

El doblado de papel como estrategia para un mayor acceso de los estudiantes de secundaria a la geometría

SORIA-PÉREZ, Alejandra, BELMAREZ-MARTÍNEZ, J. Jesús e IBARRA-VILLARREAL, Judith Aneth

A.Soria, J.Belmarez, y J.Ibarra

Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas

C. Cristóbal, M. Olvera, V. Vargas (Dir.) Educación para la interdisciplinariedad. Tópicos Selectos de Educación en CITEM. ©ECORFAN- México, 2017.

Abstract

In this document some basic geometric constructions are presented, such constructions are handled with the technique of origami as a strategy for the inclusion and participation of all students in the process of teaching and learning mathematics. Among such constructions are presented: those that allow to prove the theorems of Pythagoras and Haga; those that favor the understanding of the golden ratio and some regular polygons; and, to conclude, those that allow to determine the points that draw up the parabola.

Origami, Regular Polygons, Pythagorean Theorem, Haga's Theorem, Conic Sections

1. Introducción

“Matemáticas para todos” es un objetivo que anticipa un mundo en el que todas las personas tengan la oportunidad de aprender, y se beneficien del aprendizaje de las matemáticas (Clements et al., 2013). Damerow et al. (1984; citados por Clements et al., 2013) consideran que un gran obstáculo para lograr que las matemáticas sean accesibles para todos los estudiantes es que los programas en matemáticas han sido desarrollados para un grupo élite de estudiantes que desean hacerse especialistas en el área en niveles superiores. No obstante, un gran número de estudiantes con menores aspiraciones vocacionales en esta área se forman en este tipo de programas diseñados para especialistas potenciales.

En un esquema integrador, en Israel se ha diseñado un programa -llamado “origametría”- para enseñar geometría y desarrollar habilidades de aprendizaje utilizando el arte de la papiroflexia. Con él se pretende mejorar la autoestima y el sentido de logro del estudiante, mientras desarrolla pensamiento lógico y secuencial, enfoque y concentración, estética, percepción tridimensional y principios de geometría básica. Parte del éxito que ha tenido dicho programa -iniciado en 1992- proviene de un proceso al que se somete el alumno mientras dobla.

El objetivo fundamental es mejorar el conocimiento del alumno sobre el tema geométrico seleccionado y desarrollar las habilidades de aprendizaje explorando y estudiando el tema mientras se dobla el modelo (Golan & Jackson, 2009). La mayoría de estas ideas se basan en el elevado objetivo de que la enseñanza y el aprendizaje sólo tienen éxito si los estudiantes retienen conceptos y habilidades y pueden aplicar lo que han estudiado a situaciones nuevas. Esta visión del aprendizaje abre el camino e incluso crea una demanda de cambios en el plan de estudios. Origami es un candidato ideal para satisfacer parte de esta demanda. La naturaleza multicultural y multigeneracional del origami, que se practica en todo el mundo y por personas de todas las edades, es un atributo adicional que lo hace atractivo para el aula (Meyer & Meyer, 1999).

Por otro lado, en ocasiones, las reducidas aspiraciones vocacionales en el área de las matemáticas se deben a que los estudiantes pueden desarrollar una aversión a esta ciencia la cual implica un razonamiento lógico y abstracto que a menudo se asocia con creencias, prejuicios y dificultades. Este escenario puede ser aún más complejo cuando involucra a estudiantes ciegos. Sin embargo, existen estudios que han demostrado la efectividad del origami para enseñar matemáticas a los adolescentes ciegos (Moratelli Pinho, Carvalho Delou, & Wille Lima, 2016). Además, los jóvenes necesitan explorar formas geométricas y objetos de primera mano, lo que les permite desarrollar su propia comprensión de las relaciones geométricas. Ya sea que se trate de construir un modelo tridimensional, dibujar formas bidimensionales o trabajar con objetos manipulables, es esta obra activa la que mejora sus habilidades espaciales.

Es a través de este tipo de actividad que los estudiantes desarrollan su visualización o percepción espacial. Una clara conexión con esto, y una comúnmente reconocida por los profesores de matemáticas en todos los niveles, es el uso del arte de plegado de papel, Origami, como una herramienta de enseñanza. El objetivo de este trabajo es presentar a los profesores una selección de construcciones geométricas interesantes y accesibles que puedan abordarse con estudiantes de nivel secundaria, con diferentes “habilidades” y “necesidades” con respecto de la matemática. Estas construcciones son ideales también para proponer formas alternativas de construcción o generalización de teoremas geométricos de manera temprana.

Con la intención de apoyar en la dirección del logro de las “matemáticas para todos”, usaremos la técnica llamada Papiroflexia u Origami como estrategia didáctica y haremos una adaptación de las formas propuestas por diferentes autores (Sundara Row, 1941; Aguilar-Zavoznik, 2014; Haga, 2008; Coxeter, 1971; Peña Hernández, 2001). Finalmente, explicaremos cada uno de los pasos de la construcción, auxiliándonos de figuras ilustrativas de las indicaciones dadas, para apoyar al docente con una mejor comprensión que les permita introducir posteriormente en el aula las construcciones propuestas.

Los orígenes de la *papiroflexia* se sitúan en Japón, con el nombre de *Origami*, expresión conformada por dos caracteres, el primero de ellos (ori) significa doblar y el segundo (kami) significa papel. El origami o papiroflexia es una disciplina que consiste en realizar figuras doblando papel. No se permite el uso de otras herramientas que no sean el papel y las manos. En este trabajo, en la sección 2 iniciamos con una presentación de la demostración del teorema de Pitágoras. Enseguida, en la sección 3 presentamos una aplicación en la propuesta del primer teorema de Haga a la construcción de algunas fracciones y razones.

En la cuarta sección presentamos los pasos para generar la divina proporción. Continuamos en la sección 5 con construcciones de algunas figuras geométricas tales como el triángulo equilátero, el pentágono, el hexágono y finalmente, los 2^n -gonos. En la sexta sección exponemos una breve introducción para el trazado de puntos de cónicas con papiroflexia. Concluimos este trabajo con un texto para motivar a los profesores de nivel secundaria a introducir en el aula la estrategia didáctica propuesta con la finalidad de proveer un acceso democrático de los estudiantes a ideas y construcciones matemáticas.

2. Demostración del Teorema de Pitágoras

En González Urbaneja (2008) podemos encontrar el recorrido histórico de uno de los resultados más empleados en la matemática, el teorema de Pitágoras. Observamos su presencia, a través de los tiempos: en Babilonia, en el llamado Triángulo Egipcio, en la India, en China, en el mundo Griego, con una gran variedad de demostraciones. No pasaremos por alto su demostración utilizando la técnica del origami con base en la construcción sugerida en Sundara Row (1941). Para ello, seguimos los pasos:

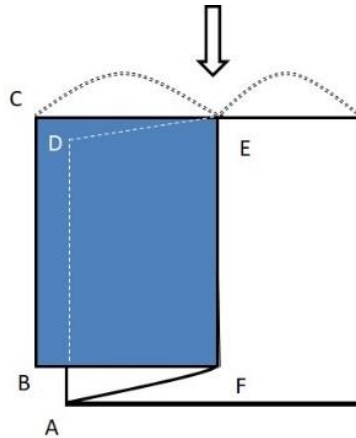
1. Doblemos una hoja cuadrada como indica la figura 1.1.

Llamaremos proporción a la igualdad de dos razones. Por ejemplo, las dos razones 3:4 y 6:8, lo cual podemos expresar como $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$; o $3 : 4 = 6 : 8$ o bien, $3:4::6:8$, que se leen: “tres es a 4 como 6 es a 8”. En la proporción llamamos antecedentes a los antecedentes de las dos razones y consecuentes a los consecuentes de las dos razones; extremos de la proporción son el antecedente de la primera razón y el consecuente de la segunda, y medios son el consecuente de la primera razón y el antecedente de la segunda.

En este apartado presentamos el primer teorema de Haga, que nos permite no sólo proporcionar una construcción de triángulos Pitagóricos de una forma muy sencilla, también nos permite presentar fracciones y razones con mucha precisión. Para ello, veamos los siguientes pasos, adaptados de Haga (2008) y Peña-Hernández (2001):

1. Doblamos por la mitad, uniendo las líneas AD y BC de tal manera que dos lados opuestos se encuentren entre sí, generando la línea FE como se muestra en la figura 1.2.

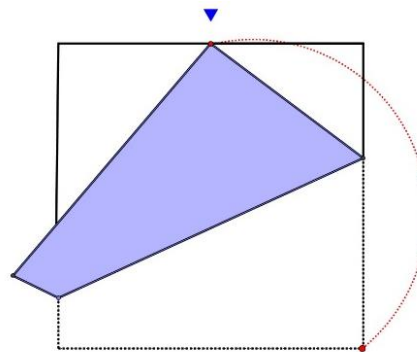
Figura 1.2 Generando FE



Fuente: Adaptada de Haga (2008)

2. Ahora hacemos un dobléz en el papel con este punto medio como punto de referencia. Colocamos el vértice inferior derecho sobre la marca del punto medio (figura 1.3).

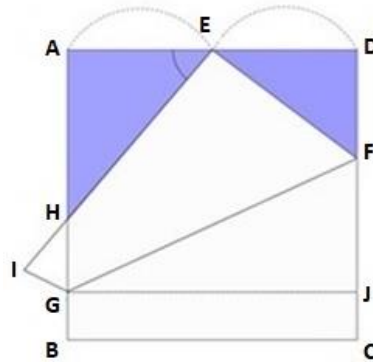
Figura 1.3 Doble básico para el Primer Teorema de Haga



Fuente: Adaptada de Haga (2008)

3. Etiquetamos los puntos como se indica en la figura 1.4 para facilitar la discusión.

Figura 1.4 Análisis del $\triangle DEF$



Fuente: Adaptada de Haga (2008)

4. Supongamos que la longitud de cada lado del cuadrado es la unidad.
 5. En la derecha, $\triangle DEF$, podemos encontrar las longitudes de los lados.

Sea $DF = x$. Entonces $FC = 1 - x$. Por el proceso de doblado $FE = FC$, así que $FE = 1 - x$. Como E es un punto medio, $DE = \frac{1}{2}$. Aplicando la relación pitagórica, obtenemos:

$$(1 - x)^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (5)$$

De ahí que, $x = \frac{3}{8}$. Por lo tanto $DF = \frac{3}{8}$ y $FE = 1 - x = \frac{5}{8}$. Así, el lado derecho está dividido por el punto F en la proporción 3 : 5. Y, además, la relación de los tres lados de $\triangle EDF$ está determinada por (6).

$$DF : DE : FE = \frac{3}{8} : \frac{1}{2} : \frac{5}{8} = 3 : 4 : 5 \quad (6)$$

Así, el $\triangle EDF$ resulta ser un triángulo pitagórico, es decir, es un triángulo rectángulo de lados racionales, cuyas medidas respecto a una misma unidad se enlazan mediante la ecuación pitagórica (7). Donde x, y, z son las medidas de los lados del triángulo rectángulo, respecto a una misma unidad de medida, siendo número racionales.

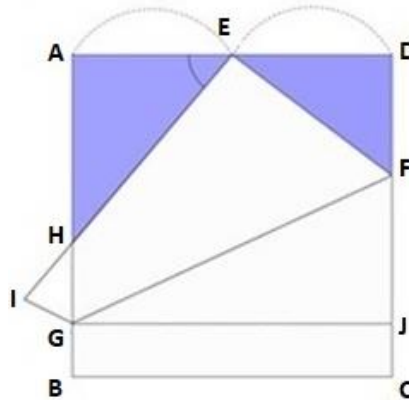
$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (7)$$

El más sencillo de los triángulos pitagóricos tales que x, y, z son primos entre sí, es el de lados 3, 4 y 5. Era ya conocido por los egipcios y usado en el trazado de perpendiculares. Dicho triángulo a menudo se menciona como el origen de la geometría y era llamado triángulo egipcio. Otros triángulos pitagóricos surgen del mismo procedimiento de doblado.

5. Determinamos las longitudes de los lados del $\triangle EAH$ (figura 1.5).

Como el vértice C del cuadrado se dobló en el punto E y $\angle BCD$ es un ángulo recto, entonces, también $\angle HEF$ es un ángulo recto. Por lo tanto, los ángulos adyacentes a $\angle HEF$ son complementarios y $\triangle EAH$ y $\triangle FDE$ son semejantes. En consecuencia, $\triangle AEH$ es también un triángulo egipcio.

Figura 1.5 Análisis del $\triangle EAH$



Ahora pretendemos buscar AH . Por la proporcionalidad de los lados tenemos (8).

$$\frac{DF}{DE} = \frac{AE}{AH} \quad \text{luego,} \quad \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{AH} \quad (8)$$

Por lo tanto $AH = \frac{2}{3}$ y podemos observar que $BH = \frac{1}{3}$, lo que implica que H es un punto de trisección. Ahora con este sencillo doblez, encontramos la mitad y la tercera parte de la unidad. Generalmente hacemos al tanteo esta última división de la hoja, pero el método aquí propuesto es más preciso.

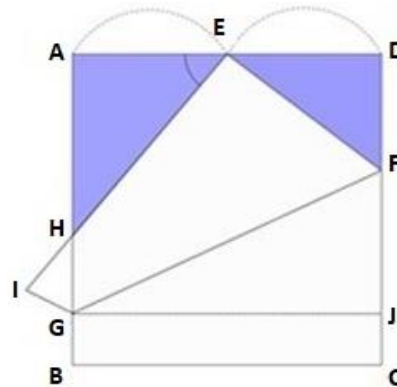
Continuamos buscando los otros lados de $\triangle AEH$. Buscamos la longitud de HE . Por la proporcionalidad de los lados establecemos (9).

$$\frac{DF}{EF} = \frac{AE}{HE} \quad \text{luego,} \quad \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{\frac{1}{2}}{HE} \quad (9)$$

Por lo tanto, $HE = \frac{5}{6}$.

Este valor de HE también es útil porque nos permite encontrar $\frac{1}{6}$ del lado. Al devolver la hoja plegada a su posición original, HE cae en el lado CB , de modo que H separa $\frac{1}{6}$ del lado. Luego, el lado izquierdo está dividido por el punto H en la proporción $2 : 1$.

6. Analicemos ahora al triángulo recto $\triangle GIH$ con ayuda de la figura 1.6.

Figura 1.6 Análisis del $\triangle GIH$ 

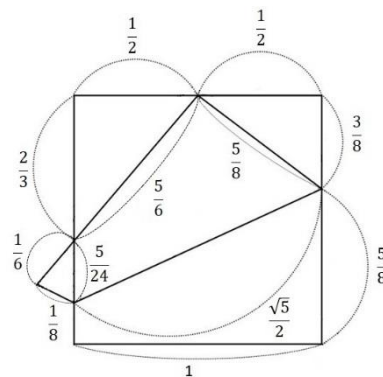
Como $\angle GHI$ y $\angle EHA$ son ángulos opuestos por el vértice y por lo tanto son iguales, tenemos que $\triangle GIH$ y $\triangle EAH$ son semejantes. Luego $\triangle GIH$ es otro triángulo egipcio que cumple con (10).

$$GI : IH : HG = 3 : 4 : 5 \quad (10)$$

Además, dado que $EI = CB = 1$ tenemos que $HI = EI - EH = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$. En cuanto a los otros lados de $\triangle GIH$ tenemos: $GI = \frac{1}{8}$ y $GH = \frac{5}{24}$. El lado izquierdo está dividido por el punto G en la proporción $7 : 1$; y por el punto H en la proporción $1 : 5$.

7. Buscamos ahora la longitud de FG .

Imaginemos un doblado a través de G paralelo al borde inferior e intersectando el lado CD en el punto J . Esta línea forma un recto $\triangle FJG$ con hipotenusa FG . Ya que al doblar $GB = GI$ entonces $GI = JC = \frac{1}{8}$ y $JF = CF - CJ = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, aplicando el Teorema de Pitágoras a $\triangle FJG$; $FG = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Figura 1.7 Resumen de los resultados

Fuente: Adaptada de Haga (2008)

Con el resumen de los resultados anteriores en la figura 1.7. Finalizamos esta sección que enfatiza sobre las fracciones, razones y proporciones.

4. Construcción de la Razón Dorada

La razón dorada, también llamada número áureo, número de oro, razón extrema y media, razón áurea, media áurea, proporción áurea y divina proporción, suele representarse con la letra griega Φ , en honor a Pheidias, quien supuestamente diseñó el Partenón haciendo uso de dicha proporción. El descubrimiento de este número (11) se atribuye a la escuela Pitagórica.

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180339887 \dots \quad (11)$$

La construcción del pentágono regular que daba Euclides depende de la división de un segmento de recta en la razón $\frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1$. De hecho, los pitagóricos utilizaban como símbolo la estrella de cinco puntas, en la que aparecen distintas razones o proporciones áureas. Este número aparece en la naturaleza, en las proporciones de los cuerpos de los seres vivos, en la estructura de las plantas, lo que ayuda a explicar el fenómeno de la filotaxia (disposición de hojas) el cual aparece, por ejemplo, en la disposición de celdas de la superficie de la piña, como se describe en Coxeter (1971). El hombre ha hecho uso de dicha proporción para crear armonía, belleza y perfección en sus obras.

Figura 1.8 La razón dorada en la obra del hombre



Fuente: Imágenes tomadas de Internet

Dado un segmento de recta AB , decimos que un punto X en dicho segmento divide a X en la razón dorada, si el segmento mayor $|AX|$ es al segmento menor $|XB|$, como la totalidad de la recta $|AB|$ es al segmento mayor $|AX|$, es decir, $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AB|}{|AX|}$.

Haremos uso de la técnica de origami para construir la razón dorada a través de los siguientes pasos hasta llegar a la figura 4.2:

1. Sea $ABCD$ la pieza cuadrada de papel, vamos a obtener un punto X en uno de los lados $-AB-$, de forma que visualicemos la división de dicho lado en una razón extrema y media, esto es, de tal manera que $|AB| \cdot |XB| = |AX|^2$ o bien el segmento mayor $|AX|$ es al segmento menor $|XB|$, como la totalidad de la recta $|AB|$ es al segmento mayor $|AX|$, es decir, $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AB|}{|AX|}$.
2. Doblamos BC sobre sí mismo y tomamos su punto medio E . La longitud del segmento $|EB|$ es entonces igual a $|\frac{AB}{2}|$.
3. Marcamos el doblez de E a A , generando la línea EA . Usando el Teorema de Pitágoras, la longitud de dicha línea es $\frac{\sqrt{5}}{2}|AB|$.

4. Colocamos EB sobre EA y doblamos con el objetivo de obtener EF y G , tales que $|EG| = |EB|$. Observamos entonces que $|EG| = \frac{|AB|}{2}$.
5. Tomamos $|AX| = |AG|$. Entonces: $|AX| = |AG| = |EA| - |EG| = \frac{\sqrt{5}}{2}|AB| - \frac{|AB|}{2} = |AB|\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

Por un lado, notamos que:

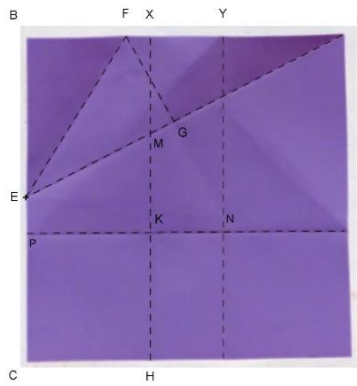
$$\frac{|AB|}{|AX|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Por el otro lado, observamos que:

$$\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AX|}{|AB|-|AX|} = \frac{|AX|}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}|AX|-|AX|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Así podemos observar en la Figura 1.9 que el segmento AB está dividido en X en la razón dorada.

Figura 1.9 Construcción de la Razón Dorada

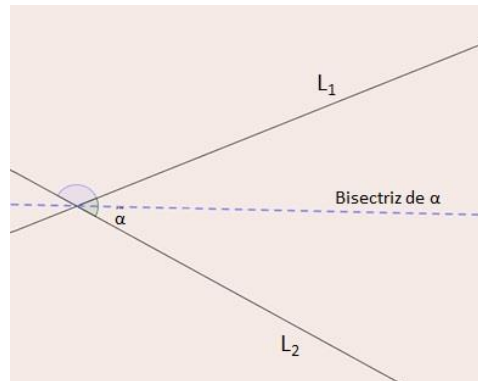


Fuente: Elaboración propia

5. Construcción de polígonos regulares

Un *polígono* es una figura geométrica compuesta por tres o más líneas que crean una figura cerrada. Un polígono es *regular* si es, simultáneamente, equilátero y equiángulo. Construiremos un *triángulo equilátero*, un *pentágono regular*, un *hexágono regular* y utilizaremos procedimientos generales para 2^n -gonos, duplicando una y otra vez por medio de bisecciones sucesivas de ángulos.

Brevemente describimos cómo realizar las bisecciones de ángulos:

Figura 1.10 Construcción de la bisectriz de un ángulo

Fuente: Elaboración propia

En la figura 1.10 mostramos el ángulo α cuyos lados son las líneas L_1 y L_2 . Bisecar un ángulo significa dividirlo en dos ángulos iguales. La bisectriz es la semirrecta con origen en el vértice del ángulo y la cuál lo divide en dos ángulos de igual medida. Para obtener dicha bisectriz, realizamos un pliegue que haga coincidir la línea L_1 con L_2 . La recta marcada con el doblez realizado es precisamente la bisectriz del ángulo.

5.1 Construcción del triángulo equilátero

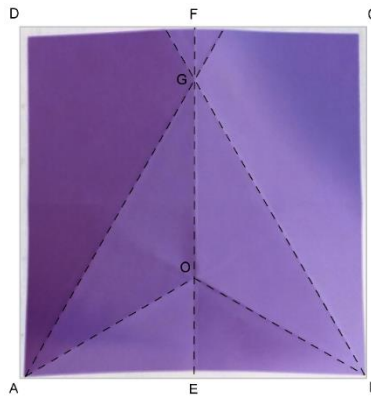
Partiremos de una hoja cuadrada, desde una adaptación de la construcción propuesta en Sundara-Row (1941) y en Peña-Hernández (2001), siguiendo los pasos indicados:

1. Doblamos por la mitad, uniendo las líneas AD y BC de tal manera que dos lados opuestos se encuentren entre sí, generando la línea FE .
2. Tomamos el punto A y lo llevamos hasta la línea FE , de tal forma que la línea AB se traslade dejando fijo el punto B . De esta forma se genera la línea BO .
3. Del mismo modo se toma ahora el punto B y se lleva hasta la línea FE , de tal forma que la línea AB se traslade dejando fijo al punto A . Así se genera la línea AO .

El triángulo AOB generado con este procedimiento es un triángulo isósceles al pie de un lado del cuadrado.

Observamos que la línea central divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos congruentes.

Podemos obtener un triángulo equilátero marcando la línea que va de B hasta la intersección del doblez en la línea FE , y haciendo lo propio con la línea que va de A hasta la misma intersección (figura 1.11).

Figura 1.11 Construcción de un Triángulo Equilátero

Fuente: Elaboración propia

Una forma alternativa de construir un triángulo equilátero, que además viene a generar el triángulo equilátero más grande que está contenido en un cuadrado, la encontramos en Aguilar-Zavoznik (2014) y en Peña-Hernández (2001); se siguen los pasos indicados a continuación:

1. Tomemos el cuadrado $ABCD$.
2. Doblamos el papel a la mitad tanto en el eje horizontal como en el eje vertical de tal forma que la hoja quede dividida en cuatro cuadrados iguales. A dichos ejes los llamaremos eje x y eje y respectivamente.
3. Hacemos un doblez de tal forma que el pliegue pase por B y la esquina A quede sobre el eje x . Denotemos al punto izquierdo del pliegue con la letra E .
4. Repetimos el paso 3, pero ahora haciendo coincidir la esquina C con el eje y , llamando al punto inferior de este segmento F .
5. Hacemos un doblez que pase por E y F .
6. El triángulo BEF es equilátero.

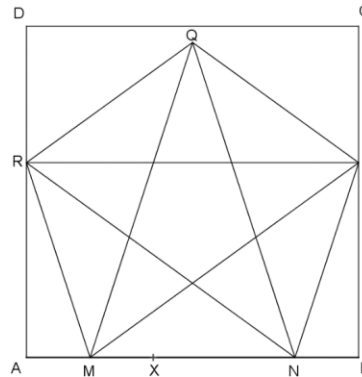
5.2 Construcción del pentágono regular

Haremos uso de la construcción de la sección dorada mediante una adaptación de la construcción propuesta en Sundara-Row (1941), para construir un pentágono regular. Para ello, partimos del cuadrado $ABCD$ y seguimos los pasos:

1. Obtenemos la razón dorada de AB , marcando el punto X .
2. Marcamos el punto medio M de AX . Entonces:
 - a. $|AB| \cdot |AX| = (|XB|)^2$
 - b. $|AM| = |MX|$.
3. Marcamos N de tal forma que $|BN| = |AM|$. Entonces $|MN| = |XB|$.
4. Señalamos R y P en los bordes AD y BC , respectivamente, de tal forma que:
 - a. $|NP| = |MR| = |MN|$.
5. Indicamos el punto Q de tal forma que $|RQ| = |MR| = |PQ|$.

6. Así $MNPQR$ es el pentágono requerido y presentado en la figura 1.12.

Figura 1.12 Construcción de un Pentágono Regular



Fuente: Elaboración propia

5.3 Construcción del hexágono regular

Esta figura conocida como “la forma perfecta de la naturaleza”, se observa en los elementos naturales como en un panal de colmena, escamas del caparazón de una tortuga o una micrografía de un copo de nieve como se aprecia en el gráfico 1.13.

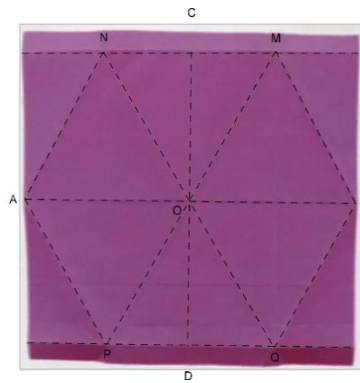
Gráfico 1.13 La forma perfecta de la naturaleza



Fuente: Imágenes tomadas de Internet

Construiremos el hexágono regular, considerando una adaptación de Sundara-Row (1941), a partir de un cuadrado dado y siguiendo los pasos indicados:

1. Doblamos la hoja por la mitad por lados opuestos para obtener el punto central, O , del cuadrado, marcando las líneas AOB y COD .
2. En ambos lados de AO y OB describimos triángulos equiláteros como se hiciera al inicio de esta sección; así obtenemos AON y AOP , BOM y BOQ .
3. Finalmente, marcamos NM y PQ .
4. Luego $ANMBQP$ es el hexágono requerido y presentado en la figura 1.14.

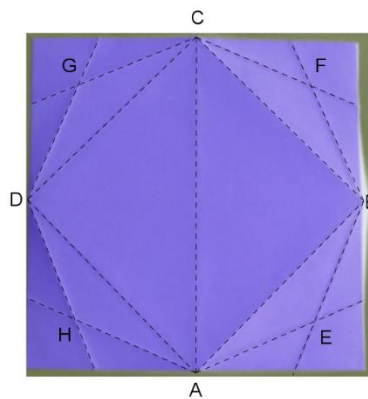
Figura 1.14 Construcción de un Hexágono Regular

Fuente: Elaboración propia

5.4 Construcción del octágono regular

En la construcción del octágono regular, adaptada de Sundara-Row (1941), procedemos de la siguiente forma:

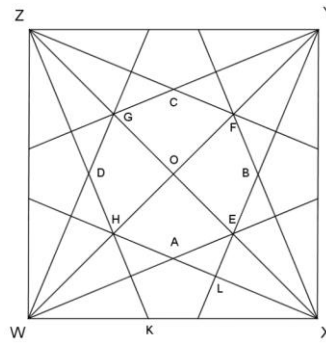
1. A partir de un cuadrado C , obtenemos el cuadrado inscrito uniendo los puntos medios -que denotaremos por A, B, C, D - de los lados del cuadrado C .
2. Luego, biseccionamos los ángulos que hacen con los lados de C , los ángulos del cuadrado inscrito.
3. Indicamos los puntos de intersección de las líneas de bisección como los puntos E, F, G y H .
4. $AEBFCGDH$ es el octágono regular buscado y detallado en la figura 1.15.

Figura 1.15 Construcción de un Octágono Regular

Fuente: Elaboración propia

Una construcción alternativa del octágono regular se presenta en la figura 1.16 y se puede obtener dividiendo los ángulos del cuadrado dado en cuatro partes iguales (doble bisección de los ángulos).

Figura 1.16 Forma alternativa de construcción de un Octágono Regular

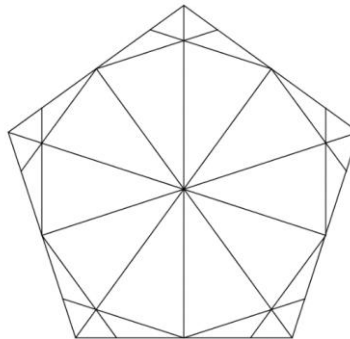


Fuente: Elaboración propia

5.5 Construcción del decágono regular y del dodecágono regular

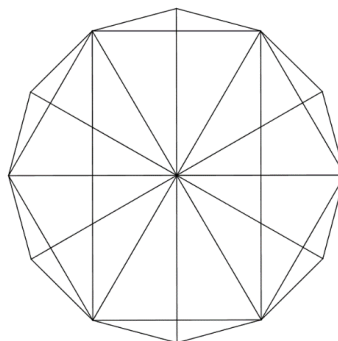
Los procedimientos para la construcción del decágono y dodecágono regular fueron adaptadas de Sundara-Row (1941). Estas figuras se pueden obtener de un pentágono y un hexágono, respectivamente, con un procedimiento similar al del octágono regular como se muestra en las figuras 1.17 y 1.18.

Figura 1.17 Construcción de un decágono regular



Fuente: Elaboración propia

Figura 1.18 Construcción de un dodecágono regular



Fuente: Elaboración propia

Con estos procedimientos concluimos la sección de construcciones de polígonos regulares. De manera similar podemos hacer entonces la construcción de un 2^n -gono regular.

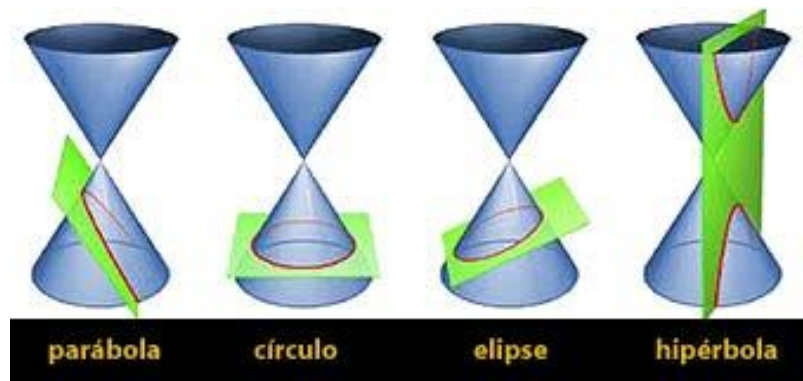
6. Construcción de las Secciones Cónicas

Supongamos que tenemos una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$, en término de dos variables x y y . En general, hay un número infinito de pares de valores de x y y que satisfacen dicha ecuación. Cada uno de tales valores reales se considera las *coordenadas* (x, y) de un punto en el plano, donde x es la abscisa y y es la ordenada. El conjunto de los puntos, y solamente aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $f(x, y) = 0$, se llaman *gráfica de la ecuación*, o bien, su *lugar geométrico*. Cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $f(x, y) = 0$ pertenece a la gráfica de la ecuación (Lehmann, 1988).

Una *cónica* o *sección cónica*, es el lugar geométrico de los puntos, cuya relación de distancias a un punto fijo -llamado *foco*- y una recta fija -llamada *directriz*-, es constante. La relación constante es conocida como *excentricidad*, denotada por la letra e y utilizada para clasificar a las secciones cónicas: Si $e < 1$, la cónica se llama *elipse*, si $e = 1$ la cónica es una *parábola* y finalmente, si $e > 1$ estaremos hablando de una *hipérbola*. La cuerda que pasa por el foco y es paralela a la directriz se llama *lado recto* del latín *latus rectum*.

Otras definiciones de cónica, que propuso Manecmio hacia 340 a. J. C. fueron reconciliadas con ésta por Papo de Alejandría (siglo IV) o tal vez por Euclides. El nombre de *cónicas* proviene del hecho de que estas curvas se obtuvieron por primera vez como secciones planas de un cono circular recto como se puede apreciar en la figura 1.19.

Figura 1.19 Cónicas



Fuente: Imagen tomada de Internet

Si bien el tema de cónicas no forma parte de programa de estudios de matemáticas de nivel secundaria es interesante la propuesta para este nivel, debido a que las construcciones permiten repasar conceptos geométricos que sí se desarrollan en este periodo, tales como paralelas, perpendiculares, distancias y tangentes. Nuestro objetivo en esta sección es presentar la construcción de una sección cónica, la parábola, proporcionando una serie de pasos que permiten mostrar un punto de la cónica y que, si se repitieran los pasos se obtendrían puntos que forman parte del lugar geométrico. La construcción presentada en la sección 7.1 fue adaptada de Sundara- Row (1941).

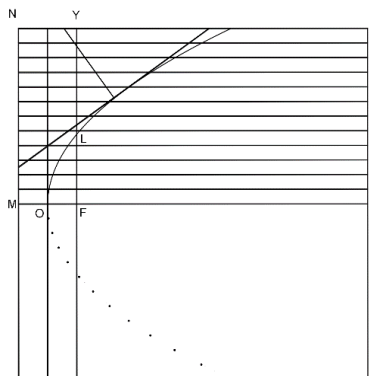
6.1 Parábola

Podemos marcar algunos puntos de una parábola siguiendo el procedimiento que señalamos abajo:

- Tomemos un cuadrado. Uno de los bordes del cuadrado, AB , es la directriz.
- Doblemos por la mitad, generando una línea perpendicular a la directriz. Esta línea es el eje.
- Señalemos en el eje dos puntos, el origen, O , y el foco F .
- Dividamos la mitad superior del cuadrado en un determinado número de secciones, formando líneas paralelas al eje. Estas líneas han de coincidir con la directriz en una serie de puntos.
- Doblemos, colocando cada uno de estos puntos en el foco.
- Marquemos los puntos donde se cortan las líneas paralelas al eje correspondientes.
- Para obtener los puntos correspondientes en la mitad inferior, doblamos el papel en el eje y pinchamos a través de aquéllos.

Los puntos obtenidos se encuentran en una parábola (figura 1.20) y el plegado proporciona también la tangente a la curva en cada uno de los puntos.

Figura 1.20 Construcción de los puntos de una parábola



Fuente: Adaptada de Sundara-Row (1941)

7. Resultados

En esta presentación se ha realizado una investigación documental con la intención de revisar, seleccionar y adaptar construcciones geométricas, demostración de resultados matemáticos y localización de puntos para construir las cónicas, utilizando la técnica de origami o papiroflexia. Los autores nos hemos dedicado los últimos cinco años a difundir dicha técnica con fines didácticos para la enseñanza de la matemática y aunque no presentamos resultados de las implementaciones, por estar fuera de los objetivos delimitados en este trabajo, consideramos que es una importante estrategia didáctica para hacer ciertos contenidos matemáticos abstractos (tales como los conceptos y demostraciones matemáticas, así como la visualización o percepción gráfica de ecuaciones algebraicas) accesibles a estudiantes de educación secundaria, contribuyendo con ello a lograr el objetivo de “matemáticas para todos”.

Concentrar los resultados de esta investigación en este trabajo permite a profesores e investigadores en el área, acceder a dichos materiales para realizar las adaptaciones convenientes y ponerlas en práctica con estudiantes para explorar los resultados.

Agradecimiento

Los autores de esta investigación agradecen a la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango por las facilidades para ofrecer continuamente espacios para dar a conocer el potencial del origami o papiroflexia en la enseñanza aprendizaje de la matemática. También agradecen el financiamiento al Programa de Fortalecimiento de la Calidad Educativa a través de los proyecto P/PFCE-2016-10MSU0010C-06 de la DES de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez del Estado de Durango y al Programa de Apoyos Institucionales y Financiamiento a Proyectos de Investigación 2017 del Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Durango (COCYTED), a través del proyecto Reunión Nacional de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas 2017.

Referencias

- Aguilar-Zavoznik, A. (Dic 2013-Ene 2014). Regla y compás vs origami. *Carta informativa de la Sociedad Matemática Mexicana no. 68*, 3-14.
- Coxeter, H. (1971). *Fundamentos de Geometría*. Editorial Limusa-Wiley, S.A.
- Golan, M., & Jackson, P. (2009). Origametry: A program to teach geometry and to develop learning skills using the art of origami. En E. p. Lang, *Origami4*.
- González Urbaneja, P. M. (2008). El Teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4,000 años. *SIGMA*, 103-130.
- Haga, K. (2008). *ORIGAMICS, Mathematical Explorations through Paper Folding*. World Scientific Publishing .
- Lehmann, C. H. (1988). *Geometría analítica*. Editorial Limusa, S.A. de C.V.
- Meyer, D., & Meyer, J. (1999). Teaching Mathematical Thinking through Origami. *Bridges, Mathematical Connections in Art, Music and Science*.
- Moratelli Pinho, T., Carvalho Delou, C., & Wille Lima, N. (2016). Origami as a tool to teach geometry for blind students. *Scientific Research Publishing Inc*.
- Peña Hernández, J. d. (2001). *Matemáticas y Papiroflexia*. Asociación Española de Papiroflexia.
- Pope, S. (2002). The use of origami in the teaching of geometry. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*.
- Sundara Row, T. (1941). *Geometric exercises in paper folding*. Open court.