Integración de la tecnología mediante la planeación docente, una experiencia al tema de la integral definida

BRICEÑO-SOLIS, Eduardo C., HERNÁNDEZ-SÁNCHEZ, Judith A, MUÑOZ-HERNÁNDEZ, J. Jesús y KU-EUAN, Darly A.

E.Briceños, J. Hernández, J.Muñoz y D.Ku

Universidad Autónoma de Zacatecas

C. Cristóbal, M. Olvera, V. Vargas (Dirs.) Educación para la interdisciplinariedad. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

The experience of a teacher on his teaching practice is shared with the use of technology for teaching the definite integral. As a point of reflection, class planning is considered as practice, under the integration of a model that selects and articulates the technological, didactic and mathematical knowledge of the content to be taught (TPACK) with a guideline of hypothetical learning trajectories (THA). that the teacher manages in his didactic planning. The methodological framework of content analysis is used to analyze the teacher's practice. The results of the practice emphasize that the union of the model and reflection of the planning (TPACK-THA) allows a classroom integration for the improvement of teaching practice

Planning, Technology, Definite Integral, TPACK-THA

1. Introducción

En México se han hecho esfuerzos por incorporar las tecnologías en las aulas de matemáticas; socialmente el desarrollo de estos recursos digitales es cada vez más acelerado no sólo en nuestro quehacer cotidiano y profesional, sino en su integración curricular y en aulas de clase (Castro, 2017). Esto ha generado que los educadores se familiaricen más con las tecnologías para su clase, con todas las complejidades que esto conlleva en su manejo y uso. Sin embargo, el empleo de estos recursos tecnológicos no es trivial, ya que requiere de cierta negociación para decidir cómo usarla y precisar con qué propósito integrarla para el aprendizaje de las matemáticas.

Consideramos que una de las problemáticas de la integración de las tecnologías en el aula de clase, es que existe una brecha entre sus alcances y cómo el profesor podría incluirla en su práctica docente. Es decir, para el profesor no es claro qué y cómo articular contenidos matemáticos con el uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) y mucho menos, cómo planificar actividades matemáticas-tecnológicas en el aula (Briceño Hernández y Muñoz 2016). Lo anterior, dado que el software como GeoGebra, geómetra y cabri-geometry, cambian la forma de organizar las actividades matemáticas dirigidas a construir los contenidos o resolver problemas. En este caso, se usa menos el compás y la regla (que también es un tipo de tecnología escolar) y en su lugar se usa un puntero en un ambiente digital que controla, de forma dinámica: puntos, segmentos, círculos y rectas, generando argumentos de diferente tipo.

Para lograr este tipo de actividades-tecnológicas matemáticas es necesario que los profesionales de la educación promuevan sus competencias digitales. Entendiendo esto último, como el conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes sobre las TIC que debe poseer un profesional de la educación para alfabetizar tecnológicamente a sus educandos (Cabezas y Casillas 2017). Sin embargo, existe evidencia de que esta competencia es poco promovida, y no es reconocida como importante en la formación inicial de futuros profesores (Beneitone, et al., 2007). Esto no es diferente para el caso de los profesores en activo pues en el estudio de Magallanes, Briceño y Ku (2017) se midió esta competencia con estudiantes de maestría en matemática educativa del estado de Zacatecas, que en su mayoría son profesores activos. Se les preguntó qué tanto uso hace de las TIC en su práctica docente. Entre los resultados obtenidos se encuentra que un gran porcentaje participan en redes sociales como Facebook y Twitter. En contraparte son pocos los que usan redes de tipo académico como Academia.edu o plataformas como Moodle. En un estudio similar realizado en España, Cabezas y Casillas (2017) obtuvieron resultados similares. En éste se propuso analizar qué tanto los profesores son residentes digitales; es decir, cómo usan la tecnología en su práctica. Aquí se evidencia que los profesores la utilizan más para recreación que para la vida académica. Al respecto los autores argumentan:

Desde nuestro punto de vista, esto puede deberse a que esta generación ha aprendido a utilizar las TIC de manera autónoma, casi siempre, en contextos familiares de ocio y tiempo libre, y fundamentalmente con la necesidad de comunicarse y relacionarse personalmente; pero no han aprendido –ni nadie les ha enseñado– su uso desde un punto de vista que se podría denominar académico y profesional (p. 68).

No podemos decir que esta sea la única causa problemática en torno a la integración académica de las TIC en el aula de matemáticas. En Haciomeroglu, Bu y Haciomeroglu (2010), mencionan que los resultados de la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas, han mostrado que los profesores hacen un uso limitado de ésta. La razón principal es la incertidumbre de cómo usarlo en su práctica docente. Esto ha llevado a clasificar a los profesores en torno a la integración que hacen de la tecnología en su aula. Los primeros son los profesores *resistentes* que no tratan y se resisten a incorporar las tecnologías en sus aulas. Los *novatos* que bajo una postura ingenua muestran aspectos potenciales de la tecnología desde una perspectiva motivacional. Los *tecnócratas* que son profesores con experiencia en las TIC, pero se dedican sólo a enseñar el ambiente tecnológico. Por último, los *experientes* que usan la tecnología como medio para reflexionar la comprensión de un concepto matemático preocupándose por la didáctica intrínseca en estos procesos (Vitabar, 2011).

La complejidad para incluir la tecnología en el aula de matemáticas ha tenido como resultado investigaciones que buscan incidir en la formación de profesores en el uso de las TIC (González, 2014; Rojano, 2006; Hernández y Quintero 2009 y Barrigas 2013). Este trabajo está guiado por la misma problemática y el mismo interés. Es decir, brindar elementos al profesor de matemáticas para integrar el uso de la tecnología en el aula como una herramienta didáctica poderosa. Para ello sostenemos que el profesor requiere sistematizar su práctica docente utilizando referentes de corte teórico-metodológico. Lo anterior le permitirá analizar y reflexionar, cómo y qué acciones son pertinentes con la tecnología para enseñar un contenido matemático escolar. Luego, se propone la planeación docente como una competencia clave para evidenciar tal aspecto, pues como lo proponen Lupiañez y Rico (2008), ésta permite ver cómo los profesores organizan contenidos matemáticos para su clase.

Luego, la planeación es parte importante en la reflexión del currículo de matemáticas, ya que permite un acercamiento parcial de cómo el profesor de matemáticas organiza una clase. Además brinda información sobre qué y cómo pone en juego conocimientos sobre un contenido matemático escolar. Por tal razón, se presenta a continuación el marco de referencia que sirvió en esta investigación como un modelo de reflexión y de articulación de conocimientos para la integración de la tecnología en una clase de matemáticas.

2. Articulación de la planeación de la integral definida con el modelo TPACK-THA

A continuación, se presenta un modelo teórico-metodológico que considera los conocimientos propuestos por el modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) y la articulación de los mismos mediante la THA (Trayectoria Hipotética de Aprendizaje). El primero propone los conocimientos necesarios para la implementación de una clase de matemáticas con tecnología en un determinado contexto: el contenido matemático escolar, el didáctico y el tecnológico; cada uno de ellos se presenta de manera más detallada en la siguiente sección. La articulación requirió una guía de actuación para su aplicación por el profesor para la enseñanza de la integral definida conocida como la THA.

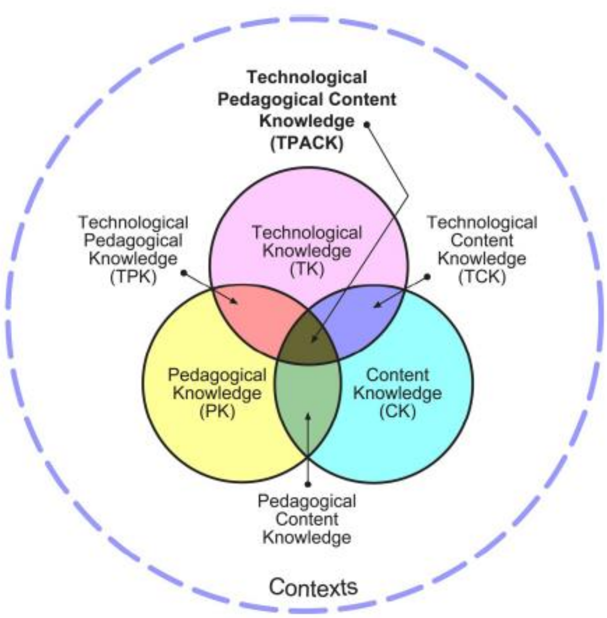
Ésta ofrece una descripción de aspectos clave para la planeación de clases de matemáticas. Una THA se basa en los objetivos de aprendizaje propuestos para los estudiantes; en las tareas matemáticas que se utilizarán para promover estos objetivos y plantear posibles hipótesis que tiene el profesor acerca de los procesos de aprendizaje de los estudiantes en torno al contenido matemático a enseñar. De esta manera estos enfoques permitieron identificar qué contenido matemático y cómo está condicionado su didáctica por medio del recurso tecnológico. A continuación, describimos el modelo de integración del contenido matemático con el uso de tecnología (TPACK, por sus siglas en inglés).

2.1 El modelo didáctico para la integral definida. El TPACK

El TPACK fue desarrollado por Mishra y Koehler (2006) y aborda la problemática de integrar tecnología en el aula de clases. Este modelo describe tres conocimientos que el profesor necesita para planificar su clase. El TPACK es una extensión del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) propuesto por Shulman (1986, citado en Koehler y Mishra, 2009). Esta extensión consiste en explicar cómo la comprensión que tienen los profesores de las tecnologías educativas y el PCK interactúan entre ellas para producir una enseñanza aceptable con uso de tecnología. Éste está compuesto por tres núcleos principales que están relacionados con el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido (CK), conocimiento pedagógico (PK) y conocimiento tecnológico (TK).

Para este modelo las intersecciones entre estos cuerpos de conocimiento son igual de importantes. Estas intersecciones están representadas como PCK (conocimiento pedagógico del contenido), TCK (conocimiento tecnológico del contenido), TPK (conocimiento tecnológico pedagógico), y el TPACK (conocimiento tecnológico pedagógico del contenido). Este modelo y sus intersecciones se presentan en la Figura 4.1. En particular es la última intersección de conocimientos, conocida como TPACK, que se propone permitirá implementar a la tecnología como un agente de cambio educativo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Figura 4.1 Modelo de Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido



A continuación, se presenta la descripción de cada una de las intersecciones del modelo de Mishra y Koehler (Mishra y Koehler, 2006). El entendimiento de cada intersección de conocimientos permitió delimitar qué en específico, resultaría pertinente en su planeación de actividades como docente para el tema de la integral definida.

2.2 Intersección de los conocimientos del TPACK para el diseño de actividades

– *Conocimiento Pedagógico del Contenido*. Este conocimiento es similar y consistente con la idea de Shulman (1986, 1987; citado en Koehler y Mishra, 2009). Es decir, la transformación de la materia para la enseñanza ocurre cuando el profesor interpreta la materia, encuentra múltiples maneras de representarla, y la adapta e hila los materiales instructivos para concepciones alternativas al conocimiento previo del estudiante.
– *Conocimiento Tecnológico del Contenido*. Éste consiste en la comprensión de cómo la tecnología y el contenido se relacionan y limitan una a otra. Los profesores necesitan dominar más que la materia que se imparte; pues ellos deben tener un profundo entendimiento de cómo el contenido se puede modificar por la aplicación del uso específico tecnológico.
– *Conocimiento Tecnológico Pedagógico*. Este conocimiento es el cambio de cómo enseñar con tecnologías formas específicas del contenido. Esto incluye conocer los alcances y limitaciones tecnológicas al relacionarse con los diseños y estrategias pedagógicas disciplinares apropiados.

Se destaca que el modelo es propuesto para la enseñanza con tecnología para cualquier disciplina, así los alcances y limitaciones de la tecnología son afectados por el contexto disciplinar que nos permite hablar de una componente didáctica. De esta manera la última componente del modelo, llamado TPACK, consiste en la reflexión después de aplicar las tres intersecciones mencionadas, es decir, un conocimiento emergente que va más allá de las tres componentes: contenido, pedagogía y tecnología. Así el TPACK, es una comprensión específica de las interacciones entre conocimientos propuestos (matemático, didáctico y tecnológico). Por último, el círculo punteado (Figura 4.1) es etiquetado como contexto que enfatiza los conocimientos están instanciados en contextos específicos de enseñanza y aprendizaje. Por tal motivo, a continuación, se presenta el modelo TPACK de la integral definida para nivel medio superior.

3. Propuesta de TPACK para la enseñanza de la integral definida

A continuación, se describe la articulación de conocimientos matemático, didáctico y tecnológico propuesta por el profesor al tema de integral definida, en el contexto de una clase del nivel medio superior.

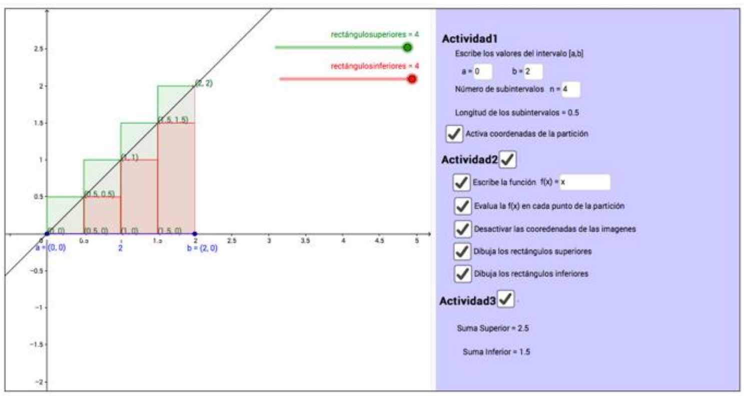
Conocimiento matemático de la integral definida. En esta dimensión el profesor tomó la siguiente definición de integral definida considerando la propuesta curricular nacional, del programa de estudios del nivel medio superior (DGB, 2011):

Si f es una función continúa definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Hacemos que $x_0\ (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n (= b)$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elegimos $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ como los puntos muestra en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la integral definida de f, desde a hasta b, es $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$. (Steward 1999).

Conocimiento pedagógico de la integral definida. El profesor argumenta su elección, diciendo que la definición tiene una ventaja didáctica, pues se puede vincular con la *visualización* de cálculo de áreas en distintos contextos; es decir, la aproximación por sumas por exceso y por defecto en representaciones geométricas, numéricas y algebraicas donde el estudiante pueda vincular estas definiciones y dar significado al concepto de integral definida.

Conocimiento tecnológico de la integral definida. En esta componente el profesor identificó qué del GeoGebra podría ser utilizado para abordar el concepto de integral mediante la visualización de áreas; como resultado él propone construcciones dinámicas en GeoGebra con la finalidad de que los estudiantes, exploren y argumenten la noción de área con la suma de rectángulos por exceso y por defecto en la gráfica de una función. Para un mejor entendimiento y por extensión del documento, recomendamos al lector consultar la siguiente dirección https://www.geogebra.org/m/Pu4bSAQn, donde se encuentra la actividad e instrucciones de construcciones en GeoGebra. En la figura 4.2 y la Tabla 4.1 se presenta la actividad y su justificación.

Figura 4.1 Actividad estructurada del profesor para la enseñada de la integral.



El conocimiento tecnológico utilizado en cada actividad consistió básicamente en definir casillas de entrada donde el estudiante asigna valores y éstas se representan visualmente en el plano cartesiano. De esta manera se articula por el profesor esta selección y organización de contenidos con la THA ilustrado en el siguiente diagrama. Esto permitió considerar por el profesor, ciertos conocimientos para con el objetivo de que el estudiante calcule e interprete sumas de Riemman considerando distintas representaciones (plan del profesor para las actividades) dando énfasis a un enfoque visual de las explicaciones del contenido De esta forma el profesor diseñó el siguiente instrumento para recabar los elementos que contiene la THA y TPACK con ciertas intencionalidades didácticas que a continuación se describen.

Tabla 4.1 Intencionalidad didáctica de las actividades del profesor

Conocimiento tecnológico utilizado	**Intencionalidad didáctica**
Mediante una casilla de entrada se decide el intervalo donde se calcula el área bajo una función, así como el número de subintervalos (Actividad 1)	Son propuestas para que los estudiantes relacionen el valor de "n" con el número y longitud de los subintervalos. De esta manera se pretende introducir la noción de partición. (Se recomienda consultar la actividad)
Se propone el tipo de función y el número de rectángulos superiores e inferiores por medio del uso de un deslizador en el software GeoGebra (Actividad 2)	Tiene como objetivo realizar una aproximación del área bajo una curva que el profesor propone, ($y = \frac{x^2}{4}$) en cierto intervalo utilizando el deslizador de GeoGebra, para particionar su área, en cierto número de rectángulos. Los estudiantes tendrán que completar una tabla utilizando las sumas superiores con la intención de que ellos relacionen las alturas de los rectángulos con los puntos de la partición. En la última parte de esta actividad se les pide que realicen el llenado de la tabla, pero ahora, con una partición de seis subintervalos con la intención que relacionen que a más particiones que tenga el subintervalo, se obtiene una mejor aproximación del área.
cálculo del resultado de la suma de estos rectángulos mediante el vínculo de ciertas variables de forma dinámica para que se visualice el resultado (Actividad 3).	Que el estudiante identifiquen que conforme el número de intervalos aumenta, la diferencia entre las sumas superiores e inferiores de áreas de rectángulos disminuye. De esta manera el profesor considera la forma de como generalizar esta idea hacia el concepto de la integral definida como la aproximación del área bajo la curva por medio de una serie de rectángulos para un número considerado de intervalos. Esto último lleva a la idea de límite.

Después de que los estudiantes hayan terminado el último ejercicio de la Actividad 3 se espera tendrán los elementos para formalizar la definición de integral definida con el enfoque de Riemann propuesto en el plan de estudios del nivel medio superior que es:

Calcula e interpreta áreas bajo la curva mediante las Sumas de Riemann en la resolución de problemas en un entorno teórico (DGB, 2011, p. 19).

Hasta el momento se han presentado los conocimientos que fueron identificados y construidos por el profesor mediante el modelo TPACK; sin embargo, esto no permite soslayar la organización de esta información para su implementación en clase. Esto fue resuelto por el profesor quien adoptó como herramienta metodológica para la planeación, ejecución y evaluación de su clase las trayectorias hipotéticas de aprendizaje. La THA ofrece una descripción de aspectos clave de la planeación de clases de matemáticas. Se basa en los objetivos de aprendizaje propuestos por el profesor para los estudiantes; en las tareas matemáticas que se utilizarán para promover estos objetivos y en las hipótesis que tiene el profesor acerca de los procesos de aprendizaje de los estudiantes en torno al contenido matemático a enseñar. El objetivo de aprendizaje que tiene el profesor indica la dirección de la trayectoria hipotética de aprendizaje. En ese sentido se traza un camino por el que puede transitar el aprendizaje.

4. Metodología para la reflexión de la aplicación de la planeación del docente

La planificación y la gestión de clase son dos de los problemas que el profesor debe resolver en su actividad docente (Gómez, 2009). Comúnmente los profesores planifican y realizan sus clases con ayuda de su experiencia, de documentos y materiales de apoyo disponibles como los tecnológicos. Si esperamos que los profesores de matemáticas aborden su trabajo diario de manera sistemática y reflexiva, basándose en un conocimiento profesional, entonces ellos deberían conocer y utilizar principios, procedimientos y herramientas que, fundamentados en la didáctica de la matemática, permitan diseñar, evaluar y comparar las tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2009).

Esto permitirá que el profesor no vea a la planeación como una consecución de temas, sino como un medio para reflexionar sobre los medios para lograr los objetivos de aprendizaje y la manera de organizarlos y articularlos. En esta sección analizamos la planificación realizada por el profesor, con el fin de entender la organización sistemática y articulada que plantea para el tema de la integral definida. Para ello se emplea el método propuesto por Rico (2013) y Gómez (2009) llamado análisis de contenido.

4.1 El análisis de contenido como método para analizar la propuesta del profesor

El análisis de contenido es un método para el procesamiento y revisión de las dimensiones cuantitativas (médium) y cualitativas (mediador) de los contenidos de la comunicación. Su origen y antecedentes procede del trabajo de censores y del estudio hermenéutico de textos (Fernández-Cano, 2010). El análisis de contenido puede ayudarnos a: descubrir patrones en el discurso, contrastar una hipótesis previa e Inferir significados interpretativos en un texto. El análisis de contenido se ha utilizado en educación matemática, como un método para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que aparecen en un escrito o discurso (Rico, 2013). Entre los discursos susceptibles a ser estudiados, están los textos escolares, el del profesor, los libros de texto, los planes de estudio y cualquier producción escolar escrita o discursiva. Lo anterior, puede aplicarse a las planeaciones de los profesores, ya que pueden verse como documentos que expresan el discurso matemático escolar que el profesor planea utilizar en sus clases.

De esta manera el análisis de contenido permite reflexionar sobre la organización y articulaciones de los discursos presentes en las planeaciones de los profesores. Para ello, este método cuenta con tres organizadores, el primero sobre la estructura matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula; el segundo sistema de representación y el último basado en los contextos matemáticos y no matemáticos bajo los que el contenido adquiere sentido (análisis fenomenológico). Lo anterior, toma relevancia ya que el significado de un contenido matemático escolar, se adecúa a la terna Estructura Conceptual-Representaciones-Fenómenos, con la cual, se caracteriza la intencionalidad didáctica de un contenido para una clase en un sentido más amplio (Rico, 2013 y Gómez 2006). A continuación, se describen las tres dimensiones propuestas.

4.2 La estructura conceptual

La estructura conceptual, es la descripción y organización de los conceptos en acción y la relación entre los mismos, es decir, no basta con identificar y definir los conceptos que son fundamentales, sino que se trata de organizar y relacionar los conceptos que están incluidos. La construcción de la estructura conceptual es un proceso que se inicia con la identificación de los conceptos de los que forma parte y de los que el concepto estructura. A esto hay que sumarle algunas de sus relaciones y procedimientos que se desarrolla, en la medida en que se tienen en cuenta los sistemas de representación, los modelos y fenómenos asociados. (Gómez, 2009). Visualmente se puede analizar la estructura mediante un mapa conceptual, donde se puedan apreciar la organización y relación de un concepto con otros.

4.3 Sistemas de representación

Una vez que se tiene la estructura matemática, podemos continuar con los sistemas de representación que son el segundo organizador del análisis de contenido. Este se puede expresar mediante todos sus posibles sistemas de representación. Los sistemas de representación aportan un significado de la estructura matemática que luego viene a presentarse en las matemáticas escolares y forman parte de los significados del tema en estudio.

El término “sistema de representación” tiene diferentes significados en la didáctica de la matemática (Gómez, 2009), que se utilizan para representar diferentes facetas de un concepto o estructura matemática. En general, se presentan como los signos, reglas o medios que permiten manipular el contenido matemático en cuestión. Una de estas representaciones visto como un medio de representación es el ejecutable; el cual consiste en la tecnología como medio o instrumento para representar de manera gráfica, simbólica o geométrica un contenido.

4.4 El análisis fenomenológico

Finalmente, el tercer organizador del análisis de contenido se obtiene mediante un análisis fenomenológico (Gómez, 2009). En el área, la fenomenología, entra lo que es la matemática y los fenómenos que modelan ya sea de carácter naturales, sociales e incluso dentro de la misma matemática. En esta faceta se analiza la relación entre los fenómenos y el contenido con la intención de identificar, describir, caracterizar y clasificar los fenómenos; además, permite organizarlos por subestructuras contenidas en la estructura en cuestión. El profesor debe incluir los tres organizadores dentro del mapa conceptual que dará evidencia de la estructura conceptual; esto da como resultado el análisis de contenido cuando se tiene la estructura matemática y los sistemas de representación y por consiguiente la fenomenología, se pueden identificar los significados que están presentes en la estructura matemática, la extensión y profundidad que se hacen presentes en las planeaciones del profesor; además de los distintos modos de expresión y de uso con que se manejen los conceptos (Gómez, 2009).

4.5 Instrumento de análisis de la planeación de clase docente

La información de las planeaciones se analizó a partir del llenado de un instrumento, que se ha diseñado considerando los tres organizadores del análisis de contenido. Este instrumento, nos permitirá identificar los significados de un tema con base en los organizadores del análisis de contenido. En la Tabla 4.2 se presenta una primera propuesta del instrumento para el análisis de las planeaciones docentes de un tema matemático escolar.

Tabla 4.2 Instrumento para el análisis de los significados de un tema matemático.

Profesor											
Estructura (Rico, 2003)			Representaciones (Gómez y Cañadas, 2015)					Fenomenología (Gómez y Cañadas, 2016)			
Conceptos	Definiciones	Procedimientos	Creación de signo	Gráfico	Geométrico	Simbólico	Ejecutable	Fenómenos	Contextos	Subestructuras	Relación entre subestructuras y contextos

Esto nos permitió identificar los significados de la integral definida mediante el uso de tecnología, además de la relación entre cada uno de los organizadores del currículo y las relaciones dentro de los mismos.

5. Análisis de los resultados

A continuación, se presentan el análisis de la puesta en escena de la aplicación de la planeación del profesor, con estudiantes de bachillerato. Usando el instrumento anterior interpretamos esta planeación del profesor con base en sus estructuras, representaciones y fenomenología para reflexionar sobre el patrón didáctico y los significados que el profesor puso en juego para la comprensión de la integral definida en una clase de matemáticas del nivel medio superior.

El profesor proporcionó hojas de trabajo de la actividad para que el estudiante resolviera junto con la actividad en GeoGebra (La actividad es tomada de Cantor (2013) y diseñada en dicho software. El lector puede descargar tanto la hoja de trabajo como el archivo GeoGebra en https://www.geogebra.org/m/Pu4bSAQn). La estrategia del profesor consistió en el trabajo de sus hojas en equipos y episodios expositivos del profesor donde considera afirmar los conceptos que han manejado los estudiantes.

Tabla 4.3 Análisis de la estructura conceptual del profesor

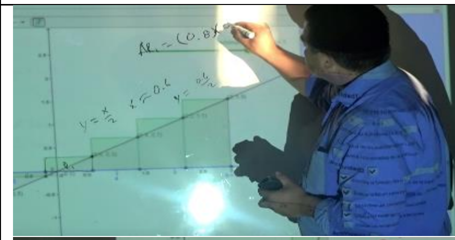
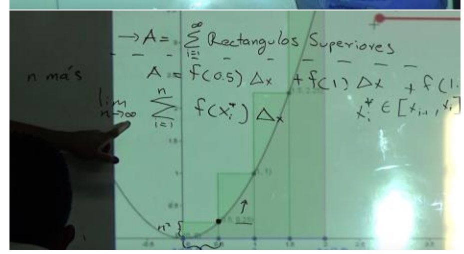
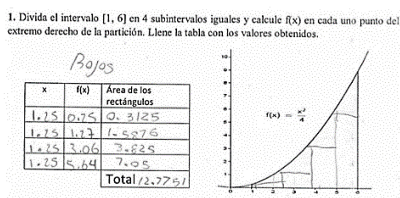
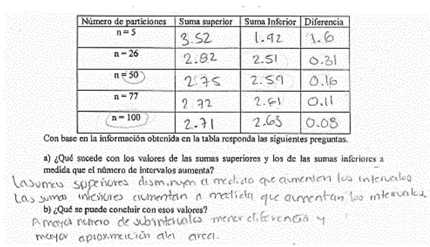
Estructura conceptual			
Conceptos	**Definiciones**	**Procedimientos**	**Evidencia**
Integral definida	$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$	Aproximación mediante sumas reiteradas: Calcular partición, bases y alturas de cada rectángulo	 
	Como fórmula de sumas de Riemman *Notación Sigma*: $\sum_{i=m}^{n} F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \cdots .. + F(n-1) + F(n)$ donde m y n son números enteros, y $m \leq n$ (Leithold, 1998, p. 329)	Sucesión de sumas	En esta sección el profesor reafirma la fórmula de suma de Riemman desde una relación gráfica y analítica. Esta exposición del profesor la realiza cuando ya el estudiante, en las actividades, ha manejado este concepto. Es justamente en este episodio que el profesor considera la creación de signos y traducciones entre los sistemas de representación gráfico y simbólico del concepto formalizando lo que el estudiante ya ha realizado. En la tabla 4.4, segunda columna se muestra la respuesta de un estudiante sobre el cálculo del área bajo la curva en los sistemas de representación que el profesor propone.

Tabla 4.4 Análisis de los sistemas de representación de la planeación de clase del profesor

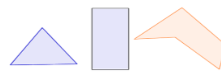
<table>
<tr><th>Creación de signos</th><th>Numérico – Gráfico - Ejecutable (GeoGebra)</th><th>Geométrico-Ejecutable</th><th>Simbólico-geométrico-Ejecutable (Powerpoint)</th></tr>
<tr>
<td>La integral como área</td>
<td>La actividad propone realizar la representación numérica por medio de tablas donde el estudiante con el uso de GeoGebra, lleva un registro del cálculo de área de cada rectángulo. Se propone que relacione este cálculo entre la gráfica y lo registrado en la tabla con el fin de analizar, la definición de integral definida por medio de la suma de Riemman.

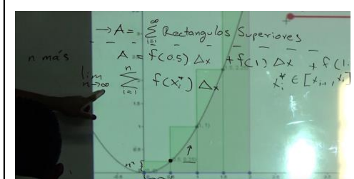


El estudiante empieza a realizar procedimientos de cálculo del área de los rectángulos para aproximar a la totalidad del área de la curva. Posterior con el uso de un deslizador en GeoGebra, cuya función es ilustrar visualmente mayor partición al aumentar los rectángulos, el estudiante puede representar en tablas, las sumas inferiores y superiores de los rectángulos para un determinado “n” número de particiones. Por ejemplo se inicia con valores de n=5 hasta 100 que sería tedioso ilustrar a lápiz y papel. Lo anterior posibilita el tratamiento del límite cuando n tiende al infinito y con ello, dar sentido al concepto dentro de su definición como se muestra en la siguiente figura.



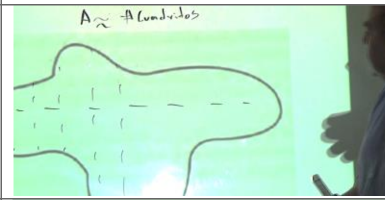
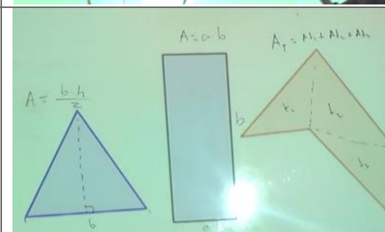
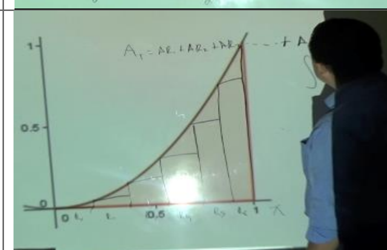
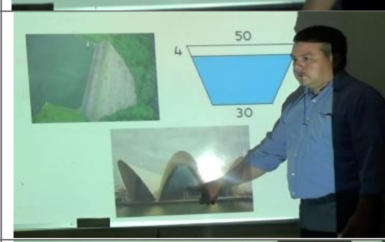
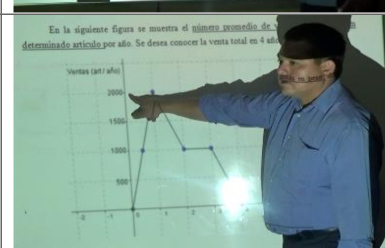
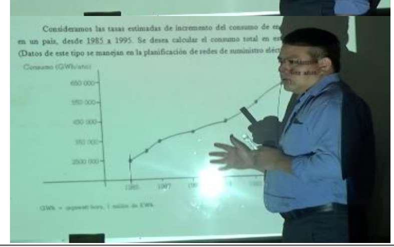
Las respuestas del estudiante, el profesor las considero significativas ya que el estudiante considera que a mayor aumento de n se genera un número menor de la diferencia entre las sumas inferiores y superiores de los rectángulos y así, tener una mejor aproximación del área. Podemos considerar que el estudiante entiende el proceso límite como la mejor aproximación al área de la curva, y que esta, es diferente al cálculo del área de una figura regular que sería de forma exacta.</td>
<td>Aquí el profesor profundiza con los estudiantes el cálculo del área de figuras geométricas regulares, para luego relacionarlo con el área bajo una curva. Es decir, con el proceso de generalización por medio de aproximaciones al área.

</td>
<td>Sin embargo, en otro episodio el profesor relaciona dos representaciones (el simbólico y geométrico) para la formalización del concepto de integral definida como suma de Riemman.



Lo anterior permite al profesor dar sentido a la definición de integral definida que el propuso en la estructura conceptual como definición expuesta en la tabla 4.3</td>
</tr>
</table>

Tabla 4.5 Análisis fenomenológico de la planeación de clase del profesor

Fenomenología				
Fenómenos	**Contexto**	**Subestructuras**	**Relación entre subestructuras y contextos**	**Evidencia**
Cálculos de áreas de figuras irregulares	Matemático	Noción de fórmula desde una perspectiva geométrica	Aquí el profesor realiza la aproximación del cálculo del área de una figura irregular para llevarlo a la noción de área de una región mediante sumas. Esto con la intención de mostrar al alumnado que el concepto de integral definida es una aproximación del cálculo de regiones.	
Cálculos de áreas de figuras regulares	Matemático	Noción de fórmula geométrica	Aquí el profesor expone el caso de figuras regulares cuyo cálculo del área es exacto. Sin embargo, el propósito es establecer una relación entre la fórmula del área de una figura regular e irregulares el cual, se generan procedimientos de usar particiones para luego formalizar en el cálculo del área bajo la curva.	
Cálculo del área bajo la curva	Matemático	Noción de integral definida	Después de lo anterior, el profesor utilizó el proceso de sumas de particiones para aproximar el cálculo del área bajo una curva. Proceso de generalización. Es importante aclarar que no se suman las particiones, se suman las áreas de los rectángulos definidos por una partición.	
Aplicación del área bajo una curva	Ingeniería	Aplicación de la integral definida	En este episodio fue expositivo, donde el profesor dota de sentido a la integral definida mediante su uso en la ingeniería para la realización de construcciones como una presa, un estanque o edificios.	
	Economía		Aquí dota de sentido mediante problemas como en las ventas de productos donde se puede aplicar la integral definida.	 

El análisis de contenido, permite entender el discurso del profesor sobre el concepto de integral definida. La estructura conceptual usa la definición de integral apoyándose de la suma de Riemman. Sin embargo, en todo su discurso el profesor potencia el significado de integral como el cálculo de área de figuras geométricas, es por ello que su sistema de representación utiliza este significado tanto en figuras regulares como irregulares. El procedimiento que él realiza, apoyándose de lo visual que proporciona la tecnología, son las particiones de figuras para calcular su área.

Esto se puede observar en todas las tablas de análisis de la práctica del profesor. Es decir, el profesor manifestó siempre un enfoque visual de la definición: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$, tanto en representaciones numéricas como geométricas. Una vez formalizado la definición de integral definida, el profesor muestra una parte fenomenológica al ilustrar su aplicación en la ingeniería y economía.

6. Conclusiones

Se considera que el modelo TPACK-THA de la integral definida, favorece la competencia de planeación ejecución y evaluación de un contenido matemático escolar con el uso de tecnología. Queda establecida la intención del profesor de potenciar el significado de la integral definida como el área bajo la curva mediante una representación gráfica dinámica con el uso de tecnología. Es decir, el profesor le da un enfoque visual para desarrollar la suma de Riemann (actividades 1 y 2) donde se realizan cálculos cuyo sentido es encontrar áreas bajo curvas. La intencionalidad didáctica del profesor consistió que el estudiante observe y registre las diferencias de las áreas de rectángulos superiores e inferiores, viendo que cada vez esta se reduce mientras crece el número de rectángulos.

De esta manera, el TPACK de la integral definida, definido por el profesor incluye la definición de integral como sumatoria, se representa de forma geométrica y complementada con uso de deslizadores y activación de casillas en GeoGebra. Esto brindó buenos resultados en la comprensión de la noción de área abajo la curva en los estudiantes y que se formalizó en la integral definida en un intervalo dado. El análisis de contenido nos permitió observar que el profesor inicia y termina con la definición de integral. Pero también en el proceso hace uso de representaciones y fenómenos que dan y dotan de sentido a la integral definida. Por lo tanto, podemos inferir que el enfoque visual de cálculo de áreas, adquirió sentido para formalizarse en lo que es su definición propuesta en la estructura conceptual. Por lo anterior la tecnología se integra como un medio que permite realizar no sólo cálculo, sino también el análisis apoyado desde enfoques geométricos y numéricos (uso de tablas). Por lo tanto, este trabajo proporciona un modelo TPACK-THA para su implementación en el aula, permitiendo tener elementos de cómo realizar una planeación, ejecución y evaluación de clase usando como herramienta, el recurso tecnológico.

7. Agradecimiento

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico brindado mediante una beca para realizar estudios de maestría.

Referencias

Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Marty, M., Siufi, G. & Wagenaar, R. (Eds.) (2007). *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina. Informe Final –Proyecto Tuning- América Latina 2004-2007.* España: Universidad de Deusto y Universidad de Groningen. Recuperado de http://tuning.unideusto.org/tuningal/

Briceño E. Hernández J. y Muñoz JJ. (2016). Reflexión sobre la enseñanza de la integral definida con el uso de tecnología una experiencia de aula en el nivel medio superior. *El cálculo y su enseñanza*, 2(2), 23-45.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, Marzo (33). 11-27.

Barrigas, A. (2013). Tic en el trabajo del aula. Impacto en la planeación didáctica. Revista Iberoamericana de educación superior, (10)4, 3-21.

Castro A. (2017). *La integración de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: usos e intencionalidades en el currículum oficial del nivel secundaria.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Zacatecas, México.

DGB. (2011). *Programa de estudios de Cálculo Integral*.

Cabezas, M. y Casillas, S. (2017). ¿Son los futuros educadores sociales residentes digitales? *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 19(4), 61-72.

Cantor, G. (2013). *Elementos para la enseñanza de la integral definida como área bajo la curva*. (Tesis inédita de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

González, J. (2014). Formación inicial de profesores en geometría con GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Educación*, (65), 161-172.

Gómez, P. (2009). Procesos de aprendizaje en la formación de inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Electronic journal of research in educational psichology, 7(1)*(17), 471-498.

Hernández, A. y Quintero, A. (2009). La integración de las TIC en el currículo: necesidades formativas e interés del profesorado. *REIFOP, 12*(2), 103–119.

Haciomeroglu, E., Bu, L., y Haciomeroglu, G. (2010). Integrating technology into mathematics education teacher courses. En *Proceedings of the First North American GeoGebra Conference 2010.* (pp. 27-32). NY: Ithaca College

Lupiáñez, J. L., & Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA 3(1)*, 35-48.

Magallanes E., Briceño E y Ku, D. (Aceptado). Medición de la competencia mediática en alumnos de la Maestría en Matemática Educativa (UAZ) o Yo, ¿Robot? *Revista Temas de Ciencia y Tecnología, (21)63,*

Mishra, P. y Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054.

Rojano, M. T. (2006). Los principios básicos de los modelos EFIT y EMAT. En Rojano Ceballos, M. T. (Ed.), *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula* (pp. 15-23). México: Secretaría de Educación Pública

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(33), 11-27.

Vitabar, F. (2011). Cursos de GeoGebra para profesores en Uruguay: valoraciones, padecimientos y reclamos. *XIII CIAEM-IACME,* Recife, Brasil.

Stewart, J. (1999). *Cálculo Diferencial e Integral.* México: International Thompson Editores.