# Objeto Virtual de Aprendizaje para la interpretación geométrica del método numérico de Newton-Raphson

RODRÍGUEZ-MENDÍAS, María Cristina, VALDEZ-CHÁVEZ, Juan Manuel y ALVARADO-MONROY, Angelina

[1]M. Rodríguez, [1]J.Valdez, [2]A. Alvarado
[1]Tecnológico de Estudios superiores del Oriente del Estado de México
[2]Universidad Juárez del Estado de Durango

cristina.rodriguez@tesoem.edu.mx

C. Cristóbal, M. Olvera, V. Vargas (Dirs.) Educación para la interdisciplinariedad. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

**Abstract**

The Newton-Raphson method is a powerful technique for solving equations numerically, it is based on the simple idea of linear approximation. This paper shows the design and operation of a Virtual Learning Object (VLO) with the purpose of promoting significant learning in the understanding of this numerical method and its geometrical interpretation. This object was designed from the conceptualization of an VLO and with the support of digital tools like GeoGebra and HotPotatoes. It was implemented through a Learning Platform known as Modular Object Oriented Dynamic Learning Environment (MOODLE), with the purpose of being used as a complement to theoretical and practical resources of the subject Numerical Methods of a bachelor's degree in computer systems engineering. The results of its implementation were documented.

**Virtual Learning Object, Newton-Raphson Method, GeoGebra, HotPotatoes, MOODLE**

## 1. Introducción

Desde una visión integradora de la educación es pertinente que las disciplinas no sean estudiadas de manera separada. En este trabajo la matemática y la tecnología se integran para dotar de significado al método de Newton-Raphson por estudiantes de ingeniería, buscando que, además de familiarizarse con la notación, tengan dominio en la parte algorítmica, identifiquen dónde aplicarlo y puedan extender su comprensión a través de conectarlo con su interpretación geométrica. El Método Iterativo de Newton-Raphson es de las técnicas más utilizadas y efectivas para resolver ecuaciones no lineales. Este método está basado en la idea de aproximación lineal.

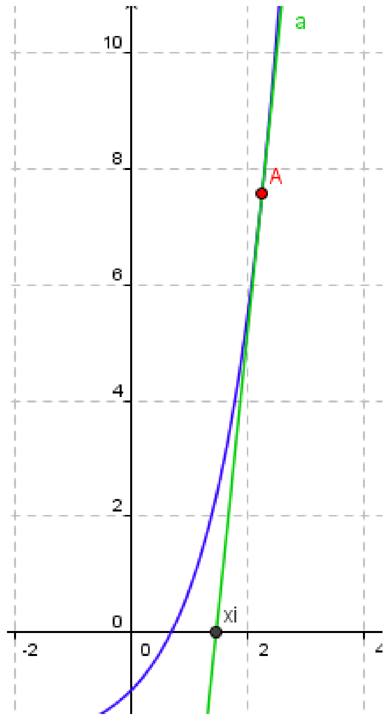
Tradicionalmente el profesor lo aborda al menos de tres maneras: la más común es considerar la técnica gráficamente; otra posibilidad es derivar el método como una técnica simple para obtener una convergencia más rápida de la que ofrecen muchos otros procedimientos, mediante los cuales se calcula una sucesión de puntos empleando una función de recurrencia, denominados iteración funcional; la tercera manera de introducir el método es un enfoque intuitivo basado en el polinomio de Taylor. En este trabajo, se muestra el uso de la técnica desde una interpretación gráfica. La forma más utilizada por los profesores es la expositiva, con el pizarrón como principal recurso, proponiendo una serie de pasos a seguir que son ilustrados a través de una gráfica (Gráfico 3.1). Desde el punto de vista de Chapra y Canale (2005), los pasos que se siguen en el Método de Newton-Raphson son:

1. Definir $f(x)$ teniendo en cuenta que la función a la cual se le determinarán las raíces debe ser continua.

2. Determinar $f'(x)$, la derivada de la función.

3. La fórmula iterativa del método es: $x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$. Esta fórmula se aplica mediante la determinación de la función $f(x)$ y la derivada $f'(x)$ en $x_{i-1}$. Esto es, $f(x_{i-1})$ y $f'(x)$, luego, se sustituyen estas expresiones directamente en la fórmula iterativa.

**Gráfico 3.1** Aplicación del Método de Newton-Raphson




Fuente: Elaboración propia

Suponga que se tiene la aproximación $x_0$ a la raíz de $f(x)$ . Se traza la recta tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$; ésta cruza al eje "$x$" en un punto $x_1$ que será la siguiente aproximación a la raíz. Para calcular el punto $x_1$, se calcula primero la ecuación de la recta tangente. Se sabe que tiene pendiente $y$, por lo tanto, la ecuación de la recta tangente está dada por la ecuación (1).

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (1)$$

Se hace $y = 0$ , $x = x_1$ en la ecuación (1) y se obtiene (2).

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \qquad (2)$$

Y en (2) se despeja $x_1$ para llegar a (3).

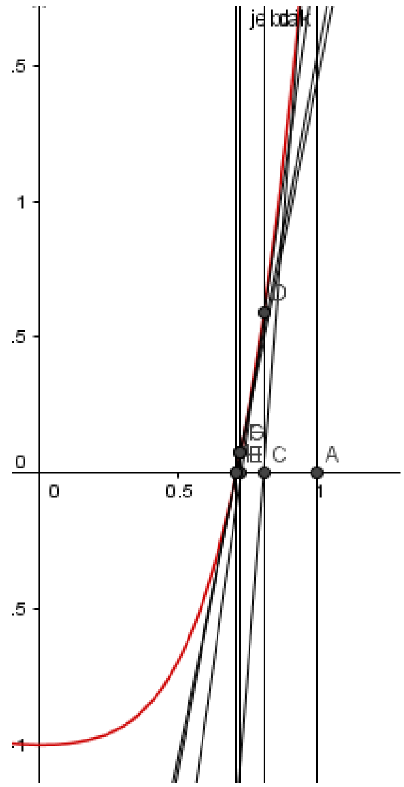
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (3)$$

Que es la fórmula iterativa de Newton-Raphson para calcular la aproximación (4):

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, i = 1,2,3, \dots, n \qquad (4)$$

En el Gráfico 3.2 se ilustra la aplicación sucesiva del Método de Newton-Raphson.

**Gráfico 3.2** Aplicación sucesiva del Método de Newton-Raphson




Fuente: Elaboración propia

Tomando como base el polinomio de Taylor, es posible deducir la fórmula iterativa (5) del Método de Newton-Raphson (Burden & Faires, 2011) que involucra en general la sucesión $\{x_i\}$.

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, i \geq 1 \qquad (5)$$

Se debe tener presente que el Método de Newton-Raphson no trabaja con intervalos donde se asegure encontrar una raíz, y de hecho no se tiene ninguna garantía de aproximarse a dicha raíz, en cuyo caso se dice que el método diverge. Sin embargo, en los casos donde sí converge a la raíz lo hace con rapidez, razón por la cual, es uno de los métodos preferidos por las personas que trabajan métodos numéricos. También es fácil apreciar que cuando $f'(x_{i-1}) = 0$ el método no se puede aplicar. Lo cual geométricamente significa que: la recta tangente es horizontal y por lo tanto no interseca al eje *"$x$"* en ningún punto, a menos que coincida con éste, en cuyo caso es una raíz de $f(x)$.

Desde una exploración con estudiantes de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales del Tecnológico de Estudios superiores del Oriente del Estado de México (TESOEM), se detectó que la enseñanza de los métodos numéricos para resolver ecuaciones no lineales, en la práctica, presenta algunas dificultades, ya que los cálculos manuales son numerosos. Además, no existen resultados consistentes debido a que surgen equivocaciones cuando se efectúan las tareas manualmente. Esto representa un problema, limitando el aprendizaje a la simple obtención de resultados de forma algorítmica asociada a un número de operaciones y técnicas elementales de cálculo.

Hoy en día, la tecnología proporciona una alternativa para cálculos complicados en los métodos numéricos, evitando suposiciones de conceptos de forma deficiente. En el campo profesional de la ingeniería se requiere utilizar modelos matemáticos para la predicción y explicación de ciertos fenómenos. Para el ingeniero son imprescindibles los métodos numéricos, ya que son técnicas mediante las cuales es posible plantear soluciones a los problemas. Al momento de trabajar la solución a problemas propuestos se espera que los estudiantes seleccionen y apliquen el método numérico adecuado y desarrollen la secuencia de operaciones algebraicas y lógicas para resolver el problema.

En este trabajo se presenta el diseño e implementación de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) con la intención de favorecer la comprensión del método de Newton-Raphson, a través de su interpretación geométrica, en estudiantes de la ingeniería en sistemas computacionales del TESOEM. Para su diseño, fueron utilizadas herramientas digitales tales como GeoGebra y HotPotatoes. Con esto, se pretende apoyar el proceso de aprendizaje autónomo y retroalimentar los conocimientos adquiridos en clase. Por esta razón, el OVA fue implementado a través de la plataforma de aprendizaje MOODLE para que fuera utilizado como un complemento de los recursos teóricos y prácticos de la materia de Métodos Numéricos y, además, para garantizar que su durabilidad y actualización permitiendo incorporar nuevos contenidos y/o modificaciones según las condiciones y los objetivos de aprendizaje.

## 2. Marco Conceptual

El tópico de Objetos Virtuales de Aprendizaje aparece en publicaciones de la década de 1990 (Wiley, 2000). Las definiciones iniciales fueron tan amplias que resultaban vagas y ambigüas. Este concepto poco a poco se ha refinado, por ejemplo, para Wiley (2000) "son pequeños (en relación con el tamaño de un curso completo) fragmentos de aprendizaje que se pueden reutilizar en diversos entornos de aprendizaje" y es “un recurso digital que puede reutilizarse para apoyar el aprendizaje” (Wiley, 2000, p. 7). Por otra parte, en Learning Technology Standards Committee of the Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE - LTSC) definen un objeto de aprendizaje como "una entidad, digital o no-digital, que puede utilizarse para el aprendizaje, la educación o entrenamiento " (Todorova & Petrova, 2003). Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2005: citado por Morales et, al., 2015), un OVA es un “material estructurado de una forma significativa, asociado a un propósito educativo (en este caso, para la educación superior) y que corresponda a un recurso de carácter digital que pueda ser distribuido y consultado a través de Internet”.

Mientras que para Chiappe et, al. (2007) “es una entidad digital, autocontenida, reusable, con un claro objetivo de aprendizaje que contiene al menos tres componentes internas cambiantes: contenido, actividades instruccionales y elementos contextuales. Como un complemento, el OVA debe tener un componente externo de información el cual ayuda a su identificación, almacenamiento y recuperación: los metadatos. La definición de OVA como una entidad compuesta no sólo por el contenido, sino también por las actividades de aprendizaje, marca una diferencia notable con lo que consideramos simplemente objetos informativos.

Para Chiappe et, al. (2007) la producción de OVAs se considera como un refuerzo de los contenidos académicos de calidad, por las siguientes razones: a) la experiencia adquirida en las universidades en Colombia ha demostrado que la generación de OVAs se ha convertido en un proceso institucional complejo que va más allá de la producción individual, dirigido más por algunos maestros entusiastas; b) éstos pueden almacenarse en repositorios publicamente disponibles; c) incorporan las TIC en diferentes procesos formativos; d) son aplicables no solamente como un material de estudio, sino también como una estrategia de aprendizaje; y finalmente, e) los OVA pueden integrarse en entidades más complejas como los Ambientes Virtuales de Aprendizaje.

Wiley (2000) postuló y presentó tres componentes de una implementación exitosa de objetos de aprendizaje: una teoría de diseño instruccional, una taxonomía de objetos de aprendizaje y un "material de vinculación prescriptivo" que conecta la teoría del diseño instruccional con la taxonomía, brindando orientación relacionada con el tipo de objetivo de aprendizaje enlazado al tipo de OVA. Para Duval et, al. (2004) el uso de objetos de aprendizaje promete incrementar la efectividad de la enseñanza. Sin embargo, Wiley (2000, p. 29) considera que “el potencial de los OVAs como una tecnología instruccional es enorme, pero podría no ser realizable sin un esfuerzo equilibrado en tecnología y diseño instruccional. Necesitamos de más teóricos.” Se ha comprometido mucho trabajo y energía para definir formas de empaquetar, transportar e implementar objetos de aprendizaje en diferentes plataformas (que son esfuerzos eminentemente técnicos) y se ha producido muy poca reflexión en relación con su uso en ejercicios prácticos académicos cuando se genera un ambiente de aprendizaje virtual. Por fortuna, cada vez existen más trabajos que aportan al desarrollo conceptual, al diseño pedagógico, a la implementación y a la evaluación de los OVA (Lockyer et, al., 2009; Rodríguez, 2010).

En ese sentido, Chiappe et, al. (2007) proponen un Modelo de Diseño Instruccional como un conjunto de actividades de aprendizaje con algún problema característico, objetos informativos (contenidos), y algunos elementos contextualizadores. El modelo formulado trae consigo desafíos para el diseñador instruccional: a) el diseño de las situaciones problemas que sean utilizadas de manera coherente en las actividades de aprendizaje conformando los OVAs. Además, se debe cuidar el principio de modularidad, es decir, que puedan utilizarse parcialmente las actividades; b) generar OVAs que tengan como referencia algunos objetos de aprendizaje existentes.

El modelo de diseño instruccional basado en OVAs propuesto por Chiappe et, al. (2007) puede ser una oportunidad para que los diseñadores instruccionales proporcionen objetos de aprendizaje con la vitalidad y la importancia que merecen dentro de escenarios educativos contemporáneos. Lograr este objetivo, sería posible, si se indican pautas claras y se establecen los referentes conceptuales necesarios (como este modelo intenta hacer) para el buen desarrollo de los equipos a cargo de generar Ambientes Virtuales de Aprendizaje, considerando siempre los OVAs como componentes importantes dentro de este proceso.

De acuerdo con lo anterior, en la actualidad los OVAs, además de ser un recurso didáctico, pueden ser una estrategia de enseñanza y de aprendizaje para utilizarse en las asignaturas de ciencias básicas e ingeniería que se imparten en el TESOEM con el apoyo de las tecnologías de la información y la comunicación. Un aspecto importante para tener en cuenta en el diseño e implementación de un OVA, es que debe tener en sí mismo un valor añadido. Debe aportar valor en algún aspecto del aprendizaje, como la aclaración de un concepto o de un término, o debe proporcionar una interacción efectiva y útil al estudiante. Para el diseño de recursos didácticos que realmente sean útiles y efectivos para el aprendizaje, es importante que cumplan con el objetivo para el que fueron concebidos, que permitan al estudiante apoyar su proceso de aprendizaje y retroalimenten los conocimientos adquiridos en clase o mediante materiales planos usados tradicionalmente.

Hoy en día, existen diversas herramientas de tecnología digital y de diseño de autor (eXe Learning, HotPotatoes, GeoGebra, etc.) que facilitan el proceso de construcción de un OVA, éstas permiten la exportación en diversos formatos de los recursos generados que facilitan la incorporación de los mismo a diversas plataformas de aprendizaje y promueven la reusabilidad.

Para Gavilán y Barroso (2011), en el manejo de los conceptos matemáticos como objetos de enseñanza y aprendizaje se pueden apreciar tres dimensiones: la dimensión semántica (significativa), que hace referencia a los significados que se vinculan al concepto; la dimensión sintáctica (representativa), la cual hace referencia a las representaciones del concepto, que incluye los distintos modos de representar el objeto y las posibles traducciones entre ellas; y, para finalizar, la dimensión procedimental (algorítmica), donde se incluyen los algoritmos que se vinculan al concepto. Estas tres dimensiones están interrelacionadas, por ejemplo, el profesor utiliza la gráfica de una función y pide a los estudiantes que identifiquen en la gráfica la raíz, posteriormente proporciona un punto cualesquiera $x_0$ y traza la recta tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$; ésta cruza al eje "*x*" en un punto y, da inicio a un dialogo con los estudiantes mediante preguntas de partida como: ¿qué ocurre con el punto de intersección de la tangente con el eje "*x*"?, ¿cómo se obtiene ese punto de intersección?, ¿qué relación tiene el punto de intersección de la tangente con la raíz?, por mencionar algunos cuestionamientos.

De esta manera, se logra que las relaciones sean mostradas mediante el OVA, permitiendo a los estudiantes descubrir las relaciones pertinentes que le ayuden a construir los conceptos básicos, vinculando los significados y las representaciones gráficas para poder, posteriormente, guiarlos al desarrollo procedimental. En los procesos de traducción entre los modos de representación, mismos en los que hay una traducción formal y una traducción de los significados entre las representaciones; o bien, en el aprendizaje de los algoritmos, éstos deben estar vinculados a los significados. A partir de esta forma de ver los conceptos matemáticos como objetos de enseñanza y de aprendizaje, se puede dar sentido a los propósitos de este OVA. La elección de las actividades para diseñar el OVA tiene presente la formación de estudiantes autónomos en la construcción del conocimiento, debiéndose priorizar la elección de aquellas actividades que lleven al aprender haciendo y que favorezcan al aprendizaje en forma colaborativa.

En este trabajo se han utilizado herramientas de tecnología digital para el diseño de algunas de las actividades del OVA. Tal es el caso de GeoGebra, un software libre de matemática dinámica para la educación en todos los niveles, está disponible en múltiples plataformas. GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas, así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc. Todas las herramientas creadas en GeoGebra permiten manipular parámetros de forma libre y dinámica, lo que ayuda a visualizar los diferentes comportamientos dados en las gráficas que se forman. A través de la manipulación, exploración y experimentación, el estudiante puede extraer sus propias conjeturas, ideas y conclusiones, contribuyendo a la construcción de un aprendizaje significativo y duradero. Los proyectos creados con GeoGebra pueden ser exportados en diversos formatos como páginas WEB, hojas dinámicas e imágenes.

Los objetos exportados se pueden publicar directamente en GeoGebraTube o en una página WEB y esto facilita que puedan incluirse en ambientes educativos virtuales como MOODLE. Para la construcción del material en GeoGebra, se debe determinar qué objetos serán utilizados en el mismo, distinguir los objetos libres que el usuario puede manipular, de los objetos dependientes que se irán creando a partir de su vinculación con los parámetros y se trabajarán con los Scripts que permiten crear guiones que consisten en una secuencia de comandos de GeoGebra que se desencadenan al clic en un botón y son empleados para crear una interfaz gráfica de fácil uso para los estudiantes.

Otra herramienta de autor es HotPotatoes que sirve para la elaboración de diversos tipos de ejercicios de refuerzo o de repaso en interactivos multimedia que permite que los estudiantes se apropien de los conceptos de manera práctica y significativa. Estos ejercicios se podrán publicar en un servidor WEB y difundir a través de Internet, cuentan con la gran ventaja de ser soportados por todos los navegadores y son fáciles de incluir en ambientes educativos virtuales como MOODLE. Para el material en HotPotatoes se usa JCross (crucigrama) considerando como una herramienta idónea para amenizar la enseñanza y así facilitar a los estudiantes el aprendizaje de los conceptos teóricos de los Métodos Numéricos. Lo que se propone es una herramienta educativa que puede facilitar la enseñanza los conceptos básicos de Métodos Numéricos y que puede ser de gran ayuda como complemento de la fase de resolución de problemas que involucren el cálculo de raíces de ecuaciones no lineales.

Las actividades en HotPotatoes, juegan un papel importante en el dominio de los conceptos matemáticos y constituyen una herramienta para trabajar la dimensión semántica que acerca al estudiante al aprendizaje, con la intención de transformar positivamente la apropiación de contenidos y el mejor dominio de los conceptos. El diseño de estas actividades permite que el estudiante se aproxime al conocimiento de diversas maneras, alcanzando con ello el desarrollo de aprendizajes significativos. La elección de estas herramientas se debe a sus facilidades para la construcción de objetos independientes, con interface gráfica que permiten al estudiante interactuar con los mismos, sumando la ventaja de que los utilizados para este trabajo son de uso libre.

## 3. Metodología

**S**e partió de la necesidad de promover el aprendizaje autónomo de los estudiantes a través de proponer complementos de los recursos teóricos y prácticos de la asignatura de Métodos Numéricos de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales del TESOEM. Para ello, se consideró el diseño de un OVA, su experimentación en el aula y el análisis de las producciones de los estudiantes. Este OVA se organizó en tres bloques: En el primer bloque se revisó la unidad que hace referencia al Método de Newton-Raphson, a partir de ahí, se diseñó un diagnóstico para indagar los conocimientos previos de los estudiantes. Posteriormente, se diseñó el segundo bloque que contiene las actividades de aprendizaje que se desarrollaron en el salón de clase. Para concluir, en el tercer bloque se diseñaron escenarios de aprendizaje individual, colaborativo, y guiado por el docente mediante una lluvia de ideas. En estos bloques, se presentaba un problema, se exploraba las construcciones y los estudiantes conjeturaban, organizaban y comunicaban sus ideas. Para fines de este artículo, se centrará la atención en la interpretación geométrica del Método de Newton-Raphson.

En la implementación del OVA, el objetivo era que los estudiantes a partir de la interacción con una lista de problemas propuestos lograran extraer información que les permitiera identificar la representación gráfica de las funciones a resolver y que lograran asociar las representaciones algebraicas con conceptos tales como: raíz, tangente, derivada, función, convergencia y aproximación, para que, posteriormente, pudieran utilizarlas en la resolución de problemas.

La organización del grupo fue diversa, primero los estudiantes trabajaban de manera individual para conformar sus ideas y compartirlas en una discusión guiada por el docente. Posteriormente, se propuso trabajar en equipo logrando una discusión que permitió a los estudiantes trabajar de forma colaborativa con el OVA para recabar información, observar los resultados obtenidos parta identificar la mejor aproximación a la raíz, establecer conjeturas sobre el comportamiento de la recta tangente, sobre los cambios de las diferentes ecuaciones y sus representaciones gráficas.

Se pudo observar que, posteriormente, los estudiantes realizaron una discusión en equipo resaltando los resultados, cada estudiante comentó y explicó sus hallazgos y escuchó a sus compañeros de equipo de tal manera que quedaran expuestas diferentes aproximaciones al tema a tratar en la clase. El docente procedió a realizar una discusión grupal en la que participaron los alumnos para apoyar lo aprendido del Método de Newton-Raphson.

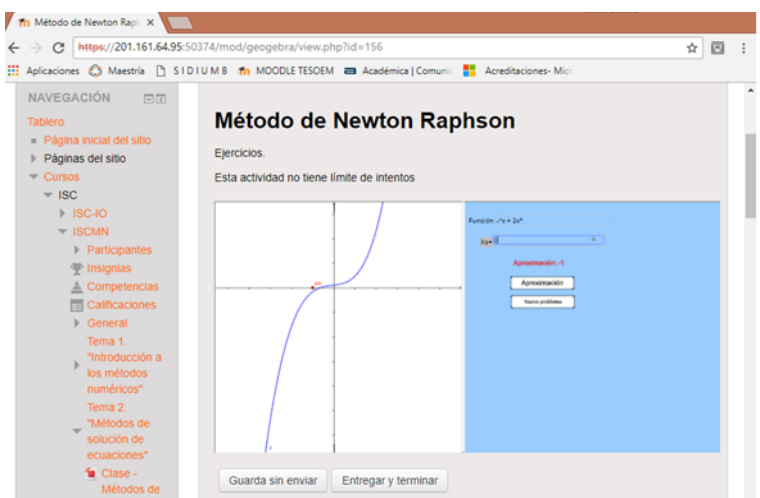
### 3.1 Muestra

Participaron estudiantes de cuarto semestre de la Ingeniería en Sistemas Computacionales del TESOEM de ambos turnos: matutino y vespertino. Primero, trabajaron de forma individual, posteriormente, en equipo y, después, se produjo una interacción con el docente. Los estudiantes estaban recién familiarizados con el Método de Newton-Raphson. Durante la clase, se propició el trabajo en equipo, la comunicación tanto verbal como escrita, el uso de múltiples representaciones, el uso del OVA como herramienta fundamental para la interpretación geométrica del Método de Newton- Raphson.

### 3.2 Diseño del OVA para el Método de Newton-Raphson

Se describe, a continuación, el OVA que se ha diseñado con el propósito de apoyar la comprensión de los conceptos relacionados con el Método de Newton-Raphson para el cálculo de raíces de ecuaciones no lineales. Se diseñó el OVA con el objetivo de permitir la visualización, por parte de los estudiantes, del comportamiento del Método Gráfico, y así, lograr una correcta interpretación geométrica del Método de Newton-Raphson como se puede observar en la Figura 3.1.

**Figura 3.1** OVA para la interpretación geométrica del Método de Newton Raphson

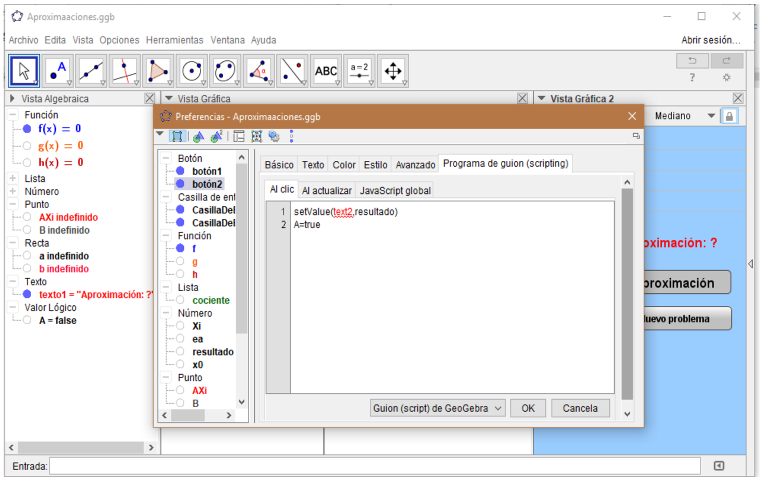



Fuente: Elaboración propia de actividad para OVA

Los objetos libres de GeoGebra que se utilizaron para la implementación del OVA fueron: la función analizada, la aproximación inicial y el error permitido. Estas variables se presentaron utilizando casillas de entrada, mediante las cuales, los estudiantes podían interactuar favoreciendo la comprensión de la interrelación que existe entre los mismos y el significado de cada variable involucrada en la ecuación general del método.

Para permitir al estudiante interactuar con el OVA, se utilizó el objeto de GeoGebra "botón" trabajando a partir de un script, que al ser seleccionado calculaba y mostraba una nueva aproximación recalculando la recta tangente y el punto de intersección (Figura 3.2).

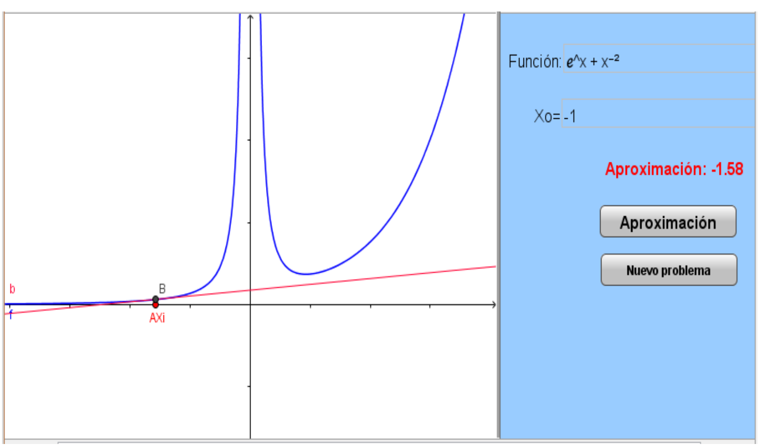
**Figura 3.2** Proceso de construcción del OVA




Fuente: Elaboración propia para OVA

En la Figura 3.2 se muestra el proceso de construcción del OVA. Se puede apreciar la vista algebraica, el protocolo de construcción y Script correspondiente a uno de los objetos utilizados. A partir de los objetos libres mencionados, que cumplen la función de parámetros de entrada, el OVA muestra la gráfica de la función, punto inicial, la recta tangente a la función que pasa por el punto inicial y su respectiva intersección en el eje "x" que genera el valor de la nueva aproximación correspondiente a las iteraciones (Gráfico 3.3).

**Gráfico 3.3** Visualización de un ejemplo

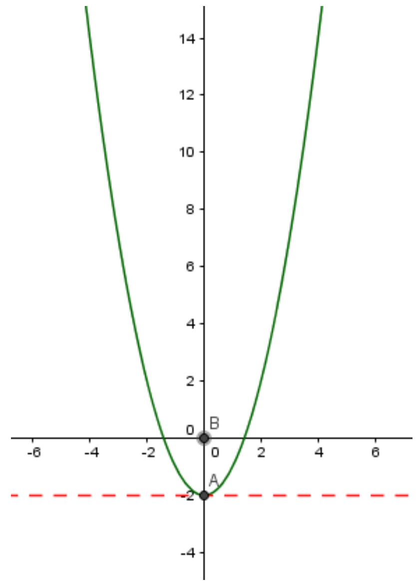



Fuente: Elaboración propia de actividad para OVA

Cuando se cumple con el error preestablecido, el objeto muestra la raíz aproximada obtenida por el método y la cantidad de iteraciones que fueron necesarias. Para mostrar estos resultados, se utilizaron objetos del tipo texto de GeoGebra, teniendo como parámetros los cálculos realizados.

Para el caso en que el método presenta problemas de convergencia causados, pero el comportamiento de la derivada de la función que se muestra en la gráfica donde se aprecia que la recta tangente se hace cero. Se puede observar que la recta tangente es paralela al eje “x” y se aprecia la divergencia como se puede ver en la Gráfico 3.4.

**Gráfico 3.4** Ejemplo que muestra divergencia.



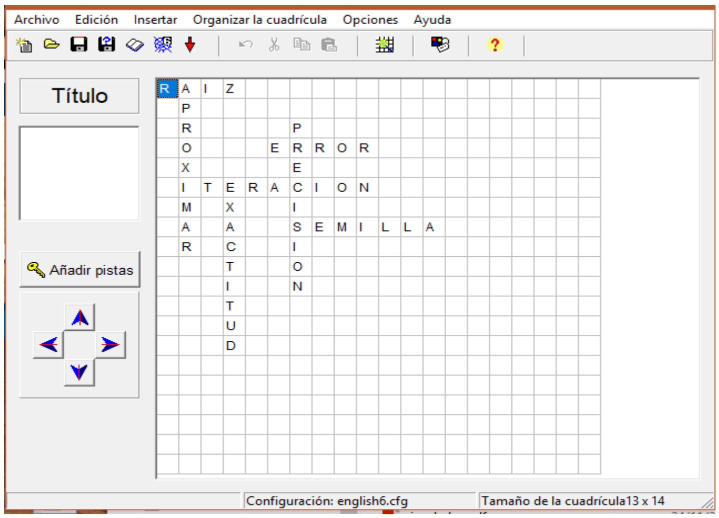

Fuente: Elaboración propia de actividad para OVA

Esta parte del diseño del OVA muestra la gran potencialidad gráfica y de procesamiento, así como, su accesible y dinámica interfaz, que constituyen características de gran relevancia con relación a los sistemas de representación y a las representaciones semióticas que resultan de gran ayuda para que los estudiantes conciban la construcción del conocimiento matemático (Có et, al., 2011). De esta forma, se busca que las relaciones sean mostradas mediante el OVA permitiendo a los estudiantes descubrir las relaciones pertinentes para construir los conceptos básicos vinculando significados y las representaciones gráficas para poder posteriormente guiarlos al desarrollo procedimental. De esta manera, se logra provocar la interacción de las tres dimensiones: la dimensión semántica (significativa) que hace referencia a los significados que se vinculan al concepto; la dimensión sintáctica (representativa) la cual hace referencia a las representaciones del concepto, que incluye los distintos modos de representar el objeto y las posibles traducciones entre ellas; y la dimensión procedimental planteadas por Gavilán y Barroso (2011).

Como antes se mencionó, para el diseño del OVA fue importante el uso de HotPotatoes para favorecer el dominio de los conceptos matemáticos. Esta herramienta se considera importante para trabajar la dimensión semántica que acerca al estudiante al aprendizaje, con la intención de transformar positivamente la apropiación de contenidos y conceptos (e.g. función, raíz, tangente, derivada, convergencia, error y aproximación) para que pudieran estar disponibles en la resolución de problemas (Figura 3.3). Con dicha herramienta se favorece el dominio especifico de un área en particular, dado que representa una forma de estimular a los estudiantes para que recuerden la información más importante del tema.

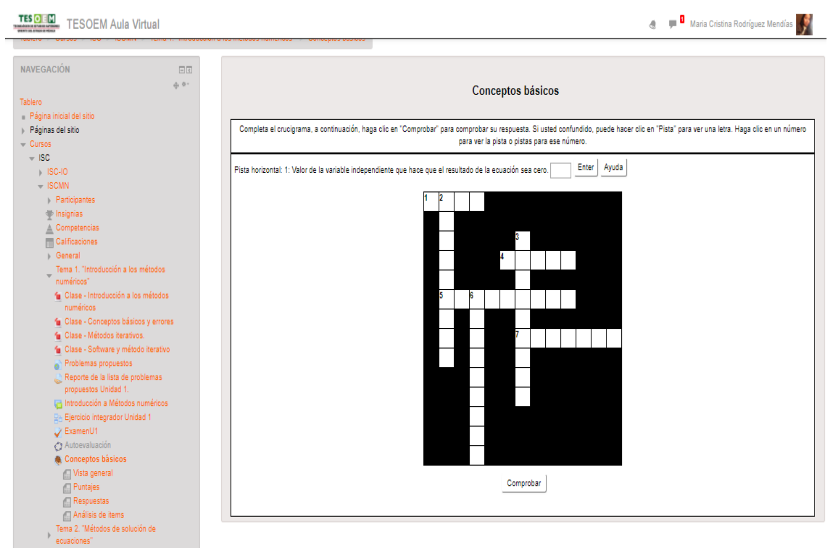
Su uso impacta en el desarrollo cognitivo del estudiante ya que es una herramienta de aprendizaje efectiva para los conceptos básicos de Métodos Numéricos (Figura 3.3); en este trabajo es de gran ayuda en la fase de resolución de problemas permitiendo que los estudiantes relacionen los resultados de los cálculos obtenidos con el concepto de convergencia, raíz y el de aproximación lineal, esto favorece su reflexión del contenido matemático, como lo establece Gavilán y Barroso (2011).

**Figura 3.3** Proceso de construcción en HotPotatoes




Fuente: Elaboración propia para el OVA

**Figura 3.4** Aplicación de la actividad de HotPotatoes en OVA mediante MOODLE.




Fuente: Elaboración propia para actividad del OVA

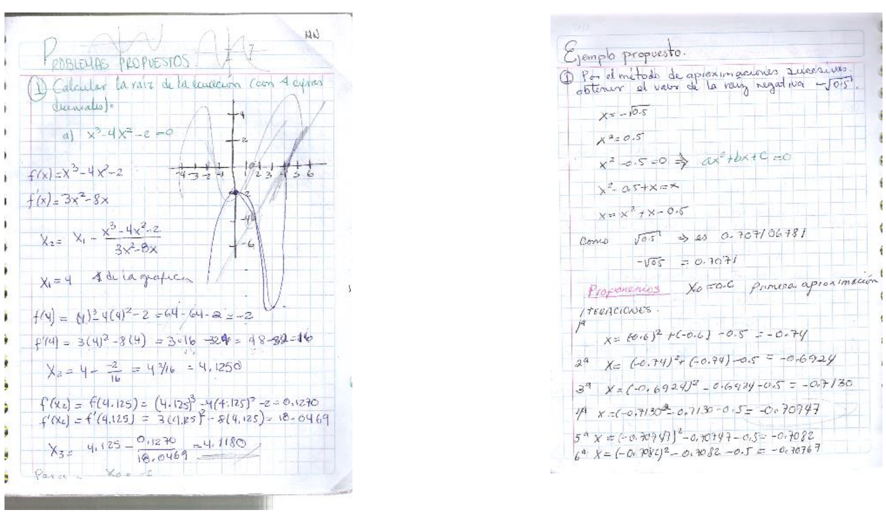
## 4 Resultados

Mediante la plataforma de educación a distancia del TESOEM se implementó el OVA para la interpretación geométrica del Método de Newton-Raphson a 110 estudiantes del cuarto semestre, distribuidos en tres grupos (4S11, 4S12 y 4S21) de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales del TESOEM en los turnos matutino y vespertino (Figura 3.5).

**Figura 3.5** Estudiantes del TESOEM durante la implementación del OVA.

Con la intención de explorar en el impacto formativo del uso del OVA, en el primer examen parcial los estudiantes realizaron la solución a los problemas propuestos a lápiz y papel, sin lograr integrar la interpretación geométrica y el desarrollo de los cálculos con el resultado de la aproximación de la raíz, la experiencia duro dos horas (Figura 3.6 ).

**Figura 3.6** Soluciones de estudiantes a los problemas propuestos en el primer parcial.



Fuente: Producciones de los estudiantes.

En la producción de la izquierda de la Figura 3.6, podemos ver que: el alumno determina por sí mismo, cual será el valor inicial para aplicar el método realizando la gráfica de la función y a partir del mismo determina la aproximación de la raíz. En el producto de la derecha de la Figura 3.6 el alumno identifica la ecuación mediante un proceso algebraico y, a partir de la misma, determina la aproximación inicial logrando aplicar el método. Pero al pedirle que comparta con el grupo el proceso de solución no relaciona los conceptos de convergencia, tangente y/o raíz con el Método de Newton-Raphson. Del análisis de las diferentes producciones proporcionadas por los grupos, se observa que reconocen el desarrollo del método, pero no logran relacionar los resultados de los cálculos obtenidos con el concepto de convergencia, raíz o inclusive el de aproximación lineal.

Las dificultades de los estudiantes, se observan en las representaciones asociadas a características propias del concepto, lo que permite apreciar que para lograr la comprensión conceptual es necesario promover, mediante el OVA, la coordinación de varios sistemas de representación. Como consecuencia de los resultados anteriores, se buscó el equilibrio entre la cantidad de información brindada y el uso del OVA para asegurar que el alumno comprendiera la justificación de la fórmula, que luego aplicaría de forma iterada para resolver ecuaciones no lineales, y así, llevarlo a la integración de las dimensiones semántica, sintáctica y procedimental. Al dar inicio al segundo parcial la mayoría de los estudiantes presentaron los resultados de los problemas propuestos como se puede apreciar en las Figuras 3.7 y 3.8.

**Figura 3.7** Soluciones de estudiantes a los problemas propuestos en el segundo parcial.

14.- Aplique el método de Newton-Rapshon para obtener soluciones con una exactitud de $10^{-4}$ para los siguientes problemas.

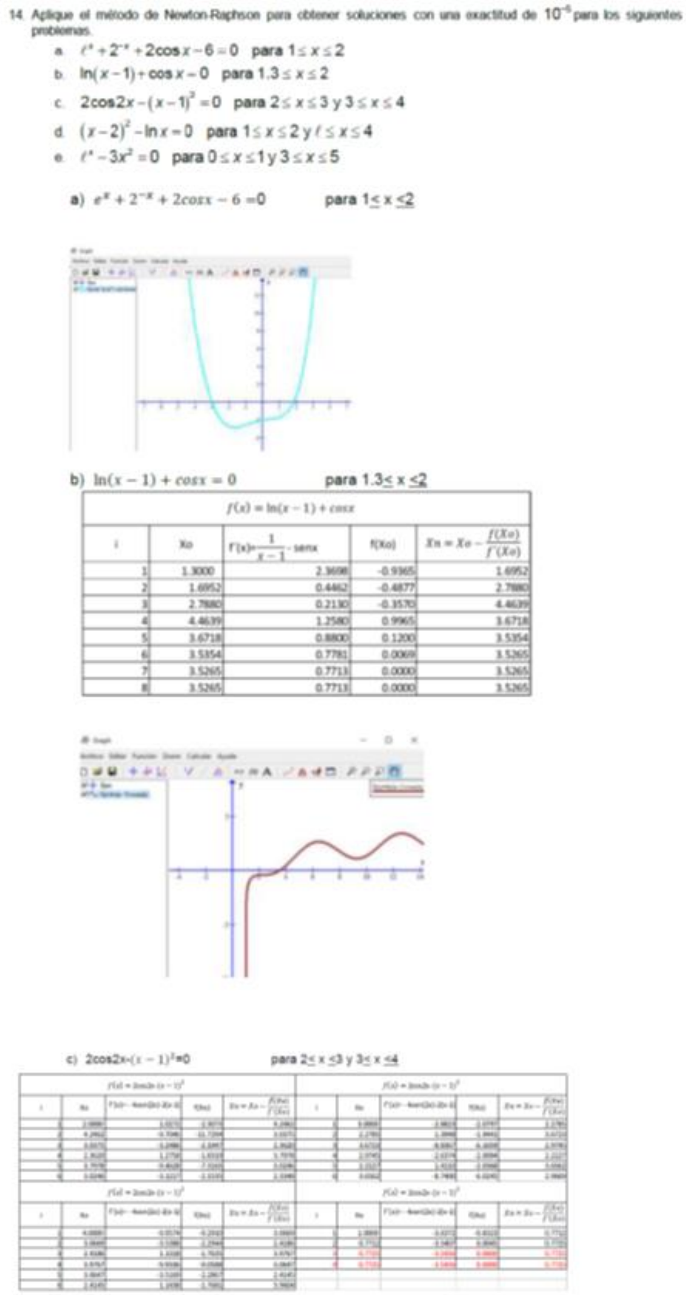
a) $e^x + 2^{-x} + 2cosx - 6 = 0$ para $1 \leq x \leq 2$

| $f(x) = e^x + 2^{-x} + 2cosx - 6$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| i | Xo | f´(x)=$e^x-2^{-x}$ ln(2)−2senx | f(Xo) | $Xn = Xo - \frac{f(Xo)}{f´(Xo)}$ |
| 1 | 1.00000 | 0.6888 | -3.8623 | 6.6076 |
| 2 | 6.6076 | 740.0554 | 732.8146 | 5.6174 |
| 3 | 5.6174 | 276.3887 | 267.6150 | 4.6491 |
| 4 | 4.6491 | 106.4618 | 98.6597 | 3.7224 |
| 5 | 3.7224 | 42.4088 | 37.1117 | 2.8473 |
| 6 | 2.8473 | 16.5650 | 13.2944 | 2.0448 |
| 7 | 2.0448 | 5.7797 | 2.8825 | 1.5460 |
| 8 | 1.5460 | 2.4561 | -1.0142 | 1.9590 |
| 9 | 1.9590 | 5.0626 | 2.1063 | 1.5429 |
| 10 | 1.5429 | 2.4412 | -1.0343 | 1.9666 |
| 11 | 1.9666 | 5.1237 | 2.1734 | 1.5424 |
| 12 | 1.5424 | 2.4388 | -1.0375 | 1.9678 |
| 13 | 1.9678 | 5.1336 | 2.1843 | 1.5424 |
| 14 | 1.5424 | 2.4385 | -1.0379 | 1.9680 |
| 15 | 1.9680 | 5.1349 | 2.1857 | 1.5424 |
| 16 | 1.5424 | 2.4384 | -1.0380 | 1.9680 |
| 17 | 1.9680 | 5.1351 | 2.1859 | 1.5424 |
| 18 | 1.5424 | 2.4384 | -1.0380 | 1.9680 |
| 19 | 1.9680 | 5.1351 | 2.1859 | 1.5424 |
| 20 | 1.5424 | 2.4384 | -1.0380 | 1.9680 |
| 21 | 1.9680 | 5.1351 | 2.1859 | 1.5424 |
| 22 | 1.5424 | 2.4384 | -1.0380 | 1.9680 |
| 23 | 1.9680 | 5.1351 | 2.1859 | 1.5424 |
| 24 | 1.5424 | 2.4384 | -1.0380 | 1.9680 |
| 25 | 1.9680 | 5.1351 | 2.1859 | 1.5424 |
| 26 | 1.5424 | 2.4384 | -1.0380 | 1.9680 |
| 27 | 1.9680 | 5.1351 | 2.1859 | 1.5424 |
| 28 | 1.5424 | 2.4384 | -1.0380 | 1.9680 |
| 29 | 1.9680 | 5.1351 | 2.1859 | 1.5424 |
| 30 | 1.5424 | 2.4384 | -1.0380 | 1.9680 |
| 31 | 1.9680 | 5.1351 | 2.1859 | 1.5424 |
| 32 | 1.5424 | 2.4384 | -1.0380 | 1.9680 |
| 33 | 1.9680 | 5.1351 | 2.1859 | 1.5424 |
| 34 | 1.5424 | 2.4384 | -1.0380 | 1.9680 |
| 35 | 1.9680 | 5.1351 | 2.1859 | 1.5424 |
| 36 | 1.5424 | 2.4384 | -1.0380 | 1.9680 |
| 37 | 1.9680 | 5.1351 | 2.1859 | 1.5424 |
| 38 | 1.5424 | 2.4384 | -1.0380 | 1.9680 |

Arredondo Sanchez Felipe de Jesús 4S11

Fuente: Producción de un alumno del turno matutino

**Figura 3.8** Soluciones de estudiantes a los problemas propuestos en el segundo parcial.




Fuente: Producción de un alumno del turno vespertino

Se logró apreciar que el 83% de los estudiantes establecieron la relación de la función con la representación gráfica, la derivada con la tangente, logrando identificar mediante el método analítico y gráfico la mejor aproximación a la raíz de la ecuación no lineal. El uso del OVA, permitió el manejo de diferentes representaciones, lo que contribuye para que los estudiantes tengan acceso a información específica de cada representación y esto favorece su reflexión del contenido matemático, como lo establece Gavilán y Barroso (2011), para el manejo de conceptos matemáticos como objetos de enseñanza aprendizaje, las dimensiones: semántica, sintáctica y procedimental se han interrelacionado e interactuado.

Para Chan (2002), los objetos se construyen en función de las capacidades de manipulación, procesamiento, intervención y transformación de dichos objetos. Crear el objeto supone un ejercicio que parte de la consideración de la realidad, algo que interesa presentar al estudiante para su aprehensión, abstraer sus atributos y organizarlos de modo que faciliten ejercer algún tipo de competencia. Para el Método de Newton-Raphson podemos mencionar algunas competencias como:

- Implementa el Método de Newton-Raphson para la solución de ecuaciones algebraicas con apoyo de un lenguaje de programación o software de cómputo numérico.
- Realiza análisis de la interpretación gráfica de una raíz.
- Analiza y valida los resultados obtenidos.

La interacción con el OVA permitió a los estudiantes aproximarse y manejar con facilidad diferentes funciones no lineales, favoreció la identificación de las variaciones que ocurren en la representación geométrica del Método de Newton-Raphson cuando se realizan cambios a los valores iniciales, lo cual ayudó a la interpretación geométrica del método y permitió a los estudiantes pasar de simples oyentes a ser constructores de sus propios conocimientos matemáticos lo que resalta en cada una de las soluciones que presentaron los estudiantes, es el logro de concretar la dimensión procedimental vinculando los conceptos básicos con el Método de Newton-Raphson.

Este ambiente permitió la utilización adecuada de la tecnología para generar conectividad personal y grupal y así promover aprendizaje significativo con la participación de todos los estudiantes en la asignatura de Métodos Numéricos. Se aprecia la importancia de contar con la plataforma MOODLE para almacenar el material didáctico implementado, favoreciendo la reutilización del mismo, además de, la modularidad, es decir, que las actividades de aprendizaje pueden ser utilizadas de manera parcial (Wiley, 2000; Chiappe et, al., 2007). Esto permitió seguir trabajando con el OVA para todas las unidades de la asignatura de Métodos Numéricos y para otras asignaturas.

Se logró que el OVA fuera interactivo, dado que permitió a los estudiantes la modificación de parámetros para observar el comportamiento del método de Newton-Raphson. Con ello se apoyaron los procesos de enseñanza y aprendizaje y se logró promover el aprendizaje autónomo. Dado que, el estudiante puede auto-observarse continuamente para aprender significativamente los contenidos y hacerlo a través de procedimientos efectivos. «El poder construir, explorar, manipular de forma directa y dinámica, cuestionar, volver a pensar, pensarlo de otra manera, realizar aportes, reconstruir conceptos, son acciones que conllevan a que el alumno se auto-regule y auto-dirija siendo capaz de tomar una postura crítica frente a los resultados que obtiene de las aproximaciones a la raíz, que lo conducen a la elaboración de conjeturas, a la argumentación de las aproximaciones propuestas y a la realización de la validación de los resultados obtenidos. Mediante la implementación del OVA, se posibilita el análisis, la generación de conceptos, las representaciones geométricas, tabulares, algebraicas y gráficas de las funciones, de una manera dinámica, logrando la generalización de los conceptos básicos, la realización de transformaciones y las asociaciones de funciones con objetos gráficos, para pasar a un nivel de conceptualización más elevado. Logrando así, la integración de las tres dimensiones que propone Gavilán y Barroso (2011).

## 5. Conclusiones

En el campo educativo, la matemática es una de las áreas que evidencia un alto índice de deserción de los estudiantes, esto debido a su carácter rígido, la falta de innovación metodológica en el aula y la poca contextualización en la enseñanza de los contenidos desde los primeros años de escolaridad. Una de las causas atribuidas a esto, corresponde al enfoque tradicionalista en la enseñanza, particularmente en la de Métodos Numéricos, donde en la mayoría de los casos se realizan algoritmos sin fundamento, se repiten procedimientos mecánicamente y sin reflexión alguna. Para contrarrestar este problema, se hace imperativo en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas, el uso de herramientas tecnológicas que faciliten la relación entre los conceptos teóricos y la contextualización de manera interactiva. Para Santos-Trigo (2016), la tecnología permite establecer diferentes representaciones de los objetos matemáticos y la visualización y exploración pueden ayudar a establecer relaciones matemáticas entre tales objetos y mostrar diversas propiedades que mediante registros con lápiz y papel no se pueden determinar. Todo esto, aunado al aprendizaje colaborativo, puede mejorar la percepción de los estudiantes frente a las matemáticas y el desempeño de los mismos en esta área.

En el caso de este trabajo, lo anterior lo encontramos en la implementación del OVA que permitió la gestión del conocimiento y formación de nuevas competencias tanto en los estudiantes como en el profesor. En congruencia con la definición dada por Chiappe et, al. (2007), este OVA fortalece las estrategias de enseñanza-aprendizaje dentro del aula y la habilitación del entorno virtual para aprender, reforzar y/o practicar los conocimientos aprendidos por los estudiantes, al igual que incorporar las TIC en procesos formativos. También, puede utilizarse parcialmente, es reutilizable, sus contenidos, actividades de aprendizaje y los elementos contextuales son unidades que pueden cambiarse y estar disponibles públicamente.

Con esta experiencia y en comparación con experiencias expositivas de los autores se ha podido constatar que es posible:

- Generar escenarios de enseñanza-aprendizaje transformativos de la práctica educativa considerando los diferentes estilos de aprendizaje.
- El uso de herramientas motivadoras del aprendizaje autónomo y que estén disponibles para revisiones posteriores del alumno.
- Estas aproximaciones son preferidas por los estudiantes por su naturaleza interactiva y que permiten comprender los objetos matemáticos.
- Proponer OVAs que permitan documentar el impacto del proceso de aprendizaje y además promuevan la integración de la matemática, ingeniería y el uso de TIC´s.

Finalmente, el OVA reportado en este trabajo, aporta en sí mismo un valor añadido en diferentes aspectos del aprendizaje, como la aclaración de conceptos como: gráfica, raíz, convergencia, aproximación, tangente y procedimientos de métodos iterativos y en especial el Método de Newton-Raphson. También se considera que proporcionó una interacción efectiva y útil al estudiante, dado que permitió de forma exitosa el aprendizaje autónomo e independiente en los estudiantes. Fue notorio que este recurso didáctico realmente fue útil y efectivo para los estudiantes en la comprensión de los conceptos teóricos y en la interpretación geométrica del Método de Newton-Raphson permitiendo que los estudiantes relacionaran dichos conceptos con distintos métodos numéricos para obtener aproximaciones a la solución de ecuaciones no lineales, esta estrategia dirigida permite activar los conocimientos previos de los estudiantes o incluso a generarlos cuando no existan.

Finalmente, cumplió con el objetivo para el que fue concebido al permitir al estudiante interactuar con los significados que se vinculan al concepto, las representaciones del concepto y finalizar con la aplicación de los algoritmos que se vinculan al concepto de manera autónoma en el proceso de aprendizaje y retroalimentar los conocimientos adquiridos en clase o mediante materiales planos usados tradicionalmente, ya que claramente se apreció la motivación y el interés que manifestaron la mayoría de los estudiantes ante el uso el OVA en la clase, logrando focalizar y mantener su atención durante la sesión de clase y una mayor significatividad de los aprendizajes logrados.

**Referencias**

Burden R. L. & Faires J. D. (2011). Numerical Analysis. Brooks/Cole.

Chan, M. E. (2002). Objetos de aprendizaje: una herramienta para la inovación educativa. *Apertura*, Innova, N2, Diciembre. Universidad de Guadalajara. Recuperado de: http://www.academia.edu/1105508/Objetos_de_aprendizaje_Una_herramienta_para_la_innovacion_educativa

Chapra S. C. & Canale, R. P., (2005). *Métodos Numéricos para Ingenieros con Programas de Aplicación*. Mc Graw Hill.

Chiappe, A., Segovia, Y., & Rincón, H.Y. (2007) Toward an Instructional Design Model Based on Learning Objects. *Educational Technology Research and Development*. 55, 6 (671-681). Springer.

Có, P., del Sastre, M., Panell, E. & Sadagorsky, A. (2011). Valoración del impacto de los software matemáticos en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática básica en carreras de ingeniería. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 24 (pp.1134-1141). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Duval, E., Hodgins, W., Rehak, D. & Robson, R. (2004). Learning Objects Symposium Special Issue Guest Editorial. *Journal of Educational Multimedia and Hypermedia, 13*(4), 331-342. Norfolk, VA: Association for the Advancement of Computing in Education (AACE). Recuperado el 16-04-2018 de https://www.learntechlib.org/primary/p/6582/.

Gavilán, J.M., & Barroso, R. (2011). *GeoGebra como instrumento de la Práctica del Profesor*. II Jornadas sobre GeoGebra de Andalucía, Huelva, España, abril 2011. Recuperado de: http://thales.cica.es/sites/thales.cica.es.geogebra/files /II_Jornadas_GeoGebra/material/comunicaciones/COM_1.pdf

Lockyer, L., Bennet, S., Agostinho, S., & Harper, B. (2009). Handbook of Research on Learning Design and Leraning Objects: Issues, Applications, and Technologies. Vol I y II. PA,USA: GI Publishing Hershey.

Morales L., Gutierrez, L., & Ariza, L. (2015). Proyecto de investigación CIAS-1475: *Ambientes virtuales de aprendizaje para el cálculo integral.* Inédito. Universidad Militar Mueva Granada (UMNG). Bogotá, Colombia.

Rodriguez, P. H. (2010). *Diseño del modelo metodológico de un objeto virtual de aprendizaje (OVA). Caso: Curso virtual de investigación aplicada a la educación popular de la Asociación Dimensión Educativa.* Trabajo de Grado. Pontificia Universidad Javeriana.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 48 (6), 827-842.

Todorova, M. & Petrova, V. (2003). Learning Objects. International Conference on Computer Systems and Technologies. Recuperado el 21-01-2018 de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.93.1221&rep=rep1&type=pdf

Wiley, D. A. (2000). Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. In D. A. Wiley (Ed.), *The Instructional Use of Learning Objects: Online Version*. Recuperado el 21-01-2018 de World Wide Web: http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc