lo cual, requiere interpretar esas relaciones en términos de igualdades entre distancias. En este caso, la condición de tangencia entre la recta $l$ y la circunferencia $c$ se tradujo en la expresión algebraica $x+1$, que representa la distancia entre el centro de la circunferencia $c$ y la recta $l$. Posteriormente, la relación de tangencia entre las circunferencias $c$ y $c_1$ se tradujo en la expresión $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-1$. Finalmente, como ambas expresiones representan en radio de la circunferencia $c$, se obtiene la ecuación $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-1=x+1$.

3. Simplificar las expresiones anteriores hasta llegar a una ecuación que represente un objeto geométrico conocido (recta, circunferencia, elipse, hipérbola, parábola). Este paso requiere que el estudiante sepa llevar a cabo manipulaciones simbólicas y que sepa reconocer ecuaciones prototípicas de rectas (ecuaciones lineales), o cónicas (ecuaciones cuadráticas).Observación: en la mayoría de los cursos de geometría analítica generalmente se considera únicamente el caso de tangencia externa de circunferencias, es raro que se aborde el caso de que una circunferencia sea tangente interiormente a otra circunferencia.

## 5. Resultados

En este apartado se describen los procesos de razonamiento exhibidos por cada una de las parejas que participaron en la investigación. Al final del apartado se realiza un contraste entre estas formas de razonamiento y aquellas en un escenario de papel y lápiz, y de esta manera identificar algunas posibles ventajas que involucra el uso de un sistema de geometría dinámica en el proceso de resolución de problemas matemáticos. La solución del problema con GeoGebra involucra, en términos generales, la construcción de un punto $P$ que satisfaga las condiciones expresadas en el enunciado del problema: $P$ debe ser centro de una circunferencia $c$, la cual es tangente a una recta $l$ y a una circunferencia $c_1$, y una vez construido $P$, determinar el lugar geométrico que describe dicho punto. Para cada una de las parejas se describe el proceso de solución identificando diferentes episodios que serán de utilidad para reconocer la secuencia de razonamiento utilizada para resolver el problema con ayuda del software. Todos los participantes construyeron, en primer lugar, los elementos dados en el enunciado problema. Introdujeron la ecuación $x = -1$ en el *campo de entrada* del software, así como las coordenadas (2,0) para crear el punto $A$, y posteriormente con el comando Circunferencia (centro, radio), trazaron la circunferencia $c_1$, con centro en $A$ y radio 1.

### 5.1. Solución de Eva y Natalia

#### 5.1.1. Primer episodio

Construcción de una solución parcial. Las profesoras relajaron las condiciones del problema y construyeron una circunferencia tangente a $c_1$, pero no tangente a la recta $x = -1$. Para construir la solución parcial colocaron un punto $B$ sobre la recta de ecuación $x = -1$ y por ese punto trazaron una perpendicular a dicha recta. Colocaron un punto $H$ sobre $c_1$ y trazaron las rectas $AH$ y $BH$.

El punto *I*, intersección de *AH* y la perpendicular a x=-1, es una solución parcial, ya que es centro de una circunferencia tangente a $c_1$, pero no a la recta *x*=-1. Construyeron la circunferencia con centro en *I* y radio *IH*.

### 5.1.2. Segundo Episodio

Verificación visual de que se pueden satisfacer todas las condiciones establecidas en el problema. Se arrastró al punto *B* sobre la recta $x = -1$ y se observó que, para cierta posición de *B*, la circunferencia que es solución parcial también es tangente a la recta $x = -1$. Es decir, un integrante de la familia de soluciones parciales satisface todas las condiciones del problema.

### 5.1.3. Tercer Episodio

Identificación de objetos auxiliares que ayuden a completar la condición faltante de la solución parcial (tangencia con la recta *x* = -1). Las participantes identificaron que *J*, una de las intersecciones de la circunferencia que es solución parcial y la perpendicular a la recta *x*=-1, puede aportar información relevante respecto de cómo completar la condición faltante, ya que en el caso de satisfacerse todas las condiciones, el punto *J* sería el punto de tangencia con la recta *x*=-1.

### 5.1.4. Cuarto Episodio

Reconocimiento de la ruta descrita por el elemento auxiliar. Las profesoras activaron el rastro que describe *J* y arrastraron el punto *B* con el objetivo de identificar si esta ruta es un objeto geométrico tal como una recta, una circunferencia o alguna otra cónica. Visualmente identificaron que la ruta descrita por *J*, con respecto del punto *B* consiste de dos semirrectas perpendiculares.

### 5.1.5. Quinto Episodio

Identificación de los elementos que permitan la construcción del lugar geométrico descrito por el punto *J*, con alguno de los comandos para trazar cónicas (recta, circunferencia, elipse, hipérbola, parábola, o cónica por cinco puntos). Es importante notar que se requiere el uso de alguno de estos comandos, ya que los objetos resultantes se pueden intersecar entre sí, lo cual no es posible cuando alguno de los objetos que se busca intersecar es una traza o un lugar geométrico. Las profesoras se dieron cuenta de que es posible construir las rectas que determinan el lugar geométrico de *J*, con respecto de *B*, a partir de una solución parcial arbitraria, trazando simplemente la recta *JH*.

### 5.1.6. Sexto Episodio

Construcción de la solución. El punto *K*, intersección de la recta *JH* y la recta *x*=-1, es el punto de tangencia de la circunferencia que satisface las condiciones del problema y a partir de ese punto se puede construir el centro de la circunferencia *L*, como intersección de la recta *AH* y una perpendicular a *x*=-1 que pase por *K*. Finalmente, se traza el lugar geométrico de *L*, con respecto del punto H. Este lugar geométrico, visualmente parece dos mitades de parábola.

**Comentario**: el proceso de razonamiento seguido por estas profesoras consistió en generar una solución parcial (SP), en realidad una familia de soluciones parciales, verificar visualmente, usando el arrastre, que un integrante de la familia de SP satisface todas las propiedades del problema, e identificar un punto en la configuración que ayude a completar las condiciones de la SP, en este caso el punto *J*, el cual en algún momento se transforma en el punto de tangencia.

Posteriormente, las participantes identificaron que este punto describe un lugar geométrico fácilmente reconocible (dos semirrectas perpendiculares), el cual al intersecarse con la recta $x$=-1, proporciona el punto de tangencia de la solución. Fue necesario identificar relaciones entre los elementos de la configuración (una recta pasa por el punto $H$ y el punto $J$ de cualquier SP, y la otra recta se puede trazar con el comando perpendicular) que les permitieran trazar las rectas de forma que sea posible obtener puntos de intersección. Una vez trazado el punto de tangencia K con la recta x=-1, se construyó el centro de la circunferencia tangente y mediante el comando lugar geométrico, visualmente se identificó que el lugar geométrico que se solicita en el problema se trata de dos parábolas.

### 5.2. Solución de Gustavo y Miguel

#### 5.2.1. Primer Episodio

Construcción de una solución parcial. Los participantes relajaron las condiciones del problema y construyeron una circunferencia tangente a la recta x = −1, pero que no es tangente a $c_1$. Para construir la solución parcial colocaron un punto $B$ sobre la recta de ecuación $x = -1$ y por ese punto trazaron una perpendicular a dicha recta. Trazaron una perpendicular al eje horizontal por $A$ y trazaron al punto $C$, intersección de las dos perpendiculares. A continuación trazaron el punto $D$, punto medio del segmento $BC$ y construyeron la circunferencia con centro en $D$ y radio $DB$. Esta última circunferencia es una solución parcial.

#### 5.2.2. Segundo Episodio

Verificación visual de que se pueden satisfacer todas las condiciones establecidas en el problema. Se arrastró al punto $B$ sobre la recta $x = -1$ y se observó que, para cierta posición de $B$, la circunferencia que es solución parcial también es tangente a la circunferencia $c_1$.

#### 5.2.3. Tercer Episodio

Identificación de objetos auxiliares que ayuden a completar la condición faltante de la solución parcial (tangencia con la circunferencia $c_1$). Los participantes trazaron la recta $AD$, y nombraron $E$ al punto de intersección de la recta $AD$ y la circunferencia $c_1$. Como al abordar un problema anterior en el seminario, el trazo de una mediatriz había sido determinante para encontrar la solución de ese problema, trazaron la recta $BE$ y la mediatriz de $BE$. Al arrastrar el punto $B$, observaron que cuando se satisfacen todas las condiciones del problema, el triángulo $BDE$ y el triángulo con vértices E, A y (3,0) son isósceles y semejantes entre sí. También notaron, que cuando se satisfacen todas las condiciones del problema, los puntos $E$, $D$ y (3,0) son colineales, o bien que la recta $ED$, para por el punto (3,0). La mediatriz que los participantes trazaron no fue de utilidad para avanzar en el proceso de solución.

#### 5.2.4. Cuarto Episodio

Construcción de una nueva configuración dinámica en la que se mantengan las relaciones de semejanza entre triángulos, la cual conduce a la solución. Los profesores trazaron a partir de los elementos iniciales, un punto $D$ sobre $c_1$, el cual controla el movimiento de la configuración, posteriormente trazaron la recta $AD$, donde $A$ es el centro de $c_1$. A continuación trazaron la recta que une $D$ con el punto (3,0) y llamaron $E$ al punto de intersección de esta recta con la recta $x$=-1. Después trazaron una perpendicular a $x$=-1 por $E$ y llamaron $F$ al punto de intersección de esta perpendicular y la recta $AD$. La circunferencia con centro en $F$ y radio $FE$ es tangente tanto a la recta $x$=-1, como a la circunferencia $c_1$. Los profesores trazaron el lugar geométrico de $F$, con respecto a $D$ y conjeturaron que se trata de una parábola.

**Comentario**: el proceso de razonamiento seguido por estos participantes consistió en generar una solución parcial (SP), en realidad una familia de soluciones parciales, verificar visualmente, usando el arrastre, que un integrante de la familia de SP satisface todas las condiciones del problema. A continuación, mediante el uso de trazos auxiliares (recta *AD*, punto *E*, recta *BE*, mediatriz de *BE*), algunos de los cuales les habían sido útiles para resolver otro problema (mediatriz) trataron de identificar algún punto que les ayudara a determinar cómo completar la solución. Aunque no identificaron un punto que les fuera útil, como en el caso de la solución de Eva y Natalia, pudieron identificar relaciones entre objetos geométricos, explicitadas por los trazos auxiliares tales como: (1) se completan las condiciones del problema cuando la mediatriz de BE pasa por el punto D (centro de la SP), y (2) dos trazos auxiliares (recta *BE* y recta *AD*) forman sub-configuraciones (triángulos) que mantienen una relación de semejanza cuando se satisfacen todas las condiciones del problema. A continuación, se llevó a cabo un proceso mediante el cual se construyó una nueva configuración dinámica en la que se externalizaron, mediante las representaciones del sistema, las relaciones de semejanza entre los triángulos *BDE* y el formado por los puntos *E*, *A* y (3,0), a partir del cual se obtuvo en centro de la circunferencia tangente a $x$=-1 y a la recta $c_1$, el cual describe un lugar geométrico que visualmente parece una parábola.

### 5.3. Solución de Carlos y Pedro

#### 5.3.1. Primer Episodio

Construcción de elementos auxiliares. Los participantes colocaron un punto *C* sobre la circunferencia $c_1$ y trazaron la recta *AC*. Colocaron un punto *B* sobre la recta $x$=-1 y trazaron la mediatriz del segmento *BC*, así como una perpendicular a $x$=-1 por *B*.

#### 5.3.2. Segundo Episodio

Formulación y verificación de una conjetura. Se formuló la conjetura de que el punto *G*, intersección de la mediatriz y la perpendicular a $x$=-1 por *B* es el centro de una circunferencia que satisface las condiciones del problema. Trazaron la circunferencia con centro en *G* y radio *GB*, arrastraron B y visualmente verificaron que la circunferencia con centro en *G* es tangente a x=-1, pero no siempre es tangente a la circunferencia $c_1$. Es decir, construyeron una familia de soluciones parciales.

#### 5.3.3. Tercer Episodio

Identificación de un lugar geométrico útil para completar la solución parcial. Los profesores trazaron el lugar geométrico de *G*, con respecto de *B*, y visualmente conjeturaron que se trata de una parábola con foco en *C* y directriz la recta $x$=-1. También identificaron que la intersección entre el lugar geométrico y la recta *AC* determina el centro de la circunferencia que satisface todas las condiciones del problema.

#### 5.3.3. Cuarto Episodio

Construcción de la solución. La construcción de la intersección entre el lugar geométrico de *G* y la recta *AC*, no se puede realizar directamente, por lo que es necesario construir la parábola como *objeto* y no como *lugar,* con el comando respectivo, para poder trazar el punto de intersección entre la cónica y la recta *AC*. Los participantes identificaron que existen dos de tales intersecciones a las que nombraron *D* y *E*, verificaron que las circunferencias centradas en esos puntos y de radio *DC* y *EC*, satisfacen las condiciones del problema (tangencia con la recta $x$=-1 y con la circunferencia $c_1$). Finalmente, trazaron los lugares geométricos de *D* y *E* y conjeturaron que se trata de parábolas.

**Comentario**: el proceso de razonamiento seguido por estos participantes consistió en generar trazos auxiliares (la recta *AC*, la mediatriz de *BC*, y la perpendicular a $x$=-1 por *B*), particularmente objetos que les han sido útiles en otros problemas como la mediatriz o perpendiculares, con la finalidad de ver si algún punto de intersección entre esos objetos era el centro de la circunferencia que soluciona el problema. Sin proponérselo de forma explícita construyeron una solución parcial, la cual a diferencia de las soluciones parciales de las soluciones expuestas con anterioridad, satisface una condición adicional, esta solución parcial siempre pasa por el punto *C* sobre $c_1$.

A los profesores les pareció interesante visualizar la ruta que describe el punto G, visualmente conjeturaron que se trata de una parábola, y nuevamente, sin proponérselo, generaron un objeto auxiliar (parábola con foco en *C* y directriz $x$=-1) que al intersecarse con otro elemento auxiliar (la recta *AC*) determinan la solución del problema. La construcción de la parábola auxiliar con el comando *Parábola* fue posible dado que se pudieron identificar, de manera visual, los elementos necesarios para construirla, en este caso el foco y la directriz.

## 5.3. Análisis y contraste de los procesos de razonamiento

Al construir los elementos iniciales, se identificó que la ejecutabilidad de las representaciones permitió obtener a los participantes la gráfica de una recta a partir de introducir en el campo de entrada de GeoGebra la ecuación $x$=1; es decir, con el uso de esta herramienta no es necesario conocer cómo graficar ecuaciones de rectas para resolver el problema, lo cual si es necesario en un ambiente de papel y lápiz. En la solución en papel y lápiz se requiere implementar la heurística de considerar el problema resuelto, lo que involucra elaborar un bosquejo inexacto y mantener en mente las propiedades geométricas de los objetos representados en el bosquejo. Por otra parte, con el uso de la herramienta se utilizó, en todos los casos, como primera aproximación, construir una solución parcial, que mediante las propiedades del arrastre se constituye en una familia de soluciones parciales.

La construcción de tales soluciones parciales involucra externalizar las relaciones entre los objetos geométricos mediante los medios representacionales de la herramienta. Con GeoGebra, los participantes apoyados por el arrastre, llevaron a cabo procesos de verificación visual de que es posible satisfacer todas las condiciones del problema, como medio para seguir avanzando en el proceso de solución. Por otra parte, la utilización de elementos auxiliares resulta de vital importancia para explicitar relaciones que de otra forma quedarían ocultas. Con el uso de GeoGebra es posible llevar a cabo formas de trabajo exploratorias, como se observa en la aproximación de Carlos y Pedro, en donde el preguntarse acerca del comportamiento de los objetos en una configuración permitió visibilizar una herramienta (la parábola) que generalmente no se utiliza para resolver problemas geométricos.

**Tabla 5.1** Formas de razonamiento

| **Equipo/ Aspecto** | **Eva y Natalia** | **Gustavo y Miguel** | **Carlos y Pedro** |
|---|---|---|---|
| **Ruta de solución** | 1. Solución parcial (circ. tangente a $c_1$, pero no a $x = -1$). 2. Verificación (visual) que existe la solución. 3. Trazos auxiliares e identificación de punto relevante (que se convierte en punto de tangencia de la solución) 4. El punto relevante genera un lugar geométrico (LG) reconocible visualmente (rectas perpendiculares). 5. Trazar el LG con el comando recta a partir de los datos. 6. Construir centro de la circunferencia que resuelve el problema. 7. Determinación (visual) del LG del punto objetivo. | 1. Solución parcial (circ. tangente a $x = -1$, pero no a $c_1$). 2. Verificación (visual) que existe la solución. 3. Trazos auxiliares e identificación de punto relevante. Uso de objetos relevantes en otros problemas (mediatriz) 4. No se identificó punto relevante, pero se descubrieron relaciones que llevan directamente a la solución (en la solución *BDE* y *EAR*, con R= (3,0), isósceles semejantes y recta *ED* pasa por *R*). 5. Construcción de los objetos que satisfacen las propiedades encontradas en el punto anterior previa. 6. Determinación (visual) del LG del punto objetivo. | 1. Trazo de objetos auxiliares. 2. Formulación de una conjetura incorrecta. 3. Verificación (visual) de que la conjetura es falsa. 4. Se dieron cuenta de que habían construido una solución parcial que satisface dos condiciones (tangente a $x = -1$ y pasa por $C$, sobre $c_1$). 5. Identificación de punto relevante (que se convierte en centro de la solución). 6. Determinación (visual) del LG del punto objetivo. |
| **Forma de razonamiento** | Actividad orientada por el objetivo de construir una solución parcial, encontrar un punto relevante que describa un LG que se pueda construir como recta o cónica, a partir del cual completar la solución. | En principio buscaron construir una solución parcial para después completarla. No identificaron un punto relevante que describiera un LG (recta o cónica) para completar la solución. Los trazos auxiliares les permitieron identificar relaciones no buscadas de antemano (serendipity), en sub-configuraciones (triángulos), que les condujeron a la solución directa. | No tenían un objetivo determinado de antemano. Su actividad inicial fue completamente exploratoria al trazar elementos auxiliares. Sin proponérselo construyeron una solución parcial que satisface dos condiciones y a partir de ahí, visualizaron un punto que describe una parábola, cuya intersección con una recta lleva directamente a la solución. Fue posible construir la solución ya que el foco y directriz de la parábola fueron fácilmente identificables. |
| **Efecto de la herramienta** | El arrastre se utilizó como herramienta de verificación. | El arrastre se utilizó como herramienta de verificación. La exactitud de los trazos permitió identificar relaciones no buscadas previamente. | El arrastre se utilizó como herramienta de verificación. |

Fuente: Elaboración Propia

## 6. Agradecimiento

Agradecemos al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y a la Secretaría de Educación Pública por el apoyo brindado para la realización de este trabajo a través del proyecto Conacyt-168543 y proyecto PRODEP UDG-PTC-1377, respectivamente.

**7. Conclusiones**

Los resultados del estudio ofrecen ideas importantes que pueden servir para el diseño e implementación de actividades de aprendizaje y enseñanza a partir de un problema considerado como rutinario, al abordarse con un software como GeoGebra. Sea visto como una oportunidad para conectar diferentes contenidos matemáticos a partir de la extensión y generalización de resultados, en las cuales el movimiento de los objetos matemáticos ofrece distintas maneras de estudiar conceptos. En este proceso, el empleo de heurísticas ligadas al movimiento es clave para conseguir las configuraciones dinámicas y conectar diferentes elementos de las configuraciones con sus representaciones algebraicas. Los modelos dinámicos de los problemas rutinarios que se encuentran en los libros de texto de Geometría Analítica son puntos de partida para identificar y explorar relaciones matemáticas, formular conjeturas, intentar justificarlas y comunicar resultados. Por ejemplo, los participantes construyeron un modelo dinámico basado en la heurística que consiste en arrastrar un punto sobre una circunferencia para controlar el movimiento de una recta y de forma coordinada, emplearon el comando deslizador para identificar relaciones entre los objetos geométricos de la configuración y explorar familias de secciones cónicas (parábolas, elipses e hipérbolas). Asimismo, identificaron y relacionaron el papel del deslizador con un parámetro para obtener un modelo analítico y construir de manera algebraica las cónicas.

Las propuestas curriculares generalmente se organizan en términos de principios, normas y formas de pensar que caracterizan el desarrollo y práctica de la disciplina (NCTM, 2010). ¿En qué medida los profesores siguen esos principios para interpretar los programas y orientar sus prácticas de enseñanza? En particular, ¿En qué medida se emplean y promueven actividades que fomentan el uso coordinado de la tecnología digital? Se tiene evidencia de que el uso sistemático de un SGD no solo mejora lo que los profesores hacen con el uso de papel y lápiz, sino también extiende y abre nuevas rutas de razonamiento para desarrollar conocimiento matemático. Por lo tanto, el razonamiento asociado con el uso de las herramientas digitales necesita ser caracterizado y explicitado en el currículo con el fin de que los profesores lo incorporen a sus prácticas de enseñanza.

La exploración del modelo dinámico no sólo es relevante para identificar y formular conjeturas o relaciones matemáticas, sino que favorece razonar las tareas en términos de aproximaciones gráficas y visuales sin que exista de forma explícita un modelo analítico. Existe evidencia de que la construcción de un modelo dinámico ofrece la oportunidad de explorar en tiempo real el comportamiento de algunos parámetros como resultado del movimiento. Con el uso sistemático de un SGD es posible extender el análisis a diferentes casos al mover diferentes objetos que se encuentran en un modelo dinámico inicial, por ejemplo, un punto o una recta que aparecen como fijos en un primer momento, pueden ser desplazados a otra posición sobre el plano y sus propiedades se mantendrán. En este contexto, las propuestas curriculares necesitan explicitar no sólo los cambios debido a las nuevas rutas de aprendizaje para la construcción de resultados matemáticos en las cuales es necesario explicitar las estrategias de enseñanza que ayuden a los estudiantes a incorporar el uso sistemático de las herramientas digitales en las experiencias de resolución de problemas, sino también identificar características de las tareas que ofrezcan a los estudiantes amplias oportunidades de incorporar elementos del pensamiento matemático a su aprendizaje.

**8 Referencias**


Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. ZDM, 34(3), 66-72.

Baccaglini-Frank, A. & Mariotti, M. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 15, 225-253.

Berger, W. (2014). A more beautiful question: The power of inquiry to spark breakthrough ideas. New York, NY: Bloomsbury.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nichols, J., Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second grade mathematics project. Journal for Research in Mathematics Education, 22, 3-29.

Cullen, C. J., Hertel, J. T. & John, S. (2013). Investigating Extrema with GeoGebra. Mathematics Teacher, 107(1), pp. 68-72.

Donald, M. (1993). Origins of the modern mind. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Espinosa-Pérez, H. (2012). Resolución de problemas de geometría mediante el uso de un software de geometría dinámica: recursos, procedimientos, heurísticas y el contenido matemático. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Glaister, E. & Glaister, P. (2006). Introducing conics without eccentricity. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37(2), 235-245.

Guven, B. (2008). Using Dynamic Geometry Software to Gain Insight into a Proof. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 13, 251-262.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., y Human, P. (1997). Making sense: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth, NH: Heinemann.

Kaput, J. J., & Schorr, R. Y. (2008). Changing representational infrastructures changes most everything. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and Perspectives (Vol. 2, pp. 211-253). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Karatas, I. (2011). Experiences of Student Mathematics Teachers in Computers-Based Mathematics Learning Enviroments. International Journal for Mathematics Teaching and Learning. Recuperado el 19 de enero de 2018 de http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/karatas.pdf.

Kindle, J. H. (1970). Teoría y problemas de geometría analítica plana y del espacio (Trad. Luis Gutiérrez Díez y Ángel Gutiérrez Vázquez). México: McGraw-Hill.

Koehler, M. J. & P. Mishra (2009). What is technological pedagogical content knowledge? Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9(1), pp.60-70.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*, 29-63.

Lehmann, C. (1990). Geometría Analítica (Díaz, R. Trad.). México: Limusa. (Primera edición 1942).

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 13, 135-157.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. Educational Studies in Mathematics, 67(3), 255-276.

Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A new framework for teacher knowledge. Teachers College Record, 108 (6), 1017-1054.

Moreno-Armella, L. & Hegedus, S. J. (2009). Co-action with Digital technologies. ZDM Mathematics Education, 41(4), 505-519

Moreno-Armella, L. (1996). Mathematics: a historical and didactic perspective. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 27(5), 633-639.

Moreno-Armella, L. (2002). Fundamentación cognitiva del currículo matemático. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas (pp. 40-66). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Moreno-Armella, L., & Santos-Trigo, M. (2008). Democratic access and use of powerful mathematics in an emerging country. In L. D. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education, 2nd Edition (pp. 319-351). New York: Taylor & Francis.

Moreno-Armella, L., & Santos-Trigo, M. (2015). The use of digital technology in mathematical practices. In L. D. English and D. Kirshner (Eds.), Handbook of International Research in Mathematics Education, 3rd Edition (pp. 595-616). New York: Roudledge.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J., & Kaput, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. Educational Studies in Mathematics, 68, 99-111.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2010) Mathematics Curriculum. Issues, Trends, and Future Directions, edited by Reys, B.J., Reys, R.E. and Rubenstein, R., The Council, Reston, VA.

Pea, R. D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. En A. Schoenfeld (Ed.), Cognitive Science and Mathematics Education (pp. 89-122). Hillsdale: Erlbaum.

Polya, G. (2009). Cómo plantear y resolver problemas (Trad. Julián Zugazagoitia). México: Trillas. (Trabajo original publicado en 1945).

Reyes-Rodríguez, A. (2009). Uso de herramientas computacionales en la resolución de problemas: implicaciones en el aprendizaje (Tesis doctoral inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.

Santos-Trigo, M. (2007). La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. Mexico: Trillas.

Santos-Trigo, M. & Barrera-Mora, F. (2011). High School Teachers Problem Solving Activities to Review and Extend Their Mathematical and Didactical Knowledge. *PRIMUS, 21* (8): 701-720.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machin, M. (2011). Framing a problem solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. Proceedings of the Seventh Conference of the European society for Research in Mathematics Education. Recuperado el 28 de noviembre de 2011, de http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/15b/CERME7-WG15B-Paper18_Camacho.pdf

Santos-Trigo, M. & Moreno-Armella, L (2016). The Use of Digital Technology to Frame and Foster Learners' Problem-Solving 2 Experiences. En P. Felmer et al. (eds.), Posing and Solving Mathematical Problems, Research in Mathematics Education. Springer.

Santos-Trigo, M. & Reyes-Rodríguez, A. (2011). Teachers’ use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42 (3), 313-336.

Santos-Trigo, M. & Reyes-Rodríguez, A. (2016). The use of digital technology in finding multiple paths to solve and extend an equilateral triangle task. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(1), 58-81.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Simon, M. A. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. Educational studies in mathematics, 26(1), 71-94.

Steen, L.A. (1988). The science of patterns. *Science, 240*(29), 61-616.

Stein, M. K. & Smith M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3, 268-275.

Vygotsky, L. S. (1962). Thought and language. Cambridge, MA: MIT Press.

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of the higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wertsch, J. V. (1993). Voices of the Mind: A Sociocultural Approach to Mediated Action. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.