Actas

Tópicos Selectos de Educación en CITeM

T-II

CRISTÓBAL-ESCALANTE, César
OLVERA-MARTÍNEZ, María del Carmen
VARGAS-ALEJO, Verónica *Directores*

Red Internacional de Investigación Campus Viviente de Educación en Ciencias Ingeniería-Tecnología y Matemáticas

ECORFAN®

Volumen II

Para futuros volúmenes:
http://www.ecorfan.org/actas

ECORFAN Tópicos Selectos de Educación en CITeM

Las Actas ofrecerán los volúmenes de contribuciones seleccionadas de investigadores que contribuyan a la actividad de difusión científica de ECORFAN en su área de investigación en Educación en Ciencias, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas. Además de tener una evaluación total, en las manos de los editores de la Universidad Juárez del Estado de Durango que colaboraron con calidad y puntualidad en sus capítulos, cada contribución individual fue arbitrada a estándares internacionales (RENIECYT-LATINDEX-DIALNET-ResearchGateDULCINEA-CLASESudoc-HISPANA-SHERPA-UNIVERSIA-eREVISTAS-ScholarGoogleDOI-REBID-Mendeley), el Acta propone así a la comunidad académica, los informes recientes sobre los nuevos progresos en las áreas más interesantes y prometedoras de investigación en Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Cristóbal-Escalante, César ● Olvera-Martínez, María del Carmen ● Vargas-Alejo, Verónica

Directores

Tópicos Selectos de Educación en CITeM

Educación para la interdisciplinariedad

T-II

Universidad Juárez del Estado de Durango. Diciembre, 2017.

ECORFAN®

Directores

Cristóbal-Escalante, César
Olvera-Martínez, María del Carmen
Vargas-Alejo, Verónica

Universidad de Quintana Roo
Universidad Juárez del Estado de Durango
Universidad de Guadalajara

ISBN: 978-607-8534-42-5
Sello Editorial ECORFAN: 607-8534
Número de Control ATSE: 2017-02
Clasificación ATSE (2017): 301217-0106

Prefacio

En esta era de conocimiento, tecnología, integración y participación, existe la necesidad de promover en todos los ciudadanos, sin exclusión, una formación en Ciencias, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (CITeM) que promueva el desarrollo de las capacidades cognitivas de los individuos, espíritu crítico, libertad de expresión, fomento hacia la investigación, habilidades para aprender a aprender y aprender a razonar. Se requiere una educación de calidad y con equidad. La historia muestra que el desarrollo del conocimiento por una sociedad, y por los individuos, es un proceso social. Proceso en el que las interrelaciones de una comunidad (o individuo) con otras comunidades (o individuos) propician la representación, la descripción, la comunicación, la revisión, el refinamiento de las ideas o conceptualizaciones que se han desarrollado a partir de las experiencias propias de la comunidad (o del individuo).

El Grupo Internacional de Investigación Campus Viviente de Educación en Ciencias, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (CITeM), es una red de investigación que ha impulsado la conformación de comunidades de profesionistas, investigadores y estudiantes de posgrado. El objetivo ha sido aportar hacia la problemática de la falta de programas y propuestas en educación en CITEM, desde perspectivas globales y holísticas que permitan la democratización del conocimiento y que impacten en los diferentes niveles educativos a nivel local, regional, nacional e internacional.

La Red parte de que las colaboraciones académicas conjuntas toman sentido cuando se conforman bajo objetivos afines y perspectivas de trabajo incluyentes y participativas; el intercambio de experiencias permite reflexionar sobre los programas y resultados propios, refinarlos, valorarlos, rediseñarlos, buscando mejorar los logros tanto en calidad como en cobertura. Bajo estas premisas, el trabajo colaborativo de esta red ha permitido realizar investigaciones para favorecer prácticas científicas en el aula que han tenido impacto en los diferentes niveles educativos a nivel local, regional, nacional e internacional. Derivado de estas actividades, se han realizado publicaciones arbitradas e indizadas y formación de recursos humanos, tanto a nivel licenciatura como posgrado.

También, se han organizado eventos académicos conjuntos tales como el Simposio Internacional Campus Viviente de Educación en CITeM, 2013, con sede en la Universidad de Texas en San Antonio, EUA; Panel de Discusión: Academic Collaborations in International Settings: Equity and Quality in Education through STEM Education en Global Latino Education Advocacy Days, 2015, celebrado en la Universidad de Texas en San Antonio, EUA; Primera y Segunda Reunión Nacional de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (Renace CITeM), 2015 y 2017 realizadas en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango, México.

A partir de algunos de los trabajos de investigación presentados en la segunda Reunión Nacional en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas, realizada en septiembre de 2017. Este segundo tomo, *Educación para la Interdisciplinariedad*, contiene siete capítulos donde se dan a conocer los resultados de estudios que enfatizan la interdisciplinariedad al involucrar al menos dos de las áreas correspondientes a CITeM: Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas. En los capítulos 1 y 2, se presentan trabajos en los que se involucra la manipulación y exploración de materiales concretos para favorecer la emergencia del estudio de diversos conceptos y contenidos matemáticos tanto geométricos, como algebraicos.

Así en el Capítulo 1, Alejandra Soria-Pérez, J. Jesús Belmarez-Martínez y Judith Aneth Ibarra-Villarreal, ejemplifican el potencial del doblado de papel (origami, papiroflexia) en actividades didácticas de construcciones geométricas. Estas actividades pueden ser utilizadas en el aula con estudiantes desde los niveles básicos a avanzados. Ellos describen procedimientos y muestran esquemas de cómo proceder para elaborar polígonos regulares, razones y proporciones, cónicas. El doblado de papel implica unir puntos realizando dobleces, comparar segmentos superponiendo trazos, esto es, en sustitución de la regla y el compás, acciones que llevan a sustentar proposiciones en las que descansan esas construcciones.

Angelina Alvarado-Monroy, María del Carmen Olvera-Martínez, Mario Alberto Alvarado-Quiñones, en el Capítulo 2, tratan a La Criptografía como Contexto para Introducir el Estudio del Concepto de Función en Educación Secundaria. Se presenta el diseño y la evaluación de un ambiente de aprendizaje, que utiliza un contexto de cifrado y descifrado de mensajes en la protección de información, para detonar el uso de distintas representaciones matemáticas y que sirve como base para posteriormente construir o refinar la noción de función. En el estudio participan dos grupos de nivel secundaria y se reportan los modelos que construyeron durante la interacción con las actividades: concreto, tabular, gráfico y la transición entre representaciones o modelos.

Los capítulos 3 y 4, comparten el aspecto de la planeación y diseño de actividades de instrucción utilizando ambientes computacionales tanto para el diseño como para su implementación.

En el Capítulo 3, Objeto Virtual de Aprendizaje para la interpretación geométrica del método numérico de Newton-Rapshon, los autores María Cristina Rodríguez-Mendías, Juan Manuel Valdez-Chávez, y Angelina Alvarado-Monroy, exponen el proceso de diseño y de implementación de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) cuyo objetivo educativo es favorecer la comprensión del método de Newton-Raphson, a través de su interpretación geométrica, en estudiantes del nivel superior. Resaltan el uso de herramientas y plataformas digitales como GeoGebra, HotPotatoes y MOODLE. Describen los resultados obtenidos en su implementación.

Por su parte, Eduardo C. Briceño-Solis; Judith A. Hernández-Sánchez; J. Jesús Muñoz-Hernández y Darly A. Ku-Euan, en el Capítulo 4 Integración de la tecnología mediante la planeación docente: una experiencia al tema de la integral definida, describen cómo un proceso de planeación y diseño de actividades didácticas incide en el desarrollo de las competencias docentes, al demandarle analizar, reflexionar y tomar decisiones sobre las actividades que deben realizarse en el aula y sobre qué recursos utilizar (tecnológicos y otros) y cómo usarlos para enseñar un contenido matemático escolar. Ejemplifican esto con el caso particular de realizar la planificación del proceso de enseñanza que podrían seguir, siguiendo los lineamientos que proporciona el modelo TPACK–THA.

Los capítulos 5, 6 y 7 están basados en la resolución de problemas y el uso sistemático y coordinado de tecnologías digitales para la construcción y desarrollo del conocimiento matemático. En este sentido, se muestran las formas de identificar, explorar, justificar y comunicar estrategias de solución que exhiben los participantes en el proceso de resolución de problemas en diferentes escenarios de aprendizaje.

En el Capítulo 5: Formas de razonamiento de profesores de bachillerato al resolver problemas sobre lugares geométricos con GeoGebra, Francisco Ortega-Moreno, Aarón Reyes-Rodríguez, y Verónica Vargas-Alejo exponen los resultados que observaron durante una experiencia con profesores de bachillerato considerando las formas de razonamiento utilizadas por ellos al realizar las actividades utilizando GeoGebra. Los resultados obtenidos enfatizan aspectos a considerar para el diseño e implementación de actividades en ambientes computacionales. Destaca el papel de la exploración de situaciones por medio de Sistema de Geometría Dinámica (SGD) que lleva al planteamiento de conjeturas plausibles y de su demostración.

Construcción, exploración e integración de modelos dinámicos para el desarrollo profesional de profesores de matemáticas de bachillerato, es el Capítulo 6. María del Carmen Olvera-Martínez y Angelina Alvarado-Monroy presentan un estudio, en el cual se diseñó e implementó un ambiente de desarrollo profesional con profesores de matemáticas del nivel medio superior, que tuvo como objetivo promover la deconstrucción del concepto de función, ya que los profesores se involucraron en actividades que les permitieron deshacer analíticamente los elementos que constituyen a dicho concepto y, de esta manera, refinar sus conocimientos y concepciones previas del concepto de función. Se analizaron y documentaron las formas en que los participantes representaron, exploraron y dieron sentido a los objetos y conceptos matemáticos involucrados en la resolución de problemas que favorecen el análisis de ideas fundamentales que giran en torno al concepto de función y fomentan el uso sistemático y coordinado de tecnologías digitales.

En el Capítulo 7, William Poveda Fernández, Daniel Aurelio-Aguilar Magallón y María del Carmen Olvera-Martínez, presentan el trabajo Resolución de Problemas y Uso de Tecnologías Digitales en un Curso en Línea Masivo y Abierto. Los autores muestran los resultados del diseño e implementación de una de las actividades que conforman un Curso en Línea Masivo y Abierto (MOOC). Se enfatiza en el análisis de los recursos, las relaciones, las representaciones y las estrategias que los participantes ponen en juego durante la resolución de problemas con el uso del Sistema de Geometría Dinámica GeoGebra y que exhiben en las conversaciones que se dan lugar en los Foros del MOOC.

Agradecemos la valiosa contribución de las personas que fungieron como revisores del proceso de arbitraje por sus detalladas y acertadas revisiones, así como al comité editorial por su gran colaboración para la culminación de esta publicación. También, deseamos expresar nuestra gratitud a la División de Ciencias e Ingeniería de la Universidad de Quintana Roo, al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Guadalajara, y a la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango por permitir la edición de este tomo. Finalmente, agradecemos el financiamiento otorgado por el Programa de Fortalecimiento a la Calidad Educativa (PFCE 2016-2017) y al Programa de Apoyos Institucionales y Financiamiento a Proyectos de Investigación 2017 del Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Durango (COCYTED); Proyecto Campus Viviente in STEM Education financiado por el Colegio de Educación de la Universidad de Texas en San Antonio, Secretaría de Educación del Gobierno del Estado de Coahuila, AHMSA International, y Mexicans and Americans Thinking Together; Proyecto: Incorporación de las herramientas digitales en la enseñanza de funciones en el nivel medio superior, financiado por el Programa para el Desarrollo Profesional Docente dentro del Apoyo a la Incorporación de NPTC (PRODEP, UJED-PTC-122, 511-6/17-763, 2017); Proyecto: Aprendizaje de los conceptos de función, ecuación y variación, y el desarrollo de habilidades para resolver problemas que implican modelación, con el financiamiento del Programa para el Desarrollo Profesional Docente dentro del Apoyo a la Incorporación de NPTC (PRODEP, UDG-PTC-1377, 511-6/17-8091, 2017); Proyecto: Aprendizaje de las matemáticas y la perspectiva de modelos y modelación avalado por el Colegio Departamental del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Guadalajara (2018); Proyecto: Uso de GeoGebra para resolver problemas que implican la construcción y solución de sistemas de ecuaciones lineales, el cual está avalado por el Colegio Departamental del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Guadalajara (2018).

Desde estas iniciativas para difundir los resultados de investigación, se pueden apoyar la puesta en marcha de acciones sistemáticas, transversales y articuladas encaminadas hacia favorecer el acceso democrático al conocimiento y a la generación en nuestro entorno, de cambios culturales profundos en educación para CITeM. Con este segundo tomo de Actas Tópicos Selectos de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas: Educación para la Interdisciplinariedad, el Grupo Internacional de Investigación Campus Viviente de Educación en Ciencias, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (CITeM) desea fortalecerse y aportar conocimientos al sistema educativo.

Cristóbal-Escalante, César
Olvera-Martínez, María del Carmen
Vargas-Alejo, Verónica

Estado de Durango, México
Diciembre, 2017.

Contenido **Pág.**

El doblado de papel como estrategia para un mayor acceso de los estudiantes de secundaria a la geometría

SORIA-PÉREZ, Alejandra, BELMAREZ-MARTÍNEZ, J. Jesús e IBARRA-VILLARREAL, Judith Aneth

A.Soria, J.Belmarez, y J.Ibarra

Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas

C. Cristóbal, M. Olvera, V. Vargas (Dirs.) Educación para la interdisciplinariedad. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

In this document some basic geometric constructions are presented, such constructions are handled with the technique of origami as a strategy for the inclusion and participation of all students in the process of teaching and learning mathematics. Among such constructions are presented: those that allow to prove the theorems of Pythagoras and Haga; those that favor the understanding of the golden ratio and some regular polygons; and, to conclude, those that allow to determine the points that draw up the parabola.

Origami, Regular Polygons, Pythagorean Theorem, Haga's Theorem, Conic Sections

1. Introducción

"Matemáticas para todos" es un objetivo que anticipa un mundo en el que todas las personas tengan la oportunidad de aprender, y se beneficien del aprendizaje de las matemáticas (Clements et al., 2013). Damerow et al. (1984; citados por Clements et al., 2013) consideran que un gran obstáculo para lograr que las matemáticas sean accesibles para todos los estudiantes es que los programas en matemáticas han sido desarrollados para un grupo élite de estudiantes que desean hacerse especialistas en el área en niveles superiores. No obstante, un gran número de estudiantes con menores aspiraciones vocacionales en esta área se forman en este tipo de programas diseñados para especialistas potenciales.

En un esquema integrador, en Israel se ha diseñado un programa -llamado "origametría"- para enseñar geometría y desarrollar habilidades de aprendizaje utilizando el arte de la papiroflexia. Con él se pretende mejorar la autoestima y el sentido de logro del estudiante, mientras desarrolla pensamiento lógico y secuencial, enfoque y concentración, estética, percepción tridimensional y principios de geometría básica. Parte del éxito que ha tenido dicho programa -iniciado en 1992- proviene de un proceso al que se somete el alumno mientras dobla.

El objetivo fundamental es mejorar el conocimiento del alumno sobre el tema geométrico seleccionado y desarrollar las habilidades de aprendizaje explorando y estudiando el tema mientras se dobla el modelo (Golan & Jackson, 2009). La mayoría de estas ideas se basan en el elevado objetivo de que la enseñanza y el aprendizaje sólo tienen éxito si los estudiantes retienen conceptos y habilidades y pueden aplicar lo que han estudiado a situaciones nuevas. Esta visión del aprendizaje abre el camino e incluso crea una demanda de cambios en el plan de estudios. Origami es un candidato ideal para satisfacer parte de esta demanda. La naturaleza multicultural y multigeneracional del origami, que se practica en todo el mundo y por personas de todas las edades, es un atributo adicional que lo hace atractivo para el aula (Meyer & Meyer, 1999).

Por otro lado, en ocasiones, las reducidas aspiraciones vocacionales en el área de las matemáticas se deben a que los estudiantes pueden desarrollar una aversión a esta ciencia la cual implica un razonamiento lógico y abstracto que a menudo se asocia con creencias, prejuicios y dificultades. Este escenario puede ser aún más complejo cuando involucra a estudiantes ciegos. Sin embargo, existen estudios que han demostrado la efectividad del origami para enseñar matemáticas a los adolescentes ciegos (Moratelli Pinho, Carvalho Delou, & Wille Lima, 2016). Además, los jóvenes necesitan explorar formas geométricas y objetos de primera mano, lo que les permite desarrollar su propia comprensión de las relaciones geométricas. Ya sea que se trate de construir un modelo tridimensional, dibujar formas bidimensionales o trabajar con objetos manipulables, es esta obra activa la que mejora sus habilidades espaciales.

Es a través de este tipo de actividad que los estudiantes desarrollan su visualización o percepción espacial. Una clara conexión con esto, y una comúnmente reconocida por los profesores de matemáticas en todos los niveles, es el uso del arte de plegado de papel, Origami, como una herramienta de enseñanza El objetivo de este trabajo es presentar a los profesores una selección de construcciones geométricas interesantes y accesibles que puedan abordarse con estudiantes de nivel secundaria, con diferentes "habilidades" y "necesidades" con respecto de la matemática. Estas construcciones son ideales también para proponer formas alternativas de construcción o generalización de teoremas geométricos de manera temprana.

Con la intención de apoyar en la dirección del logro de las "matemáticas para todos", usaremos la técnica llamada Papiroflexia u Origami como estrategia didáctica y haremos una adaptación de las formas propuestas por diferentes autores (Sundara Row, 1941; Aguilar-Zavoznik, 2014; Haga, 2008; Coxeter, 1971; Peña Hernández, 2001). Finalmente, explicaremos cada uno de los pasos de la construcción, auxiliándonos de figuras ilustrativas de las indicaciones dadas, para apoyar al docente con una mejor comprensión que les permita introducir posteriormente en el aula las construcciones propuestas.

Los orígenes de la *papiroflexia* se sitúan en Japón, con el nombre de *Origami*, expresión conformada por dos caracteres, el primero de ellos (ori) significa doblar y el segundo (kami) significa papel. El origami o papiroflexia es una disciplina que consiste en realizar figuras doblando papel. No se permite el uso de otras herramientas que no sean el papel y las manos. En este trabajo, en la sección 2 iniciamos con una presentación de la demostración del teorema de Pitágoras. Enseguida, en la sección 3 presentamos una aplicación en la propuesta del primer teorema de Haga a la construcción de algunas fracciones y razones.

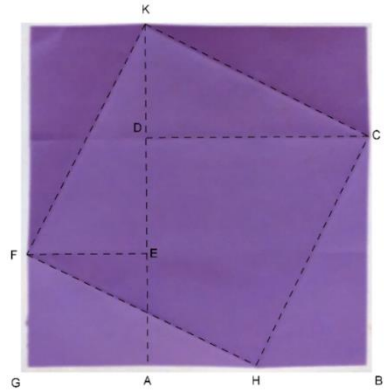
En la cuarta sección presentamos los pasos para generar la divina proporción. Continuamos en la sección 5 con construcciones de algunas figuras geométricas tales como el triángulo equilátero, el pentágono, el hexágono y finalmente, los 2^n-gonos. En la sexta sección exponemos una breve introducción para el trazado de puntos de cónicas con papiroflexia. Concluimos este trabajo con un texto para motivar a los profesores de nivel secundaria a introducir en el aula la estrategia didáctica propuesta con la finalidad de proveer un acceso democrático de los estudiantes a ideas y construcciones matemáticas.

2. Demostración del Teorema de Pitágoras

En González Urbaneja (2008) podemos encontrar el recorrido histórico de uno de los resultados más empleados en la matemática, el teorema de Pitágoras. Observamos su presencia, a través de los tiempos: en Babilonia, en el llamado Triángulo Egipcio, en la India, en China, en el mundo Griego, con una gran variedad de demostraciones. No pasaremos por alto su demostración utilizando la técnica del origami con base en la construcción sugerida en Sundara Row (1941). Para ello, seguimos los pasos:

1. Doblemos una hoja cuadrada como indica la figura 1.1.

Figura 1.1 Construcción para probar el Teorema de Pitágoras



Fuente: Elaboración propia.

Para hacerlo marcamos, primeramente, el rectángulo en uno de sus lados FG. Con base en esa longitud, marcamos rectángulos alrededor de la figura. Desdoblamos y sobre los rectángulos marcamos los triángulos congruentes a FGH.

2. Los triángulos obtenidos son congruentes entre ellos y su área es $\frac{|FG||GH|}{2}$.
3. Notemos, por un lado, que el área de la hoja cuadrada es igual a (1).

$$|FH|^2 + \acute{a}rea\ de\ cuatro\ tri\acute{a}ngulos\ rect\acute{a}ngulos\ congruentes \tag{1}$$

De donde se sigue la igualdad (2),

$$|FH|^2 \ + \ 4\frac{|FG||GH|}{2} = \ |FH|^2 + 2|FG||GH| \tag{2}$$

4. Por el otro lado, observamos que el área de la hoja cuadrada es igual a la suma de dos cuadrados y dos rectángulos. Es decir, su área conjunta es (3),

$$|FG|^{\,2} + |GH|^2 + 2|FG||GH| \tag{3}$$

5. Por comparación, obtenemos (4):

$$|FH|^2 \ = \ |FG|^2 \ + \ |GH|^2 \tag{4}$$

Es decir, que el cuadrado de la hipotenusa del triángulo FGH es igual a la suma de los cuadrados de los catetos del mismo triángulo, FG y GH. Con lo cual se demuestra el teorema de Pitágoras.

3. Fracciones, razones y proporciones

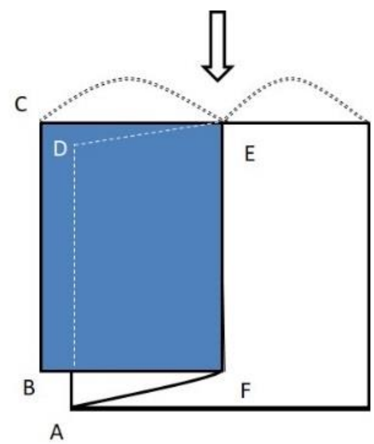
Las razones se utilizan en la comparación de cantidades con ayuda de la división. Llamamos razón de dos cantidades al cociente de la primera por la segunda. Podemos expresar las razones de diferentes maneras, por ejemplo, utilizando dos puntos (:), 3:4; utilizando la preposición “a”: 3 a 4; como una fracción común: $\frac{3}{4}$; como una fracción decimal: 0.75; .o como un porcentaje:75%.

Llamaremos proporción a la igualdad de dos razones. Por ejemplo, las dos razones $3:4$ y $6:8$, lo cual podemos expresar como $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$; o $3 : 4 = 6:8$ o bien, $3:4::6:8$, que se leen: "tres es a 4 como 6 es a 8". En la proporción llamamos antecedentes a los antecedentes de las dos razones y consecuentes a los consecuentes de las dos razones; extremos de la proporción son el antecedente de la primera razón y el consecuente de la segunda, y medios son el consecuente de la primera razón y el antecedente de la segunda.

En este apartado presentamos el primer teorema de Haga, que nos permite no sólo proporcionar una construcción de triángulos Pitagóricos de una forma muy sencilla, también nos permite presentar fracciones y razones con mucha precisión. Para ello, veamos los siguientes pasos, adaptados de Haga (2008) y Peña-Hernández (2001):

1. Doblamos por la mitad, uniendo las líneas AD y BC de tal manera que dos lados opuestos se encuentren entre sí, generando la línea FE como se muestra en la figura 1.2.

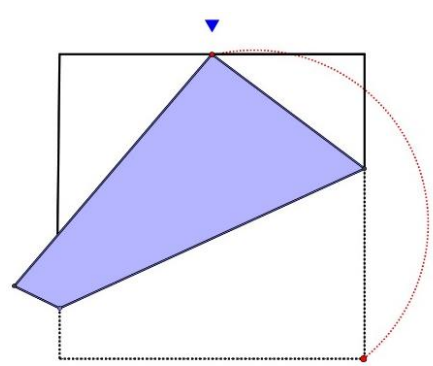
Figura 1.2 Generando FE



Fuente: Adaptada de Haga (2008)

2. Ahora hacemos un doblez en el papel con este punto medio como punto de referencia. Colocamos el vértice inferior derecho sobre la marca del punto medio (figura 1.3).

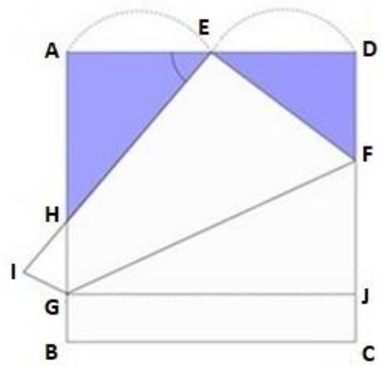
Figura 1.3 Doblez básico para el Primer Teorema de Haga



Fuente: Adaptada de Haga (2008)

3. Etiquetamos los puntos como se indica en la figura 1.4 para facilitar la discusión.

Figura 1.4 Análisis del $\triangle DEF$



Fuente: Adaptada de Haga (2008)

4. Supongamos que la longitud de cada lado del cuadrado es la unidad.
5. En la derecha, $\triangle DEF$, podemos encontrar las longitudes de los lados.

Sea $DF = x$. Entonces $FC = 1 - x$. Por el proceso de doblado $FE = FC$, así que $FE = 1 - x$. Como E es un punto medio, $DE = \frac{1}{2}$. Aplicando la relación pitagórica, obtenemos:

$$(1 - x)^2 = x^2 + (\frac{1}{2})^2 \tag{5}$$

De ahí que, $x = \frac{3}{8}$. Por lo tanto $DF = \frac{3}{8}$ y $FE = 1 - x = \frac{5}{8}$. Así, el lado derecho está dividido por el punto F en la proporción $3 : 5$. Y, además, la relación de los tres lados de $\triangle EDF$ está determinada por (6).

$$DF : DE : FE = \frac{3}{8} : \frac{1}{2} : \frac{5}{8} = 3 : 4 : 5 \tag{6}$$

Así, el $\triangle EDF$ resulta ser un triángulo pitagórico, es decir, es un triángulo rectángulo de lados racionales, cuyas medidas respecto a una misma unidad se enlazan mediante la ecuación pitagórica (7). Donde x, y, z son las medidas de los lados del triángulo rectángulo, respecto a una misma unidad de medida, siendo número racionales.

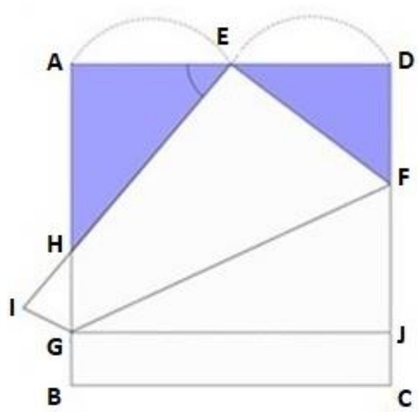
$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{7}$$

El más sencillo de los triángulos pitagóricos tales que x, y, z son primos entre sí, es el de lados 3, 4 y 5. Era ya conocido por los egipcios y usado en el trazado de perpendiculares. Dicho triángulo a menudo se menciona como el origen de la geometría y era llamado triángulo egipcio. Otros triángulos pitagóricos surgen del mismo procedimiento de doblado.

5. Determinamos las longitudes de los lados del $\triangle EAH$ (figura 1.5).

Como el vértice C del cuadrado se dobló en el punto E y $\angle BCD$ es un ángulo recto, entonces, también $\angle HEF$ es un ángulo recto. Por lo tanto, los ángulos adyacentes a $\angle HEF$ son complementarios y $\triangle EAH$ y $\triangle FDE$ son semejantes. En consecuencia, $\triangle AEH$ es también un triángulo egipcio.

Figura 1.5 Análisis del $\triangle EAH$



Ahora pretendemos buscar AH. Por la proporcionalidad de los lados tenemos (8).

$$\frac{DF}{DE} = \frac{AE}{AH} \quad \text{luego,} \quad \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{AH} \tag{8}$$

Por lo tanto $AH = \frac{2}{3}$ y podemos observar que $BH = \frac{1}{3}$, lo que implica que H es un punto de trisección. Ahora con este sencillo doblez, encontramos la mitad y la tercera parte de la unidad. Generalmente hacemos al tanteo esta última división de la hoja, pero el método aquí propuesto es más preciso.

Continuamos buscando los otros lados de $\triangle AEH$. Buscamos la longitud de HE. Por la proporcionalidad de los lados establecemos (9).

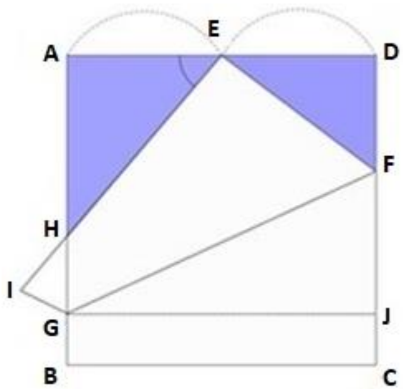
$$\frac{DF}{EF} = \frac{AE}{HE} \quad \text{luego,} \quad \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{\frac{1}{2}}{HE} \tag{9}$$

Por lo tanto, $HE = \frac{5}{6}$.

Este valor de HE también es útil porque nos permite encontrar $\frac{1}{6}$ del lado. Al devolver la hoja plegada a su posición original, HE cae en el lado CB, de modo que H separa $\frac{1}{6}$ del lado. Luego, el lado izquierdo está dividido por el punto H en la proporción $2 : 1$.

6. Analicemos ahora al triángulo recto $\triangle GIH$ con ayuda de la figura 1.6.

Figura 1.6 Análisis del $\triangle\, GIH$



Como $\angle GHI$ y $\angle EHA$ son ángulos opuestos por el vértice y por lo tanto son iguales, tenemos que $\triangle\, GIH$ y $\triangle\, EAH$ son semejantes. Luego $\triangle\, GIH$ es otro triángulo egipcio que cumple con (10).

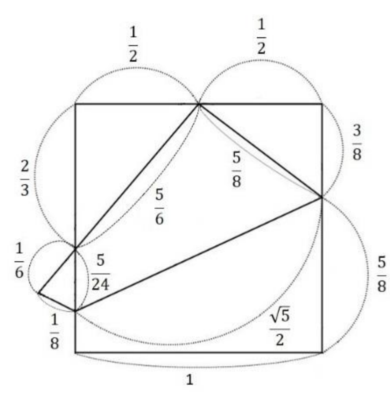
$$GI \,:\, IH \,:\, HG \;=\; 3 \,:\, 4 \,:\, 5 \tag{10}$$

Además, dado que $EI \;=\; CB \;=\; 1$ tenemos que $HI \;=\; EI - EH \;= 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$. En cuanto a los otros lados de $\triangle\, GIH$ tenemos: $GI \;=\; \frac{1}{8}$ y $GH \;=\; \frac{5}{24}$. El lado izquierdo está dividido por el punto G en la proporción $7 \,:\, 1$; y por el punto H en la proporción $1\!:5$.

7. Buscamos ahora la longitud de FG.

Imaginemos un doblez a través de G paralelo al borde inferior e intersecando el lado CD en el punto J. Esta línea forma un recto $\triangle\, FJG$ con hipotenusa FG. Ya que al doblar $GB \;=\; GI$ entonces $GI \;=\; JC \;=\; \frac{1}{8}$ y $JF \;=\; CF \;- CJ \;=\; \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, aplicando el Teorema de Pitágoras a $\triangle\, FJG$; $FG = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Figura 1.7 Resumen de los resultados



Fuente: Adaptada de Haga (2008)

Con el resumen de los resultados anteriores en la figura 1.7. Finalizamos esta sección que enfatiza sobre las fracciones, razones y proporciones.

4. Construcción de la Razón Dorada

La razón dorada, también llamada número áureo, número de oro, razón extrema y media, razón áurea, media áurea, proporción áurea y divina proporción, suele representarse con la letra griega Φ, en honor a Pheidias, quien supuestamente diseñó el Partenón haciendo uso de dicha proporción. El descubrimiento de este número (11) se atribuye a la escuela Pitagórica.

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180339887 \ldots \tag{11}$$

La construcción del pentágono regular que daba Euclides depende de la división de un segmento de recta en la razón $\frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1$. De hecho, los pitagóricos utilizaban como símbolo la estrella de cinco puntas, en la que aparecen distintas razones o proporciones áureas. Este número aparece en la naturaleza, en las proporciones de los cuerpos de los seres vivos, en la estructura de las plantas, lo que ayuda a explicar el fenómeno de la filotaxia (disposición de hojas) el cual aparece, por ejemplo, en la disposición de celdas de la superficie de la piña, como se describe en Coxeter (1971). El hombre ha hecho uso de dicha proporción para crear armonía, belleza y perfección en sus obras.

Figura 1.8 La razón dorada en la obra del hombre

Fuente: Imágenes tomadas de Internet

Dado un segmento de recta AB, decimos que un punto X en dicho segmento divide a X en la razón dorada, si el segmento mayor $|AX|$ es al segmento menor $|XB|$, como la totalidad de la recta $|AB|$ es al segmento mayor $|AX|$, es decir, $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AB|}{|AX|}$.

Haremos uso de la técnica de origami para construir la razón dorada a través de los siguientes pasos hasta llegar a la figura 4.2:

1. Sea $ABCD$ la pieza cuadrada de papel, vamos a obtener un punto X en uno de los lados -AB-, de forma que visualicemos la división de dicho lado en una razón extrema y media, esto es, de tal manera que $|AB| \bullet |XB| = |AX|^2$ o bien el segmento mayor $|AX|$ es al segmento menor $|XB|$, como la totalidad de la recta $|AB|$ es al segmento mayor $|AX|$, es decir, $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AB|}{|AX|}$.
2. Doblamos BC sobre sí mismo y tomamos su punto medio E. La longitud del segmento $|EB|$ es entonces igual a $|\frac{AB}{2}|$.
3. Marcamos el doblez de E a A, generando la línea EA. Usando el Teorema de Pitágoras, la longitud de dicha línea es $\frac{\sqrt{5}}{2}|AB|$.

4. Colocamos EB sobre EA y doblamos con el objetivo de obtener EF y G, tales que $|EG| = |EB|$. Observamos entonces que $|EG| = \frac{|AB|}{2}$.
5. Tomamos $|AX| = |AG|$. Entonces: $|AX| = |AG| = |EA| - |EG| = \frac{\sqrt{5}}{2}|AB| - \frac{|AB|}{2} = |AB|(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$.

Por un lado, notamos que:

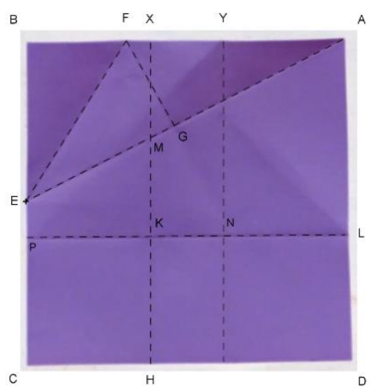
$$\frac{|AB|}{|AX|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Por el otro lado, observamos que:

$$\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AX|}{|AB|-|AX|} = \frac{|AX|}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}|AX|-|AX|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Así podemos observar en la Figura 1.9 que el segmento AB está dividido en X en la razón dorada.

Figura 1.9 Construcción de la Razón Dorada

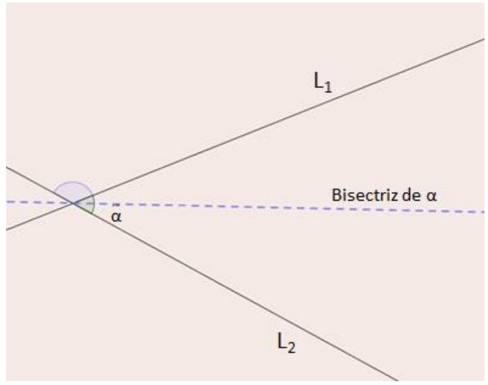


Fuente: Elaboración propia

5. Construcción de polígonos regulares

Un *polígono* es una figura geométrica compuesta por tres o más líneas que crean una figura cerrada. Un polígono es *regular* si es, simultáneamente, equilátero y equiángulo. Construiremos un *triángulo equilátero*, un *pentágono regular*, un *hexágono regular* y utilizaremos procedimientos generales para *2^n-gonos*, duplicando una y otra vez por medio de bisecciones sucesivas de ángulos.
Brevemente describimos cómo realizar las bisecciones de ángulos:

Figura 1.10 Construcción de la bisectriz de un ángulo



Fuente: Elaboración propia

En la figura 1.10 mostramos el ángulo α cuyos lados son las líneas L_1 y L_2. Bisecar un ángulo significa dividirlo en dos ángulos iguales. La bisectriz es la semirrecta con origen en el vértice del ángulo y la cuál lo divide en dos ángulos de igual medida. Para obtener dicha bisectriz, realizamos un pliegue que haga coincidir la línea L_1 con L_2. La recta marcada con el doblez realizado es precisamente la bisectriz del ángulo.

5.1 Construcción del triángulo equilátero

Partiremos de una hoja cuadrada, desde una adaptación de la construcción propuesta en Sundara-Row (1941) y en Peña-Hernández (2001), siguiendo los pasos indicados:

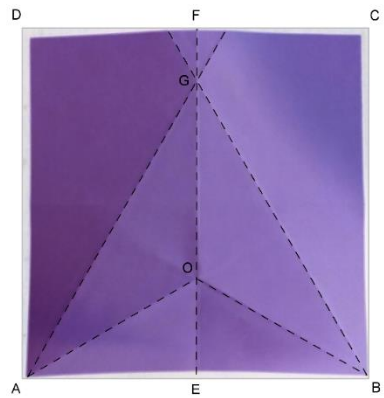
1. Doblamos por la mitad, uniendo las líneas AD y BC de tal manera que dos lados opuestos se encuentren entre sí, generando la línea FE.
2. Tomamos el punto A y lo llevamos hasta la línea FE, de tal forma que la línea AB se traslade dejando fijo el punto B. De esta forma se genera la línea BO.
3. Del mismo modo se toma ahora el punto B y se lleva hasta la línea FE, de tal forma que la línea AB se traslade dejando fijo al punto A. Así se genera la línea AO.

El triángulo AOB generado con este procedimiento es un triángulo isósceles al pie de un lado del cuadrado.

Observamos que la línea central divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos congruentes.

Podemos obtener un triángulo equilátero marcando la línea que va de B hasta la intersección del doblez en la línea FE, y haciendo lo propio con la línea que va de A hasta la misma intersección (figura 1.11).

Figura 1.11 Construcción de un Triángulo Equilátero



Fuente: Elaboración propia

Una forma alternativa de construir un triángulo equilátero, que además viene a generar el triángulo equilátero más grande que está contenido en un cuadrado, la encontramos en Aguilar-Zavoznik (2014) y en Peña-Hernández (2001); se siguen los pasos indicados a continuación:

1. Tomemos el cuadrado $ABCD$.
2. Doblamos el papel a la mitad tanto en el eje horizontal como en el eje vertical de tal forma que la hoja quede dividida en cuatro cuadrados iguales. A dichos ejes los llamaremos eje x y eje y respectivamente.
3. Hacemos un doblez de tal forma que el pliegue pase por B y la esquina A quede sobre el eje x. Denotemos al punto izquierdo del pliegue con la letra E.
4. Repetimos el paso 3, pero ahora haciendo coincidir la esquina C con el eje y, llamando al punto inferior de este segmento F.
5. Hacemos un doblez que pase por E y F.
6. El triángulo BEF es equilátero.

5.2 Construcción del pentágono regular

Haremos uso de la construcción de la sección dorada mediante una adaptación de la construcción propuesta en Sundara-Row (1941), para construir un pentágono regular. Para ello, partimos del cuadrado $ABCD$ y seguimos los pasos:

1. Obtenemos la razón dorada de AB, marcando el punto X.

2. Marcamos el punto medio M de AX. Entonces:

a. $|AB|\cdot|AX| = (|XB|)^2$

b. $|AM| = |MX|$.

3. Marcamos N de tal forma que $|BN| = |AM|$. Entonces $|MN| = |XB|$.

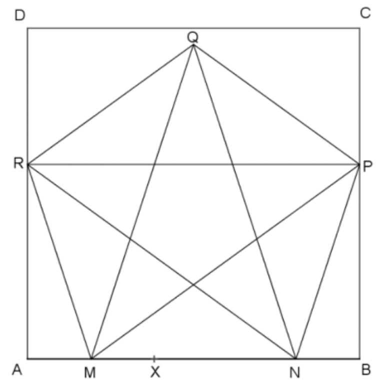
4. Señalamos R y P en los bordes AD y BC, respectivamente, de tal forma que:

a. $|NP| = |MR| = |MN|$.

5. Indicamos el punto Q de tal forma que $|RQ| = |MR| = |PQ|$.

6. Así $MNPQR$ es el pentágono requerido y presentado en la figura 1.12.

Figura 1.12 Construcción de un Pentágono Regular



Fuente: Elaboración propia

5.3 Construcción del hexágono regular

Esta figura conocida como "la forma perfecta de la naturaleza", se observa en los elementos naturales como en un panal de colmena, escamas del caparazón de una tortuga o una micrografía de un copo de nieve como se aprecia en el gráfico 1.13.

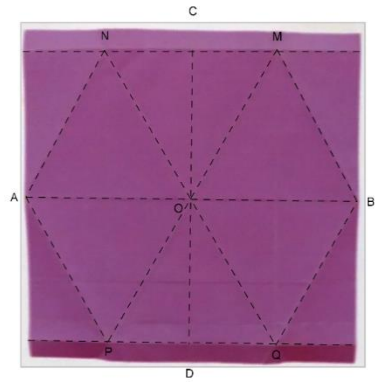
Gráfico 1.13 La forma perfecta de la naturaleza

Fuente: Imágenes tomadas de Internet

Construiremos el hexágono regular, considerando una adaptación de Sundara-Row (1941), a partir de un cuadrado dado y siguiendo los pasos indicados:

1. Doblamos la hoja por la mitad por lados opuestos para obtener el punto central, O, del cuadrado, marcando las líneas AOB y COD.
2. En ambos lados de AO y OB describimos triángulos equiláteros como se hiciera al inicio de esta sección; así obtenemos AON y AOP, BOM y BOQ.
3. Finalmente, marcamos NM y PQ.
4. Luego $ANMBQP$ es el hexágono requerido y presentado en la figura 1.14.

Figura 1.14 Construcción de un Hexágono Regular



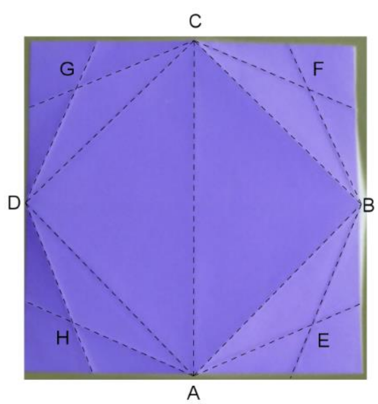
Fuente: Elaboración propia

5.4 Construcción del octágono regular

En la construcción del octágono regular, adaptada de Sundara-Row (1941), procedemos de la siguiente forma:

1. A partir de un cuadrado C, obtenemos el cuadrado inscrito uniendo los puntos medios -que denotaremos por A, B, C, D- de los lados del cuadrado C.
2. Luego, biseccionamos los ángulos que hacen con los lados de C, los ángulos del cuadrado inscrito.
3. Indicamos los puntos de intersección de las líneas de bisección como los puntos E, F, G y H.
4. $AEBFCGDH$ es el octágono regular buscado y detallado en la figura 1.15.

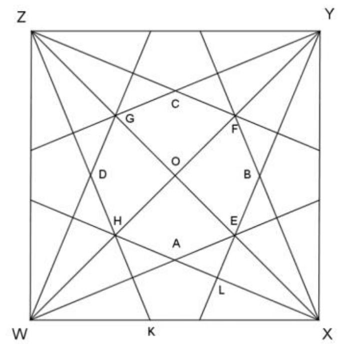
Figura 1.15 Construcción de un Octágono Regular



Fuente: Elaboración propia

Una construcción alternativa del octágono regular se presenta en la figura 1.16 y se puede obtener dividiendo los ángulos del cuadrado dado en cuatro partes iguales (doble bisección de los ángulos).

Figura 1.16 Forma alternativa de construcción de un Octágono Regular

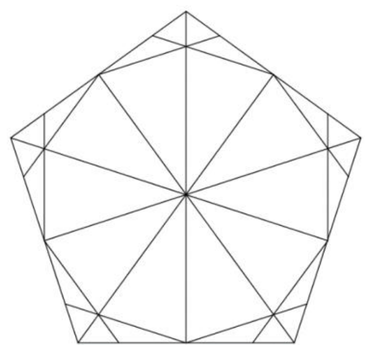


Fuente: Elaboración propia

5.5 Construcción del decágono regular y del dodecágono regular

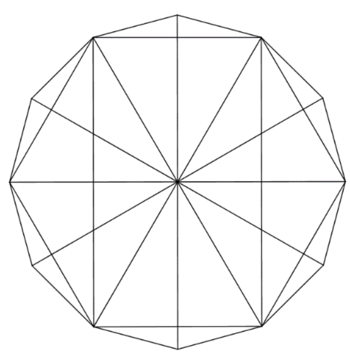
Los procedimientos para la construcción del decágono y dodecágono regular fueron adaptadas de Sundara-Row (1941). Estas figuras se pueden obtener de un pentágono y un hexágono, respectivamente, con un procedimiento similar al del octágono regular como se muestra en las figuras 1.17 y 1.18.

Figura 1.17 Construcción de un decágono regular



Fuente: Elaboración propia

Figura 1.18 Construcción de un dodecágono regular



Fuente: Elaboración propia

Con estos procedimientos concluimos la sección de construcciones de polígonos regulares. De manera similar podemos hacer entonces la construcción de un 2^n-gono regular.

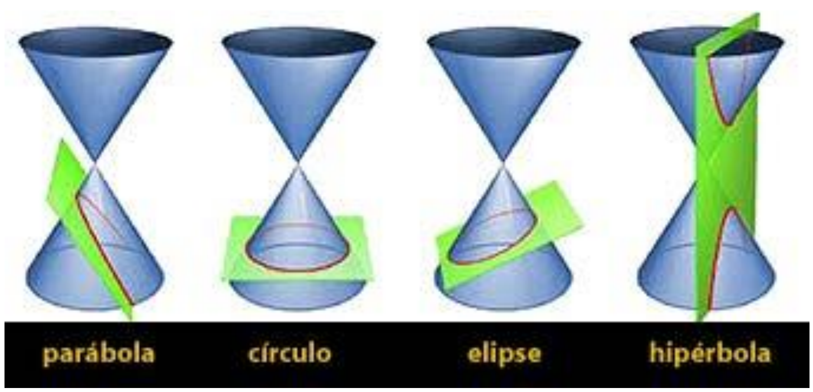
6. Construcción de las Secciones Cónicas

Supongamos que tenemos una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$, en término de dos variables x y y. En general, hay un número infinito de pares de valores de x y y que satisfacen dicha ecuación. Cada uno de tales valores reales se considera las *coordenadas* (x, y) de un punto en el plano, donde x es la abscisa y y es la ordenada. El conjunto de los puntos, y solamente aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $f(x, y) = 0$, se llaman *gráfica de la ecuación*, o bien, su *lugar geométrico*. Cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $f(x, y) = 0$ pertenece a la gráfica de la ecuación (Lehmann, 1988).

Una *cónica* o *sección cónica*, es el lugar geométrico de los puntos, cuya relación de distancias a un punto fijo -llamado *foco*- y una recta fija -llamada *directriz*-, es constante. La relación constante es conocida como *excentricidad*, denotada por la letra e y utilizada para clasificar a las secciones cónicas: Si $e < 0$, la cónica se llama *elipse*, si $e = 0$ la cónica es una *parábola* y finalmente, si $e > 0$ estaremos hablando de una *hipérbola*. La cuerda que pasa por el foco y es paralela a la directriz se llama *lado recto* del latín *latus rectum*.

Otras definiciones de cónica, que propuso Manaecmio hacia 340 a. J. C. fueron reconciliadas con ésta por Papo de Alejandría (siglo IV) o tal vez por Euclides. El nombre de *cónicas* proviene del hecho de que estas curvas se obtuvieron por primera vez como secciones planas de un cono circular recto como se puede apreciar en la figura 1.19.

Figura 1.19 Cónicas



Fuente: Imagen tomada de Internet

Si bien el tema de cónicas no forma parte de programa de estudios de matemáticas de nivel secundaria es interesante la propuesta para este nivel, debido a que las construcciones permiten repasar conceptos geométricos que sí se desarrollan en este periodo, tales como paralelas, perpendiculares, distancias y tangentes. Nuestro objetivo en esta sección es presentar la construcción de una sección cónica, la parábola, proporcionando una serie de pasos que permiten mostrar un punto de la cónica y que, si se repitieran los pasos se obtendrían puntos que forman parte del lugar geométrico. La construcción presentada en la sección 7.1 fue adaptada de Sundara- Row (1941).

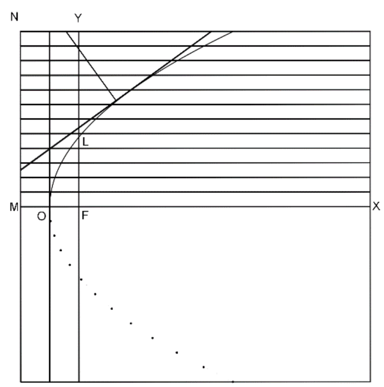
6.1 Parábola

Podemos marcar algunos puntos de una parábola siguiendo el procedimiento que señalamos abajo:

a. Tomemos un cuadrado. Uno de los bordes del cuadrado, AB, es la directriz.
b. Doblemos por la mitad, generando una línea perpendicular a la directriz. Esta línea es el eje.
c. Señalemos en el eje dos puntos, el origen, O, y el foco F.
d. Dividamos la mitad superior del cuadrado en un determinado número de secciones, formando líneas paralelas al eje. Estas líneas han de coincidir con la directriz en una serie de puntos.
e. Doblemos, colocando cada uno de estos puntos en el foco.
f. Marquemos los puntos donde se cortan las líneas paralelas al eje correspondientes.
g. Para obtener los puntos correspondientes en la mitad inferior, doblamos el papel en el eje y pinchamos a través de aquéllos.

Los puntos obtenidos se encuentran en una parábola (figura 1.20) y el plegado proporciona también la tangente a la curva en cada uno de los puntos.

Figura 1.20 Construcción de los puntos de una parábola



Fuente: Adaptada de Sundara-Row (1941)

7. Resultados

En esta presentación se ha realizado una investigación documental con la intención de revisar, seleccionar y adaptar construcciones geométricas, demostración de resultados matemáticos y localización de puntos para construir las cónicas, utilizando la técnica de origami o papiroflexia. Los autores nos hemos dedicado los últimos cinco años a difundir dicha técnica con fines didácticos para la enseñanza de la matemática y aunque no presentamos resultados de las implementaciones, por estar fuera de los objetivos delimitados en este trabajo, consideramos que es una importante estrategia didáctica para hacer ciertos contenidos matemáticos abstractos (tales como los conceptos y demostraciones matemáticas, así como la visualización o percepción gráfica de ecuaciones algebraicas) accesibles a estudiantes de educación secundaria, contribuyendo con ello a lograr el objetivo de “matemáticas para todos”.

Concentrar los resultados de esta investigación en este trabajo permite a profesores e investigadores en el área, acceder a dichos materiales para realizar las adaptaciones convenientes y ponerlas en práctica con estudiantes para explorar los resultados.

Agradecimiento

Los autores de esta investigación agradecen a la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango por las facilidades para ofrecer continuamente espacios para dar a conocer el potencial del origami o papiroflexia en la enseñanza aprendizaje de la matemática. También agradecen el financiamiento al Programa de Fortalecimiento de la Calidad Educativa a través de los proyecto P/PFCE-2016-10MSU0010C-06 de la DES de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez del Estado de Durango y al Programa de Apoyos Institucionales y Financiamiento a Proyectos de Investigación 2017 del Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Durango (COCYTED), a través del proyecto Reunión Nacional de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas 2017.

Referencias

Aguilar-Zavoznik, A. (Dic 2013-Ene 2014). Regla y compás vs origami. *Carta informativa de la Sociedad Matemática Mexicana no. 68*, 3-14.

Coxeter, H. (1971). *Fundamentos de Geometría.* Editorial Limusa-Wiley, S.A.

Golan, M., & Jackson, P. (2009). Origametria: A program to teach geometry and to develop learning skills using the art of origami. En E. p. Lang, *Origami4.*

González Urbaneja, P. M. (2008). El Teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4,000 años. *SIGMA*, 103-130.

Haga, K. (2008). *ORIGAMICS, Mathematical Explorations through Paper Folding.* World Scientific Publishing .

Lehmann, C. H. (1988). *Geometría analítica.* Editorial Limusa, S.A. de C.V.

Meyer, D., & Meyer, J. (1999). Teaching Matehmatical Thinking through Origami. *Bridges, Mathematical Connections in Art, Music and Science*.

Moratelli Pinho, T., Carvalho Delou, C., & Wille Lima, N. (2016). Origami as a tool to teach geometry for blind students. *Scientific Research Publishing Inc.*

Peña Hernández, J. d. (2001). *Matemáticas y Papiroflexia.* Asociación Española de Papiroflexia.

Pope, S. (2002). The use of origami in the teaching of geometry. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*.

Sundara Row, T. (1941). *Geometric exercises in paper folding.* Open court.

La Criptografía como Contexto para Introducir el Estudio del Concepto de Función en Educación Secundaria

ALVARADO-MONROY, Angelina, OLVERA-MARTÍNEZ, María del Carmen y ALVARADO-QUIÑONES, Mario Alberto

A. Alvarado[1], M.Olvera[1] y M.Alvarado[2]

[1]Universidad Juárez del Estado de Durango
[2]Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de Durango

aalvarado@ujed.mx

C. Cristóbal, M. Olvera, V. Vargas (Dirs.) Educación para la interdisciplinariedad. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

This paper reports a classroom-based study with a learning environment designed and settled in a context of cryptography and using concrete material-based tools. This design engaged students in collaborative activities of constructing models for the resolution of problems with the intention of introduce the notion of function through a set of linked representations. Two groups of students in middle school were part of this study, they were asked to perform tasks of encrypted and decrypting text messages using substitution ciphers that implicitly involve the concept of function.

This research presents a detailed analysis of students developing fluency with regard to these tasks, and of the aspects of the function concept underlying their processes of constructing models for solving problems. Students' interventions were recorded and transcribed in their entirety. Interactions while they carried out the tasks were analyzed using the theoretical-methodological tool, Abstraction in Context (Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz, 2015). Results of this study indicated that different levels of expertise with regard to the task environment reflected and required different aspects of functions, and thus propitiated different opportunities for the emergence and management of the mathematical structure associated with the notion of function.

Models and Modeling, Cryptography, Representations of a function, Abstraction in Context

1. Introducción

La necesidad de proteger información, sobre todo en contextos de guerra, se puede observar a través de registros del siglo V a. de C. y, a partir de entonces, se pueden ver diferentes mecanismos cuyo propósito es aumentar la seguridad de la información. La criptografía (de las raíces griegas *Kryptos*-ocultar y *graphos*-escritura), ahora considerada ciencia, cada vez presenta mecanismos más sofisticados que se basan en diversas ramas de la matemática y que juegan un importante papel en la protección de información, garantizando su privacidad, integridad y autenticidad (Cortés et al., 2005). Dada la creciente demanda de expertos con conocimientos en seguridad en cómputo y criptografía, este contexto cobra relevancia para la enseñanza en la educación básica con una visión integradora de la ciencia, la ingeniería, la tecnología y la matemática.

En esta dirección, por ejemplo, White (2009) presenta los resultados de la implementación, durante cinco semanas, de una secuencia didáctica de cifrado y descifrado de información con estudiantes que finalizan la educación secundaria. En su investigación, utiliza el software *Code Breaker* para que los estudiantes puedan cifrar sus mensajes variando los parámetros de una función polinomial. Además, de utilizar la frecuencia con que aparece una letra del abecedario en un escrito, para que alguien que desconozca el proceso de cifrado de la información pueda revertir el proceso para descifrar el mensaje, es decir, realizar un criptoanálisis. White sugiere que aprender a resolver problemas en un contexto aplicado y que permita utilizar múltiples representaciones como el entorno *Code Breaker,* puede invitar a los estudiantes a ver de manera alternativa, e incluso simultánea, a las funciones como procesos y objetos.

En este trabajo, se percibe valioso el contexto de la criptografía como analogía con el concepto de función y, se presenta, una secuencia didáctica con material concreto inspirado en el cifrado clásico de Julio César y los discos de cifrado (Cortés et al., 2005) para responder a las necesidades de escuelas con acceso restringido a la tecnología.

El concepto de función se introduce en el nivel secundaria y aparece también en los programas de bachillerato y nivel superior. Dada su naturaleza transversal, al estar relacionado con diversos contenidos de disciplinas de ciencia, ingeniería, tecnología y matemáticas (CITeM), es fundamental construir un sistema conceptual robusto para la noción de función. En Artigue (1995), Evangelidou, et al. (2004) y Sierpinska (1992) se han puesto de manifiesto las dificultades de los estudiantes de diferentes niveles en relación con la noción de función y con el reconocimiento de objetos funcionales dados en diferentes representaciones. Estos investigadores identifican la necesidad de desarrollar más investigaciones sobre la comprensión y uso de funciones por los estudiantes, tratando de identificar sus dificultades y concepciones erróneas y mejores formas de aproximación a su enseñanza.

En este estudio, al igual que en gran parte de las investigaciones, se busca mejorar las formas de enseñanza y aprendizaje del concepto de función. La hipótesis es que algunas de las dificultades referidas en la literatura provienen de: la poca comprensión intuitiva, la falta de experiencias de resolución de problemas conectados con la realidad, las imágenes inadecuadas que poseen de los conceptos y de sus representaciones asociadas, la falta de articulación entre sus diferentes representaciones y la ausencia de entrenamiento para generar y usar sus propios ejemplos. En esta última parte, se deben brindar oportunidades para que los estudiantes propongan funciones que respondan con las situaciones planteadas y que tengan un significado personal. Por ejemplo, en esta investigación, los estudiantes proponen su forma de cifrar mensajes (su propia función de cifrado) y otros tratan de descifrarlos, para lo cual necesitan encontrar la función inversa.

La comprensión del concepto de función no parece fácil, dado que, por una parte, se debe apoyar el desarrollo de la habilidad para ver una función como una entidad que acepta una entrada y produce una salida y, por otro lado, apoyar el reconocimiento de las diferentes representaciones asociadas a este concepto y atender las dificultades que puedan presentar en el proceso de articulación y tránsito entre las distintas representaciones. También, el contexto donde es utilizada la noción de función puede aportar significado, Sierpinska (1992) señala que este concepto, puede definirse en notación formal simbólica, casi sin necesidad de utilizar palabras. No obstante, cuando la noción de función es utilizada en algún contexto, matemático o matematizado, el lenguaje informal surge y trae consigo significados que trascienden al mero lenguaje lógico simbólico. Finalmente, se deben ofrecer situaciones que sean relevantes para los estudiantes y permitan el surgimiento y construcción del concepto, además de visualizar su utilidad para la resolución de problemas de diferentes contextos. Esto último, tanto en los programas de estudio, como en los libros de texto, aparece en temas posteriores a la enseñanza de los conceptos reservados para aplicar lo aprendido (Lesh, English, & Fenewald, 2008), contrario a esta propuesta que sugiere propiciar el surgimiento de la noción de función a través de introducir un problema en el contexto de la criptografía.

El objetivo de este estudio es el diseño y evaluación de un ambiente de aprendizaje que utiliza un contexto para detonar el uso de distintas representaciones matemáticas y que sirve como base para posteriormente construir o refinar la noción de función. En tal ambiente se propicia el surgimiento de modelos en un contexto de cifrado y descifrado de mensajes para proteger información. Para probarlo, se implementó en dos grupos de secundaria, se analizaron sus producciones y se logró describir el proceso que siguen los alumnos cuando han de construir y refinar la noción del concepto de función a partir de conectar sus diferentes representaciones: verbal, algebraica, numérica, tabular, gráfica. En la segunda sección se presentan los elementos teóricos y metodológicos tomados en cuenta para el diseño y para el análisis de las interacciones en el aula. La tercera sección describe la metodología, los detalles del diseño y el contexto de implementación. Finalmente, a partir del análisis de los resultados se presentan las conclusiones y mejoras.

2. Marco Teórico

En esta investigación se presenta el análisis de la exploración en el aula de una secuencia diseñada desde la *Perspectiva de Modelos y Modelación* (PMM) propuesta por Lesh & Doerr (2003) como un vehículo para el aprendizaje en CITeM. Dentro de esta perspectiva, un sistema conceptual o modelo es un conjunto de elementos, relaciones, operaciones, reglas y patrones, así como de sus interacciones. Los modelos son considerados herramientas para interpretar situaciones matemáticas; y para ello se requiere de matematizar situaciones relevantes de resolución de problemas. La modelación es la acción de elaborar un modelo para interpretar, construir, predecir, describir o explicar situaciones.

En una secuencia de desarrollo de modelos los tres elementos principales son actividades: 1) que revelan el pensamiento o detonan modelos de los estudiantes; 2) en las que se exploran sus modelos; y, 3) en las que se adaptan tales modelos para aplicarse en otros contextos y para extender sus representaciones (Doerr, 2016). En este trabajo se proponen sólo actividades del tipo 1 y 2, las primeras se conocen como MEA (Model Eliciting Activities) o Actividades Detonadoras de Modelos. Lesh et al. (2000) presentan para su diseño los principios que aseguran que la situación: permita un significado personal de la realidad, provoque la construcción de modelos, brinde oportunidades para la autoevaluación de los modelos, propicie la comunicación de los mismos y conduzca a generar otros modelos al extender los previos para resolver otras situaciones.

Otro elemento teórico-metodológico relevante en este trabajo es *Abstracción en Contexto* (AiC). Aquí, la abstracción pasa por tres etapas: la necesidad de un nuevo constructo, su emergencia y su consolidación al utilizarlo en otros contextos. Las acciones epistémicas que tienen lugar durante el surgimiento del constructo son: *Recognizing, Building with, Constructing* (*R-acciones*, *B-acciones* y *C-acciones*). Tales acciones conforman el modelo *RBC-**<u>C</u>***, donde la segunda **<u>C</u>** corresponde a las acciones de consolidación.

Para el análisis de las intervenciones o interacciones en el aula se consideran *R-acciones* cuando los alumnos reconocen la información relevante para resolver la situación, conceptos implicados y sus propiedades. Es decir, seleccionan o preparan sus “bloques” en analogía con la construcción de un edificio. Se dan *B-acciones* cuando extraen significado de los enunciados, cuando realizan cálculos, cuando se establecen relaciones entre los conceptos, o cuando se utilizan las propiedades de los mismos para obtener deducciones. Este tipo de acciones ocurren cuando se entrelazan algunos de los elementos derivados de las *R-acciones* para construir con ellos una pieza mayor, es decir, unir dos o más bloques. Las *C-acciones,* o acciones de construcción, ocurren cuando *R* y *B-acciones* se entrelazan para reunir los elementos que permiten por primera vez expresar, construir y/u organizar un conocimiento nuevo.

Las acciones de consolidación, ***<u>C</u>****-acciones,* ocurren cuando el aprendiz es capaz de: generar otras maneras de justificar el mismo hecho, de utilizar el lenguaje de manera apropiada y, finalmente, utilizar el conocimiento construido para construir uno nuevo. Cabe mencionar que una *B* o *C acción,* puede tomar la forma de *R-acción* durante el proceso de construcción de un nuevo conocimiento.
La elección de la PMM, se ha dado, considerando que, tanto el contexto de criptografía, como la noción de función que involucra, permiten el diseño de actividades que incorporan el desarrollo de modelos matemáticos para describir una situación de la vida real y motivan el uso de medios de representación para explicar y documentar los modelos de los estudiantes (Lesh & Doerr, 2003).

Además, las actividades detonadoras y de exploración de modelos, involucran a los estudiantes en describir, revisar y refinar su conocimiento matemático y/o científico (Lesh & Doerr, 2003; Lesh et al., 2000), lo cual propicia múltiples interacciones entre estudiantes, materiales y profesor.

En este sentido, la herramienta AiC- modelo RBC (Dreyfus, Hershkowitz, & Schwarz, 2015), permite capturar la complejidad de tales interacciones y analizar el flujo de conocimiento entre los estudiantes hasta lograr un conocimiento base compartido (construyen y actualizan conocimiento de manera colaborativa en el mismo tópico). En ocasiones, también interviene el profesor haciendo preguntas adecuadas para provocar la emergencia de conocimiento nuevo.

3. Metodología

Esta investigación está dentro del marco del Modelo de Desarrollo Profesional Docente para Educación en CITeM (Carmona, et al., 2014). Dicho modelo está caracterizado por ser multi-nivel, interdisciplinario y diseñado para incrementar la autonomía y la agencia del profesor. Para garantizar tal incremento se sugieren cinco etapas: *diseño experto, maestros como estudiantes, práctica impromptu, implementación en el aula y formación de comunidades de práctica*. Para este trabajo el énfasis se hace en la descripción del diseño y en los resultados obtenidos al implementarlo con estudiantes de educación secundaria (detalles de estas etapas se pueden ver en Carmona, et al., 2014, pp. 17-18). Tales resultados se analizan bajo la lente de AiC, modelo RBC-**C**.

3.1 Participantes y recolección de datos

La población estaba conformada por dos grupos vespertinos de secundaria que iniciaban el tercer grado y que en lo sucesivo se distinguirán como A y B. Respecto a los conocimientos previos de los estudiantes acerca del concepto de función, se puede mencionar que en el grado anterior se abordaron “situaciones problemáticas del tipo valor faltante” sin llegar a formalizar el concepto de función ni sus expresiones, en este nivel, “$y=kx$” y “$y=mx+b$”. Cabe señalar que, pese a que el programa de matemáticas de secundaria vigente, incluye algunos contenidos relacionados con el concepto de función lineal y sus representaciones, esto no significa que los estudiantes cuenten con un conocimiento consolidado respecto a este concepto y a los elementos involucrados, más aún con las ideas básicas o nociones del mismo. Es importante mencionar que antes de la implementación, no se retomó el tema de función con los estudiantes, es decir, la secuencia fue el primer acercamiento para propiciar la emergencia de modelos en los cuales la noción de función y sus diferentes representaciones cobran relevancia.

El grupo A, estaba integrado por 16 alumnos (5 mujeres y 11 varones) organizados en 8 parejas, de edad promedio 14 años; mientras que, en el grupo B participaron 12 estudiantes (6 mujeres y 6 varones) agrupados también en parejas. El nivel socioeconómico de la escuela es bajo, se encuentra en la zona periférica de la ciudad de Durango, México y un alto porcentaje de los estudiantes se insertan en esta escuela, luego de ser dados de baja de otras, a razón de su bajo desempeño y actitudes disruptivas. El nivel socioeconómico y situación geográfica de la escuela fueron elementos determinantes para la selección de los grupos y de las actividades con material concreto.

La recogida de datos se realizó por medio de: grabaciones de video, informes escritos y notas de campo. Las interacciones ocurridas en el aula fueron transcritas y para cada tarea se realizó un análisis de la interacción del grupo y el profesor y de sus respuestas escritas en las hojas de trabajo (Anexo A). Los tiempos de implementación variaron en los grupos, con el grupo B se dedicaron 4 horas, mientras que con el grupo A se extendieron hasta 6.

3.2 Diseño propuesto

La secuencia didáctica que se implementó con los estudiantes fue resultado de la etapa 1 del Modelo de Desarrollo Profesional Docente mencionado al inicio de la sección 3. Esta secuencia fue seleccionada y adaptada por el profesor titular de los grupos participantes tomando como referencia su contexto. La secuencia consta de dos hojas de trabajo (Anexo A) para guiar a los estudiantes en la organización y registro escrito de sus ideas, de tal manera, que la comunicación de sus resultados fuera lo más provechosa posible y se pudiera documentar el aprendizaje.

Para el diseño de las hojas de trabajo se tomaron en cuenta diversas representaciones del concepto de función, el objetivo didáctico y algunas otras características como: partir de una situación problemática auténtica, actual y cercana a los estudiantes; uso de material de bajo costo y fácil acceso; formular preguntas que ayudaran a reflexionar sobre el problema o contenido; explorar, manipular y discutir para resolver la situación; plantear preguntas sobre los resultados en forma de retos; y, extraer conclusiones de la tarea. Concretamente, se proponen las actividades "*Privacidad en los Datos I y II*".

3.2.1 Actividad Privacidad en los Datos I

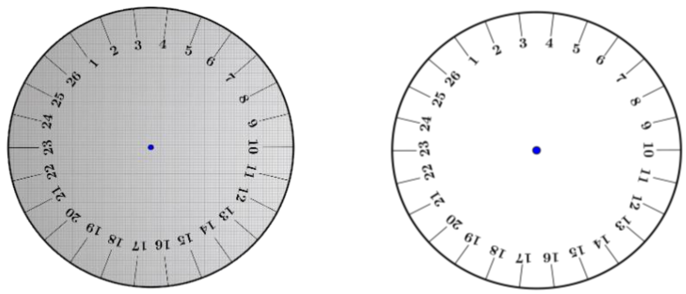
En esta actividad, la pregunta guía es ¿cómo "disfrazar" información para asegurar su privacidad? Se deja que los estudiantes expresen sus formas de pensamiento y posteriormente el contexto se introduce como sigue:

«Con el avance de la ciencia y de la tecnología, se ha vuelto cada vez más indispensable proteger archivos e información para evitar la violación de privacidad. Para dar respuesta a esa necesidad, se buscan métodos seguros para cifrar o esconder mensajes secretos. Los expertos que se ocupan de la seguridad de la información son matemáticos, ellos desarrollan formas para esconder información y formas para descifrarla, según sea el caso. Al estudio de tales formas se le conoce como Criptografía y a los métodos como sistemas criptográficos. La criptografía estudia métodos, que pudieran ser información sensible, de manera que sólo puedan ser descifrados por el receptor y por nadie más que los pudiera interceptar. El emisor y el receptor han de ponerse de acuerdo sobre la "clave" y ésta debe cambiarse con frecuencia. Un ejemplo de tales sistemas criptográficos es el que utiliza el agente Mat, para el cual necesita dos rotores como los de la figura, éstos deben recortarse y ensamblarse con un botón encuadernador de tal manera que sus centros coincidan y puedan girar uno sobre otro».

Enseguida, los participantes se involucran para comprender el funcionamiento del modelo de cifrado y descifrado de información del agente Mat que incluye primero un cifrado simple entre alfabeto y números, y un cifrado de corrimiento utilizando, como material concreto, los rotores giratorios (Figura 2.1).

Mat primero hace una correspondencia natural entre el abecedario y los números ($A \rightarrow 01, B \rightarrow 02, \ldots, Z \rightarrow 26$) *que presenta en una tabla, para minimizar el número de letras sin que se afecte la lectura de los mensajes, ha quitado algunas letras: las compuestas (ll, rr) y la ñ. Con esta asociación descifren el mensaje cifrado: 1502100520092215 1921160518010415*
Enseguida, el agente Mat prepara sus rotores ensamblados y se asegura de que coincidan el 1 con el 1, el 2 con el 2, etc. Luego elige una clave, por ejemplo 3, y gira el rotor pequeño 3 lugares. Así, el mensaje con letras que antes cifró en números (cifrado simple) queda transformado en: 1805130823122518 2224190821040718

Figura 2.1 Rotores giratorios que se ensamblan para cifrar y descifrar mensajes



Fuente: Elaboración propia

A posteriori, los participantes ponen a prueba su comprensión acerca del método del agente Mat y organizados en equipo practican el cifrado de mensajes, especificando la clave utilizada. Además, contestan las siguientes preguntas y justifican sus respuestas:

¿Qué hará el agente Mat cuando necesite cifrar la letra X (corresponde a 24) con la clave 3? Cuando el receptor del mensaje que le envío el agente Mat lo reciba, ¿qué debe hacer para descifrarlo y tener el mensaje original? Explica el método para recuperar el mensaje. ¿Qué debe hacer el receptor del mensaje que ustedes cifraron?

De la interacción con el método del agente Mat, con sus compañeros y con los rotores, surgen una gran variedad de ideas matemáticas que requieren de un espacio de socialización. Para ello, se genera un ambiente para la discusión, revisión, extensión y formalización de todas las ideas de los estudiantes. Finalmente, se presenta una actividad de autorregulación para los participantes: Piensen en una palabra que para ustedes describa la clase de hoy. Elijan una clave y cifren el mensaje. Al día siguiente, intercambien en un papel el mensaje cifrado con un compañero sin mencionar la clave utilizada. Intenten descifrar el mensaje que recibieron y, una vez recuperada la palabra original, entreguen a su maestro. En el Anexo A se puede encontrar la versión completa de la hoja de trabajo utilizada.

3.2.2 Actividad Privacidad en los Datos II

La pregunta guía para esta actividad (ver Hoja de trabajo en Anexo A) es ¿cómo mejorar el "modelo de los rotores" para cifrado de información? Para introducir el contexto se presenta el texto:

Ada y Emy, dos compañeras del agente Mat con quienes intercambia a menudo información, están preocupadas porque si alguien lograra hacerse de sus rotores podría, con algo de trabajo, descubrir la clave en turno y descifrar sus mensajes. Para evitar esta 'tragedia' piensan que es mejor tener en su cabeza el modelo con su respectiva clave y usarlos para cifrar o descifrar el mensaje con ayuda de alguna representación y, una vez alcanzado su objetivo, deshacerse de la evidencia. Ellas proponen una representación diferente para operar en el cifrado y descifrado de información.

Después de introducir el contexto, se enfoca a los participantes en las representaciones tabular y gráfica propuestas por Ada y Emy. Ellos deben utilizar tales representaciones para cifrar y descifrar mensajes y, para lograrlo, deben transitar del uso de los rotores hacia la abstracción del significado de las acciones e identificar el papel de los elementos del modelo en estas nuevas representaciones.

El modelo de Ada propone agregar dos ceros para indicar espacio en blanco para que el mensaje cifrado sea a texto seguido y no aparezcan separaciones por palabras. Propone usar la clave y con ella construir una tabla para cifrar y deshacerse de la misma una vez terminado su mensaje cifrado.Por su parte, Emy ha decidido proponer al agente Mat el modelo con una representación gráfica, respetando la idea de Ada de agregar dos ceros para indicar espacio en blanco y, una vez utilizado para cifrar, deshacerse de él.

Una vez que los participantes han interactuado con las representaciones propuestas y discutido en sus equipos, se procede a una discusión grupal para formalizar las ideas surgidas. Se deja como tarea pensar y justificar las respuestas de las preguntas siguientes:

¿Cómo quedaría el modelo de Ada con su clave si lo pasamos a su equivalente en el de Emy?
¿Cómo quedaría el modelo de Emy usando su clave si lo traducimos al de Ada?

4. Resultados

En esta sección se exponen los resultados obtenidos en la implementación las actividades detonadoras y de exploración de modelos con los dos grupos de estudiantes A y B.

Para el análisis de resultados se establecen las categorías: *(1) Modelo concreto del rotor; (2) Modelo algebraico; (3) Modelo tabular; (4) Modelo gráfico; y, (5) Transición entre representaciones y modelos*. Las interacciones se analizan a la luz de AiC Modelo *RBC-**C*** y en los fragmentos presentados se destacan en negritas las acciones de construcción.

4.1 Resultados del Grupo A

El grupo se organizó en 8 equipos de 2 estudiantes cada uno, se trabajaron cuatro sesiones consecutivas en 6 horas de instrucción. Enseguida se describe el proceso de desarrollo de modelos que propició la secuencia propuesta en la Sección 3.2 y en el Anexo A.

Modelo concreto con el rotor

Se inicia la sesión presentando un mensaje cifrado, mediante la asociación natural entre el abecedario y su número correspondiente en posición, para que sea descifrado por los estudiantes a modo de reto. Encontramos *R-acciones* cuando los estudiantes intuyen formas de cifrar mensajes [4] y buscan la naturaleza del mensaje [6] y las enlazan para la *B-acción* [8] en la que se concreta la asociación abecedario-números naturales. El profesor provoca una *R-acción* [9] para que se dé la *B-acción* [10] de poner dos cifras por letra con la finalidad de uniformar y evitar conflicto con cifrados con dos dígitos (por ejemplo, en la asignación natural, a la Z le corresponde el 26 y se podría confundir con BF, si a la B se le asignará sólo el dígito 2 y a la F el dígito 6). Esto los lleva a la *C-acción* [12] en la que hacen explícito el proceso de cifrado con la asociación natural entre alfabeto y números. En esta parte, el profesor introduce la idea de una entidad que acepta una entrada y produce una salida [13], misma que puede ser valiosa al formalizar el concepto de función.

Analizaron la pertinencia de asignar dos dígitos a cada letra del alfabeto para uniformar la asignación, la mayoría elaboró una tabla de correspondencia y descifraron el mensaje. Luego, se observan *B-acciones* [14 y 16] cuando vinculan este conocimiento con los rotores, que es el material concreto proporcionado para la actividad. Inicialmente los alumnos no identificaron el funcionamiento del rotor, fueron necesarias la construcción de la tabla y la intervención del profesor para entenderlo.

[1] P: Recibí un mensaje que no es claro para mí y pensé que ustedes podían ayudarme. No es claro porque el mensaje viene encriptado. Es decir, utilizaron una clave secreta para proteger la confidencialidad. ¿Dónde podemos encontrar situaciones en las que se requiera proteger datos?
[2] As: En una computadora con una clave … una USB puede tener contraseña.
[3] P: Podemos ir incrementando la confidencialidad de acuerdo a la importancia de los datos: en un banco, en el gobierno. Por ejemplo, en un conflicto de guerra, ¿cómo harían ustedes para enviar un mensaje?
[4] As: Por medio de números [pide explicación]. Poniendo un número para cada letra.
[5] P: A ver, este mensaje es el que necesito que me ayuden a traducir [apunta]: 0209051422051409041519-01-20051803051815. [Trabajan] ¿Ya lo descifraron? Alguna idea de ¿cómo hacerlo? Imaginen que de esto dependen vidas, ¿cómo descifran?
[6] As: ¿Sería dinero todo esto?
[7] P: ¿Es posible?, si fuera dinero ¿tendría sentido iniciar en 0?
[8] As: No, no es cantidad … se pueden poner los números de acuerdo al orden. El 0 es la A, el 1 la B,
[9] P: Entonces, la primera palabra tiene 22 letras ¿Existirá una palabra así?
[10] As: No, … [Trabajan] … Puede ser por pares. El 01 sería la A … Tenemos una palabra de 7 letras.
[11] P: Son buenas pistas. ¿Requieren de más datos para resolver esto? [asienten], […]
[12] As: El 01 es la A, 02 la B … [muestran acuerdo con la asociación natural]. La primera palabra sería: “BIENVENIDOS”.
[13] P: Muy bien, entonces este es el mensaje y la “máquina” que me permite codificarlo es esta asociación: La A con 01, B con 02, C con 03, …
[14] As: Utilizando el rotor el mensaje es “BIENVENIDOS A TERCERO”.
[15] P: Sí, algo que podemos observar es que el rotor no tiene ceros, que tiene que ver esto..
[16] As: Es que se le dan dos cifras porque deben ser pares para no confundir. Si no estuvieran los ceros cómo saber en 295 si es 2 o es 29. Sí, es para una división exacta, igual de números por letra.

Posteriormente, se les propone un segundo mensaje cifrado (con clave) [17] y al querer aplicar el procedimiento previo se da una *R-acción* en la que identifican que carece de sentido [18]. Esto provoca la *B-acción* [20] que indica el uso de rotores con giro (clave). En ese momento se les facilita el rotor para su manipulación y exploración; posteriormente, construyen (*C-acción*, [22]) el modelo concreto para cifrar. A diferencia del grupo B, este rotor contenía letras y números. Las acciones que suceden [23-34] son acciones de consolidación (***C***-*acciones*) para este modelo.

[17] P: […] Veamos si pueden descifrar otro mensaje [escribe]: 082019 – 10242510 – 1920 – 010619 – 06 – 2120091023. Si seguimos trabajando con el mismo sistema, ¿qué diría en la primera palabra? ¿Tiene sentido?
[18] As: “HTS”, …, no tiene sentido.
[19] P: ¿Seguramente algo pasó? Para el mensaje anterior necesitaban los dos rotores [no, contestan]. Entonces, ¿por qué tendrá dos círculos el rotor? Tendremos que hacer algo, manipular los rotores tal vez. [Siguen trabajando] ¿Qué elementos necesitarían para poder descifrarlo? [exploran los rotores y tratan de descifrar el mensaje].
[20] As: Si acomodo los rotores primero con la posición de las letras y después giro uno.
[21] P: El círculo blanco tiene números y letras. El morado sólo números, a ver, entonces, dicen que el giro me permite encriptar mensajes. Si giro un lugar la A ¿dónde queda? [en 2 responden]. Entonces qué valor le corresponde al 08 [de la palabra cifrada 082019] ¿cuántos lugares se avanza para que tenga sentido el mensaje?
[22] As: La regla sería que cada número avanzara el mismo número. Por decir que todos avancen 4. Hay que encontrar esta regla [clave], lo que debemos avanzar.
[23] P: ¿Qué dice ahí? [mensaje]
[24] As: CON
[25] P: Así es, entonces que tienen que hacer para descifrar el mensaje, usen su rotor.
[26] As: [Para descifrar] Se le resta 5 [al mensaje cifrado]
[27] P: Quiere decir que la C (el 03) está en el número 8 del rotor morado … Entonces a la E que le corresponde en el [mensaje cifrado]
[28] As: El 10
[29] P: Entonces que letra es esta [24]
[30] As: La S
[31] P: ¿Están siguiendo a su compañera? [asienten]. ¿Qué sigue? … el 25, ¿qué letra es?
[32] As: La T
[33] P: ¡Completen el mensaje, descífrenlo!
[34] As: [Trabajan … Risas] Dice: “CON ESTE NO VAN A PODER”

Inician la lectura acerca del estudio de la Criptografía (Hoja de trabajo, Anexo A), y contestan las preguntas. Aquí vemos que las acciones mostradas [35-40] son ***C****-acciones* que consolidan o reafirman el funcionamiento del modelo del rotor.

[35] As: Ya profe este mensaje dice "OBJETIVO SUPERADO"
[36] P: Lo encontraron sólo con el rotor blanco [cifrado por asociación natural]. Pero, luego aparece cifrado de otra manera, con una "clave", ¿a qué se refiere esta clave?
[37] As: A avanzar 3. [
38] P: Muy bien, aquí la clave es 3, pero podemos elegir cualquier clave […] y la clave nos dice cuanto avanzar o girar (en el rotor). Por ejemplo, si la clave fuera 4, ¿qué números le corresponden a la A y a la M?
[39] As: Quedan en el 5 y en el 17.
[40] P: Una vez que sabemos cómo funciona el método con el rotor, vamos a cifrar mensajes [monitorea y pide que contesten la Hoja de Trabajo].

En la construcción de este primer modelo, para el proceso de cifrado y descifrado de mensajes, se puede observar que basan el cifrado en el uso del rotor, asociando la clave con giro que se hace en el material para identificar la "posición final" que corresponderá a cada letra; esto es, describen el proceso de cifrado en términos del uso del material concreto. Para cifrar todos hacen referencia al movimiento del rotor y 4 equipos (mitad del grupo) lograron establecer una relación aritmética para cifrar y descifrar mensajes (una producción similar se manifestó en el grupo B, tal como se muestra en la Figura 2.4).

En esta parte, con la intención de evaluar, el profesor los conduce a que retomen el proceso de cifrado y descifrado, les pide que cada equipo cifre una palabra, la intercambie con otro equipo y descifre el mensaje cifrado por ellos y viceversa. En esta actividad los equipos tardaron 8 minutos aproximadamente y sólo un equipo mostró dificultad con el cifrado, ya que se quedaron en la primera parte del proceso y el profesor los apoyó para el segundo paso (sumar la clave). En el siguiente fragmento podemos ver que los estudiantes muestran tres *R-acciones* [42, 44 y 52] y las utilizan para concretar las *B-acciones* de cifrar el mensaje y descifrar el de otros, para descifrar el de otros deben "descubrir la clave" que haga que el mensaje sea una palabra. Principalmente, realizan *B-acciones* para buscar ¿cuáles tienen oportunidad de representar una vocal? [48] y para buscar el número apropiado que usarán como clave para restar y descifrar. La acción de construcción del proceso para descifrar es explícita en [56 y 57]
.

[41] P: Recordemos el proceso de cifrado ¿qué se hace?
[42] As: A cada número le damos una letra.
[43] P: Sí, asociamos el número correspondiente a cada letra del alfabeto.
[44] A: Sumamos la clave
[45] P: Muy bien, usamos la clave y ciframos. Bueno, por equipo piensen en una palabra, usen su propia clave y cifren su mensaje. Me entregan los mensajes cifrados y yo los intercambio con otros equipos para que descifren su mensaje. [Trabajan en equipo, entregan al profesor, intercambia]
[46] P: [Supervisa] Sólo han realizado la parte de asociar el mensaje a un número, ¿ya tienen su clave? ¿cómo la usan?
[47] P: [Intercambia los mensajes] Ahora, ¿cómo descifrar un mensaje si no conozco la clave? ¿de las 26 letras alguna aparece más?
[48] As: La "a", …, la "e", bueno todas las vocales.
[49] P: ¿Qué necesitamos hacer?
[50] As: Encontrar la clave
[51] P: Bueno esa sería la primera pista y ¿cuántos números le asociamos a cada letra?
[52] As: Partimos en dos la palabra
[53] P: Muy bien y hay que buscar ¿qué clave le da sentido a "ese mensaje"? [ya descifrado]
[54] P: [Trabajan] A ver, ¿alguien reconoce este papelito?
[55] As: Sí, es nuestro
[56] As: [Un equipo] La palabra de ellos que nos tocó, es "INTERESANTE".
[57] As: La que nosotros desciframos fue "HOLA"

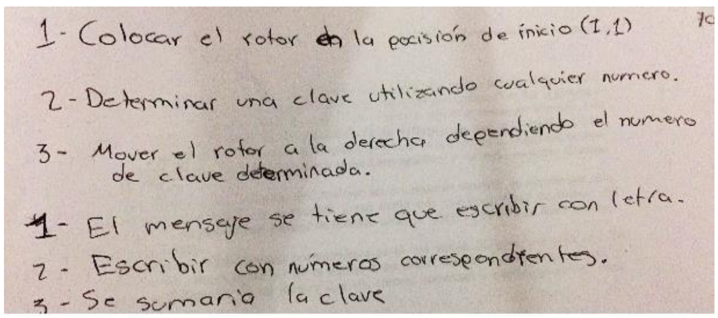
Enseguida, se muestra la construcción de elementos para un pensamiento cíclico (*C-acción* [61]). Aquí, 5 de los 8 equipos identifican el ciclo del abecedario y proponen "procedimientos" para dar continuidad con el cifrado una vez que el número inicial sumado a la clave superan los 26 dígitos que componen un ciclo.

[58] P: A ver, si ahora quiero mover la T, que corresponde al 20, con clave 12…
[59] As: Queda 32
[60] P: Pero, aquí no hay 32 [en el rotor], entonces, ¿qué pasó?
[61] As: Reinició después del 26 … queda en el 6

Modelo algebraico

Para la construcción de este modelo se dejó que los estudiantes trabajaran desde su experiencia con el modelo del rotor. Aquí 4 de 8 equipos lograron describir el proceso para cifrar y descifrar mensajes, sin embargo, escriben incluso paso a paso, el procedimiento que hay que seguir al usar el rotor, sin que esto llegue a un modelo algebraico, no establecen fórmulas ni asignan literales a las variables (Figura 2.2).

Figura 2. 2 Descripción de los pasos para cifrar mensajes


1- Colocar el rotor en la posición de inicio (1,1)
2- Determinar una clave utilizando cualquier numero.
3- Mover el rotor a la derecha dependiendo el numero de clave determinada.
1- El mensaje se tiene que escribir con letra.
2- Escribir con números correspondientes.
3- Se sumarío la clave

Fuente: Producciones de los estudiantes

Mientras que 2 equipos sí logran describir el proceso, no llegan a establecer una expresión algebraica, no obstante, si logran representar simbólicamente algunas "variables" como, *"P"= posición "C"= clave "*M_c*"= mensaje cifrado*. El profesor pide que lo sigan reflexionando y el siguiente módulo retoma. Él se muestra inquisitivo para provocar en los estudiantes *C-acciones* [63 y 65] que conformen el proceso de cifrado y descifrado y lo plasmen en una expresión algebraica. A partir de ahí son utilizadas las fórmulas para las ***C****-acciones* que consolidan este modelo, dado que con él, ahora cifran mensajes y detectan errores [69, 70, 72]. En [72 y 73] se muestran acciones de reconocimiento del "espacio" entre palabras y cómo cifrarlo. Esto puede ayudar a refinar el modelo haciendo que sea más seguro al no revelar la separación entre palabras.

[62] P: La clase anterior ciframos y desciframos mensajes, primero con el rotor. Para deshacernos de él se establecieron otras formas de hacerlo, un par de fórmulas, ¿cuáles fueron?
[63] As: Para cifrar un mensaje se usaba la posición inicial más la clave. [Los estudiantes guían al profesor para que escriba en el pizarrón la fórmula de cifrado *MC=P1+C*]
[64] P: Recuerdan cómo descifrar.
[65] As: Lo contrario, ahora la posición final y restamos la clave. [Guían al profesor para que escriba MD=PF-C]
[66] P: De acuerdo a esto [señala las fórmulas para el proceso de cifrar y descifrar], ¿cómo sería cifrar esta frase? … [escribe la frase "CLAVE SECRETA"], usando la clave 7 ¿qué números van aquí?
[67] As: 03, ... ,12, 01, …,21,05 [el 21 lo corrigen] [68] P:"SECRETA" ¿cómo queda en números?
[69] As: 19, 05, 03, …,18, 05, 20, 01[el profesor escribe seguidos los números]
[70] As: Entonces en la de "CLAVE" no va el 21 es un 22 [el profesor corrige lo escrito]
[71] P: Ahora ya tenemos el mensaje correspondiente asociando el alfabeto con números. No hemos usado la clave.
[72] As: [Dictan al profesor el mensaje cifrado sumando la clave 7] 1019080412 espacio 26121025120108.
[73] P: [El profesor aprovecha el dictado del espacio para llevarlos a otra actividad que refina el modelo] ¿Qué pasa si alguien encuentra estos números? Aunque no tenga rotores o la clave, ¿se dará cuenta que hay un mensaje "escondido"?

Modelo tabular

Desde el inicio de la actividad hemos visto que los estudiantes construyen su propia tabla, dada la necesidad de ayudar al profesor a descifrar su mensaje (fragmento [1-34]). En cuanto a la comprensión y manejo de la tabla de asociación, se puede afirmar que reconocen la asociación letra-número como algo natural, y la tabla surge como iniciativa del grupo a partir de la necesidad de descifrar el primer mensaje. Son los estudiantes los que proponen la tabla inicial, una vez que conocen y manipulan el rotor, la tabla pasa a segundo término y basan el cifrado y descifrado en el uso y exploración del material concreto. Aunque tardan en desprenderse de los rotores, logran refinar este modelo con el modelo tabular propuesto por la Agente Ada (Hoja de trabajo en Anexo A), desde las *R-acciones* [75 y 77] de incorporación del 00 como espacio y con ello las *B-acciones* [71, 78]. Tal refinamiento se muestra en la *C-acción* [83] en la que, con éxito, lo aplican.

[74] P: [Leen el modelo de Ada y llenan la tabla] Las letras son 26, ¿es correcto trabajar con 26 elementos?
[75] As: No, son 27 ahora con el "espacio" [entre palabras]
[76] P: Exactamente, tenemos un lugar más. ¿El ciclo dónde termina?.
[77] As: En el 27, porque se agrega el espacio.
[78] P: ¿Cuál letra corresponde al 19?
[79] Q: La S (en el cifrado con clave 8)
[80] P: Entonces, ¿cómo quedaría el mensaje "SOMOS AGENTES DE CAMBIO"?
[81] As: [Dictan al profesor] 2722202227 y luego 09
[82] P: ¿Seguros?
[83] As: [Revisan] ¡Ah no! El espacio es 00 y con la clave es 08. Sigue 080915132 … No profe, tenemos errores [corrige]:
2723212327080915132201132708121308110921101723

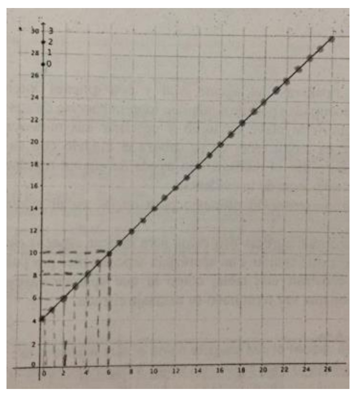
En sus producciones escritas todos los equipos completaron la tabla de manera correcta, considerando el "00" como espacio; previa intervención del docente, que hizo hincapié en revisar todos los elementos involucrados en el modelo tabular, pese a ello, un equipo al cifrar la frase "SOMOS AGENTES DE CAMBIO" utiliza comas para separar las palabras en lugar de "08" (correspondiente al espacio cifrado).

Modelo gráfico

Este modelo es interesante, dado que, en él de manera natural surgen conceptos asociados tales como: variable discreta, pensamiento cíclico, contextualización de las coordenadas, identificación de la clave de cifrado con la ordenada en el origen, cifrar, etc. Aquí los estudiantes discuten en equipo para responder las preguntas de la Hoja de trabajo (Anexo A). El profesor monitorea y al hacerlo identifica que algunos de los estudiantes ya se han dado cuenta que si unen los puntos o pares ordenados (M, M_C) se obtiene una recta, pero en el proceso de cifrado sólo algunos puntos sobre ella son los que les interesan: los puntos (M, M_C). Es decir, identifican que se trata de un ejemplo discreto al remarcar tales puntos (Figura 4.2). En la socialización vemos que hay *R-acciones* para reconocer los principales elementos de la gráfica (ejes, recta, intersección de la recta con eje de las ordenadas) que aparece en su hoja de trabajo. Luego, suceden *B-acciones* que asocian la clave utilizada con el cero (que representa el espacio entre palabras), así la clave es la ordenada al origen [85, 87], también las que identifican el mensaje original con el eje de las abscisas [89] y el mensaje cifrado con el de las ordenadas [90] y encontrar e interpretar coordenadas específicas [91, 93, 95, 97, 99] y, como *C-acciones* podemos observar que en [100] cada estudiante logra representar e interpretar una coordenada en este modelo abstracto para cifrar y además, hay la construcción y comprensión de un ejemplo discreto [102], los cuales en el contexto escolar son poco estudiados (Figura 2.3).

[84] P: Vean la gráfica y vamos a tratar de comprenderla [les pide que recuerden el modelo tabular de Ada]
[85] As: Está usando la clave 4 [modelo de Emy]
[86] P: ¿Por qué? … ¿Al cero que le corresponde?
[87] As: Donde inicia la gráfica, en la línea vertical
[88] P: A ver, aquí [señala la gráfica] ¿dónde estará el mensaje original?
[89] As: El original está en la horizontal
[90] P: Entonces el mensaje original está en el eje de las abscisas y el mensaje cifrado [contestan los alumnos que en el eje vertical] ¿qué valor le corresponde al 8?
[91] As: 12 [la clave es 4]
[92] P: Entonces, aquí está el punto correspondiente al valor cifrado [dibuja] ¿qué valor representa el cero?
[93] As: Representa al “espacio” [entre palabras]
[94] P: Sí, ¿y ya cifrado?
[95] As: Al 4
[96] P: El 1, ¿con quién se cifra?
[97] As: El 1 va con el 5, el 2 con el 6 [el profesor dibuja los puntos que le dictan]
[98] P: Marquen sobre la recta del modelo de Emy todos los puntos que representan al mensaje original y al mensaje cifrado.
[99] As: Como coordenadas todos los puntos del abecedario.
[100] P: Sí [trabajan y el profesor monitorea, luego pasa a cada estudiante a representar en el pizarrón un punto (Mo, Mc)]
[101] P: [Ya que terminan] ¿Qué pasa con el 1.5 del eje x? ¿La agregamos un 4, la clave?
[102] As: No, ese punto no existe aquí … No tenemos una letra entre la A (o sea el 1) y la B (el 2), sólo valen enteros.

Figura 2.3 Modelo gráfico con clave 4



Fuente: Producciones de los estudiantes

En el registro escrito, sólo 2 equipos ubicaron los puntos en la gráfica cuando se les pide representar el modelo de cifrado para que con él cifren o encripten la frase ‘SOMOS AGENTES DE CAMBIO’, el resto lo hizo con la recta completa. Por otra parte, 4 de los 8 equipos muestran evidencia de interpretar las coordenadas como (posición inicial, posición cifrada) y los otros 4 exhiben confusión en la interpretación de la pregunta, ¿Qué representa la primera coordenada de un punto sobre la recta? ya que, consideran como primera coordenada al punto (0,4) o bien el (1,5) asociado a la letra “A”.

Dos equipos grafican un ciclo, es decir, el último punto representado es (22, 26). Otros 5 equipos muestran otros puntos que indican que el 23, al aplicarle la clave de cifrado (4), se corre al 27 que indica inicio de ciclo, esto es, se va a 0 y se reprenta como (23,0) y grafican hasta que “se concluye” un ciclo en el eje vertical quedándose hasta el 27, el último equipo grafica más de un ciclo. Usualmente, en las gráficas utilizadas para representar relaciones funcionales se graduan los ejes utilizando números de manera consecutiva. En este caso, se graduaron los ejes con números pares y en los equipos no se presentó problema con esta graduación. Ellos comprendieron que la letra A sin cifrar es 1 y se representa en el eje de las abscisas a la mitad de 0 y 2. Finalmente, un equipo comenzó en la coordenada (0,8) ubicándola en el origen de manera errónea.

Transición entre representaciones o modelos

En el siguiente fragmento podemos apreciar acciones de consolidación, ***C***-*acciones*, de los modelos tratados anteriormente (concreto, tabular, gráfico y algebraico) al realizar correctamente la interpretación de sus elementos. Finalmente, podemos observar en [116, 118 y 120], ***C***-*acciones* en las que se construye comprensión, al hacer explícita la transición y conexión entre las diferentes representaciones.

[103] P: […] Repasemos, ¿qué significa el (2, 6)?
[104] As: Una coordenada de la gráfica … que B se cifra en F … El número sin cifrar es 2 y el número cifrado es 6.
[105] P: ¿Qué hay entre ellos?, ¿qué los relaciona?
[106] As: La clave, al primero le sumamos 4, que es la clave y llegamos al segundo, cifrado.
[continúan usando gráficas para cifrar]
[107] P: [Con otros ejes] Si ahora la clave fuera 12 ¿cómo quedaría? Menos o más inclinada.
[108] As: Más inclinada
[109] P: Por ejemplo, el 2, ¿con quién iría?
[110] As: Con el 18 …No, con el 14… Sí el 14.
[111] P: ¿En cuál hay mayor ángulo de inclinación?
[112] As: En la de clave 12.
[113] P: Si representáramos la tabla del modelo de Ada, aquí en la gráfica ¿cómo quedaría?
[114] As: Así como esa, empezando el 0 con 8 que era la clave [de Ada]
[115] P: ¿Con qué otros valores?
[116] As: (0, 8), (1, 9), (2, 10), …
[1 [117] P: Si a la clave le llamamos C, piensen en una e expresión que resuma toda esta actividad
[118]As: x+c =y
[119] P: Esto propone Andrea, ¿qué significa?
[120] As: Que a los números originales se les va a sumar una clave y se tendrán los cifrados. Esto representa la manera en la que encriptamos.

Cabe mencionar que esta sesión terminó de manera apresurada y eso puede explicar que el profesor, en [107], muestra una acción que provoca el abordar la inclinación de la recta, en la cual están incluidos los puntos de cifrado, para explorar la familia de rectas paralelas al variar la clave y ver que este parámetro mantiene invariante la pendiente o inclinación de las mismas. No obstante, en [111] cuando vuelve a preguntar y se responde en [112] de manera errónea, el profesor no corrige esta respuesta, aunque en el pizarrón se pueden apreciar las rectas paralelas.

4.2 Resultados del Grupo B

Se trabajó con 6 equipos de 2 estudiantes cada uno para implementar la secuencia en dos sesiones cubriendo 4 horas en total. Enseguida, se describen los modelos desarrollados por los estudiantes para interpretar las situaciones propuestas en la Sección 3.2.

Modelo del rotor

En esta parte el profesor realiza una introducción que provoca en los estudiantes diferentes *R-acciones* asociadas con la relevancia de una situación real, actual y cercana a ellos [122, 124, 126]: la protección de datos o información personal. Con tales acciones, logran expresar un modelo de cifrado en una *C-acción* [130] y códigos públicos [134].

121] P: Levante la mano ¿quién tenga un celular? [casi todos], ¿quién le ha puesto contraseña a su celular?, ¿quién tiene un Facebook (FB y su contraseña? [casi todos]. Bien, ¿por qué creen que es importante tener contraseña?
[122] As: Por seguridad … Para que nadie se meta en tu FB a revisar tus cosas … Por privacidad.
[123] P: ¿Dónde más creen que es importante mantener la seguridad de su información?
[124] As: En una red social ... En el correo electrónico … En un banco, cuando depositas dinero y así … En el gobierno. En cajas fuertes. En una casa. Candados de tu bici y de las maletas.
[125]P: De acuerdo a la importancia, se imaginan ¿cómo se debe incrementar el nivel de seguridad? ¿Qué protegemos en FB?
[126] As: Mensajes, conversaciones, archivos.
[127] P: En general, información que se deba proteger […] ¿Qué harían ustedes para proteger información?
[128] As: Utilizar un código
[129] P: ¿Cómo sería ese código?
[130] As: Con números … con letras … combinando los dos … con símbolos para sustituir palabras o letras …
[131] P: ¿Desde cuándo creen que existe la necesidad de proteger información?
[132] As: Desde siempre/Desde que existen los gobiernos/ Las guerras …
[133] P: Por eso, la importancia de tener sistemas cada vez más sofisticados para protegerla.
[134] As: El código Morse … El código binario
[135] P: Estos son códigos públicos, también los hay privados y otros públicos casi imposibles de descifrar [continúan y hablan de que incluso hay algunos que utilizan números primos]

Para la construcción de la correspondencia entre el alfabeto y los números naturales como un cifrado simple, en la primera actividad (Sección 3.2.1), el profesor pide a algunos estudiantes que lean la situación que describe el método que usa el agente Mat y se asegura que la comprendan. Se observan *R-acciones* [137] para identificar los principales elementos del método; *B-acciones* para enlazar la información [138], detectar posibles problemas [139], proponer formas de resolverlos [141, 143] y construir una solución funcional en la *C-acción* [145], mostrando la asociación natural de números con el mismo tamaño (dos cifras) con el alfabeto. Con la comprensión del método construido, emprenden una ***C***-*acción* de consolidación [146] al descifrar un mensaje. Mostraron comprensión y manejo en la tabla y su interpretación como correspondencia natural.

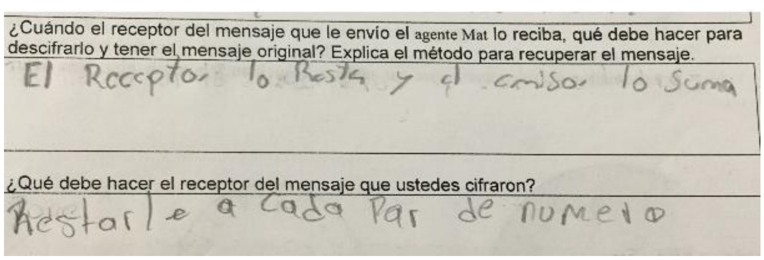
[136] P: ¿Cómo funciona el método del agente Mat? [reparte el material] ¿Ayúdenme a interpretar la tabla? [Tiempo de espera].
[137] As: Cada letra tiene un número de acuerdo a su posición. Aquí tenemos dos [tipos de] rotores, unos con letras y otros con números.
[138] P: A ver, si quiere escribir “HOLA” ¿cómo queda? [Pasa una alumna al pizarrón y escribe 815121]. Están de acuerdo [asienten]. Sin embargo, ¿qué problema podríamos enfrentar para descifrar esto?
[139] As: Que están todos los números juntos.
[140] P: Por ejemplo, este primero no sé si es 8 o es 81, o el 15, no sé si es 1 y 5 o 15. ¿Qué cambio le haríamos a esto para evitar el problema?
[141] As: Separarlos [escribe 8, 15, 21, 1]
[142] P: ¿Qué les parece está solución? A lo mejor su compañero Gustavo intercepta este mensaje ¿cuál de ellos tendría más probabilidad de descifrar?
[143] As: El segundo, el de la separación [pide explicación el profesor]. Porque están separados los números y pensaría que cada uno es una letra.
[144] P: ¿Qué hago para evitar esto? […]
[145] As: Que estén juntos, pero con un mismo tamaño [lo pasa al pizarrón y escribe 08151201].
[146] P: […] Cada número con longitud de dos cifras y ahora sí podemos identificar que el 08 es la letra H, 15 es la O, [pide que descifren un mensaje que aparece con números]. ¿Qué dice ahí? [lo descifran bien “objetivo superado”].

Para construir el conocimiento acerca del proceso para cifrar y descifrar utilizando un desplazamiento como “clave de cifrado”, los estudiantes exploran el material concreto de los rotores y exhiben *R-acciones* [147, 149] para identificar su funcionamiento desde la experiencia anterior. También se observan *B-acciones* [151, 153] para enlazar la información previa, con la necesidad de tener un sistema de cifrado más seguro. En [159] muestran una *C-acción* en la cual proponen dos modelos de cifrado, uno de permutación y el otro un cifrado con clave de corrimiento 3, que justamente es el que propone el agente Mat y ellos aún no han estudiado. El profesor enseguida provoca ***C***-*acciones* para extender la comprensión del método construido [160, 161, 163, 164]. Derivada de tales acciones surge una *C-acción* en la cual se construye el proceso inverso para descifrar [165]. Luego, suceden ***C***-*acciones* que reafirman este proceso [166-169].

[147] As: [Una alumna expresa que si lo hiciera con los rotores le cuesta] Aquí, las letras no sabes en qué número van.
[148] P: ¿Qué harían ustedes para evitar esto?
[149] As: Aprenderse cómo acomodarlos [los rotores]… Ponerles las letras correspondientes a los números… Aprenderse la posición del abecedario, en número,
[150] P: Creen que este sistema de asociación [simple] sea muy sofisticado, o sea fácil de descifrar por alguien que lo intercepte. Por ejemplo, para ustedes, ¿cómo sería descifrar este mensaje?[020905132205130904 1419]¿Qué diría?
[151] As: [contestan] “BIENVENIDOS”.
[152] P: A ver, si yo pusiera este mensaje a otro grupo ¿lo podrían descifrar?
[153] As: No, porque no saben cómo funciona [el método]…Tal vez sí se imaginen.
[154] P: Podemos decir que: al ser la asociación natural, hasta cierto punto es fácil. ¿Qué podemos hacer para mejorarlo?
[159] As: Podemos mover algunas posiciones. Intercambiar la primera con la tercera y, la segunda con la cuarta, y las demás igual [0513020922051309041419]… También podemos sumarles algo como 3 y quedaría [anota 0512081625081612071722].
[160] P: El mensaje quedó cifrado así [señala] ¿qué hizo para transformarlo? [sumar 3, contestan]. Bueno, a esto el agente Mat le llama “clave”. La clave es 3.
[leen lo que sigue] A ver si tenemos la A en el rotor grande, en el rotor pequeño, ¿qué le corresponde? [El 01, responden], ahora gírenlo cinco lugares, la “clave” sería 5. Con los rotores practiquen este sistema, cifren su propio mensaje [monitorea]. A ver usted me dice su mensaje ya cifrado.
[161] As: 11181504042123242118 [escribe].
[162] P: [espera] ¿Qué harían para descifrarlo?
[163] As: Buscar la clave … Pues primero poner las letras que son de ahí.
[164] P:¿cuáles tocan? [KRODD] ¿tiene sentido?
[165] As: Yo digo que la clave es 3, podemos restarle el 3.
[166] P: Entonces, ¿qué quedaría? [dictan 08152201 espacio 0118 …] ¿Por qué un espacio?
[167] As: Es que la primera palabra descifrada es “HOLA” y en el espacio se puede poner punto y diría “HOLA.ARTURO”
[168] P: Otro mensaje [Le dictan 082322232017] ¿Qué dice? [Le dictan HW…]
[169] As: La clave puede ser 5. No, no es 5. La clave es 4…No, porque DS no tiene sentido… Si fuera 3, ETS. No, tampoco, es 7, [Profesor:¿qué necesito?]. Conocer la clave, aquí es 2, FUTURO, síiiii.

En este grupo se observa poco uso del rotor, prefieren el uso de la tabla de asociación, además de una comprensión “rápida” del proceso de cifrado. Esto provocó que dejaran de lado al rotor y se enfocaran exclusivamente en la tabla para la correspondencia de letras-números para cifrar y descifrar, sumando la clave al valor correspondiente a cada letra. Ellos logran relacionar el descifrado con la acción de restar la clave (Figura 2.4).

Figura 2.4 Proceso de cifrado y descifrado



Fuente: Producciones de los estudiantes

En cuanto a la observación de un pensamiento cíclico, se puede decir que todos comprendieron la existencia de un ciclo, a partir de las *R* y *B-acciones* [171, 173, 175] y apoyados en ellas logran la *C-acción* [177]. Sin embargo, no todos identifican el proceso; sólo 3 equipos (mitad del grupo) encuentran el valor que corresponde a la “X”.

[170] P: Si es 24 la letra y para cifrarla le sumo 3 tenemos 27, pero ¿por qué aquí [en los rotores] sólo llega hasta el 26?
[171] As: El abecedario tiene 26 letras [sin RR, LL, Ñ] Nadamás llega hasta el 26. Entonces, nos pasamos al 02.
[172] P: Entonces vuelve a iniciar un nuevo ciclo. ¿Dónde podemos ver ciclos?
[173] As: En el reloj,… [174] P: Aquí al llegar al 26 ya no pasa al 27, ¿a dónde se iría? [01, contestan]. Si tengo que cifrar la letra V [el 22, responden] si lo cifro con clave 9 ¿cómo quedaría?
[175] As: Quedaría cifrado en 05.
[176] P: [Pregunta de nuevo a un alumno] ¿Qué pasa si llegamos al 26?
[177]As: Empezar a contar de nuevo en 01.

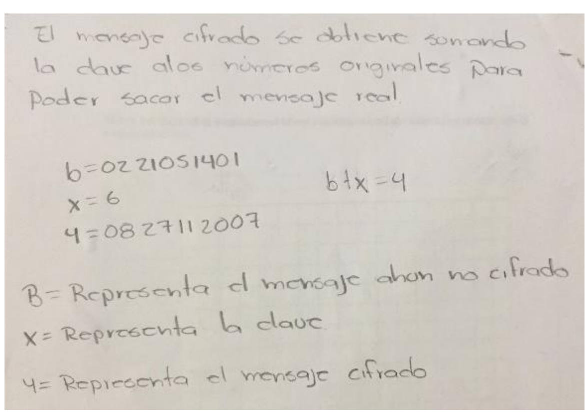
Modelo algebraico

Los alumnos describen el proceso de cifrado en una *B-acción* a través de los pasos a seguir [179]. Con ello, en una *C-acción* [181] asignan una letra al mensaje original, una a la clave y una más al mensaje cifrado, representándolas en una relación funcional $y=x+b$, que puede verse en la mayoría de las producciones escritas que pide el profesor en [182]. No obstante, no se hace una socialización del rango y dominio asociado al ciclo.

[178] P: Vamos a escribir un proceso, a tratar de explicarlo. Díganme con sus palabras ¿cómo sería el proceso para cifrar el mensaje? A ver, “BUENA CLASE” ¿qué debo hacer para cifrarlo?
[179] As: Primero cifrarlo con sus números originales [le dictan] 0221051401 …] … Luego se le suma el número que queramos … La clave … Con una clave 6 … [le dictan] 0827112007.
[180] P: ¿Cómo puedo explicar esto con una fórmula? ¿Cómo quieren llamarle a la clave?
[181] As: “x” la contraseña y al mensaje “b”, … al mensaje oculto “y”.
[182] P: Bueno, escriban en su hoja de trabajo con sus propias palabras el proceso y con fórmula también. Cada quien con las letras y las palabras que quiera usar y que entiendan mejor.

En la Figura 2.5 se aprecia una explicación de la fórmula explícita, esto da cuenta de una conexión del contexto de la situación a la representación simbólica. Para Lannin, et al. (2008), aunque los estudiantes “batallen” con el uso de variables, y primero sean capaces de describir con sus propias palabras la fórmula, esto constituye un cimiento importante para transitar al uso de los símbolos y a una representación algebraica.

Figura 2.5 Representación simbólica del proceso de cifrado del mensaje



Fuente: Producciones de los estudiantes

Modelo tabular

Si recordamos la interacción para construir el modelo concreto del rotor, podemos ver, que en este grupo, la construcción de una tabla de asociación y su comprensión ha propiciado que de manera temprana el modelo del rotor se haya sustituido por el uso de la tabla. Así, los estudiantes aprehenden el modelo que propone Ada (Sección 3.2.2 y Anexo A), aunque completan la tabla de asociación sin considerar el cambio generado al agregar el "00", que es el espacio entre palabras. Los estudiantes pueden interpretar fácilmente la información para determinar la clave utilizada por Ada y cifrar el mensaje "SOMOS AGENTES DE CAMBIO".

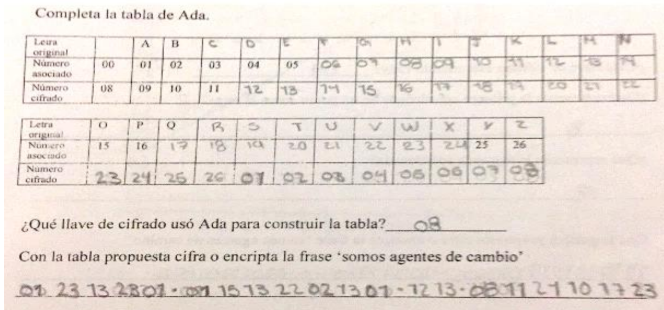
Para salvar la omisión del "00" discuten y analizan este cambio de manera grupal y reconocen la necesidad de agregar el "27" para poder completar el ciclo, cifrar el "espacio" y que no fuera evidente que el "00" lo representaba.

En el siguiente fragmento se puede observar una *R-acción* [186] que atribuye importancia al cifrado del "espacio entre palabras" para refinar y hacer más seguro el proceso de descifrado. Con esto, se provocan *B-acciones* para asignar un número al "espacio" y modificar el número de elementos en juego [188, 191 y 193]. Dada la observación y su buen manejo con las tablas, rápidamente muestran una *B-acción* donde determinan la clave de cifrado de Ada [194] y seguidamente, vienen nuevas *B-acciones* para cifrar el mensaje solicitado con dicha clave y mostrar comprensión del nuevo elemento y la importancia de también cifrarlo [201, 202, 204, 206]. Finalmente, se da la *C-acción* [208] que indica la comprensión de este modelo como un refinamiento del de los rotores.

[183] P: [El profesor aprovecha que al cifrar un mensaje le dictan el espacio entre palabras para llevarlos a un modelo tabular que refina el modelo concreto] ¿Qué pasa si alguien encuentra estos números? Aunque no tenga rotores o la clave se dará cuenta que hay un mensaje "escondido".
[184] As: Sí
[185] P: ¿Por qué?
[186] As: Por el espacio, hay dos palabras.
[187] P: Se puede hacer que [otros] no sepan el número de palabras y hacerlo más seguro.
[188] As: Sí, con un número.
[189] P: Precisamente Ada pensó en esta situación … [Lee e introduce]
[190] P: ¿Con qué número vamos a representar el espacio entre palabras?
[191] As: Con el 00
[192] P: Teníamos 26 letras y agregamos el espacio, ¿cuántos lugares debemos tener ?
[193] As: 27 [llenan la tabla]
[194] P: Cifren el mensaje "somos agentes de cambio" con la clave que usó Ada.
[195] As: ¿El 8?... al 00 le vamos a dar el 09, … ¡nooo!, el 08. ¿Verdad que es el 08?
[196] P: Sí el 08 representa el espacio en blanco y el 8 es la clave. [Monitorea]
[197] As: [En un equipo] Vamos entonces a poner un 08 aquí [señalan el espacio]
[198] P: [Nota confusión] Sí, recuerden que ya no dejaremos espacios entre palabras. 00 es la posición inicial del "espacio" entonces, ¿cómo queda ya cifrado?
[199] As: 08 …Ya profe, listo, … Ya …
[200] P: [Revisa a los equipos] Completen los números que pasan del 26 y escriban el número cifrado correspondiente … Revisen y recuerden que no dejamos espacios entre palabras.
[201] P: Bueno ya utilizando la tabla cifraron "SOMOS AGENTES DE CAMBIO". Cada equipo me va a dictar una letra del mensaje como queda ya cifrada con el método de Ada. A ver, iniciamos con ustedes.
[202] As: 28, no 27, 23, … [entre los alumnos se corrigen y el profesor les pregunta cuando identifica un error]
[203] P: Seguros que la "T" se cifra con 28
[204] As: No, sólo llega hasta 27, ..., empezamos de nuevo con el 01[al final consiguen en grupo dictar al profesor el mensaje cifrado correctamente: 272321232708091513220113270812130811092110172З]
[205] P: Así debe quedar, sino, revisen su error. Algunos equipos, cuando pasé [al monitorear el trabajo], seguían dejando el "espacio" sin utilizar el 00 y otros más ponían el 00 para el "espacio" ya en el mensaje cifrado. ¿A ver cuál es el error si ponemos 00?
[206] As: Que no estaría cifrado y debemos también cifrar el "espacio" con la clave 8 y queda 00 más 8, queda cifrado como 08.
[207] P: Muy bien, si dejamos ese 00 en el mensaje cifrado, daríamos información de que representa un espacio y entonces el modelo no mejoró [en seguridad]. Entonces, este modelo es el que propone Ada, ¿cuál les parece más fácil, el de los rotores o este [tabular]?
[208] As: Igual, pero este es más seguro …, sólo se agrega el cero para el "espacio" y en lugar de los rotores usamos la tabla.

Podemos observar que este proceso de incluir y cifrar el "espacio" le costó más trabajo al grupo B y el profesor constantemente trata de dirigir la atención y comprensión de los alumnos. Sin embargo, en su registro escrito únicamente sólo 4 equipos reajustan su mensaje cifrado y 2 de estos mantienen el error en la tabla (Figura 2.6). Es decir, la letra S al cifrar con la clave 8 quedaría 00 y ellos ponen 01 y, en el mensaje cifrado en lugar de poner un 08 en el "espacio" ponen un ".[punto]".

Figura 2.6 Modelo tabular, inclusión del 00 como "espacio"



Completa la tabla de Ada.

Letra original		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
Número asociado	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
Número cifrado	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

Letra original	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Número asociado	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Número cifrado	23	24	25	26	01	02	03	04	05	06	07	08

¿Qué llave de cifrado usó Ada para construir la tabla? 08

Con la tabla propuesta cifra o encripta la frase 'somos agentes de cambio'

01 23 13 23 01 · 01 15 13 22 02 13 01 · 12 13 · 08 11 21 10 17 23

Fuente: Producciones de los estudiantes

Modelo gráfico

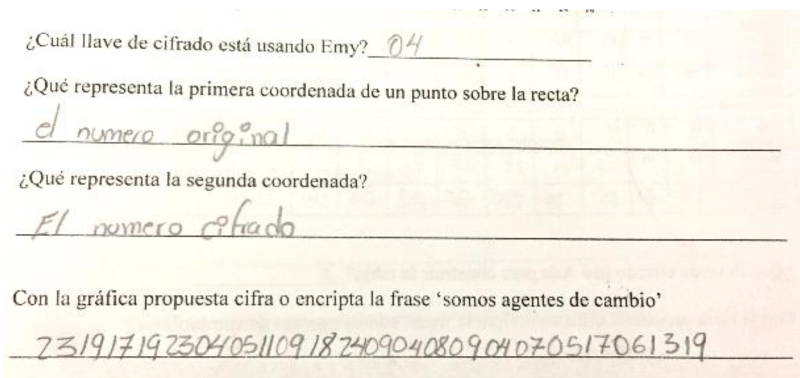
Para la construcción y comprensión de este modelo, primero identifican en las *R-acciones* [210 y 211], ¿qué representa cada eje? Posteriormente, se dan cuenta que la graduación de los ejes va de dos en dos, y exhiben una *B-acción* que muestra que pueden y deben representar también las letras de lugar impar [214]. También, se observa que muestran otras *B-acciones* [218 y 224] que indican cómo relacionar los puntos del eje "*x*" con los del eje "*y*" a través de la clave [218 y 224] y que operan con la información precedente para encontrar la clave como la ordenada al origen. Esto hace que desde las *R* y *B-acciones* anteriores, logren construir el modelo gráfico para cifrar y descifrar al mostrar comprensión e interpretación de los pares ordenados (*C-acción*, [233]).

[209] P: La agente Emy propone otro modelo, pero usando una gráfica. Vamos a analizarlo y me van a decir ¿cómo funciona este modelo para cifrar? Y si hace lo mismo que el del "rotor" y el de la tabla. Si tienen alguna idea me lo hacen saber [monitorea]. Ya dos equipos saben cómo funciona la gráfica
Entonces, en la tabla teníamos una fila para letras, otra para su posición y otra para el mensaje cifrado. ¿Aquí en la gráfica cómo funciona? [reproduce la gráfica que aparece en la hoja de trabajo]... ¿qué podemos decir de la gráfica? … ¿cómo encriptar un mensaje utilizando esto? … Con ella puedo cifrar la frase "CÓMO ANDAS" [210] As: Los números que representan el alfabeto están en la línea horizontal … El cifrado está en la otra [línea/eje].
[211] P: ¿Cómo se llaman los ejes? [espera respuesta] Eje de las abscisas o de las "x" este [señala el horizontal] y éste [señala el] es el eje de las ordenadas o eje "y". ¿Qué representa cada eje? ... Este 2 qué significa [señala las abscisas].
[212] As: ¿La clave?
[213] P: ¿Cómo?, por ejemplo, en este mensaje ["CÓMO ANDAS"] ¿cómo cifro la letra "C"?
[214] As: [Silencio] La "C" la represento en medio del 2 y del 4 … En las abscisas.
[215] P: Muy bien, aquí iría la "C" [la ubica] y ya encriptada ¿cómo iría? ¿dónde?
[216] As: En el otro eje [acá y le señala al profesor sobre el eje de las ordenadas].
[217] P: Depende de cómo cifrar. [218] As: Ah sí, depende de la clave [toman tiempo pensando en cuál es la clave].
[219] P: A ver, ¿qué letra va aquí en el origen?
[220] As: El 00
[221] P: ¿Qué representa?
[222] As: El "espacio" [entre palabras]
[223] P: Muy bien, al cifrarlo ¿a dónde se va?
[224] As: Al 4, …, ¿esa es la clave? [algunos muestran duda y sorpresa]
[225] P: Entonces 00 va al 04. ¿Recuerdan los pares ordenados?
[226] As: Sí, … 00 y 04 [El profesor escribe en el pizarrón (00,04), (01,05)]
[228] P: A ver, la "B" ¿cómo queda representada con el cifrado?

[229] As: (02, 06)
[230] P: Este eje [abscisas] ¿qué representa?
[231] As: El número sin cifrar, …, el mensaje descifrado
[232] P: Muy bien, la posición original o el mensaje "descifrado" como lo dijeron ustedes. ¿Y este [señala el eje de las ordenadas]?
[233] As: Mensaje cifrado, …, posición final
[234] P: ¿Por qué creen que aquí no usan letras [como en el modelo del rotor y el de la tabla]?
[235] As: Para que no sea tan fácil de descubrir … por seguridad … para no poder leer el mensaje.
[236] P: Exactamente, se omiten las letras para que sea más dificil darse cuenta que se usa para cifrar mensajes […] Pero ahora, nosotros sí sabemos que [en las abscisas] el 2 representa la "B" y cifrado en las ordenadas el 6 lo representa. Por lo tanto, ya saben su funcionamiento y pueden contestar las preguntas [de la hoja de trabajo].

En los registros escritos se puede ver que todo el grupo identifica la "clave de cifrado" a partir de la observación de la gráfica y que 2 equipos logran identificar que la primera coordenada de un punto sobre la recta representa "el número original" y que la segunda coordenada representa "el número cifrado". Al cifrar la frase "SOMOS AGENTES DE CAMBIO" con base en la gráfica, 2 equipos lo hicieron correctamente (figuras 2.7, 2.8) y otros 2, pese a que hicieron el procedimiento de cifrado, tomaron como mensaje original el mensaje cifrado con la tabla (clave 8) y no con la clave 4 que correspondía al modelo gráfico (Figura 2.9).

Figura 2.7 Identificación de la representación de las coordenadas dentro del contexto


¿Cuál llave de cifrado está usando Emy? 04

¿Qué representa la primera coordenada de un punto sobre la recta?

el numero original

¿Qué representa la segunda coordenada?

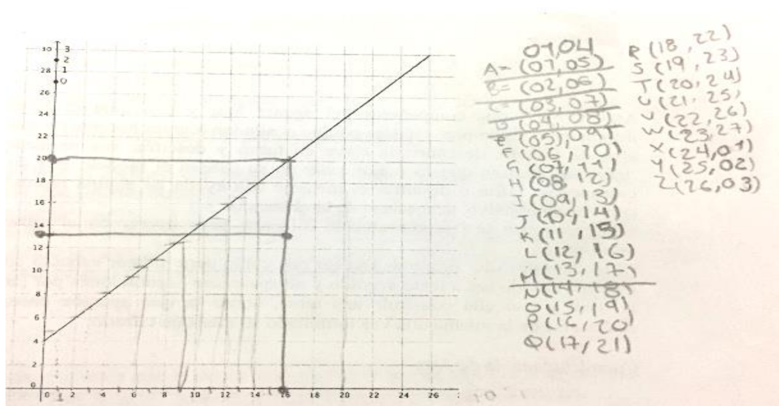
El numero cifrado

Con la gráfica propuesta cifra o encripta la frase 'somos agentes de cambio'

23191719230405110918240904080904070517061319

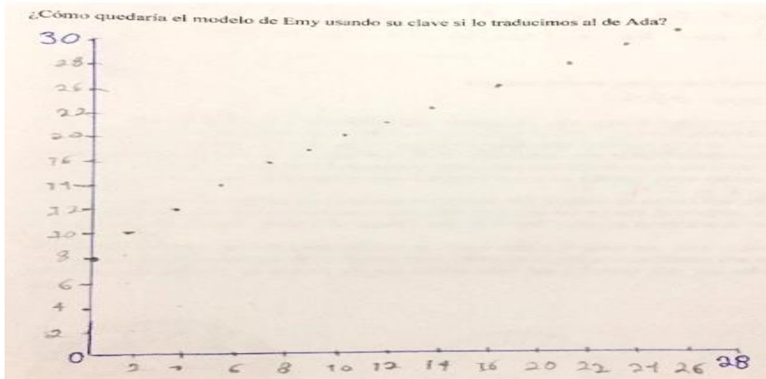
Fuente: Producciones de los estudiantes

Figura 2.8 Representación gráfica y tabular



Fuente: Producciones de los estudiantes

Figura 2.9 Representación gráfica con clave 08



Fuente: Producciones de los estudiantes

Transición entre representaciones o modelos

Del modelo tabular a la gráfica, todos los equipos ubicaron los puntos con escala de 2 en ambos ejes. Sin embargo, 3 equipos graficaron sólo un ciclo y los otros 3 contemplaron valores mayores a “26” en el dominio y el rango, sin que eso signifique que es claro para ello el comienzo de otro ciclo. Aquí se considera que el uso del rotor favorece la comprensión del ciclo y este grupo rápidamente transitó de la tabla al rotor y dejó de lado este modelo al no observar de manera rápida la asociación de letras y números en el rotor pequeño (a diferencia del grupo A).

Finalmente, en los dos grupos se observó que el profesor siempre se mostró inquisitivo y esperando el tiempo suficiente para que los estudiantes contestaran y, de no ser así, reformulaba la pregunta para garantizar la respuesta de los estudiantes. Este comportamiento, en ambos grupos provocaba el surgimiento de las *RBC-**C** acciones* durante las interacciones entre ellos, permitiendo que expresaran su pensamiento. También, como puede observarse en las secciones 4.1 y 4.2, constantemente el profesor propicia la conexión entre las diferentes representaciones para el cifrado y descifrado.

Agradecimiento

Al *Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Durango* por su financiamiento a través del proyecto *Reunión Nacional de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas* 2017. A la *Universidad Juárez del Estado de Durango* y a la *Facultad de Ciencias Exactas* por su apoyo a través del *Programa de Fortalecimiento a la Calidad Educativa* P/PFCE-2016-10MSU0010C-06. A la Secretaría de Educación del Estado de Durango a través del proyecto *Estrategias para la implementación de las habilidades matemáticas en Educación Básica* y del *Programa de Fortalecimiento a la Calidad Educativa* 2017. A campusviviente.org, proyecto *Campus Viviente en Educación en CITeM* y a Karla Campos Martínez como estudiante colaboradora.

Conclusiones

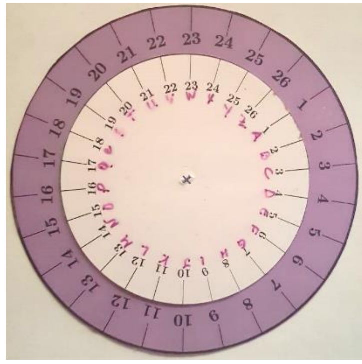
Se diseñaron actividades detonadoras y de exploración de modelos en un contexto de cifrado y descifrado de información para su protección. La interpretación de las situaciones presentadas y el manejo del material concreto permitieron que los estudiantes exploraran y analizaran diferentes representaciones de los modelos propuestos para resolver la situación (gráfica, aritmética, tabular, algebraica y verbal), así como sus relaciones; y más aún, lograran transitar entre dichas representaciones. La socialización fue un espacio que favoreció el análisis, la confrontación y la reflexión de las ideas, incluso aquellas que conducían a un conocimiento erróneo, lo que permitió que los estudiantes refinaran sus modelos.

Los alumnos tuvieron oportunidad de manipular el material y poner en práctica lo sugerido en las actividades y con ello, surgieron formas de pensamiento matemático que conducen a refinar el modelo para hacerlo "más seguro" prescindiendo del material concreto. Como resultado de la implementación de estas actividades detonadoras y de exploración de modelos es posible sugerir que pueden ser una plataforma para extender el conocimiento de los estudiantes y llevarlos a la formalización del sistema conceptual desde un sustento en una estructura matemática que involucra principalmente los conceptos, procesos y representaciones asociadas a las relaciones funcionales.

A diferencia de las prácticas comunes, en las cuales primero se aprende acerca del concepto y, posteriormente, se aplican los aprendizajes en la resolución de problemas. El proponer situaciones que provoquen la construcción de conocimiento desde la necesidad de comprenderlas o resolverlas compromete el pensamiento del estudiante y, con ello, se deriva un aprendizaje a largo plazo. Como lo sugiere Sierpinska (1992), en esta investigación se ha observado que el contexto en el cual la noción de función es utilizada, en analogía con el cifrado y descifrado de información, propicia el surgimiento del lenguaje informal y trae consigo significados que trascienden al mero lenguaje simbólico.

En ambos grupos se obtuvieron resultados diferentes. Al grupo A se le dio mayor tiempo para que a partir de un reto ellos construyeran sus propios modelos (*principio de construcción de modelos*, Lesh et al., 2000) para cifrar (fragmentos [1-16] y [17-34]), posteriormente trataron de vincularlos para comprender los modelos del rotor, gráfico y algebraico. El modelo del rotor fue muy utilizado por los estudiantes, dado que el profesor, para facilitar su comprensión, incluyó en el rotor de números su letra asociada, esto dificultó que se desprendieran del rotor y, en consecuencia, que les llevara dos horas más de tiempo la secuencia que al grupo B (Figura 2.10). Mientras que en el grupo B (fragmento [121-135]), se puso mayor énfasis en hacer que la situación presentada fuera relevante para los estudiantes, siguiendo el *principio del significado personal de la realidad* que plantean las actividades reveladoras del pensamiento (Lesh et al., 2000) y esto propició que tuvieran claridad en la importancia de lograr incrementar la seguridad en el modelo de cifrado (*principio de generación de nuevos modelos*), pusieran a prueba sus modelos (*principio de autoevaluación*) con ello se observó que en este grupo tomaron tiempo para manipular, comprender y conectar todos los modelos (rotor, tabular, gráfico, algebraico), pero desprendiéndose rápidamente del uso del rotor y considerando central el uso de la tabla de asociación. También, con la relevancia de la situación se logró que sus explicaciones verbales de una representación algebraica o fórmula estuvieran conectadas con el contexto de la situación (ver fragmento [178-182] y Figura 2.5), atendiendo el *principio de comunicación o documentación de modelos* (Lesh et al., 2000).

Figura 2.10 Rotor modificado por el profesor



Fuente: Producciones del profesor

Derivado de los resultados obtenidos en la implementación se sugieren algunas mejoras. En cuanto a las hojas de trabajo, se sugiere una actividad previa en la que se presente a los estudiantes una situación en la que ellos tengan un mensaje que requiera protegerse, para explorar en sus formas de pensamiento. Para el uso del material concreto, se recomienda no modificar los rotores agregando elementos para facilitar su comprensión y manejo, dejarlos entender su funcionamiento les permite identificar sus debilidades y buscar mejores modelos.

Mientras que, si se les facilita su uso, tardarán en desprenderse de este modelo concreto al no tener necesidad de encontrar mejores formas de cifrado y descifrado. Otra recomendación es incluir las dos formas de introducir la situación que utilizó en los dos grupos. El presentar retos para cifrar y descifrar provoca el surgimiento de sus propios modelos y el explorar el contexto de la situación y la importancia de proteger su información propicia que ésta sea relevante para ellos y los motive a involucrarse con las otras actividades propuestas para mejorar, explorar y extender sus modelos, logrando que sean más seguros como lo demanda el contexto. Con lo anterior, se puede afirmar que se cubrirían parte de las actividades recomendadas para una Secuencia de Desarrollo de Modelos (Doerr, 2016), es decir, las que detonan modelos y aquellas en las cuales se exploran los mismos.

En la investigación realizada, el modelo RBC-**C** se considera apropiado para analizar la complejidad de las interacciones que conducen a los estudiantes a construir conocimiento compartido derivado de la necesidad de resolver la situación. Por ejemplo, en los grupos A y B respectivamente, fue posible identificar las acciones de construcción de los alumnos: un mecanismo de cifrado simple por asociación [12; 130 y 145]; el cifrado de sustitución con desplazamiento en un número que funciona como clave [22; 159, 165 y 177]; sus propios ejemplos de cifrado y de su proceso inverso asociado para descifrar [56 y 57]; la representación verbal del proceso de cifrado (Figura 2.2); la representación algebraica del cifrado [63 y 181], (Figura 2.5) y descifrado [65]; la representación tabular [83 y 208] que refina el modelo representado en [12]; la representación gráfica a través de las coordenadas (Mensaje original, Mensaje cifrado) en [100 y 233]; la articulación de la representación gráfica y la algebraica [118], (Figura 2.8) y la de éstas con la verbal [120].

Aunque, las acciones de construcción reportadas corresponden a los estudiantes, el profesor juega un papel importante como mediador. En este sentido, para Voigt (1995) a través de las discusiones, los estudiantes y el profesor constituyen una explicación que quizás no es posible que sea construida de manera individual. Se llega al conocimiento intercambiando ideas. Por ejemplo, en [13] se puede observar que el profesor utiliza lo aportado por los estudiantes para darle forma e introducir la noción de función como una entidad que acepta una entrada y produce una salida, misma que puede ser valiosa al formalizar dicho concepto. Por lo anterior, se considera importante reportar las interacciones completas de estudiantes y profesor, dado que, contribuyen a que este estudio sea replicable al aportar información detallada acerca de lo valioso de la práctica inquisitiva del profesor para el logro de los estudiantes.

Para dar continuidad a este trabajo, se sugieren investigaciones que vinculen las ideas generadas en este estudio con la finalidad de formalizar el concepto de función; posteriormente, actividades en las que se adapten y extiendan estos modelos de cifrado y descifrado al uso de funciones del tipo "$y=mx + b$" y otras polinomiales.

Anexo A

Privacidad en los datos II

¿Cómo mejorar el "modelo de los rotores" para cifrado de información?

ADA Y EMY, dos compañeras del agente Mat y con quienes intercambia a menudo información, están preocupadas porque si alguien lograra hacerse de sus rotores podría, con algo de trabajo, descubrir la clave en turno y descifrar sus mensajes. Para evitar esta 'tragedia' piensan que es mejor tener en su cabeza el modelo con su respectiva clave y usarlos para cifrar o descifrar el mensaje con ayuda de alguna representación y, una vez cubierto su objetivo, deshacerse de la evidencia.
Ellas proponen una representación diferente para operar en el cifrado y descifrado de información.
El modelo de Ada propone agregar dos ceros para indicar espacio en blanco para que el mensaje cifrado sea a texto seguido y no aparezcan separaciones por palabras. Propone usar la clave y con ella construir una tabla, como la que aparece enseguida, para cifrar y deshacerse de la misma una vez terminado su mensaje cifrado.

8.- Completa la tabla de Ada.

Letra original		A	B												
Número asociado	00	01	02	03	04	05									
Número cifrado	08	09	10	11											

Letra Original	O	P	Q									
Número asociado	15	16									25	26
Número cifrado												

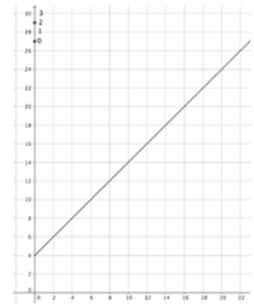
¿Qué clave de cifrado usó Ada para construir la tabla? _______________

Con la tabla propuesta cifra o encripta la frase 'somos agentes de cambio'

____

Por su parte Emy ha decidido proponer al agente Mat el modelo con una representación gráfica y una vez utilizado para cifrar deshacerse de él.

9.- Marca sobre la recta propuesta por Emy **TODOS** los puntos que corresponden con el modelo de cifrado



¿Cuál clave de cifrado está usando Emy?_______________

¿Qué representa la primera coordenada de un punto sob

____

¿Qué representa la segunda coordenada?

____

Con la gráfica propuesta cifra o encripta la frase 'somos a

____

Un alto para la discusión, revisión y ext
ideas en grupo.

Tarea

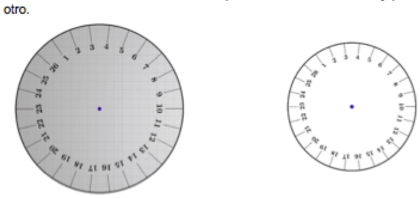
¿Cómo quedaría el modelo de Ada con su lave si lo pasa
el modelo de Emy?
¿Cómo quedaría el modelo de Emy usando su clave si lo

Privacidad en los datos

¿Cómo "disfrazar" información para asegurar su privacidad?

Necesitas: Rotores como los de la Figura

CON EL AVANCE de la ciencia y de la tecnología, se ha vuelto cada vez más indispensable proteger archivos e información para evitar la violación de privacidad. Para dar respuesta a esa necesidad, se buscan métodos seguros para cifrar o esconder mensajes secretos. Los expertos que se ocupan de la seguridad de la información son matemáticos, ellos desarrollan formas para esconder información y formas para descifrarla, según sea el caso. Al estudio de tales formas se le conoce como Criptografía y a los métodos como sistemas criptográficos.
La criptografía estudia métodos, que pudieran ser información sensible, de manera que sólo puedan ser descifrados por el receptor y por nadie más que los pudiera interceptar. El emisor y el receptor han de ponerse de acuerdo sobre la "clave" y ésta ha de cambiarse con cierta frecuencia.
Un ejemplo de tales sistemas criptográficos es el que utiliza el agente Mat, para el cual necesita dos rotores como los de la figura, éstos deben recortarse y ensamblarse con un botón encuadernador de tal manera que sus centros coincidan y puedan girar uno sobre otro.



¿Cómo funciona el método del agente Mat?
Mat primero hace una correspondencia entre el abecedario y los números, para minimizar el número de letras sin que se afecte la lectura de los mensajes ha quitado algunas letras: las compuestas (*ll*, *rr*) y la *ñ*.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	...	S	T	U	V	W	X	Y	Z
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	...	19	20	21	22	23	24	25	26

1.- Con esta asociación, encripta el mensaje: 'objetivo superado':

____

Enseguida el agente Mat prepara sus rotores ensamblados y s
el 1 con el 1, el 2 con el 2, etc. Luego elige una clave, por ejem
en 3 lugares.

2.- Transforma el mensaje 'Objetivo superado 'con la clave que

____

3.- Ensayen en equipo a cifrar el mensaje que prefieran utiliz
Mat.
Pueden utilizar la clave que ustedes decidan.
Mensaje a cifrar: _______________________
Mensaje correspondiente en números: _______________________
Mensaje cifrado utilizando la clave_____: _______________________

4.- ¿Qué hará el agente Mat cuando necesite cifrar la letra X
clave 3? Expliquen:

5.- Cuando el receptor del mensaje que le envío el agente Mat
para descifrarlo y tener el mensaje original? Explica el método

6.- ¿Qué debe hacer el receptor del mensaje que ustedes cifrar

7.- Expliquen de una manera "breve" y sin usar los rotores el m
agente Mat.

Actividad individual de autorregulación

Un alto para la discusión, revisión y
las ideas en grupo.

Piensen en una palabra que para ustedes describa la clase de hoy
mensaje. Al día siguiente, intercambien en un papel el mensaje ci
mencionar la clave utilizada. El mensaje que recibieron inte
recuperada la palabra original, entreguen a su maestro.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Duoady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática.* pp. 97-140. México: "Una empresa docente" & Grupo Editorial Iberoamericano.

Carmona, G., Reyes, J., Vargas, V., Cristóbal, C., Alvarado, A., López, A., & Mata, A. (2014) Comunidad de Comunidades Campus Viviente en Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (CITeM): Una Experiencia de Colaboración Internacional hacia la Formación de una Red Temática. En M. Ramos & V. Aguilera (Eds). *Ciencias Multidisciplinarias*, 1(1), (pp. 109-125). Valle de Santiago, Guanajuato: ECORFAN.

Cortés, A., Díaz, S., Torres, J., Tapia, H., & Basurto, R. (2005). *Elementos de Criptografía Clásica. Serie Matemática Aplicada y su Enseñanza*. Sociedad Matemática Mexicana-CIMAT. México DF.

Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I., & Gagatsis, A. (2004). University students' conceptions of function. En M. Johnsen & A. Berit (Eds). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME28), 2 (pp. 351-358). Bergen, Noruega: PME.

Doerr, H. (2016). Designing Sequences of Model Development Tasks. En C. Hirsch & A. Roth, (Eds.), *Annual perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* (pp. 197-206). Reston, VA: NCTM.

English, L. D., Lesh, R., & Fenewald, T. (2008) Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. En Santos-Trigo, Manuel & Shimizu, Yoshi (Eds.) *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*, Monterrey, Mexico.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context: theory as methodological tool and methodological tool as theory. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 185-217). NY:Springer.

Lannin, J. K., Townsend, B. N., Armer, N., Green, S., & Schneider, J. (2008). Developing meaning for algebraic symbols: Possibilities and pitfalls. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 478-483.

Lesh, R. A. & Doerr, H. (2003). *Beyond constructivism: A models and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591–646). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sierpinska, A. (1992). Theoretical perspectives for development of the function concept. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.) *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* MAA, 25 (pp. 23-58). Washington: The Mathematical Association of America.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *Studies in mathematical thinking and learning series. The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163-201). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

White, T. (2009). Encrypted objects and decryption processes: Problem-solving with functions in a learning environment based on cryptography. *Educational Studies in Mathematics.* 72, 17-37.

Objeto Virtual de Aprendizaje para la interpretación geométrica del método numérico de Newton-Raphson

RODRÍGUEZ-MENDÍAS, María Cristina, VALDEZ-CHÁVEZ, Juan Manuel y ALVARADO-MONROY, Angelina

[1]M. Rodríguez, [1]J.Valdez, [2]A. Alvarado
[1]Tecnológico de Estudios superiores del Oriente del Estado de México
[2]Universidad Juárez del Estado de Durango

cristina.rodriguez@tesoem.edu.mx

C. Cristóbal, M. Olvera, V. Vargas (Dirs.) Educación para la interdisciplinariedad. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

The Newton-Raphson method is a powerful technique for solving equations numerically, it is based on the simple idea of linear approximation. This paper shows the design and operation of a Virtual Learning Object (VLO) with the purpose of promoting significant learning in the understanding of this numerical method and its geometrical interpretation. This object was designed from the conceptualization of an VLO and with the support of digital tools like GeoGebra and HotPotatoes. It was implemented through a Learning Platform known as Modular Object Oriented Dynamic Learning Environment (MOODLE), with the purpose of being used as a complement to theoretical and practical resources of the subject Numerical Methods of a bachelor's degree in computer systems engineering. The results of its implementation were documented.

Virtual Learning Object, Newton-Raphson Method, GeoGebra, HotPotatoes, MOODLE

1. Introducción

Desde una visión integradora de la educación es pertinente que las disciplinas no sean estudiadas de manera separada. En este trabajo la matemática y la tecnología se integran para dotar de significado al método de Newton-Raphson por estudiantes de ingeniería, buscando que, además de familiarizarse con la notación, tengan dominio en la parte algorítmica, identifiquen dónde aplicarlo y puedan extender su comprensión a través de conectarlo con su interpretación geométrica. El Método Iterativo de Newton-Raphson es de las técnicas más utilizadas y efectivas para resolver ecuaciones no lineales. Este método está basado en la idea de aproximación lineal.

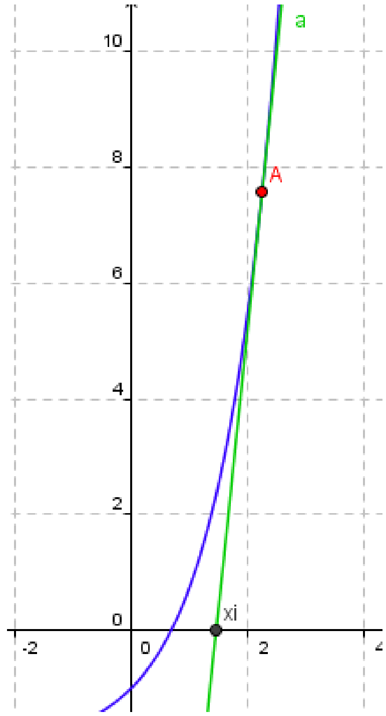
Tradicionalmente el profesor lo aborda al menos de tres maneras: la más común es considerar la técnica gráficamente; otra posibilidad es derivar el método como una técnica simple para obtener una convergencia más rápida de la que ofrecen muchos otros procedimientos, mediante los cuales se calcula una sucesión de puntos empleando una función de recurrencia, denominados iteración funcional; la tercera manera de introducir el método es un enfoque intuitivo basado en el polinomio de Taylor. En este trabajo, se muestra el uso de la técnica desde una interpretación gráfica. La forma más utilizada por los profesores es la expositiva, con el pizarrón como principal recurso, proponiendo una serie de pasos a seguir que son ilustrados a través de una gráfica (Gráfico 3.1). Desde el punto de vista de Chapra y Canale (2005), los pasos que se siguen en el Método de Newton-Raphson son:

1. Definir $f(x)$ teniendo en cuenta que la función a la cual se le determinarán las raíces debe ser continua.

2. Determinar $f'(x)$, la derivada de la función.

3. La fórmula iterativa del método es: $x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$. Esta fórmula se aplica mediante la determinación de la función $f(x)$ y la derivada $f'(x)$ en x_{i-1}. Esto es, $f(x_{i-1})$ y $f'(x)$, luego, se sustituyen estas expresiones directamente en la fórmula iterativa.

Gráfico 3.1 Aplicación del Método de Newton-Raphson



Fuente: Elaboración propia

Suponga que se tiene la aproximación x_0 a la raíz de $f(x)$. Se traza la recta tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$; ésta cruza al eje "x" en un punto x_1 que será la siguiente aproximación a la raíz. Para calcular el punto x_1, se calcula primero la ecuación de la recta tangente. Se sabe que tiene pendiente y, por lo tanto, la ecuación de la recta tangente está dada por la ecuación (1).

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{1}$$

Se hace $y = 0$, $x = x_1$ en la ecuación (1) y se obtiene (2).

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \tag{2}$$

Y en (2) se despeja x_1 para llegar a (3).

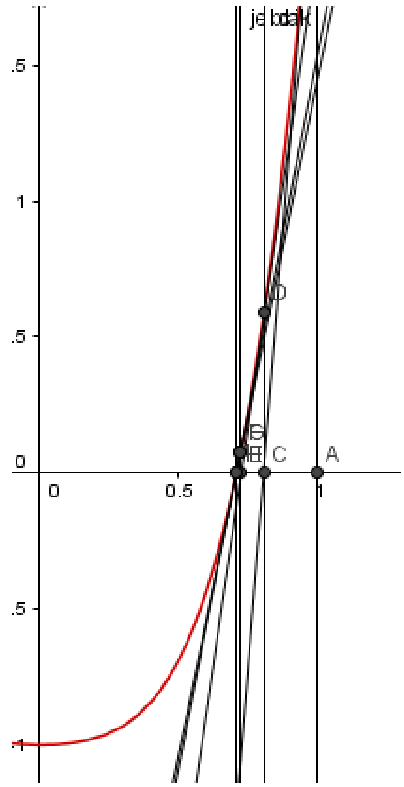
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f\prime(x_0)} \tag{3}$$

Que es la fórmula iterativa de Newton-Raphson para calcular la aproximación (4):

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, i = 1,2,3, \dots, n \tag{4}$$

En el Gráfico 3.2 se ilustra la aplicación sucesiva del Método de Newton-Raphson.

Gráfico 3.2 Aplicación sucesiva del Método de Newton-Raphson



Fuente: Elaboración propia

Tomando como base el polinomio de Taylor, es posible deducir la fórmula iterativa (5) del Método de Newton-Raphson (Burden & Faires, 2011) que involucra en general la sucesión $\{x_i\}$.

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, i \geq 1 \tag{5}$$

Se debe tener presente que el Método de Newton-Raphson no trabaja con intervalos donde se asegure encontrar una raíz, y de hecho no se tiene ninguna garantía de aproximarse a dicha raíz, en cuyo caso se dice que el método diverge. Sin embargo, en los casos donde sí converge a la raíz lo hace con rapidez, razón por la cual, es uno de los métodos preferidos por las personas que trabajan métodos numéricos. También es fácil apreciar que cuando $f'(x_{i-1}) = 0$ el método no se puede aplicar. Lo cual geométricamente significa que: la recta tangente es horizontal y por lo tanto no interseca al eje *"x"* en ningún punto, a menos que coincida con éste, en cuyo caso es una raíz de $f(x)$.

Desde una exploración con estudiantes de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales del Tecnológico de Estudios superiores del Oriente del Estado de México (TESOEM), se detectó que la enseñanza de los métodos numéricos para resolver ecuaciones no lineales, en la práctica, presenta algunas dificultades, ya que los cálculos manuales son numerosos. Además, no existen resultados consistentes debido a que surgen equivocaciones cuando se efectúan las tareas manualmente. Esto representa un problema, limitando el aprendizaje a la simple obtención de resultados de forma algorítmica asociada a un número de operaciones y técnicas elementales de cálculo.

Hoy en día, la tecnología proporciona una alternativa para cálculos complicados en los métodos numéricos, evitando suposiciones de conceptos de forma deficiente. En el campo profesional de la ingeniería se requiere utilizar modelos matemáticos para la predicción y explicación de ciertos fenómenos. Para el ingeniero son imprescindibles los métodos numéricos, ya que son técnicas mediante las cuales es posible plantear soluciones a los problemas. Al momento de trabajar la solución a problemas propuestos se espera que los estudiantes seleccionen y apliquen el método numérico adecuado y desarrollen la secuencia de operaciones algebraicas y lógicas para resolver el problema.

En este trabajo se presenta el diseño e implementación de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) con la intención de favorecer la comprensión del método de Newton-Raphson, a través de su interpretación geométrica, en estudiantes de la ingeniería en sistemas computacionales del TESOEM. Para su diseño, fueron utilizadas herramientas digitales tales como GeoGebra y HotPotatoes. Con esto, se pretende apoyar el proceso de aprendizaje autónomo y retroalimentar los conocimientos adquiridos en clase. Por esta razón, el OVA fue implementado a través de la plataforma de aprendizaje MOODLE para que fuera utilizado como un complemento de los recursos teóricos y prácticos de la materia de Métodos Numéricos y, además, para garantizar que su durabilidad y actualización permitiendo incorporar nuevos contenidos y/o modificaciones según las condiciones y los objetivos de aprendizaje.

2. Marco Conceptual

El tópico de Objetos Virtuales de Aprendizaje aparece en publicaciones de la década de 1990 (Wiley, 2000). Las definiciones iniciales fueron tan amplias que resultaban vagas y ambigüas. Este concepto poco a poco se ha refinado, por ejemplo, para Wiley (2000) "son pequeños (en relación con el tamaño de un curso completo) fragmentos de aprendizaje que se pueden reutilizar en diversos entornos de aprendizaje" y es “un recurso digital que puede reutilizarse para apoyar el aprendizaje” (Wiley, 2000, p. 7). Por otra parte, en Learning Technology Standards Committee of the Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE - LTSC) definen un objeto de aprendizaje como "una entidad, digital o no-digital, que puede utilizarse para el aprendizaje, la educación o entrenamiento " (Todorova & Petrova, 2003). Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2005: citado por Morales et, al., 2015), un OVA es un “material estructurado de una forma significativa, asociado a un propósito educativo (en este caso, para la educación superior) y que corresponda a un recurso de carácter digital que pueda ser distribuido y consultado a través de Internet”.

Mientras que para Chiappe et, al. (2007) “es una entidad digital, autocontenida, reusable, con un claro objetivo de aprendizaje que contiene al menos tres componentes internas cambiantes: contenido, actividades instruccionales y elementos contextuales. Como un complemento, el OVA debe tener un componente externo de información el cual ayuda a su identificación, almacenamiento y recuperación: los metadatos. La definición de OVA como una entidad compuesta no sólo por el contenido, sino también por las actividades de aprendizaje, marca una diferencia notable con lo que consideramos simplemente objetos informativos.

Para Chiappe et, al. (2007) la producción de OVAs se considera como un refuerzo de los contenidos académicos de calidad, por las siguientes razones: a) la experiencia adquirida en las universidades en Colombia ha demostrado que la generación de OVAs se ha convertido en un proceso institucional complejo que va más allá de la producción individual, dirigido más por algunos maestros entusiastas; b) éstos pueden almacenarse en repositorios publicamente disponibles; c) incorporan las TIC en diferentes procesos formativos; d) son aplicables no solamente como un material de estudio, sino también como una estrategia de aprendizaje; y finalmente, e) los OVA pueden integrarse en entidades más complejas como los Ambientes Virtuales de Aprendizaje.

Wiley (2000) postuló y presentó tres componentes de una implementación exitosa de objetos de aprendizaje: una teoría de diseño instruccional, una taxonomía de objetos de aprendizaje y un "material de vinculación prescriptivo" que conecta la teoría del diseño instruccional con la taxonomía, brindando orientación relacionada con el tipo de objetivo de aprendizaje enlazado al tipo de OVA. Para Duval et, al. (2004) el uso de objetos de aprendizaje promete incrementar la efectividad de la enseñanza. Sin embargo, Wiley (2000, p. 29) considera que “el potencial de los OVAs como una tecnología instruccional es enorme, pero podría no ser realizable sin un esfuerzo equilibrado en tecnología y diseño instruccional. Necesitamos de más teóricos.” Se ha comprometido mucho trabajo y energía para definir formas de empaquetar, transportar e implementar objetos de aprendizaje en diferentes plataformas (que son esfuerzos eminentemente técnicos) y se ha producido muy poca reflexión en relación con su uso en ejercicios prácticos académicos cuando se genera un ambiente de aprendizaje virtual. Por fortuna, cada vez existen más trabajos que aportan al desarrollo conceptual, al diseño pedagógico, a la implementación y a la evaluación de los OVA (Lockyer et, al., 2009; Rodríguez, 2010).

En ese sentido, Chiappe et, al. (2007) proponen un Modelo de Diseño Instruccional como un conjunto de actividades de aprendizaje con algún problema característico, objetos informativos (contenidos), y algunos elementos contextualizadores. El modelo formulado trae consigo desafíos para el diseñador instruccional: a) el diseño de las situaciones problemas que sean utilizadas de manera coherente en las actividades de aprendizaje conformando los OVAs. Además, se debe cuidar el principio de modularidad, es decir, que puedan utilizarse parcialmente las actividades; b) generar OVAs que tengan como referencia algunos objetos de aprendizaje existentes.

El modelo de diseño instruccional basado en OVAs propuesto por Chiappe et, al. (2007) puede ser una oportunidad para que los diseñadores instruccionales proporcionen objetos de aprendizaje con la vitalidad y la importancia que merecen dentro de escenarios educativos contemporáneos. Lograr este objetivo, sería posible, si se indican pautas claras y se establecen los referentes conceptuales necesarios (como este modelo intenta hacer) para el buen desarrollo de los equipos a cargo de generar Ambientes Virtuales de Aprendizaje, considerando siempre los OVAs como componentes importantes dentro de este proceso.

De acuerdo con lo anterior, en la actualidad los OVAs, además de ser un recurso didáctico, pueden ser una estrategia de enseñanza y de aprendizaje para utilizarse en las asignaturas de ciencias básicas e ingeniería que se imparten en el TESOEM con el apoyo de las tecnologías de la información y la comunicación. Un aspecto importante para tener en cuenta en el diseño e implementación de un OVA, es que debe tener en sí mismo un valor añadido. Debe aportar valor en algún aspecto del aprendizaje, como la aclaración de un concepto o de un término, o debe proporcionar una interacción efectiva y útil al estudiante. Para el diseño de recursos didácticos que realmente sean útiles y efectivos para el aprendizaje, es importante que cumplan con el objetivo para el que fueron concebidos, que permitan al estudiante apoyar su proceso de aprendizaje y retroalimenten los conocimientos adquiridos en clase o mediante materiales planos usados tradicionalmente.

Hoy en día, existen diversas herramientas de tecnología digital y de diseño de autor (eXe Learning, HotPotatoes, GeoGebra, etc.) que facilitan el proceso de construcción de un OVA, éstas permiten la exportación en diversos formatos de los recursos generados que facilitan la incorporación de los mismo a diversas plataformas de aprendizaje y promueven la reusabilidad.

Para Gavilán y Barroso (2011), en el manejo de los conceptos matemáticos como objetos de enseñanza y aprendizaje se pueden apreciar tres dimensiones: la dimensión semántica (significativa), que hace referencia a los significados que se vinculan al concepto; la dimensión sintáctica (representativa), la cual hace referencia a las representaciones del concepto, que incluye los distintos modos de representar el objeto y las posibles traducciones entre ellas; y, para finalizar, la dimensión procedimental (algorítmica), donde se incluyen los algoritmos que se vinculan al concepto. Estas tres dimensiones están interrelacionadas, por ejemplo, el profesor utiliza la gráfica de una función y pide a los estudiantes que identifiquen en la gráfica la raíz, posteriormente proporciona un punto cualesquiera x_0 y traza la recta tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$; ésta cruza al eje "*x*" en un punto y, da inicio a un dialogo con los estudiantes mediante preguntas de partida como: ¿qué ocurre con el punto de intersección de la tangente con el eje "*x*"?, ¿cómo se obtiene ese punto de intersección?, ¿qué relación tiene el punto de intersección de la tangente con la raíz?, por mencionar algunos cuestionamientos.

De esta manera, se logra que las relaciones sean mostradas mediante el OVA, permitiendo a los estudiantes descubrir las relaciones pertinentes que le ayuden a construir los conceptos básicos, vinculando los significados y las representaciones gráficas para poder, posteriormente, guiarlos al desarrollo procedimental. En los procesos de traducción entre los modos de representación, mismos en los que hay una traducción formal y una traducción de los significados entre las representaciones; o bien, en el aprendizaje de los algoritmos, éstos deben estar vinculados a los significados. A partir de esta forma de ver los conceptos matemáticos como objetos de enseñanza y de aprendizaje, se puede dar sentido a los propósitos de este OVA. La elección de las actividades para diseñar el OVA tiene presente la formación de estudiantes autónomos en la construcción del conocimiento, debiéndose priorizar la elección de aquellas actividades que lleven al aprender haciendo y que favorezcan al aprendizaje en forma colaborativa.

En este trabajo se han utilizado herramientas de tecnología digital para el diseño de algunas de las actividades del OVA. Tal es el caso de GeoGebra, un software libre de matemática dinámica para la educación en todos los niveles, está disponible en múltiples plataformas. GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas, así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc. Todas las herramientas creadas en GeoGebra permiten manipular parámetros de forma libre y dinámica, lo que ayuda a visualizar los diferentes comportamientos dados en las gráficas que se forman. A través de la manipulación, exploración y experimentación, el estudiante puede extraer sus propias conjeturas, ideas y conclusiones, contribuyendo a la construcción de un aprendizaje significativo y duradero. Los proyectos creados con GeoGebra pueden ser exportados en diversos formatos como páginas WEB, hojas dinámicas e imágenes.

Los objetos exportados se pueden publicar directamente en GeoGebraTube o en una página WEB y esto facilita que puedan incluirse en ambientes educativos virtuales como MOODLE. Para la construcción del material en GeoGebra, se debe determinar qué objetos serán utilizados en el mismo, distinguir los objetos libres que el usuario puede manipular, de los objetos dependientes que se irán creando a partir de su vinculación con los parámetros y se trabajarán con los Scripts que permiten crear guiones que consisten en una secuencia de comandos de GeoGebra que se desencadenan al clic en un botón y son empleados para crear una interfaz gráfica de fácil uso para los estudiantes.

Otra herramienta de autor es HotPotatoes que sirve para la elaboración de diversos tipos de ejercicios de refuerzo o de repaso en interactivos multimedia que permite que los estudiantes se apropien de los conceptos de manera práctica y significativa. Estos ejercicios se podrán publicar en un servidor WEB y difundir a través de Internet, cuentan con la gran ventaja de ser soportados por todos los navegadores y son fáciles de incluir en ambientes educativos virtuales como MOODLE. Para el material en HotPotatoes se usa JCross (crucigrama) considerando como una herramienta idónea para amenizar la enseñanza y así facilitar a los estudiantes el aprendizaje de los conceptos teóricos de los Métodos Numéricos. Lo que se propone es una herramienta educativa que puede facilitar la enseñanza los conceptos básicos de Métodos Numéricos y que puede ser de gran ayuda como complemento de la fase de resolución de problemas que involucren el cálculo de raíces de ecuaciones no lineales.

Las actividades en HotPotatoes, juegan un papel importante en el dominio de los conceptos matemáticos y constituyen una herramienta para trabajar la dimensión semántica que acerca al estudiante al aprendizaje, con la intención de transformar positivamente la apropiación de contenidos y el mejor dominio de los conceptos. El diseño de estas actividades permite que el estudiante se aproxime al conocimiento de diversas maneras, alcanzando con ello el desarrollo de aprendizajes significativos. La elección de estas herramientas se debe a sus facilidades para la construcción de objetos independientes, con interface gráfica que permiten al estudiante interactuar con los mismos, sumando la ventaja de que los utilizados para este trabajo son de uso libre.

3. Metodología

Se partió de la necesidad de promover el aprendizaje autónomo de los estudiantes a través de proponer complementos de los recursos teóricos y prácticos de la asignatura de Métodos Numéricos de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales del TESOEM. Para ello, se consideró el diseño de un OVA, su experimentación en el aula y el análisis de las producciones de los estudiantes. Este OVA se organizó en tres bloques: En el primer bloque se revisó la unidad que hace referencia al Método de Newton-Raphson, a partir de ahí, se diseñó un diagnóstico para indagar los conocimientos previos de los estudiantes. Posteriormente, se diseñó el segundo bloque que contiene las actividades de aprendizaje que se desarrollaron en el salón de clase. Para concluir, en el tercer bloque se diseñaron escenarios de aprendizaje individual, colaborativo, y guiado por el docente mediante una lluvia de ideas. En estos bloques, se presentaba un problema, se exploraba las construcciones y los estudiantes conjeturaban, organizaban y comunicaban sus ideas. Para fines de este artículo, se centrará la atención en la interpretación geométrica del Método de Newton-Raphson.

En la implementación del OVA, el objetivo era que los estudiantes a partir de la interacción con una lista de problemas propuestos lograran extraer información que les permitiera identificar la representación gráfica de las funciones a resolver y que lograran asociar las representaciones algebraicas con conceptos tales como: raíz, tangente, derivada, función, convergencia y aproximación, para que, posteriormente, pudieran utilizarlas en la resolución de problemas.

La organización del grupo fue diversa, primero los estudiantes trabajaban de manera individual para conformar sus ideas y compartirlas en una discusión guiada por el docente. Posteriormente, se propuso trabajar en equipo logrando una discusión que permitió a los estudiantes trabajar de forma colaborativa con el OVA para recabar información, observar los resultados obtenidos parta identificar la mejor aproximación a la raíz, establecer conjeturas sobre el comportamiento de la recta tangente, sobre los cambios de las diferentes ecuaciones y sus representaciones gráficas.

Se pudo observar que, posteriormente, los estudiantes realizaron una discusión en equipo resaltando los resultados, cada estudiante comentó y explicó sus hallazgos y escuchó a sus compañeros de equipo de tal manera que quedaran expuestas diferentes aproximaciones al tema a tratar en la clase. El docente procedió a realizar una discusión grupal en la que participaron los alumnos para apoyar lo aprendido del Método de Newton-Raphson.

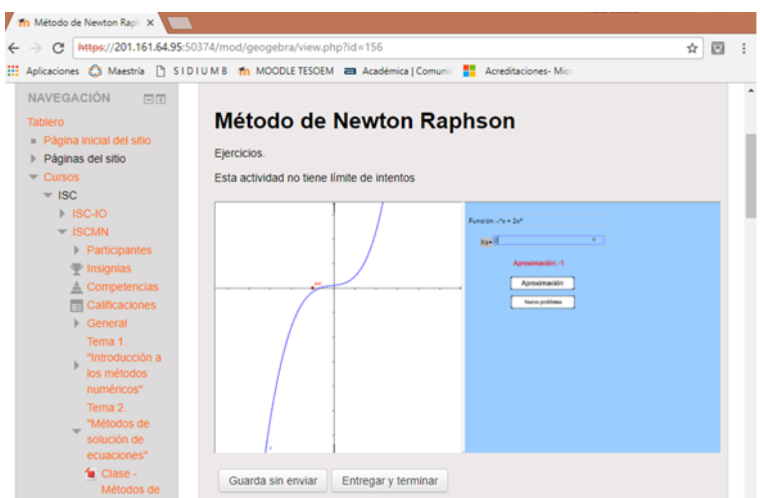
3.1 Muestra

Participaron estudiantes de cuarto semestre de la Ingeniería en Sistemas Computacionales del TESOEM de ambos turnos: matutino y vespertino. Primero, trabajaron de forma individual, posteriormente, en equipo y, después, se produjo una interacción con el docente. Los estudiantes estaban recién familiarizados con el Método de Newton-Raphson. Durante la clase, se propició el trabajo en equipo, la comunicación tanto verbal como escrita, el uso de múltiples representaciones, el uso del OVA como herramienta fundamental para la interpretación geométrica del Método de Newton- Raphson.

3.2 Diseño del OVA para el Método de Newton-Raphson

Se describe, a continuación, el OVA que se ha diseñado con el propósito de apoyar la comprensión de los conceptos relacionados con el Método de Newton-Raphson para el cálculo de raíces de ecuaciones no lineales. Se diseñó el OVA con el objetivo de permitir la visualización, por parte de los estudiantes, del comportamiento del Método Gráfico, y así, lograr una correcta interpretación geométrica del Método de Newton-Raphson como se puede observar en la Figura 3.1.

Figura 3.1 OVA para la interpretación geométrica del Método de Newton Raphson

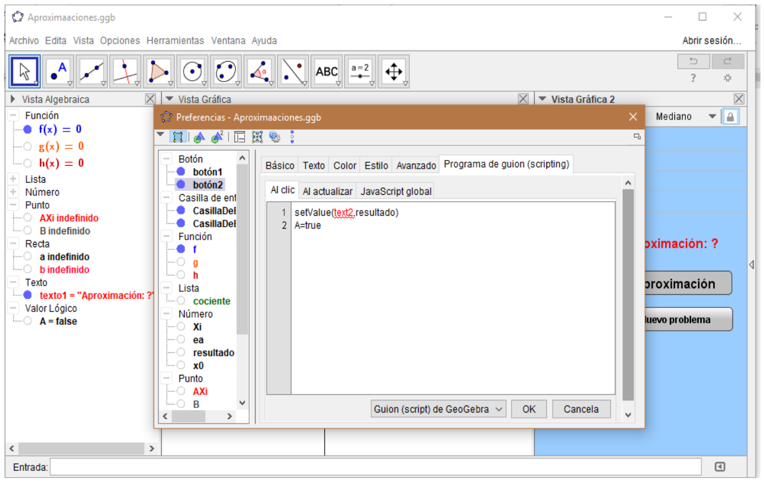


Fuente: Elaboración propia de actividad para OVA

Los objetos libres de GeoGebra que se utilizaron para la implementación del OVA fueron: la función analizada, la aproximación inicial y el error permitido. Estas variables se presentaron utilizando casillas de entrada, mediante las cuales, los estudiantes podían interactuar favoreciendo la comprensión de la interrelación que existe entre los mismos y el significado de cada variable involucrada en la ecuación general del método.

Para permitir al estudiante interactuar con el OVA, se utilizó el objeto de GeoGebra "botón" trabajando a partir de un script, que al ser seleccionado calculaba y mostraba una nueva aproximación recalculando la recta tangente y el punto de intersección (Figura 3.2).

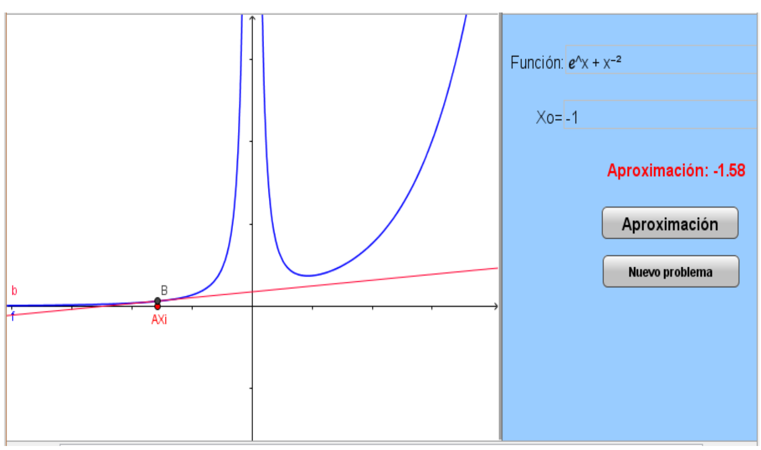
Figura 3.2 Proceso de construcción del OVA



Fuente: Elaboración propia para OVA

En la Figura 3.2 se muestra el proceso de construcción del OVA. Se puede apreciar la vista algebraica, el protocolo de construcción y Script correspondiente a uno de los objetos utilizados. A partir de los objetos libres mencionados, que cumplen la función de parámetros de entrada, el OVA muestra la gráfica de la función, punto inicial, la recta tangente a la función que pasa por el punto inicial y su respectiva intersección en el eje "x" que genera el valor de la nueva aproximación correspondiente a las iteraciones (Gráfico 3.3).

Gráfico 3.3 Visualización de un ejemplo

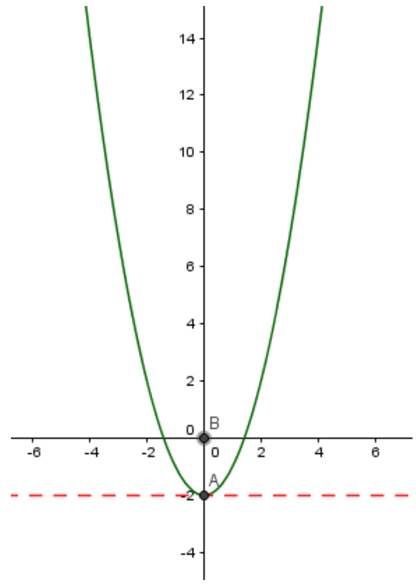


Fuente: Elaboración propia de actividad para OVA

Cuando se cumple con el error preestablecido, el objeto muestra la raíz aproximada obtenida por el método y la cantidad de iteraciones que fueron necesarias. Para mostrar estos resultados, se utilizaron objetos del tipo texto de GeoGebra, teniendo como parámetros los cálculos realizados.

Para el caso en que el método presenta problemas de convergencia causados, pero el comportamiento de la derivada de la función que se muestra en la gráfica donde se aprecia que la recta tangente se hace cero. Se puede observar que la recta tangente es paralela al eje “x” y se aprecia la divergencia como se puede ver en la Gráfico 3.4.

Gráfico 3.4 Ejemplo que muestra divergencia.



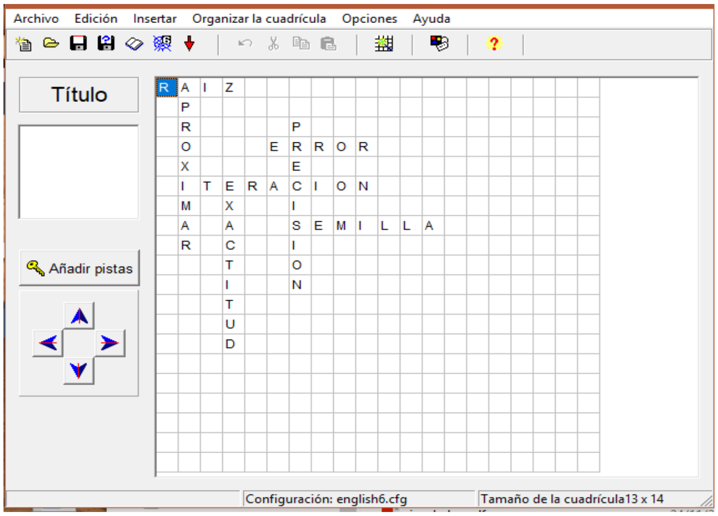
Fuente: Elaboración propia de actividad para OVA

Esta parte del diseño del OVA muestra la gran potencialidad gráfica y de procesamiento, así como, su accesible y dinámica interfaz, que constituyen características de gran relevancia con relación a los sistemas de representación y a las representaciones semióticas que resultan de gran ayuda para que los estudiantes conciban la construcción del conocimiento matemático (Có et, al., 2011). De esta forma, se busca que las relaciones sean mostradas mediante el OVA permitiendo a los estudiantes descubrir las relaciones pertinentes para construir los conceptos básicos vinculando significados y las representaciones gráficas para poder posteriormente guiarlos al desarrollo procedimental. De esta manera, se logra provocar la interacción de las tres dimensiones: la dimensión semántica (significativa) que hace referencia a los significados que se vinculan al concepto; la dimensión sintáctica (representativa) la cual hace referencia a las representaciones del concepto, que incluye los distintos modos de representar el objeto y las posibles traducciones entre ellas; y la dimensión procedimental planteadas por Gavilán y Barroso (2011).

Como antes se mencionó, para el diseño del OVA fue importante el uso de HotPotatoes para favorecer el dominio de los conceptos matemáticos. Esta herramienta se considera importante para trabajar la dimensión semántica que acerca al estudiante al aprendizaje, con la intención de transformar positivamente la apropiación de contenidos y conceptos (e.g. función, raíz, tangente, derivada, convergencia, error y aproximación) para que pudieran estar disponibles en la resolución de problemas (Figura 3.3). Con dicha herramienta se favorece el dominio especifico de un área en particular, dado que representa una forma de estimular a los estudiantes para que recuerden la información más importante del tema.

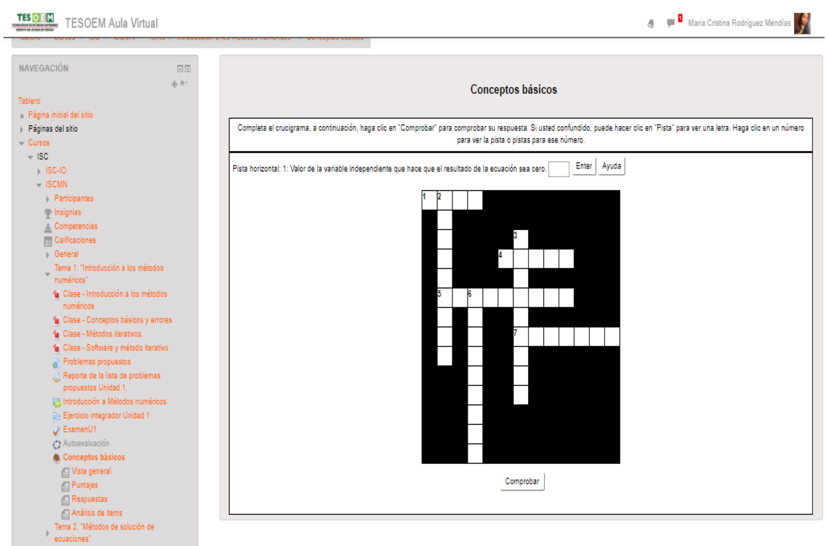
Su uso impacta en el desarrollo cognitivo del estudiante ya que es una herramienta de aprendizaje efectiva para los conceptos básicos de Métodos Numéricos (Figura 3.3); en este trabajo es de gran ayuda en la fase de resolución de problemas permitiendo que los estudiantes relacionen los resultados de los cálculos obtenidos con el concepto de convergencia, raíz y el de aproximación lineal, esto favorece su reflexión del contenido matemático, como lo establece Gavilán y Barroso (2011).

Figura 3.3 Proceso de construcción en HotPotatoes



Fuente: Elaboración propia para el OVA

Figura 3.4 Aplicación de la actividad de HotPotatoes en OVA mediante MOODLE.



Fuente: Elaboración propia para actividad del OVA

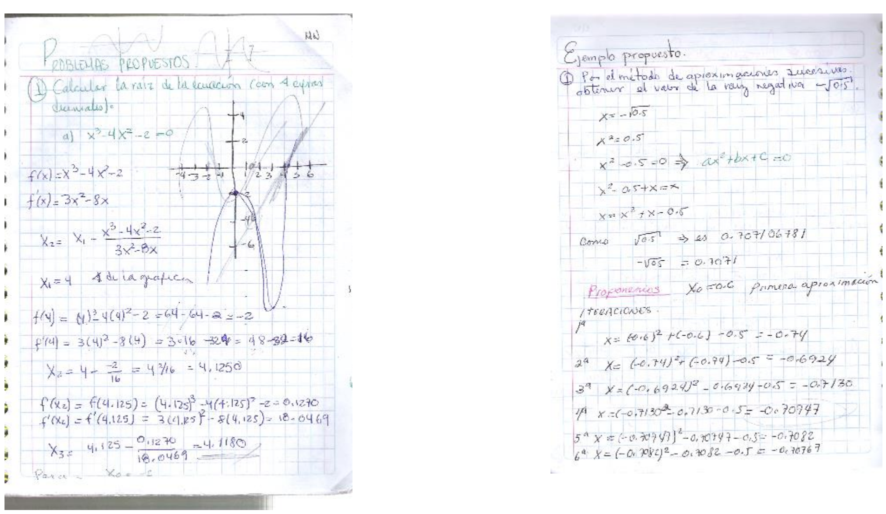
4 Resultados

Mediante la plataforma de educación a distancia del TESOEM se implementó el OVA para la interpretación geométrica del Método de Newton-Raphson a 110 estudiantes del cuarto semestre, distribuidos en tres grupos (4S11, 4S12 y 4S21) de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales del TESOEM en los turnos matutino y vespertino (Figura 3.5).

Figura 3.5 Estudiantes del TESOEM durante la implementación del OVA.

Con la intención de explorar en el impacto formativo del uso del OVA, en el primer examen parcial los estudiantes realizaron la solución a los problemas propuestos a lápiz y papel, sin lograr integrar la interpretación geométrica y el desarrollo de los cálculos con el resultado de la aproximación de la raíz, la experiencia duro dos horas (Figura 3.6).

Figura 3.6 Soluciones de estudiantes a los problemas propuestos en el primer parcial.



Fuente: Producciones de los estudiantes.

En la producción de la izquierda de la Figura 3.6, podemos ver que: el alumno determina por sí mismo, cual será el valor inicial para aplicar el método realizando la gráfica de la función y a partir del mismo determina la aproximación de la raíz. En el producto de la derecha de la Figura 3.6 el alumno identifica la ecuación mediante un proceso algebraico y, a partir de la misma, determina la aproximación inicial logrando aplicar el método. Pero al pedirle que comparta con el grupo el proceso de solución no relaciona los conceptos de convergencia, tangente y/o raíz con el Método de Newton-Raphson. Del análisis de las diferentes producciones proporcionadas por los grupos, se observa que reconocen el desarrollo del método, pero no logran relacionar los resultados de los cálculos obtenidos con el concepto de convergencia, raíz o inclusive el de aproximación lineal.

Las dificultades de los estudiantes, se observan en las representaciones asociadas a características propias del concepto, lo que permite apreciar que para lograr la comprensión conceptual es necesario promover, mediante el OVA, la coordinación de varios sistemas de representación. Como consecuencia de los resultados anteriores, se buscó el equilibrio entre la cantidad de información brindada y el uso del OVA para asegurar que el alumno comprendiera la justificación de la fórmula, que luego aplicaría de forma iterada para resolver ecuaciones no lineales, y así, llevarlo a la integración de las dimensiones semántica, sintáctica y procedimental. Al dar inicio al segundo parcial la mayoría de los estudiantes presentaron los resultados de los problemas propuestos como se puede apreciar en las Figuras 3.7 y 3.8.

Figura 3.7 Soluciones de estudiantes a los problemas propuestos en el segundo parcial.

14.- Aplique el método de Newton-Rapshon para obtener soluciones con una exactitud de 10^{-4} para los siguientes problemas.

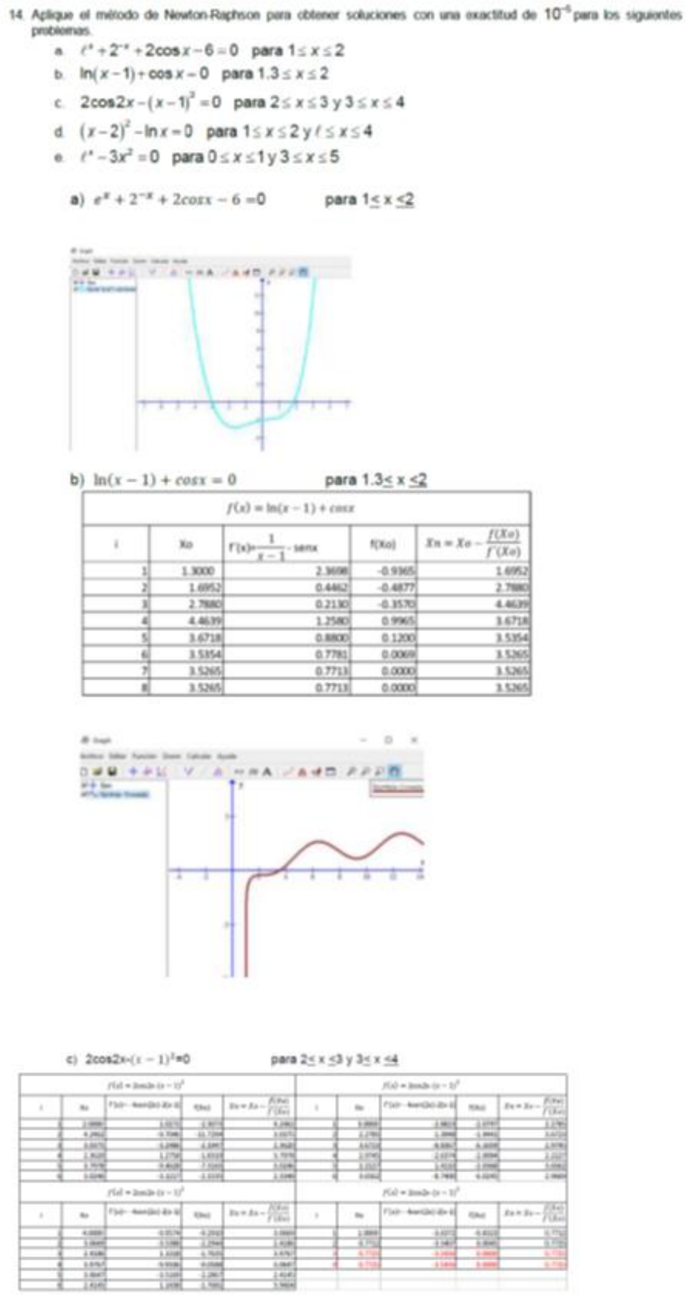
a) $e^x + 2^{-x} + 2cosx - 6 = 0$ para $1 \leq x \leq 2$

$f(x) = e^x + 2^{-x} + 2cosx - 6$				
i	Xo	$f'(x)=e^x-2^{-x}\ln(2)-2senx$	f(Xo)	$Xn = Xo - \frac{f(Xo)}{f'(Xo)}$
1	1.00000	0.6888	-3.8623	6.6076
2	6.6076	740.0554	732.8146	5.6174
3	5.6174	276.3887	267.6150	4.6491
4	4.6491	106.4618	98.6597	3.7224
5	3.7224	42.4088	37.1117	2.8473
6	2.8473	16.5650	13.2944	2.0448
7	2.0448	5.7797	2.8825	1.5460
8	1.5460	2.4561	-1.0142	1.9590
9	1.9590	5.0626	2.1063	1.5429
10	1.5429	2.4412	-1.0343	1.9666
11	1.9666	5.1237	2.1734	1.5424
12	1.5424	2.4388	-1.0375	1.9678
13	1.9678	5.1336	2.1843	1.5424
14	1.5424	2.4385	-1.0379	1.9680
15	1.9680	5.1349	2.1857	1.5424
16	1.5424	2.4384	-1.0380	1.9680
17	1.9680	5.1351	2.1859	1.5424
18	1.5424	2.4384	-1.0380	1.9680
19	1.9680	5.1351	2.1859	1.5424
20	1.5424	2.4384	-1.0380	1.9680
21	1.9680	5.1351	2.1859	1.5424
22	1.5424	2.4384	-1.0380	1.9680
23	1.9680	5.1351	2.1859	1.5424
24	1.5424	2.4384	-1.0380	1.9680
25	1.9680	5.1351	2.1859	1.5424
26	1.5424	2.4384	-1.0380	1.9680
27	1.9680	5.1351	2.1859	1.5424
28	1.5424	2.4384	-1.0380	1.9680
29	1.9680	5.1351	2.1859	1.5424
30	1.5424	2.4384	-1.0380	1.9680
31	1.9680	5.1351	2.1859	1.5424
32	1.5424	2.4384	-1.0380	1.9680
33	1.9680	5.1351	2.1859	1.5424
34	1.5424	2.4384	-1.0380	1.9680
35	1.9680	5.1351	2.1859	1.5424
36	1.5424	2.4384	-1.0380	1.9680
37	1.9680	5.1351	2.1859	1.5424
38	1.5424	2.4384	-1.0380	1.9680

Arredondo Sanchez Felipe de Jesús 4S11

Fuente: Producción de un alumno del turno matutino

Figura 3.8 Soluciones de estudiantes a los problemas propuestos en el segundo parcial.



$f(x) = \ln(x-1) + \cos x$				
i	Xo	$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \text{sen}x$	f(Xo)	$Xn = Xo - \frac{f(Xo)}{f'(Xo)}$
1	1.3000	2.3698	-0.9365	1.6952
2	1.6952	0.4462	-0.4877	2.7880
3	2.7880	0.2130	-0.3570	4.4639
4	4.4639	1.2580	0.9965	3.6718
5	3.6718	0.8800	0.1200	3.5354
6	3.5354	0.7781	0.0069	3.5265
7	3.5265	0.7713	0.0000	3.5265
8	3.5265	0.7713	0.0000	3.5265

Fuente: Producción de un alumno del turno vespertino

Se logró apreciar que el 83% de los estudiantes establecieron la relación de la función con la representación gráfica, la derivada con la tangente, logrando identificar mediante el método analítico y gráfico la mejor aproximación a la raíz de la ecuación no lineal. El uso del OVA, permitió el manejo de diferentes representaciones, lo que contribuye para que los estudiantes tengan acceso a información específica de cada representación y esto favorece su reflexión del contenido matemático, como lo establece Gavilán y Barroso (2011), para el manejo de conceptos matemáticos como objetos de enseñanza aprendizaje, las dimensiones: semántica, sintáctica y procedimental se han interrelacionado e interactuado.

Para Chan (2002), los objetos se construyen en función de las capacidades de manipulación, procesamiento, intervención y transformación de dichos objetos. Crear el objeto supone un ejercicio que parte de la consideración de la realidad, algo que interesa presentar al estudiante para su aprehensión, abstraer sus atributos y organizarlos de modo que faciliten ejercer algún tipo de competencia. Para el Método de Newton-Raphson podemos mencionar algunas competencias como:

- Implementa el Método de Newton-Raphson para la solución de ecuaciones algebraicas con apoyo de un lenguaje de programación o software de cómputo numérico.
- Realiza análisis de la interpretación gráfica de una raíz.
- Analiza y valida los resultados obtenidos.

La interacción con el OVA permitió a los estudiantes aproximarse y manejar con facilidad diferentes funciones no lineales, favoreció la identificación de las variaciones que ocurren en la representación geométrica del Método de Newton-Raphson cuando se realizan cambios a los valores iniciales, lo cual ayudó a la interpretación geométrica del método y permitió a los estudiantes pasar de simples oyentes a ser constructores de sus propios conocimientos matemáticos lo que resalta en cada una de las soluciones que presentaron los estudiantes, es el logro de concretar la dimensión procedimental vinculando los conceptos básicos con el Método de Newton-Raphson.

Este ambiente permitió la utilización adecuada de la tecnología para generar conectividad personal y grupal y así promover aprendizaje significativo con la participación de todos los estudiantes en la asignatura de Métodos Numéricos. Se aprecia la importancia de contar con la plataforma MOODLE para almacenar el material didáctico implementado, favoreciendo la reutilización del mismo, además de, la modularidad, es decir, que las actividades de aprendizaje pueden ser utilizadas de manera parcial (Wiley, 2000; Chiappe et, al., 2007). Esto permitió seguir trabajando con el OVA para todas las unidades de la asignatura de Métodos Numéricos y para otras asignaturas.

Se logró que el OVA fuera interactivo, dado que permitió a los estudiantes la modificación de parámetros para observar el comportamiento del método de Newton-Raphson. Con ello se apoyaron los procesos de enseñanza y aprendizaje y se logró promover el aprendizaje autónomo. Dado que, el estudiante puede auto-observarse continuamente para aprender significativamente los contenidos y hacerlo a través de procedimientos efectivos. «El poder construir, explorar, manipular de forma directa y dinámica, cuestionar, volver a pensar, pensarlo de otra manera, realizar aportes, reconstruir conceptos, son acciones que conllevan a que el alumno se auto-regule y auto-dirija siendo capaz de tomar una postura crítica frente a los resultados que obtiene de las aproximaciones a la raíz, que lo conducen a la elaboración de conjeturas, a la argumentación de las aproximaciones propuestas y a la realización de la validación de los resultados obtenidos. Mediante la implementación del OVA, se posibilita el análisis, la generación de conceptos, las representaciones geométricas, tabulares, algebraicas y gráficas de las funciones, de una manera dinámica, logrando la generalización de los conceptos básicos, la realización de transformaciones y las asociaciones de funciones con objetos gráficos, para pasar a un nivel de conceptualización más elevado. Logrando así, la integración de las tres dimensiones que propone Gavilán y Barroso (2011).

5. Conclusiones

En el campo educativo, la matemática es una de las áreas que evidencia un alto índice de deserción de los estudiantes, esto debido a su carácter rígido, la falta de innovación metodológica en el aula y la poca contextualización en la enseñanza de los contenidos desde los primeros años de escolaridad. Una de las causas atribuidas a esto, corresponde al enfoque tradicionalista en la enseñanza, particularmente en la de Métodos Numéricos, donde en la mayoría de los casos se realizan algoritmos sin fundamento, se repiten procedimientos mecánicamente y sin reflexión alguna. Para contrarrestar este problema, se hace imperativo en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas, el uso de herramientas tecnológicas que faciliten la relación entre los conceptos teóricos y la contextualización de manera interactiva. Para Santos-Trigo (2016), la tecnología permite establecer diferentes representaciones de los objetos matemáticos y la visualización y exploración pueden ayudar a establecer relaciones matemáticas entre tales objetos y mostrar diversas propiedades que mediante registros con lápiz y papel no se pueden determinar. Todo esto, aunado al aprendizaje colaborativo, puede mejorar la percepción de los estudiantes frente a las matemáticas y el desempeño de los mismos en esta área.

En el caso de este trabajo, lo anterior lo encontramos en la implementación del OVA que permitió la gestión del conocimiento y formación de nuevas competencias tanto en los estudiantes como en el profesor. En congruencia con la definición dada por Chiappe et, al. (2007), este OVA fortalece las estrategias de enseñanza-aprendizaje dentro del aula y la habilitación del entorno virtual para aprender, reforzar y/o practicar los conocimientos aprendidos por los estudiantes, al igual que incorporar las TIC en procesos formativos. También, puede utilizarse parcialmente, es reutilizable, sus contenidos, actividades de aprendizaje y los elementos contextuales son unidades que pueden cambiarse y estar disponibles públicamente.

Con esta experiencia y en comparación con experiencias expositivas de los autores se ha podido constatar que es posible:

- Generar escenarios de enseñanza-aprendizaje transformativos de la práctica educativa considerando los diferentes estilos de aprendizaje.
- El uso de herramientas motivadoras del aprendizaje autónomo y que estén disponibles para revisiones posteriores del alumno.
- Estas aproximaciones son preferidas por los estudiantes por su naturaleza interactiva y que permiten comprender los objetos matemáticos.
- Proponer OVAs que permitan documentar el impacto del proceso de aprendizaje y además promuevan la integración de la matemática, ingeniería y el uso de TIC´s.

Finalmente, el OVA reportado en este trabajo, aporta en sí mismo un valor añadido en diferentes aspectos del aprendizaje, como la aclaración de conceptos como: gráfica, raíz, convergencia, aproximación, tangente y procedimientos de métodos iterativos y en especial el Método de Newton-Raphson. También se considera que proporcionó una interacción efectiva y útil al estudiante, dado que permitió de forma exitosa el aprendizaje autónomo e independiente en los estudiantes. Fue notorio que este recurso didáctico realmente fue útil y efectivo para los estudiantes en la comprensión de los conceptos teóricos y en la interpretación geométrica del Método de Newton-Raphson permitiendo que los estudiantes relacionaran dichos conceptos con distintos métodos numéricos para obtener aproximaciones a la solución de ecuaciones no lineales, esta estrategia dirigida permite activar los conocimientos previos de los estudiantes o incluso a generarlos cuando no existan.

Finalmente, cumplió con el objetivo para el que fue concebido al permitir al estudiante interactuar con los significados que se vinculan al concepto, las representaciones del concepto y finalizar con la aplicación de los algoritmos que se vinculan al concepto de manera autónoma en el proceso de aprendizaje y retroalimentar los conocimientos adquiridos en clase o mediante materiales planos usados tradicionalmente, ya que claramente se apreció la motivación y el interés que manifestaron la mayoría de los estudiantes ante el uso el OVA en la clase, logrando focalizar y mantener su atención durante la sesión de clase y una mayor significatividad de los aprendizajes logrados.

Referencias

Burden R. L. & Faires J. D. (2011). Numerical Analysis. Brooks/Cole.

Chan, M. E. (2002). Objetos de aprendizaje: una herramienta para la inovación educativa. *Apertura*, Innova, N2, Diciembre. Universidad de Guadalajara. Recuperado de: http://www.academia.edu/1105508/Objetos_de_aprendizaje_Una_herramienta_para_la_innovacion_educativa

Chapra S. C. & Canale, R. P., (2005). *Métodos Numéricos para Ingenieros con Programas de Aplicación*. Mc Graw Hill.

Chiappe, A., Segovia, Y., & Rincón, H.Y. (2007) Toward an Instructional Design Model Based on Learning Objects. *Educational Technology Research and Development*. 55, 6 (671-681). Springer.

Có, P., del Sastre, M., Panell, E. & Sadagorsky, A. (2011). Valoración del impacto de los software matemáticos en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática básica en carreras de ingeniería. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 24 (pp.1134-1141). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Duval, E., Hodgins, W., Rehak, D. & Robson, R. (2004). Learning Objects Symposium Special Issue Guest Editorial. *Journal of Educational Multimedia and Hypermedia, 13*(4), 331-342. Norfolk, VA: Association for the Advancement of Computing in Education (AACE). Recuperado el 16-04-2018 de https://www.learntechlib.org/primary/p/6582/.

Gavilán, J.M., & Barroso, R. (2011). *GeoGebra como instrumento de la Práctica del Profesor*. II Jornadas sobre GeoGebra de Andalucía, Huelva, España, abril 2011. Recuperado de: http://thales.cica.es/sites/thales.cica.es.geogebra/files /II_Jornadas_GeoGebra/material/comunicaciones/COM_1.pdf

Lockyer, L., Bennet, S., Agostinho, S., & Harper, B. (2009). Handbook of Research on Learning Design and Leraning Objects: Issues, Applications, and Technologies. Vol I y II. PA,USA: GI Publishing Hershey.

Morales L., Gutierrez, L., & Ariza, L. (2015). Proyecto de investigación CIAS-1475: *Ambientes virtuales de aprendizaje para el cálculo integral.* Inédito. Universidad Militar Mueva Granada (UMNG). Bogotá, Colombia.

Rodriguez, P. H. (2010). *Diseño del modelo metodológico de un objeto virtual de aprendizaje (OVA). Caso: Curso virtual de investigación aplicada a la educación popular de la Asociación Dimensión Educativa.* Trabajo de Grado. Pontificia Universidad Javeriana.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 48 (6), 827-842.

Todorova, M. & Petrova, V. (2003). Learning Objects. International Conference on Computer Systems and Technologies. Recuperado el 21-01-2018 de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.93.1221&rep=rep1&type=pdf

Wiley, D. A. (2000). Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. In D. A. Wiley (Ed.), *The Instructional Use of Learning Objects: Online Version*. Recuperado el 21-01-2018 de World Wide Web: http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc

Integración de la tecnología mediante la planeación docente, una experiencia al tema de la integral definida

BRICEÑO-SOLIS, Eduardo C., HERNÁNDEZ-SÁNCHEZ, Judith A, MUÑOZ-HERNÁNDEZ, J. Jesús y KU-EUAN, Darly A.

E.Briceños, J. Hernández, J.Muñoz y D.Ku

Universidad Autónoma de Zacatecas

C. Cristóbal, M. Olvera, V. Vargas (Dirs.) Educación para la interdisciplinariedad. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

The experience of a teacher on his teaching practice is shared with the use of technology for teaching the definite integral. As a point of reflection, class planning is considered as practice, under the integration of a model that selects and articulates the technological, didactic and mathematical knowledge of the content to be taught (TPACK) with a guideline of hypothetical learning trajectories (THA). that the teacher manages in his didactic planning. The methodological framework of content analysis is used to analyze the teacher's practice. The results of the practice emphasize that the union of the model and reflection of the planning (TPACK-THA) allows a classroom integration for the improvement of teaching practice

Planning, Technology, Definite Integral, TPACK-THA

1. Introducción

En México se han hecho esfuerzos por incorporar las tecnologías en las aulas de matemáticas; socialmente el desarrollo de estos recursos digitales es cada vez más acelerado no sólo en nuestro quehacer cotidiano y profesional, sino en su integración curricular y en aulas de clase (Castro, 2017). Esto ha generado que los educadores se familiaricen más con las tecnologías para su clase, con todas las complejidades que esto conlleva en su manejo y uso. Sin embargo, el empleo de estos recursos tecnológicos no es trivial, ya que requiere de cierta negociación para decidir cómo usarla y precisar con qué propósito integrarla para el aprendizaje de las matemáticas.

Consideramos que una de las problemáticas de la integración de las tecnologías en el aula de clase, es que existe una brecha entre sus alcances y cómo el profesor podría incluirla en su práctica docente. Es decir, para el profesor no es claro qué y cómo articular contenidos matemáticos con el uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) y mucho menos, cómo planificar actividades matemáticas-tecnológicas en el aula (Briceño Hernández y Muñoz 2016). Lo anterior, dado que el software como GeoGebra, geómetra y cabri-geometry, cambian la forma de organizar las actividades matemáticas dirigidas a construir los contenidos o resolver problemas. En este caso, se usa menos el compás y la regla (que también es un tipo de tecnología escolar) y en su lugar se usa un puntero en un ambiente digital que controla, de forma dinámica: puntos, segmentos, círculos y rectas, generando argumentos de diferente tipo.

Para lograr este tipo de actividades-tecnológicas matemáticas es necesario que los profesionales de la educación promuevan sus competencias digitales. Entendiendo esto último, como el conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes sobre las TIC que debe poseer un profesional de la educación para alfabetizar tecnológicamente a sus educandos (Cabezas y Casillas 2017). Sin embargo, existe evidencia de que esta competencia es poco promovida, y no es reconocida como importante en la formación inicial de futuros profesores (Beneitone, et al., 2007). Esto no es diferente para el caso de los profesores en activo pues en el estudio de Magallanes, Briceño y Ku (2017) se midió esta competencia con estudiantes de maestría en matemática educativa del estado de Zacatecas, que en su mayoría son profesores activos. Se les preguntó qué tanto uso hace de las TIC en su práctica docente. Entre los resultados obtenidos se encuentra que un gran porcentaje participan en redes sociales como Facebook y Twitter. En contraparte son pocos los que usan redes de tipo académico como Academia.edu o plataformas como Moodle. En un estudio similar realizado en España, Cabezas y Casillas (2017) obtuvieron resultados similares. En éste se propuso analizar qué tanto los profesores son residentes digitales; es decir, cómo usan la tecnología en su práctica. Aquí se evidencia que los profesores la utilizan más para recreación que para la vida académica. Al respecto los autores argumentan:

Desde nuestro punto de vista, esto puede deberse a que esta generación ha aprendido a utilizar las TIC de manera autónoma, casi siempre, en contextos familiares de ocio y tiempo libre, y fundamentalmente con la necesidad de comunicarse y relacionarse personalmente; pero no han aprendido –ni nadie les ha enseñado– su uso desde un punto de vista que se podría denominar académico y profesional (p. 68).

No podemos decir que esta sea la única causa problemática en torno a la integración académica de las TIC en el aula de matemáticas. En Haciomeroglu, Bu y Haciomeroglu (2010), mencionan que los resultados de la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas, han mostrado que los profesores hacen un uso limitado de ésta. La razón principal es la incertidumbre de cómo usarlo en su práctica docente. Esto ha llevado a clasificar a los profesores en torno a la integración que hacen de la tecnología en su aula. Los primeros son los profesores *resistentes* que no tratan y se resisten a incorporar las tecnologías en sus aulas. Los *novatos* que bajo una postura ingenua muestran aspectos potenciales de la tecnología desde una perspectiva motivacional. Los *tecnócratas* que son profesores con experiencia en las TIC, pero se dedican sólo a enseñar el ambiente tecnológico. Por último, los *experientes* que usan la tecnología como medio para reflexionar la comprensión de un concepto matemático preocupándose por la didáctica intrínseca en estos procesos (Vitabar, 2011).

La complejidad para incluir la tecnología en el aula de matemáticas ha tenido como resultado investigaciones que buscan incidir en la formación de profesores en el uso de las TIC (González, 2014; Rojano, 2006; Hernández y Quintero 2009 y Barrigas 2013). Este trabajo está guiado por la misma problemática y el mismo interés. Es decir, brindar elementos al profesor de matemáticas para integrar el uso de la tecnología en el aula como una herramienta didáctica poderosa. Para ello sostenemos que el profesor requiere sistematizar su práctica docente utilizando referentes de corte teórico-metodológico. Lo anterior le permitirá analizar y reflexionar, cómo y qué acciones son pertinentes con la tecnología para enseñar un contenido matemático escolar. Luego, se propone la planeación docente como una competencia clave para evidenciar tal aspecto, pues como lo proponen Lupiañez y Rico (2008), ésta permite ver cómo los profesores organizan contenidos matemáticos para su clase.

Luego, la planeación es parte importante en la reflexión del currículo de matemáticas, ya que permite un acercamiento parcial de cómo el profesor de matemáticas organiza una clase. Además brinda información sobre qué y cómo pone en juego conocimientos sobre un contenido matemático escolar. Por tal razón, se presenta a continuación el marco de referencia que sirvió en esta investigación como un modelo de reflexión y de articulación de conocimientos para la integración de la tecnología en una clase de matemáticas.

2. Articulación de la planeación de la integral definida con el modelo TPACK-THA

A continuación, se presenta un modelo teórico-metodológico que considera los conocimientos propuestos por el modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) y la articulación de los mismos mediante la THA (Trayectoria Hipotética de Aprendizaje). El primero propone los conocimientos necesarios para la implementación de una clase de matemáticas con tecnología en un determinado contexto: el contenido matemático escolar, el didáctico y el tecnológico; cada uno de ellos se presenta de manera más detallada en la siguiente sección. La articulación requirió una guía de actuación para su aplicación por el profesor para la enseñanza de la integral definida conocida como la THA.

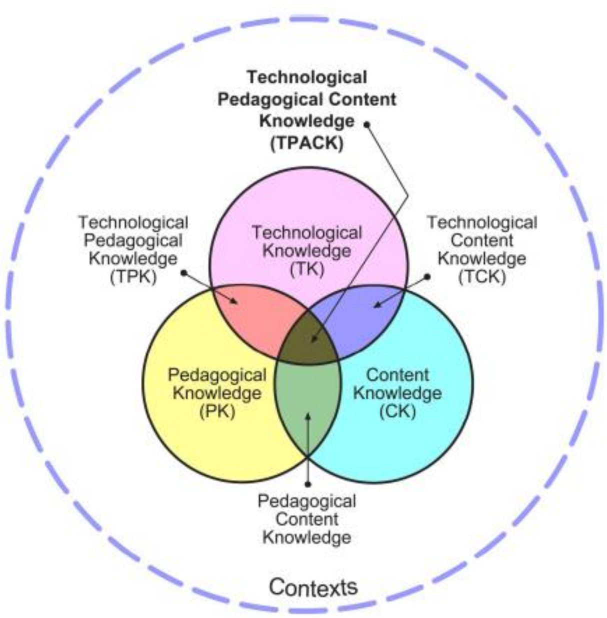
Ésta ofrece una descripción de aspectos clave para la planeación de clases de matemáticas. Una THA se basa en los objetivos de aprendizaje propuestos para los estudiantes; en las tareas matemáticas que se utilizarán para promover estos objetivos y plantear posibles hipótesis que tiene el profesor acerca de los procesos de aprendizaje de los estudiantes en torno al contenido matemático a enseñar. De esta manera estos enfoques permitieron identificar qué contenido matemático y cómo está condicionado su didáctica por medio del recurso tecnológico. A continuación, describimos el modelo de integración del contenido matemático con el uso de tecnología (TPACK, por sus siglas en inglés).

2.1 El modelo didáctico para la integral definida. El TPACK

El TPACK fue desarrollado por Mishra y Koehler (2006) y aborda la problemática de integrar tecnología en el aula de clases. Este modelo describe tres conocimientos que el profesor necesita para planificar su clase. El TPACK es una extensión del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) propuesto por Shulman (1986, citado en Koehler y Mishra, 2009). Esta extensión consiste en explicar cómo la comprensión que tienen los profesores de las tecnologías educativas y el PCK interactúan entre ellas para producir una enseñanza aceptable con uso de tecnología. Éste está compuesto por tres núcleos principales que están relacionados con el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido (CK), conocimiento pedagógico (PK) y conocimiento tecnológico (TK).

Para este modelo las intersecciones entre estos cuerpos de conocimiento son igual de importantes. Estas intersecciones están representadas como PCK (conocimiento pedagógico del contenido), TCK (conocimiento tecnológico del contenido), TPK (conocimiento tecnológico pedagógico), y el TPACK (conocimiento tecnológico pedagógico del contenido). Este modelo y sus intersecciones se presentan en la Figura 4.1. En particular es la última intersección de conocimientos, conocida como TPACK, que se propone permitirá implementar a la tecnología como un agente de cambio educativo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Figura 4.1 Modelo de Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido



A continuación, se presenta la descripción de cada una de las intersecciones del modelo de Mishra y Koehler (Mishra y Koehler, 2006). El entendimiento de cada intersección de conocimientos permitió delimitar qué en específico, resultaría pertinente en su planeación de actividades como docente para el tema de la integral definida.

2.2 Intersección de los conocimientos del TPACK para el diseño de actividades

- *Conocimiento Pedagógico del Contenido*. Este conocimiento es similar y consistente con la idea de Shulman (1986, 1987; citado en Koehler y Mishra, 2009). Es decir, la transformación de la materia para la enseñanza ocurre cuando el profesor interpreta la materia, encuentra múltiples maneras de representarla, y la adapta e hila los materiales instructivos para concepciones alternativas al conocimiento previo del estudiante.
- *Conocimiento Tecnológico del Contenido*. Éste consiste en la comprensión de cómo la tecnología y el contenido se relacionan y limitan una a otra. Los profesores necesitan dominar más que la materia que se imparte; pues ellos deben tener un profundo entendimiento de cómo el contenido se puede modificar por la aplicación del uso específico tecnológico.
- *Conocimiento Tecnológico Pedagógico*. Este conocimiento es el cambio de cómo enseñar con tecnologías formas específicas del contenido. Esto incluye conocer los alcances y limitaciones tecnológicas al relacionarse con los diseños y estrategias pedagógicas disciplinares apropiados.

Se destaca que el modelo es propuesto para la enseñanza con tecnología para cualquier disciplina, así los alcances y limitaciones de la tecnología son afectados por el contexto disciplinar que nos permite hablar de una componente didáctica. De esta manera la última componente del modelo, llamado TPACK, consiste en la reflexión después de aplicar las tres intersecciones mencionadas, es decir, un conocimiento emergente que va más allá de las tres componentes: contenido, pedagogía y tecnología. Así el TPACK, es una comprensión específica de las interacciones entre conocimientos propuestos (matemático, didáctico y tecnológico). Por último, el círculo punteado (Figura 4.1) es etiquetado como contexto que enfatiza los conocimientos están instanciados en contextos específicos de enseñanza y aprendizaje. Por tal motivo, a continuación, se presenta el modelo TPACK de la integral definida para nivel medio superior.

3. Propuesta de TPACK para la enseñanza de la integral definida

A continuación, se describe la articulación de conocimientos matemático, didáctico y tecnológico propuesta por el profesor al tema de integral definida, en el contexto de una clase del nivel medio superior.

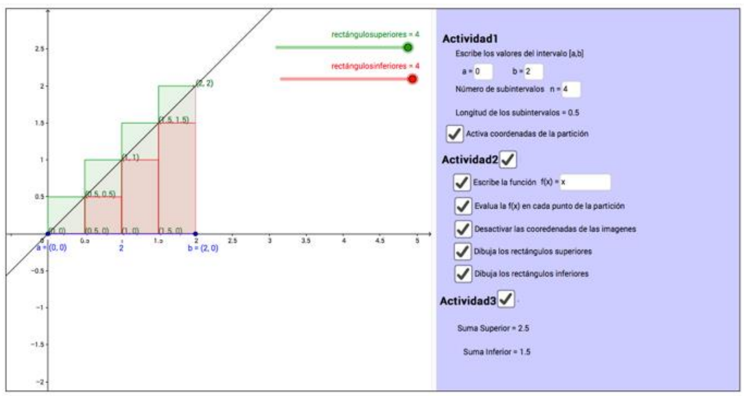
Conocimiento matemático de la integral definida. En esta dimensión el profesor tomó la siguiente definición de integral definida considerando la propuesta curricular nacional, del programa de estudios del nivel medio superior (DGB, 2011):

Si f es una función continúa definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Hacemos que $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elegimos $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ como los puntos muestra en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la integral definida de f, desde a hasta b, es $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$. (Steward 1999).

Conocimiento pedagógico de la integral definida. El profesor argumenta su elección, diciendo que la definición tiene una ventaja didáctica, pues se puede vincular con la *visualización* de cálculo de áreas en distintos contextos; es decir, la aproximación por sumas por exceso y por defecto en representaciones geométricas, numéricas y algebraicas donde el estudiante pueda vincular estas definiciones y dar significado al concepto de integral definida.

Conocimiento tecnológico de la integral definida. En esta componente el profesor identificó qué del GeoGebra podría ser utilizado para abordar el concepto de integral mediante la visualización de áreas; como resultado él propone construcciones dinámicas en GeoGebra con la finalidad de que los estudiantes, exploren y argumenten la noción de área con la suma de rectángulos por exceso y por defecto en la gráfica de una función. Para un mejor entendimiento y por extensión del documento, recomendamos al lector consultar la siguiente dirección https://www.geogebra.org/m/Pu4bSAQn, donde se encuentra la actividad e instrucciones de construcciones en GeoGebra. En la figura 4.2 y la Tabla 4.1 se presenta la actividad y su justificación.

Figura 4.1 Actividad estructurada del profesor para la enseñada de la integral.



El conocimiento tecnológico utilizado en cada actividad consistió básicamente en definir casillas de entrada donde el estudiante asigna valores y éstas se representan visualmente en el plano cartesiano. De esta manera se articula por el profesor esta selección y organización de contenidos con la THA ilustrado en el siguiente diagrama. Esto permitió considerar por el profesor, ciertos conocimientos para con el objetivo de que el estudiante calcule e interprete sumas de Riemman considerando distintas representaciones (plan del profesor para las actividades) dando énfasis a un enfoque visual de las explicaciones del contenido De esta forma el profesor diseñó el siguiente instrumento para recabar los elementos que contiene la THA y TPACK con ciertas intencionalidades didácticas que a continuación se describen.

Tabla 4.1 Intencionalidad didáctica de las actividades del profesor

Conocimiento tecnológico utilizado	**Intencionalidad didáctica**
Mediante una casilla de entrada se decide el intervalo donde se calcula el área bajo una función, así como el número de subintervalos (Actividad 1)	Son propuestas para que los estudiantes relacionen el valor de "n" con el número y longitud de los subintervalos. De esta manera se pretende introducir la noción de partición. (Se recomienda consultar la actividad)
Se propone el tipo de función y el número de rectángulos superiores e inferiores por medio del uso de un deslizador en el software GeoGebra (Actividad 2)	Tiene como objetivo realizar una aproximación del área bajo una curva que el profesor propone, ($y = \frac{x^2}{4}$) en cierto intervalo utilizando el deslizador de GeoGebra, para particionar su área, en cierto número de rectángulos. Los estudiantes tendrán que completar una tabla utilizando las sumas superiores con la intención de que ellos relacionen las alturas de los rectángulos con los puntos de la partición. En la última parte de esta actividad se les pide que realicen el llenado de la tabla, pero ahora, con una partición de seis subintervalos con la intención que relacionen que a más particiones que tenga el subintervalo, se obtiene una mejor aproximación del área.
cálculo del resultado de la suma de estos rectángulos mediante el vínculo de ciertas variables de forma dinámica para que se visualice el resultado (Actividad 3).	Que el estudiante identifiquen que conforme el número de intervalos aumenta, la diferencia entre las sumas superiores e inferiores de áreas de rectángulos disminuye. De esta manera el profesor considera la forma de como generalizar esta idea hacia el concepto de la integral definida como la aproximación del área bajo la curva por medio de una serie de rectángulos para un número considerado de intervalos. Esto último lleva a la idea de límite.

Después de que los estudiantes hayan terminado el último ejercicio de la Actividad 3 se espera tendrán los elementos para formalizar la definición de integral definida con el enfoque de Riemann propuesto en el plan de estudios del nivel medio superior que es:

Calcula e interpreta áreas bajo la curva mediante las Sumas de Riemann en la resolución de problemas en un entorno teórico (DGB, 2011, p. 19).

Hasta el momento se han presentado los conocimientos que fueron identificados y construidos por el profesor mediante el modelo TPACK; sin embargo, esto no permite soslayar la organización de esta información para su implementación en clase. Esto fue resuelto por el profesor quien adoptó como herramienta metodológica para la planeación, ejecución y evaluación de su clase las trayectorias hipotéticas de aprendizaje. La THA ofrece una descripción de aspectos clave de la planeación de clases de matemáticas. Se basa en los objetivos de aprendizaje propuestos por el profesor para los estudiantes; en las tareas matemáticas que se utilizarán para promover estos objetivos y en las hipótesis que tiene el profesor acerca de los procesos de aprendizaje de los estudiantes en torno al contenido matemático a enseñar. El objetivo de aprendizaje que tiene el profesor indica la dirección de la trayectoria hipotética de aprendizaje. En ese sentido se traza un camino por el que puede transitar el aprendizaje.

4. Metodología para la reflexión de la aplicación de la planeación del docente

La planificación y la gestión de clase son dos de los problemas que el profesor debe resolver en su actividad docente (Gómez, 2009). Comúnmente los profesores planifican y realizan sus clases con ayuda de su experiencia, de documentos y materiales de apoyo disponibles como los tecnológicos. Si esperamos que los profesores de matemáticas aborden su trabajo diario de manera sistemática y reflexiva, basándose en un conocimiento profesional, entonces ellos deberían conocer y utilizar principios, procedimientos y herramientas que, fundamentados en la didáctica de la matemática, permitan diseñar, evaluar y comparar las tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2009).

Esto permitirá que el profesor no vea a la planeación como una consecución de temas, sino como un medio para reflexionar sobre los medios para lograr los objetivos de aprendizaje y la manera de organizarlos y articularlos. En esta sección analizamos la planificación realizada por el profesor, con el fin de entender la organización sistemática y articulada que plantea para el tema de la integral definida. Para ello se emplea el método propuesto por Rico (2013) y Gómez (2009) llamado análisis de contenido.

4.1 El análisis de contenido como método para analizar la propuesta del profesor

El análisis de contenido es un método para el procesamiento y revisión de las dimensiones cuantitativas (médium) y cualitativas (mediador) de los contenidos de la comunicación. Su origen y antecedentes procede del trabajo de censores y del estudio hermenéutico de textos (Fernández-Cano, 2010). El análisis de contenido puede ayudarnos a: descubrir patrones en el discurso, contrastar una hipótesis previa e Inferir significados interpretativos en un texto. El análisis de contenido se ha utilizado en educación matemática, como un método para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que aparecen en un escrito o discurso (Rico, 2013). Entre los discursos susceptibles a ser estudiados, están los textos escolares, el del profesor, los libros de texto, los planes de estudio y cualquier producción escolar escrita o discursiva. Lo anterior, puede aplicarse a las planeaciones de los profesores, ya que pueden verse como documentos que expresan el discurso matemático escolar que el profesor planea utilizar en sus clases.

De esta manera el análisis de contenido permite reflexionar sobre la organización y articulaciones de los discursos presentes en las planeaciones de los profesores. Para ello, este método cuenta con tres organizadores, el primero sobre la estructura matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula; el segundo sistema de representación y el último basado en los contextos matemáticos y no matemáticos bajo los que el contenido adquiere sentido (análisis fenomenológico). Lo anterior, toma relevancia ya que el significado de un contenido matemático escolar, se adecúa a la terna Estructura Conceptual-Representaciones-Fenómenos, con la cual, se caracteriza la intencionalidad didáctica de un contenido para una clase en un sentido más amplio (Rico, 2013 y Gómez 2006). A continuación, se describen las tres dimensiones propuestas.

4.2 La estructura conceptual

La estructura conceptual, es la descripción y organización de los conceptos en acción y la relación entre los mismos, es decir, no basta con identificar y definir los conceptos que son fundamentales, sino que se trata de organizar y relacionar los conceptos que están incluidos. La construcción de la estructura conceptual es un proceso que se inicia con la identificación de los conceptos de los que forma parte y de los que el concepto estructura. A esto hay que sumarle algunas de sus relaciones y procedimientos que se desarrolla, en la medida en que se tienen en cuenta los sistemas de representación, los modelos y fenómenos asociados. (Gómez, 2009). Visualmente se puede analizar la estructura mediante un mapa conceptual, donde se puedan apreciar la organización y relación de un concepto con otros.

4.3 Sistemas de representación

Una vez que se tiene la estructura matemática, podemos continuar con los sistemas de representación que son el segundo organizador del análisis de contenido. Este se puede expresar mediante todos sus posibles sistemas de representación. Los sistemas de representación aportan un significado de la estructura matemática que luego viene a presentarse en las matemáticas escolares y forman parte de los significados del tema en estudio.

El término “sistema de representación” tiene diferentes significados en la didáctica de la matemática (Gómez, 2009), que se utilizan para representar diferentes facetas de un concepto o estructura matemática. En general, se presentan como los signos, reglas o medios que permiten manipular el contenido matemático en cuestión. Una de estas representaciones visto como un medio de representación es el ejecutable; el cual consiste en la tecnología como medio o instrumento para representar de manera gráfica, simbólica o geométrica un contenido.

4.4 El análisis fenomenológico

Finalmente, el tercer organizador del análisis de contenido se obtiene mediante un análisis fenomenológico (Gómez, 2009). En el área, la fenomenología, entra lo que es la matemática y los fenómenos que modelan ya sea de carácter naturales, sociales e incluso dentro de la misma matemática. En esta faceta se analiza la relación entre los fenómenos y el contenido con la intención de identificar, describir, caracterizar y clasificar los fenómenos; además, permite organizarlos por subestructuras contenidas en la estructura en cuestión. El profesor debe incluir los tres organizadores dentro del mapa conceptual que dará evidencia de la estructura conceptual; esto da como resultado el análisis de contenido cuando se tiene la estructura matemática y los sistemas de representación y por consiguiente la fenomenología, se pueden identificar los significados que están presentes en la estructura matemática, la extensión y profundidad que se hacen presentes en las planeaciones del profesor; además de los distintos modos de expresión y de uso con que se manejen los conceptos (Gómez, 2009).

4.5 Instrumento de análisis de la planeación de clase docente

La información de las planeaciones se analizó a partir del llenado de un instrumento, que se ha diseñado considerando los tres organizadores del análisis de contenido. Este instrumento, nos permitirá identificar los significados de un tema con base en los organizadores del análisis de contenido. En la Tabla 4.2 se presenta una primera propuesta del instrumento para el análisis de las planeaciones docentes de un tema matemático escolar.

Tabla 4.2 Instrumento para el análisis de los significados de un tema matemático.

Profesor											
Estructura (Rico, 2003)			Representaciones (Gómez y Cañadas, 2015)					Fenomenología (Gómez y Cañadas, 2016)			
Conceptos	Definiciones	Procedimientos	Creación de signo	Gráfico	Geométrico	Simbólico	Ejecutable	Fenómenos	Contextos	Subestructuras	Relación entre subestructuras y contextos

Esto nos permitió identificar los significados de la integral definida mediante el uso de tecnología, además de la relación entre cada uno de los organizadores del currículo y las relaciones dentro de los mismos.

5. Análisis de los resultados

A continuación, se presentan el análisis de la puesta en escena de la aplicación de la planeación del profesor, con estudiantes de bachillerato. Usando el instrumento anterior interpretamos esta planeación del profesor con base en sus estructuras, representaciones y fenomenología para reflexionar sobre el patrón didáctico y los significados que el profesor puso en juego para la comprensión de la integral definida en una clase de matemáticas del nivel medio superior.

El profesor proporcionó hojas de trabajo de la actividad para que el estudiante resolviera junto con la actividad en GeoGebra (La actividad es tomada de Cantor (2013) y diseñada en dicho software. El lector puede descargar tanto la hoja de trabajo como el archivo GeoGebra en https://www.geogebra.org/m/Pu4bSAQn). La estrategia del profesor consistió en el trabajo de sus hojas en equipos y episodios expositivos del profesor donde considera afirmar los conceptos que han manejado los estudiantes.

Tabla 4.3 Análisis de la estructura conceptual del profesor

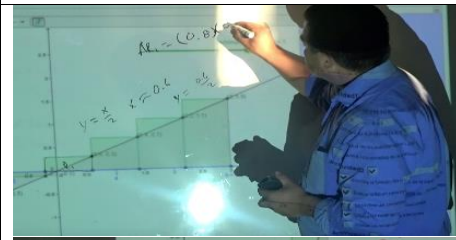
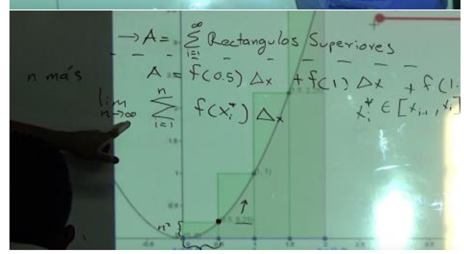
Estructura conceptual			
Conceptos	**Definiciones**	**Procedimientos**	**Evidencia**
Integral definida	$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$	Aproximación mediante sumas reiteradas: Calcular partición, bases y alturas de cada rectángulo	 
	Como fórmula de sumas de Riemman *Notación Sigma*: $\sum_{i=m}^{n} F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \cdots .. + F(n-1) + F(n)$ donde m y n son números enteros, y $m \leq n$ (Leithold, 1998, p. 329)	Sucesión de sumas	En esta sección el profesor reafirma la fórmula de suma de Riemman desde una relación gráfica y analítica. Esta exposición del profesor la realiza cuando ya el estudiante, en las actividades, ha manejado este concepto. Es justamente en este episodio que el profesor considera la creación de signos y traducciones entre los sistemas de representación gráfico y simbólico del concepto formalizando lo que el estudiante ya ha realizado. En la tabla 4.4, segunda columna se muestra la respuesta de un estudiante sobre el cálculo del área bajo la curva en los sistemas de representación que el profesor propone.

Tabla 4.4 Análisis de los sistemas de representación de la planeación de clase del profesor

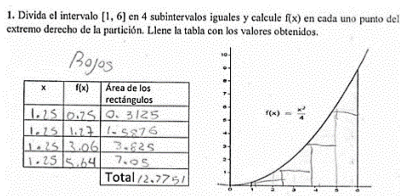
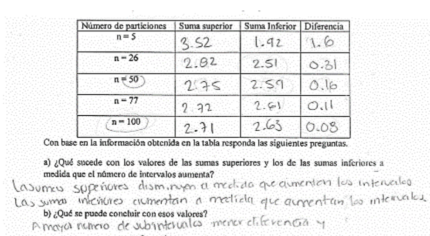
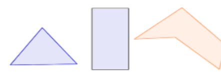
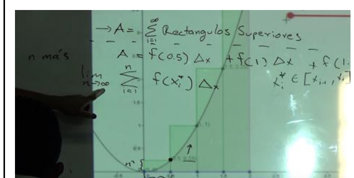
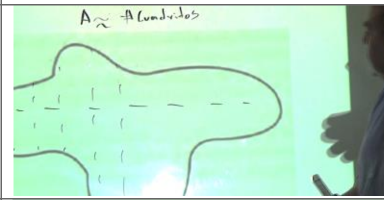
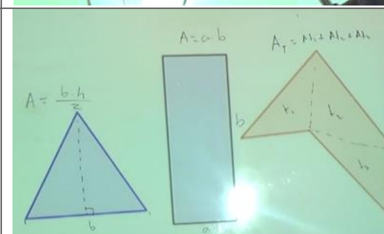
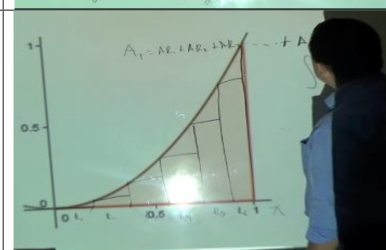
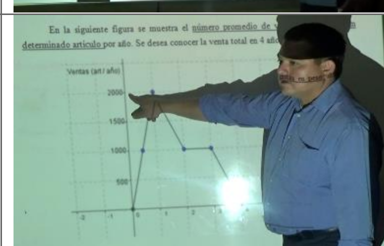
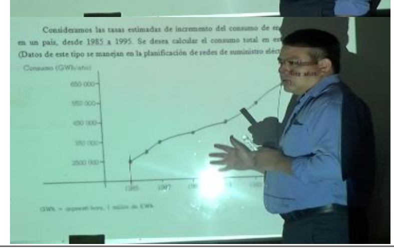
Creación de signos	**Numérico – Gráfico - Ejecutable (GeoGebra)**	**Geométrico-Ejecutable**	**Simbólico-geométrico-Ejecutable (Powerpoint)**
La integral como área	La actividad propone realizar la representación numérica por medio de tablas donde el estudiante con el uso de GeoGebra, lleva un registro del cálculo de área de cada rectángulo. Se propone que relacione este cálculo entre la gráfica y lo registrado en la tabla con el fin de analizar, la definición de integral definida por medio de la suma de Riemman.  1. Divida el intervalo [1, 6] en 4 subintervalos iguales y calcule f(x) en cada uno punto del extremo derecho de la partición. Llene la tabla con los valores obtenidos. Bojos x / f(x) / Área de los rectángulos 1.25 / 0.75 / 0. 3125 1.25 / 1.77 / 1.5876 1.25 / 3.06 / 3.825 1.25 / 5.64 / 7.05 Total 12.7751 El estudiante empieza a realizar procedimientos de cálculo del área de los rectángulos para aproximar a la totalidad del área de la curva. Posterior con el uso de un deslizador en GeoGebra, cuya función es ilustrar visualmente mayor partición al aumentar los rectángulos, el estudiante puede representar en tablas, las sumas inferiores y superiores de los rectángulos para un determinado "n" número de particiones. Por ejemplo se inicia con valores de $n=5$ hasta 100 que sería tedioso ilustrar a lápiz y papel. Lo anterior posibilita el tratamiento del límite cuando n tiende al infinito y con ello, dar sentido al concepto dentro de su definición como se muestra en la siguiente figura.  Número de particiones / Suma superior / Suma Inferior / Diferencia n = 5 / 3.52 / 1.92 / 1.6 n = 26 / 2.82 / 2.51 / 0.31 n = 50 / 2.75 / 2.59 / 0.16 n = 77 / 2.72 / 2.61 / 0.11 n = 100 / 2.71 / 2.63 / 0.08 Con base en la información obtenida en la tabla responda las siguientes preguntas. a) ¿Qué sucede con los valores de las sumas superiores y los de las sumas inferiores a medida que el número de intervalos aumenta? Las sumas superiores disminuyen a medida que aumentan los intervalos Las sumas inferiores aumentan a medida que aumentan los intervalos b) ¿Qué se puede concluir con esos valores? A mayor numero de subintervalos menor diferencia y mayor aproximación al área. Las respuestas del estudiante, el profesor las considero significativas ya que el estudiante considera que a mayor aumento de n se genera un número menor de la diferencia entre las sumas inferiores y superiores de los rectángulos y así, tener una mejor aproximación del área. Podemos considerar que el estudiante entiende el proceso límite como la mejor aproximación al área de la curva, y que esta, es diferente al cálculo del área de una figura regular que sería de forma exacta.	Aquí el profesor profundiza con los estudiantes el cálculo del área de figuras geométricas regulares, para luego relacionarlo con el área bajo una curva. Es decir, con el proceso de generalización por medio de aproximaciones al área. 	Sin embargo, en otro episodio el profesor relaciona dos representaciones (el simbólico y geométrico) para la formalización del concepto de integral definida como suma de Riemman.  Lo anterior permite al profesor dar sentido a la definición de integral definida que el propuso en la estructura conceptual como definición expuesta en la tabla 4.3

Tabla 4.5 Análisis fenomenológico de la planeación de clase del profesor

Fenomenología				
Fenómenos	**Contexto**	**Subestructuras**	**Relación entre subestructuras y contextos**	**Evidencia**
Cálculos de áreas de figuras irregulares	Matemático	Noción de fórmula desde una perspectiva geométrica	Aquí el profesor realiza la aproximación del cálculo del área de una figura irregular para llevarlo a la noción de área de una región mediante sumas. Esto con la intención de mostrar al alumnado que el concepto de integral definida es una aproximación del cálculo de regiones.	
Cálculos de áreas de figuras regulares	Matemático	Noción de fórmula geométrica	Aquí el profesor expone el caso de figuras regulares cuyo cálculo del área es exacto. Sin embargo, el propósito es establecer una relación entre la fórmula del área de una figura regular e irregulares el cual, se generan procedimientos de usar particiones para luego formalizar en el cálculo del área bajo la curva.	
Cálculo del área bajo la curva	Matemático	Noción de integral definida	Después de lo anterior, el profesor utilizó el proceso de sumas de particiones para aproximar el cálculo del área bajo una curva. Proceso de generalización. Es importante aclarar que no se suman las particiones, se suman las áreas de los rectángulos definidos por una partición.	
Aplicación del área bajo una curva	Ingeniería	Aplicación de la integral definida	En este episodio fue expositivo, donde el profesor dota de sentido a la integral definida mediante su uso en la ingeniería para la realización de construcciones como una presa, un estanque o edificios.	
	Economía		Aquí dota de sentido mediante problemas como en las ventas de productos donde se puede aplicar la integral definida.	

El análisis de contenido, permite entender el discurso del profesor sobre el concepto de integral definida. La estructura conceptual usa la definición de integral apoyándose de la suma de Riemman. Sin embargo, en todo su discurso el profesor potencia el significado de integral como el cálculo de área de figuras geométricas, es por ello que su sistema de representación utiliza este significado tanto en figuras regulares como irregulares. El procedimiento que él realiza, apoyándose de lo visual que proporciona la tecnología, son las particiones de figuras para calcular su área.

Esto se puede observar en todas las tablas de análisis de la práctica del profesor. Es decir, el profesor manifestó siempre un enfoque visual de la definición: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$, tanto en representaciones numéricas como geométricas. Una vez formalizado la definición de integral definida, el profesor muestra una parte fenomenológica al ilustrar su aplicación en la ingeniería y economía.

6. Conclusiones

Se considera que el modelo TPACK-THA de la integral definida, favorece la competencia de planeación ejecución y evaluación de un contenido matemático escolar con el uso de tecnología. Queda establecida la intención del profesor de potenciar el significado de la integral definida como el área bajo la curva mediante una representación gráfica dinámica con el uso de tecnología. Es decir, el profesor le da un enfoque visual para desarrollar la suma de Riemann (actividades 1 y 2) donde se realizan cálculos cuyo sentido es encontrar áreas bajo curvas. La intencionalidad didáctica del profesor consistió que el estudiante observe y registre las diferencias de las áreas de rectángulos superiores e inferiores, viendo que cada vez esta se reduce mientras crece el número de rectángulos.

De esta manera, el TPACK de la integral definida, definido por el profesor incluye la definición de integral como sumatoria, se representa de forma geométrica y complementada con uso de deslizadores y activación de casillas en GeoGebra. Esto brindó buenos resultados en la comprensión de la noción de área abajo la curva en los estudiantes y que se formalizó en la integral definida en un intervalo dado. El análisis de contenido nos permitió observar que el profesor inicia y termina con la definición de integral. Pero también en el proceso hace uso de representaciones y fenómenos que dan y dotan de sentido a la integral definida. Por lo tanto, podemos inferir que el enfoque visual de cálculo de áreas, adquirió sentido para formalizarse en lo que es su definición propuesta en la estructura conceptual. Por lo anterior la tecnología se integra como un medio que permite realizar no sólo cálculo, sino también el análisis apoyado desde enfoques geométricos y numéricos (uso de tablas). Por lo tanto, este trabajo proporciona un modelo TPACK-THA para su implementación en el aula, permitiendo tener elementos de cómo realizar una planeación, ejecución y evaluación de clase usando como herramienta, el recurso tecnológico.

7. Agradecimiento

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico brindado mediante una beca para realizar estudios de maestría.

Referencias

Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Marty, M., Siufi, G. & Wagenaar, R. (Eds.) (2007). *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina. Informe Final –Proyecto Tuning- América Latina 2004-2007.* España: Universidad de Deusto y Universidad de Groningen. Recuperado de http://tuning.unideusto.org/tuningal/

Briceño E. Hernández J. y Muñoz JJ. (2016). Reflexión sobre la enseñanza de la integral definida con el uso de tecnología una experiencia de aula en el nivel medio superior. *El cálculo y su enseñanza*, 2(2), 23-45.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, Marzo (33). 11-27.

Barrigas, A. (2013). Tic en el trabajo del aula. Impacto en la planeación didáctica. Revista Iberoamericana de educación superior, (10)4, 3-21.

Castro A. (2017). *La integración de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: usos e intencionalidades en el currículum oficial del nivel secundaria.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Zacatecas, México.

DGB. (2011). *Programa de estudios de Cálculo Integral*.

Cabezas, M. y Casillas, S. (2017). ¿Son los futuros educadores sociales residentes digitales? *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 19(4), 61-72.

Cantor, G. (2013). *Elementos para la enseñanza de la integral definida como área bajo la curva*. (Tesis inédita de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

González, J. (2014). Formación inicial de profesores en geometría con GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Educación*, (65), 161-172.

Gómez, P. (2009). Procesos de aprendizaje en la formación de inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Electronic journal of research in educational psichology, 7(1)*(17), 471-498.

Hernández, A. y Quintero, A. (2009). La integración de las TIC en el currículo: necesidades formativas e interés del profesorado. *REIFOP, 12*(2), 103–119.

Haciomeroglu, E., Bu, L., y Haciomeroglu, G. (2010). Integrating technology into mathematics education teacher courses. En *Proceedings of the First North American GeoGebra Conference 2010.* (pp. 27-32). NY: Ithaca College

Lupiáñez, J. L., & Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA 3(1)*, 35-48.

Magallanes E., Briceño E y Ku, D. (Aceptado). Medición de la competencia mediática en alumnos de la Maestría en Matemática Educativa (UAZ) o Yo, ¿Robot? *Revista Temas de Ciencia y Tecnología, (21)63,*

Mishra, P. y Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054.

Rojano, M. T. (2006). Los principios básicos de los modelos EFIT y EMAT. En Rojano Ceballos, M. T. (Ed.), *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula* (pp. 15-23). México: Secretaría de Educación Pública

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(33), 11-27.

Vitabar, F. (2011). Cursos de GeoGebra para profesores en Uruguay: valoraciones, padecimientos y reclamos. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Stewart, J. (1999). *Cálculo Diferencial e Integral.* México: International Thompson Editores.

Formas de razonamiento de profesores de bachillerato al resolver problemas sobre lugares geométricos con GeoGebra

ORTEGA-MORENO, Francisco, REYES-RODRÍGUEZ, Aarón y VARGAS-ALEJO, Verónica

F. Ortega[1], A. Reyes[2] y V.Vargas[3]

[1]Universidad Tecnológica de Nezahualcoyotl
[2]Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
[3]Universidad de Guadalajara

aaronr@uaeh.edu.mx

C. Cristóbal, M. Olvera, V. Vargas (Dirs.) Educación para la interdisciplinariedad. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

The systematic use of Dynamic Geometry Systems (DGS) can promote integration of learning scenarios useful for building dynamic models associated with analytic geometry problems. Performing accurate draws, measuring attributes, identifying relationships between mathematical objects, formulating conjectures, proposing new problems, looking for justifications and communicating result are mathematical activities that can be enhanced with the use of GeoGebra. In this study we analyze and document how the systematic use of GeoGebra can influence the ways of thinking of six high school mathematics teachers, when they explored and solved problems about loci, which can be found in commonly used textbooks. Collected data were analyzed from a socioconstructivist epistemological perspective as well as from a didactical view that privileges development of mathematical understanding through problem solving. The analysis units were the reasoning sequences constructed by the participants during a problem solving seminar. The main results are that participants exhibited exploratory ways of reasoning that allowed them discover serendipitous relations between geometric objects and generate mathematical ways of thinking. Those discoveries were grounded on the use of auxiliary objects, which originated sub-configurations through which relationships between geometric objects were made explicit when teachers dragged relevant points into a dynamic configuration.

Tecnología Digital, Resolución De Problemas, Razonamiento, Lugares Geométricos, Profesores

1. Introducción

El uso de las tecnologías digitales puede promover formas de razonar al resolver problemas matemáticos que difieren de aquellas que se llevan a cabo al trabajar con otras herramientas (papel y lápiz, manipulativos físicos, entre otras), debido a que el conocimiento humano es un producto de la interacción entre nuestras estructuras mentales y las acciones que llevamos a cabo al resolver problemas con los artefactos o tecnologías, materiales o simbólicas, disponibles en un entorno sociocultural (Vygotsky, 1962, 1978). Es decir, cualquier actividad cognitiva es una actividad mediada por las herramientas o artefactos utilizados (Werstch, 1991). En este sentido, las herramientas influyen en las formas de pensar y razonar de las personas, ya que registros de representación tales como palabras, dibujos, símbolos alfanuméricos, gráficas, configuraciones dinámicas, tablas, entre otros, permiten externalizar y organizar ideas, así como reflexionar acerca de nuestros procesos de pensamiento (Pea, 1987; Koehler y Mishra, 2009). Es decir, estos medios representacionales son recursos mediadores para dar sentido o significado a los objetos matemáticos (Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2008).

Las herramientas que se utilizan para realizar cualquier actividad influyen en nuestras formas de actuar y pensar, en ocasiones sin que lo percibamos, ya que su uso sistemático moldea nuestros recursos mentales, amplificando y reorganizando diversos procesos cognitivos (Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2008). Por ejemplo, la escritura es una herramienta mediante la cual hemos *amplificado* algunas limitaciones biológicas de nuestra memoria (recordar una extensa lista de productos) y que nos ha permitido *reorganizar* procesos de reflexión acerca de nuestras formas de pensar y razonar que no serían posibles sin esta herramienta. Al disponer de un texto, podemos analizar lo escrito y así modificar y refinar los pensamientos e ideas plasmados en el papel o en la pantalla de una computadora, tableta o Smartphone. Este proceso de reflexión transforma la arquitectura funcional del cerebro e impacta profundamente en la actividad cognitiva que desarrollamos (Donald, 2001). Otro ejemplo de tales herramientas es el sistema de numeración decimal. Por una parte, este sistema nos ha permitido amplificar las capacidades de cálculo que podemos realizar con él, y por otra ha moldeado (reorganizado) las formas en que realizamos cálculos aritméticos (Kaput y Schorr, 2008, p. 212).

Las representaciones generadas en un medio digital como los *Sistemas de Geometría Dinámica* (SGD) se caracterizan por la posibilidad que tiene un usuario de relacionarlas entre sí, de modo que un cambio en una de ellas se verá reflejado, en tiempo real, en las otras representaciones con las que la primera se encuentra ligada, manteniéndose cierto conjunto de relaciones estructurales definidas al momento en el que se elaboró una construcción dinámica (Moreno-Armella, 2002). En este sentido, se dice que las representaciones creadas con software como GeoGebra, son *representaciones ejecutables* (Moreno-Armella, Hegedus y Kaput, 2008). En otras palabras, las representaciones ejecutables son aquellas que, por un lado, externalizan funciones cognitivas, principalmente algorítmicas, que anteriormente eran del dominio exclusivo de los seres humanos; por ejemplo, la revisión ortográfica que realiza un procesador de textos; el trazo de una gráfica que realiza un software cuando el usuario introduce una ecuación y presiona la tecla enter; las operaciones sobre representaciones algebraicas que realiza un CAS para encontrar las raíces de una ecuación o para obtener derivadas e integrales de funciones, cuando se proporciona como dato la expresión algebraica de la ecuación o la función; la obtención de la ecuación de una recta que un usuario dibuja en un sistema coordenado; el procesamiento numérico para mostrar el resultado con cantidades reales o complejas, entre otras. Por otro lado, las representaciones ejecutables permiten visualizar acciones que antes sólo ocurrían en nuestra imaginación, como la realización de un zoom sobre una gráfica, el trazo de un lugar geométrico que describe un punto, o la aplicación de una transformación rígida a un objeto geométrico, etcétera (Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2008).

Dada la relevancia de las tecnologías digitales como medios amplificadores y reorganizadores de la cognición humana, resulta importante reflexionar acerca de cómo transformar los ambientes de aprendizaje aprovechando las características de estas tecnologías (Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2016). Algunas preguntas relevantes al respecto son: ¿Cómo se extienden las aproximaciones para resolver problemas al usar GeoGebra, con respecto al uso de otras herramientas? ¿Qué formas de razonamiento emergen como resultado de usar GeoGebra como una herramienta para resolver problemas? ¿Cuáles son las características de las soluciones y del proceso de razonamiento que desarrollan profesores de bachillerato al resolver problemas sobre lugares geométricos con GeoGebra?
Nos interesa identificar cuáles son las características del conocimiento que construyen profesores de bachillerato, particularmente qué tipo de procesos de razonamiento llevan a cabo, cuando se les ofrecen oportunidades para aprender matemáticas significativas, con el uso de artefactos digitales, en formas que se espera que ellos implementen con sus estudiantes.

Lo anterior es importante porque las conceptualizaciones de las matemáticas y su aprendizaje que los profesores sostienen influyen en el tipo de actividades que proponen en el aula y en la forma en que organizan el proceso de instrucción (Moreno-Armella, 1996). A su vez, las tareas y experiencias en el salón de clase moldean las características del conocimiento (conocimiento atomizado o conocimiento altamente estructurado) que los estudiantes construyen (Stein y Smith, 1998). Así, los resultados de este trabajo puede ser de utilidad para diseñar e implementar programas de formación que promuevan entre los profesores una conceptualización de las matemáticas como una actividad de búsqueda y sistematización de patrones (Moreno-Armella y Santos-Trigo, 2008) y al aprendizaje como un proceso de resolución de problemas, cuya finalidad es el desarrollo de significados para las ideas matemáticas. Estas dos metas constituyen una primera etapa de un proyecto de cambio en la didáctica en los salones de clase.

2. Revisión de la literatura

Diversos trabajos de investigación en educación matemática han aportado evidencia de que el uso de SGD puede permitir a los estudiantes desarrollar una actividad cognitiva diferente a aquella que se lleva a cabo al resolver problemas en ambientes de papel y lápiz (Espinosa-Pérez, 2012). Al utilizar herramientas como GeoGebra es posible utilizar heurísticas que no se pueden implementar en otros ambientes, por ejemplo, la *heurística movimiento controlado*, que consiste en restringir el movimiento de un punto a un segmento, recta, circunferencia, polígono o cónica, la cual es indispensable para utilizar la *heurística de visualizar lugares geométricos*. La utilización de un SGD para resolver problemas geométricos favorece la utilización de diferentes elementos del pensamiento matemático, entre los que se encuentran: (1) interpretar los trazos realizados, (2) utilizar heurísticas ligadas al movimiento y al arrastre, (3) explorar en tiempo real el movimiento de objetos geométricos y (4) comunicar resultados (Espinosa-Pérez, 2012).

En la literatura se resaltan algunas ventajas de usar SGD en actividades de resolución de problemas, entre las que destacan facilidades para representar dinámicamente condiciones de un problema en términos de objetos y relaciones matemáticas (Santos-Trigo y Reyes-Rodríguez, 2011); capacidad para identificar y explorar dinámicamente relaciones útiles en la generación de conjeturas a partir de información visual (arrastre) y empírica (medición); facilidad para implementar heurísticas generales como *considerar el problema resuelto* y *relajar condiciones de un problema*, o de heurísticas particulares como encontrar el lugar geométrico de puntos móviles. Por otra parte, el uso de un SGD favorece la construcción de conexiones entre distintos contenidos matemáticos, por ejemplo, el uso de cónicas como herramientas para resolver problemas y la generación e interrelación entre diferentes tipos de argumentos (visuales, empíricos, transformacionales, deductivos) o evidencia para justificar resultados matemáticos (Arzarello et al., 2002).

Se han caracterizado también diferentes tipos de arrastre de puntos u objetos que puede realizar un usuario, el arrastre directo o el indirecto, que se produce como consecuencia del arrastre directo de otro elemento (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010). En otros estudios, el arrastre se reconoce como una herramienta cognitiva que permite la construcción de significados mediante la visualización de invariantes o patrones asociados con conceptos matemáticos (Leung, 2008); mientras que en otros, se aporta evidencia de que el uso sistemático del arrastre y la visualización de lugares geométricos proporciona oportunidades para crear vínculos entre el razonamiento empírico y el razonamiento deductivo (Guven, 2008).

El empleo sistemático de diferentes herramientas digitales para resolver problemas requiere que los profesores conozcan el potencial de esos artefactos y sean capaces de identificar estrategias que les permitan utilizarlos en sus prácticas de enseñanza, además es importante que ellos mismos hayan experimentado cómo utilizar esta herramienta para resolver problemas, participando en actividades matemáticas que involucran explorar relaciones, conjeturar y justificar resultados (Cullen et al., 2013) y, con base en este conocimiento, construir e implementar rutas potenciales de instrucción que apoyen el aprendizaje de sus estudiantes (Santos-Trigo y Barrera-Mora, 2011). Otros estudios resaltan la importancia de incorporar diferentes herramientas tecnológicas (SGD, CAS, hojas de cálculo; calculadoras, apps como Photomath, entre otros) en los programas de formación de profesores ya que además de ejemplificar cómo usar la tecnología en resolución de problemas, se puede mostrar cómo usarla en los procesos de enseñanza y esto, a su vez, puede ayudar en la construcción de puentes sólidos entre los profesores y los estudiantes, y una vez construidos esos puentes, los estudiantes pueden participar en actividades cognitivas que mejoren el desarrollo de sus habilidades en resolución de problemas (Karatas, 2011).

Santos-Trigo y Camacho-Machin (2011) reportan el trabajo desarrollado por profesores de nivel bachillerato al usar diversas herramientas tecnológicas para resolver problemas matemáticos. Los autores identificaron y caracterizaron episodios o etapas que organizan y estructuran el proceso de resolución de problemas con base en las cuatro fases de Polya (2009), enfatizando los diferentes acercamientos de solución con la finalidad de caracterizar cómo los profesores usan de manera sistemática un SGD. Se destaca que en el desarrollo de los episodios se deben proponer o formular y dar seguimiento a preguntas relevantes que favorezcan la utilización de diversas representaciones de un problema. Las etapas del modelo son las siguientes: (1) comprensión del problema, (2) exploración del problema, (3) construcción de diferentes aproximaciones para resolver el problema y finalmente la última etapa, (4) integración de conocimientos.

Con base en la revisión de la literatura, se identificó que los trabajos han enfatizado la existencia de diferencias sustanciales entre las características del conocimiento que estudiantes o profesores construyen con un SGD o la combinación de diversas tecnologías digitales, sin embargo, consideramos que es necesario realizar investigación en la que se profundice en los procesos de razonamiento que estudiantes o profesores desarrollan al resolver problemas geométricos, enfatizando el efecto amplificador y reorganizador de la herramienta sobre las formas de razonamiento.

3. Elementos teóricos

Recientemente, investigadores en educación matemática han tendido a combinar más de una perspectiva para analizar el comportamiento de profesores al incorporar la tecnología como parte de su actividad profesional, ya que se ha considerado que algunas dificultades relacionadas con la implementación de las tecnologías digitales en el aula pueden tener su origen en la falta de una base teórica para enmarcar el uso de estas herramientas en el salón de clase (Mishra y Koehler, 2006). Al respecto, en este trabajo utilizamos diversos elementos teóricos, para sustentar la elección de las tareas, la organización del escenario de instrucción y el análisis de los resultados.

En primer término, consideramos que las matemáticas son la ciencia de los patrones (Steen, 1988) y que aprender matemáticas consiste en adquirir una disposición a ver el mundo a través de los lentes de un matemático (Schoenfeld, 1992), más que únicamente memorizar hechos y adquirir fluidez para llevar a cabo algoritmos o procedimientos rutinarios. Esta disposición incluye llevar a cabo actividades entre las que se incluye experimentar, explorar relaciones matemáticas, formular conjeturas, justificar y comunicar resultados, así como resolver problemas por diferentes rutas (Polya, 2009) y desarrollar una actitud inquisitiva; es decir, habilidad para formular sistemáticamente preguntas o nuevos problemas (Santos-Trigo, 2007; Berger, 2014). Esta perspectiva ontológica fue de utilidad para determinar las características de las tareas, así como del escenario de instrucción; los cuales debían favorecer el que los participantes llevaran a cabo “intentos sistemáticos, basados en la observación y experimentación para determinar la naturaleza o principios de regularidades en sistemas definidos axiomática o teóricamente” (Schoenfeld, 1992, p. 335). En pocas palabras, al abordar las tareas los profesores debieran llevar a cabo actividades de búsqueda de patrones sobre la base de evidencia empírica proporcionada por los recursos de GeoGebra.

También adoptamos una postura epistemológica de corte socio constructivista (Simon, 1994), por lo cual suponemos, por un lado, que cada individuo construye su propio conocimiento, más que absorberlo o copiarlo de otros, independientemente del contexto, o la presencia y naturaleza del proceso de enseñanza, al enfrentar problemas que desequilibran sus estructuras cognitivas. Por otra parte, también suponemos que el aprendizaje es un proceso que se lleva a cabo en una comunidad donde se construyen significados o entendimientos considerados-como-compartidos (Cobb et al., 1991).

Dado que el aprendizaje es un proceso social, el medio cultural y sus producciones influyen en las características del conocimiento que cada persona construye activamente (Werstch, 1991). Particularmente, la naturaleza de la actividad cognitiva se encuentra ligada a la generación y uso de representaciones semióticas (Moreno-Armella y Hegedus, 2009, p. 501), dado que estas estructuras simbólicas constituyen un medio que permite a los seres humanos pensar con, y a través de ellas. Las herramientas materiales y simbólicas impactan en la mente, rediseñando su arquitectura funcional mediante el efecto de los recursos que nos proporcionan para actuar sobre el mundo y las regulaciones que imponen a nuestro pensamiento acerca del mundo (Moreno-Armella, Hegedus y Kaput, 2008; Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2016).

Estos supuestos epistemológicos se aplicaron tanto para determinar las características del contexto de instrucción, como el proceso de análisis de la información. En lo que respecta a la organización del contexto de instrucción, los profesores debían estar inmersos en una comunidad de práctica (el seminario de resolución de problemas), donde se valora el desarrollo de hábitos y disposición para ver a los problemas o situaciones en términos matemáticos. Es decir, se presentaron los problemas, sin explicar previamente cómo obtener las respuestas, y se esperaba que además de obtener la solución, los participantes reflexionaran acerca de le legitimidad de las soluciones y de las estrategias que implementaron (Lampert, 1990). En lo que respecta al análisis de los datos, la perspectiva socioconstructivista fue de utilidad para centrar la atención en cómo características específicas de las representaciones generadas con GeoGebra, particularmente la propiedad de ejecutabilidad, influye en las formas de razonamiento de los participantes y en el tipo de significados considerados-como-compartidos (taken-as-shared) que emergen dentro de la comunidad de práctica.

Por otra parte, desde una perspectiva didáctica, consideramos que el proceso de instrucción tiene la finalidad de influir sobre las características del aprendizaje que las personas construyen. Particularmente, estamos interesados en que los profesores desarrollen un *entendimiento profundo* de las ideas matemáticas que enseñan (Hiebert, et al. 1997), lo que implica la construcción de conexiones significativas entre un conocimiento nuevo y conocimientos previos, para originar *organizaciones locales* de ideas, representaciones, procedimientos, entre otros, a partir conocimientos desarticulados (Moreno, 1996); o para robustecer y refinar organizaciones locales de conocimientos previas. Estas organizaciones locales se crean a partir de los procesos de reflexión y comunicación de ideas que se llevan a cabo durante procesos de resolución de problemas durante los cuales se generan conceptos o ideas nuevas al utilizar los recursos o conocimientos previos que poseen.

Al respecto, consideramos que un concepto o idea se ha entendido cuando se ha almacenado en la memoria a largo plazo y existen mecanismos que permiten recuperar ese conocimiento con la finalidad de utilizarlo. Los objetos matemáticos adquieren sentido y significado cuando se *utilizan* para resolver algún problema o satisfacer alguna necesidad, ya sea práctica o teórica; por ejemplo, los logaritmos surgieron para satisfacer la necesidad de realizar operaciones aritméticas complejas con mayor facilidad; mientras que la definición aritmética de límite se creó con la finalidad de sustentar rigurosamente diversos resultados del cálculo.

Dado que sostenemos una perspectiva didáctica basada en la resolución de problemas, esperamos que los participantes generen por sí mismos algunas ideas o herramientas matemáticas, pero también promovemos que consulten hechos, definiciones o teoremas de fuentes como Wikipedia para recuperar conocimientos institucionalmente constituidos, con la finalidad de que puedan integrar esos conocimientos en organizaciones locales de conocimientos.

Así, nos alejamos de la perspectiva cultural tradicional que moldea la experiencia escolar, en la cual “*hacer* [énfasis en el original] matemáticas significa seguir las reglas establecidas por el profesor; *conocer* [énfasis en el original] matemáticas significa recordar y aplicar la regla correcta cuando el maestro formula una pregunta; y donde *la verdad matemática* [énfasis en el original] se determina a través de la ratificación de una respuesta por parte del profesor” (Lampert, 1990, p. 32). Es decir, proponemos un cambio en las normas sociales convencionales del salón de clase, permitiendo nuevas formas de interacción entre la persona que aprende y el conocimiento institucionalmente constituido.

Desde una perspectiva cultural tradicional, generalmente las definiciones o teoremas se almacenan en la memoria a largo plazo como información puramente anecdótica que difícilmente se pueden transferir a contextos diferentes a aquellos en los que se generó. Por ejemplo, en Reyes-Rodríguez (2009) se aporta evidencia de que profesores, formados en una perspectiva cultural tradicional, quienes conocían la definición de parábola, así como la definición y las propiedades de la mediatriz de un segmento, no fueron capaces de utilizar ese conocimiento para demostrar que un punto en una configuración dinámica describía una parábola. En contraste, profesores quienes consultaron resultados matemáticos relacionados con triángulos equiláteros en Wikipedia, particularmente el teorema de Viviani, con la finalidad de encontrar teoremas que les permitieran generar varias formas de construir un triángulo equilátero con Geogebra, fueron capaces de almacenar en la memoria a largo plazo y transferir ese conocimiento en la solución de otros problemas (Santos-Trigo y Reyes-Rodríguez, 2016). En resumen, permitir que los estudiantes revisen conceptos o resultados matemáticos de diversas fuentes (impresas o electrónicas) no se contrapone con el desarrollo de organizaciones locales de conocimiento y de entendimiento matemático.

En lo que concierne a los procesos de razonamiento, concebimos a este concepto (el razonamiento) como la línea de pensamiento que una persona sigue para producir afirmaciones y obtener conclusiones al resolver un problema (Lithner, 2008). Una secuencia de razonamiento se puede pensar como una gráfica dirigida en la que cada vértice representa un estado momentáneo de nuestro conocimiento sobre un problema. Cada arista en la gráfica representa el tránsito desde un estado de conocimiento a otro. Una razón es, entonces, la justificación que sustenta la transición entre dos vértices de la gráfica entre los cuales existe una arista. Dado que, no es posible tener acceso directo a los procesos de pensamiento de las personas, se tomará como indicador de los mismos a las acciones que realizan sobre ciertas representaciones externas, plasmadas en sus explicaciones orales o en sus producciones escritas.

4 Metodología

Este trabajo forma parte de un proyecto amplio cuyo objetivo es analizar las características del conocimiento y las formas de razonamiento que profesores de bachillerato construyen al resolver problemas con el uso sistemático de tecnologías digitales. Estamos interesados, particularmente, en los procesos de razonamiento que emergen al resolver problemas sobre lugares geométricos, mientras se utiliza de forma sistemática el software GeoGebra. Analizamos las secuencias de razonamiento de un grupo de seis profesores, quienes trabajaron tres horas a la semana durante un semestre en un seminario de resolución de problemas (ocho sesiones), el cual fue coordinado por dos investigadores.

Los participantes en el estudio contaban con formaciones profesionales diversas: licenciatura en matemáticas, ingeniería industrial, ingeniería electrónica, ingeniería en computación, y licenciatura en educación media. Todos los participantes tenían experiencia docente en bachillerato, excepto uno de ellos, quien sólo había impartido asesorías individuales de matemáticas.

Únicamente tres profesores habían usado GeoGebra previamente y por esta razón se implementó una sesión introductoria en la que se ejemplificaron las principales funcionalidades de esta herramienta, enfatizando la utilidad de recursos tales como el *movimiento controlado* y el comando *Lugar Geométrico*, ya que en diversos trabajos se ha demostrado la utilidad de ambas herramientas en el descubrimiento y generación de resultados geométricos, tanto en estudiantes como en profesores de matemáticas de diversos niveles educativos (Espinosa-Pérez, 2012). Los participantes contaron con acceso a Internet para realizar consultas sobre algún concepto que no recordaran, sobre todo en sitios como Wikipedia (https://es.wikipedia.org/) o utilizar alguna aplicación de acceso libre en línea, como el CAS WolframAlpha (https://www.wolframalpha.com/).

Durante el seminario se abordaron cuatro problemas sobre lugares geométricos, adaptados de problemas de libros de texto clásicos de geometría analítica, utilizados en diversas instituciones de nivel bachillerato en México (Kindle, 1970; Lehmann, 1990) y de un artículo de investigación en educación matemática (Glaister y Glaister, 2006). En este reporte se analizan los procesos de razonamiento que emergieron cuando los profesores trataron de resolver un problema que se abordó durante la quinta y sexta sesiones. El problema consiste en identificar cuál es el lugar geométrico de un punto *P* que es el centro de una circunferencia *c*, la cual es tangente a la recta *l*, cuya ecuación es x=-1, y a la circunferencia c_1 con centro en (2,0) y radio uno (adaptado de Glaister y Glaister, 2006). Para resolver el problema los profesores trabajaron en parejas y posteriormente realizaron una exposición plenaria del proceso de solución. Los instrumentos de recolección de información incluyeron archivos electrónicos de GeoGebra, producciones escritas elaboradas por los profesores, un reporte de sesión en el que expresaron sus reflexiones acerca de las soluciones propuestas en el seminario, así como videograbaciones de las presentaciones plenarias de las soluciones. La unidad de análisis fueron las secuencias de razonamiento y dentro de estas secuencias se identificaron las estrategias de resolución de problemas utilizadas.

La línea general de solución del problema, en un ambiente de papel y lápiz, consiste en representar algebraicamente las relaciones geométricas entre el punto *P*, y los otros objetos involucrados en el problema (rectas y circunferencias), con la finalidad de encontrar una ecuación del lugar geométrico que describe el punto *P* en el plano. Algunos autores de libro de texto (Lehmann, 1990), resumen el proceso para encontrar la ecuación de un lugar geométrico en cuatro pasos:

1. Se supone que el punto P, de coordenadas (x,y) es un punto *cualquiera* [énfasis en el original] que satisface la condición o condiciones dadas, y, por tanto, un punto del lugar geométrico.

2. Se expresa, analíticamente, la condición o condiciones geométricas dadas, por medio de una ecuación o ecuaciones en las coordenadas variables x, y.

3. Se simplifica, si hace falta, la ecuación obtenida en el paso 2 de tal manera que tome la forma (1). [La forma (1) se refiere a la ecuación $f(x,y)=0$].

4. Se comprueba el recíproco: sean (x1, y1) las coordenadas de cualquier punto que satisfacen (1) de tal manera que la ecuación:

   f(x1, y1)=0 (2)

   Es verdadera. Si de (2) se puede deducir la condición analítica de la condición o condiciones geométricas dadas, cuando se aplica al punto (x1, y1), entonces (1) es la ecuación del lugar geométrico que se buscaba. (p. 51)

En la práctica se omite, generalmente el paso 4, ya que la repetición del trabajo del paso 3 al paso 2 es, generalmente inmediata. Nótese en el paso 1 que, al tomar P como un punto *cualquiera* [énfasis en el original] del lugar geométrico, estamos considerando *todos* [énfasis en el original] los puntos del lugar geométrico. (p. 51)

Aplicaremos los primeros tres pasos del procedimiento anterior para encontrar la ecuación del lugar geométrico del problema que nos ocupa, para analizar el proceso de razonamiento involucrado, el cual se contrastará posteriormente con los procesos de razonamiento que emergieron al resolver el problema con GeoGebra.

1. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico, el cual debe ser tangente a la recta l, de ecuación x=-1 y a la circunferencia c_1 con centro en (2,0) y radio uno.

2. Es importante observar que la circunferencia c_1 se encuentra a la derecha de la recta l, entonces el punto P debe estar en el primer o cuarto cuadrantes ya que, en caso contrario, la circunferencia c no podría ser tangente de forma simultánea a c_1 y l. Como la recta l, de ecuación x=-1 es paralela al eje horizontal, y debido a la condición de tangencia, debe de ser perpendicular a un radio de la circunferencia c, entonces el radio de c es igual a x+1, ya que la circunferencia c tiene centro en el punto de coordenadas (x,y). Por otra parte, el punto de tangencia de las circunferencias c y c_1 se encuentra sobre la recta que une sus centros. Además, se tiene que, cuando las circunferencia c y c_1 son tangentes exteriormente, el radio de c también debe ser igual a la distancia entre los puntos (x,y) y (2,0) menos una unidad, la cual corresponde al radio de c_1. Entonces por las condiciones anteriores se tiene que $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-1=x+1$. Puede darse el caso de que la circunferencia c_1 sea tangente interiormente a la circunferencia c, en este caso, el radio de c es igual a $\sqrt{(x-2)^2+y^2}+1$.

3. Elevando al cuadrado la ecuación que se obtiene al considerar que las circunferencias son tangentes exteriormente se tiene que $(x+2)^2=(x-2)^2+y^2$, y de ahí que $y^2=8x$, la cual representa la ecuación de una parábola.

El proceso de razonamiento para resolver el problema de la manera anterior requiere de:

1. Formarse una imagen mental o realizar un bosquejo en papel del "problema resuelto", el cual sirve de apoyo al proceso de representar algebraicamente las relaciones geométricas establecidas en el enunciado del problema. Un bosquejo siempre es inexacto, en el sentido de que las representaciones en papel y lápiz no son capaces de externalizar las relaciones entre los objetos bosquejados, por ello, el estudiante debe tener en mente esas relaciones (tangencia con la recta y la circunferencia), y recuperarlas u obtener relaciones equivalentes o asociadas cuando se requiera, durante el proceso de solución. La elaboración del bosquejo requiere también de conocimientos previos sobre el plano coordenado, sobre cómo ubicar puntos en éste y sobre cómo graficar ecuaciones lineales, y saber que este tipo de ecuaciones representan rectas.

2. Representar algebraicamente las relaciones geométricas entre los objetos presentes en el bosquejo. Para llevar a cabo lo anterior, son necesarios conocimientos previos sobre tangencia entre rectas y circunferencias. Por ejemplo, los estudiantes deben saber que si una recta y una circunferencia son tangentes, entonces el radio de la circunferencia que pasa por el punto de tangencia debe ser perpendicular a la recta tangente; además, que si dos circunferencias son tangentes, entonces el punto de tangencia se encuentra sobre la recta que une los radios de tales circunferencias. Después, estos conocimientos geométricos se deben representar algebraicamente, lo cual, requiere interpretar esas relaciones en términos de igualdades entre distancias. En este caso, la condición de tangencia entre la recta l y la circunferencia c se tradujo en la expresión algebraica x+1, que representa la distancia entre el centro de la circunferencia c y la recta l. Posteriormente, la relación de tangencia entre las circunferencias c y c_1 se tradujo en la expresión $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-1$. Finalmente, como ambas expresiones representan en radio de la circunferencia c, se obtiene la ecuación $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-1=x+1$.

3. Simplificar las expresiones anteriores hasta llegar a una ecuación que represente un objeto geométrico conocido (recta, circunferencia, elipse, hipérbola, parábola). Este paso requiere que el estudiante sepa llevar a cabo manipulaciones simbólicas y que sepa reconocer ecuaciones prototípicas de rectas (ecuaciones lineales), o cónicas (ecuaciones cuadráticas).Observación: en la mayoría de los cursos de geometría analítica generalmente se considera únicamente el caso de tangencia externa de circunferencias, es raro que se aborde el caso de que una circunferencia sea tangente interiormente a otra circunferencia.

5. Resultados

En este apartado se describen los procesos de razonamiento exhibidos por cada una de las parejas que participaron en la investigación. Al final del apartado se realiza un contraste entre estas formas de razonamiento y aquellas en un escenario de papel y lápiz, y de esta manera identificar algunas posibles ventajas que involucra el uso de un sistema de geometría dinámica en el proceso de resolución de problemas matemáticos. La solución del problema con GeoGebra involucra, en términos generales, la construcción de un punto P que satisfaga las condiciones expresadas en el enunciado del problema: P debe ser centro de una circunferencia c, la cual es tangente a una recta l y a una circunferencia c_1, y una vez construido P, determinar el lugar geométrico que describe dicho punto. Para cada una de las parejas se describe el proceso de solución identificando diferentes episodios que serán de utilidad para reconocer la secuencia de razonamiento utilizada para resolver el problema con ayuda del software. Todos los participantes construyeron, en primer lugar, los elementos dados en el enunciado problema. Introdujeron la ecuación $x = -1$ en el *campo de entrada* del software, así como las coordenadas (2,0) para crear el punto A, y posteriormente con el comando Circunferencia (centro, radio), trazaron la circunferencia c_1, con centro en A y radio 1.

5.1. Solución de Eva y Natalia

5.1.1. Primer episodio

Construcción de una solución parcial. Las profesoras relajaron las condiciones del problema y construyeron una circunferencia tangente a c_1, pero no tangente a la recta $x = -1$. Para construir la solución parcial colocaron un punto B sobre la recta de ecuación $x = -1$ y por ese punto trazaron una perpendicular a dicha recta. Colocaron un punto H sobre c_1 y trazaron las rectas AH y BH.

El punto *I*, intersección de *AH* y la perpendicular a x=-1, es una solución parcial, ya que es centro de una circunferencia tangente a c_1, pero no a la recta *x*=-1. Construyeron la circunferencia con centro en *I* y radio *IH*.

5.1.2. Segundo Episodio

Verificación visual de que se pueden satisfacer todas las condiciones establecidas en el problema. Se arrastró al punto *B* sobre la recta $x = -1$ y se observó que, para cierta posición de *B*, la circunferencia que es solución parcial también es tangente a la recta $x = -1$. Es decir, un integrante de la familia de soluciones parciales satisface todas las condiciones del problema.

5.1.3. Tercer Episodio

Identificación de objetos auxiliares que ayuden a completar la condición faltante de la solución parcial (tangencia con la recta *x* = -1). Las participantes identificaron que *J*, una de las intersecciones de la circunferencia que es solución parcial y la perpendicular a la recta *x*=-1, puede aportar información relevante respecto de cómo completar la condición faltante, ya que en el caso de satisfacerse todas las condiciones, el punto *J* sería el punto de tangencia con la recta *x*=-1.

5.1.4. Cuarto Episodio

Reconocimiento de la ruta descrita por el elemento auxiliar. Las profesoras activaron el rastro que describe *J* y arrastraron el punto *B* con el objetivo de identificar si esta ruta es un objeto geométrico tal como una recta, una circunferencia o alguna otra cónica. Visualmente identificaron que la ruta descrita por *J*, con respecto del punto *B* consiste de dos semirrectas perpendiculares.

5.1.5. Quinto Episodio

Identificación de los elementos que permitan la construcción del lugar geométrico descrito por el punto *J*, con alguno de los comandos para trazar cónicas (recta, circunferencia, elipse, hipérbola, parábola, o cónica por cinco puntos). Es importante notar que se requiere el uso de alguno de estos comandos, ya que los objetos resultantes se pueden intersecar entre sí, lo cual no es posible cuando alguno de los objetos que se busca intersecar es una traza o un lugar geométrico. Las profesoras se dieron cuenta de que es posible construir las rectas que determinan el lugar geométrico de *J*, con respecto de *B*, a partir de una solución parcial arbitraria, trazando simplemente la recta *JH*.

5.1.6. Sexto Episodio

Construcción de la solución. El punto *K*, intersección de la recta *JH* y la recta *x*=-1, es el punto de tangencia de la circunferencia que satisface las condiciones del problema y a partir de ese punto se puede construir el centro de la circunferencia *L*, como intersección de la recta *AH* y una perpendicular a *x*=-1 que pase por *K*. Finalmente, se traza el lugar geométrico de *L*, con respecto del punto H. Este lugar geométrico, visualmente parece dos mitades de parábola.

Comentario: el proceso de razonamiento seguido por estas profesoras consistió en generar una solución parcial (SP), en realidad una familia de soluciones parciales, verificar visualmente, usando el arrastre, que un integrante de la familia de SP satisface todas las propiedades del problema, e identificar un punto en la configuración que ayude a completar las condiciones de la SP, en este caso el punto *J*, el cual en algún momento se transforma en el punto de tangencia.

Posteriormente, las participantes identificaron que este punto describe un lugar geométrico fácilmente reconocible (dos semirrectas perpendiculares), el cual al intersecarse con la recta x=-1, proporciona el punto de tangencia de la solución. Fue necesario identificar relaciones entre los elementos de la configuración (una recta pasa por el punto H y el punto J de cualquier SP, y la otra recta se puede trazar con el comando perpendicular) que les permitieran trazar las rectas de forma que sea posible obtener puntos de intersección. Una vez trazado el punto de tangencia K con la recta x=-1, se construyó el centro de la circunferencia tangente y mediante el comando lugar geométrico, visualmente se identificó que el lugar geométrico que se solicita en el problema se trata de dos parábolas.

5.2. Solución de Gustavo y Miguel

5.2.1. Primer Episodio

Construcción de una solución parcial. Los participantes relajaron las condiciones del problema y construyeron una circunferencia tangente a la recta x = −1, pero que no es tangente a c_1. Para construir la solución parcial colocaron un punto B sobre la recta de ecuación $x = -1$ y por ese punto trazaron una perpendicular a dicha recta. Trazaron una perpendicular al eje horizontal por A y trazaron al punto C, intersección de las dos perpendiculares. A continuación trazaron el punto D, punto medio del segmento BC y construyeron la circunferencia con centro en D y radio DB. Esta última circunferencia es una solución parcial.

5.2.2. Segundo Episodio

Verificación visual de que se pueden satisfacer todas las condiciones establecidas en el problema. Se arrastró al punto B sobre la recta $x = -1$ y se observó que, para cierta posición de B, la circunferencia que es solución parcial también es tangente a la circunferencia c_1.

5.2.3. Tercer Episodio

Identificación de objetos auxiliares que ayuden a completar la condición faltante de la solución parcial (tangencia con la circunferencia c_1). Los participantes trazaron la recta AD, y nombraron E al punto de intersección de la recta AD y la circunferencia c_1. Como al abordar un problema anterior en el seminario, el trazo de una mediatriz había sido determinante para encontrar la solución de ese problema, trazaron la recta BE y la mediatriz de BE. Al arrastrar el punto B, observaron que cuando se satisfacen todas las condiciones del problema, el triángulo BDE y el triángulo con vértices E, A y (3,0) son isósceles y semejantes entre sí. También notaron, que cuando se satisfacen todas las condiciones del problema, los puntos E, D y (3,0) son colineales, o bien que la recta ED, para por el punto (3,0). La mediatriz que los participantes trazaron no fue de utilidad para avanzar en el proceso de solución.

5.2.4. Cuarto Episodio

Construcción de una nueva configuración dinámica en la que se mantengan las relaciones de semejanza entre triángulos, la cual conduce a la solución. Los profesores trazaron a partir de los elementos iniciales, un punto D sobre c_1, el cual controla el movimiento de la configuración, posteriormente trazaron la recta AD, donde A es el centro de c_1. A continuación trazaron la recta que une D con el punto (3,0) y llamaron E al punto de intersección de esta recta con la recta x=-1. Después trazaron una perpendicular a x=-1 por E y llamaron F al punto de intersección de esta perpendicular y la recta AD. La circunferencia con centro en F y radio FE es tangente tanto a la recta x=-1, como a la circunferencia c_1. Los profesores trazaron el lugar geométrico de F, con respecto a D y conjeturaron que se trata de una parábola.

Comentario: el proceso de razonamiento seguido por estos participantes consistió en generar una solución parcial (SP), en realidad una familia de soluciones parciales, verificar visualmente, usando el arrastre, que un integrante de la familia de SP satisface todas las condiciones del problema. A continuación, mediante el uso de trazos auxiliares (recta *AD*, punto *E*, recta *BE*, mediatriz de *BE*), algunos de los cuales les habían sido útiles para resolver otro problema (mediatriz) trataron de identificar algún punto que les ayudara a determinar cómo completar la solución. Aunque no identificaron un punto que les fuera útil, como en el caso de la solución de Eva y Natalia, pudieron identificar relaciones entre objetos geométricos, explicitadas por los trazos auxiliares tales como: (1) se completan las condiciones del problema cuando la mediatriz de BE pasa por el punto D (centro de la SP), y (2) dos trazos auxiliares (recta *BE* y recta *AD*) forman sub-configuraciones (triángulos) que mantienen una relación de semejanza cuando se satisfacen todas las condiciones del problema. A continuación, se llevó a cabo un proceso mediante el cual se construyó una nueva configuración dinámica en la que se externalizaron, mediante las representaciones del sistema, las relaciones de semejanza entre los triángulos *BDE* y el formado por los puntos *E*, *A* y (3,0), a partir del cual se obtuvo en centro de la circunferencia tangente a x=-1 y a la recta c_1, el cual describe un lugar geométrico que visualmente parece una parábola.

5.3. Solución de Carlos y Pedro

5.3.1. Primer Episodio

Construcción de elementos auxiliares. Los participantes colocaron un punto *C* sobre la circunferencia c_1 y trazaron la recta *AC*. Colocaron un punto *B* sobre la recta x=-1 y trazaron la mediatriz del segmento *BC*, así como una perpendicular a x=-1 por *B*.

5.3.2. Segundo Episodio

Formulación y verificación de una conjetura. Se formuló la conjetura de que el punto *G*, intersección de la mediatriz y la perpendicular a x=-1 por *B* es el centro de una circunferencia que satisface las condiciones del problema. Trazaron la circunferencia con centro en *G* y radio *GB*, arrastraron B y visualmente verificaron que la circunferencia con centro en *G* es tangente a x=-1, pero no siempre es tangente a la circunferencia c_1. Es decir, construyeron una familia de soluciones parciales.

5.3.3. Tercer Episodio

Identificación de un lugar geométrico útil para completar la solución parcial. Los profesores trazaron el lugar geométrico de *G*, con respecto de *B*, y visualmente conjeturaron que se trata de una parábola con foco en *C* y directriz la recta x=-1. También identificaron que la intersección entre el lugar geométrico y la recta *AC* determina el centro de la circunferencia que satisface todas las condiciones del problema.

5.3.3. Cuarto Episodio

Construcción de la solución. La construcción de la intersección entre el lugar geométrico de *G* y la recta *AC*, no se puede realizar directamente, por lo que es necesario construir la parábola como *objeto* y no como *lugar,* con el comando respectivo, para poder trazar el punto de intersección entre la cónica y la recta *AC*. Los participantes identificaron que existen dos de tales intersecciones a las que nombraron *D* y *E*, verificaron que las circunferencias centradas en esos puntos y de radio *DC* y *EC*, satisfacen las condiciones del problema (tangencia con la recta x=-1 y con la circunferencia c_1). Finalmente, trazaron los lugares geométricos de *D* y *E* y conjeturaron que se trata de parábolas.

Comentario: el proceso de razonamiento seguido por estos participantes consistió en generar trazos auxiliares (la recta *AC*, la mediatriz de *BC*, y la perpendicular a x=-1 por *B*), particularmente objetos que les han sido útiles en otros problemas como la mediatriz o perpendiculares, con la finalidad de ver si algún punto de intersección entre esos objetos era el centro de la circunferencia que soluciona el problema. Sin proponérselo de forma explícita construyeron una solución parcial, la cual a diferencia de las soluciones parciales de las soluciones expuestas con anterioridad, satisface una condición adicional, esta solución parcial siempre pasa por el punto *C* sobre c_1.

A los profesores les pareció interesante visualizar la ruta que describe el punto G, visualmente conjeturaron que se trata de una parábola, y nuevamente, sin proponérselo, generaron un objeto auxiliar (parábola con foco en *C* y directriz x=-1) que al intersecarse con otro elemento auxiliar (la recta *AC*) determinan la solución del problema. La construcción de la parábola auxiliar con el comando *Parábola* fue posible dado que se pudieron identificar, de manera visual, los elementos necesarios para construirla, en este caso el foco y la directriz.

5.3. Análisis y contraste de los procesos de razonamiento

Al construir los elementos iniciales, se identificó que la ejecutabilidad de las representaciones permitió obtener a los participantes la gráfica de una recta a partir de introducir en el campo de entrada de GeoGebra la ecuación x=1; es decir, con el uso de esta herramienta no es necesario conocer cómo graficar ecuaciones de rectas para resolver el problema, lo cual si es necesario en un ambiente de papel y lápiz. En la solución en papel y lápiz se requiere implementar la heurística de considerar el problema resuelto, lo que involucra elaborar un bosquejo inexacto y mantener en mente las propiedades geométricas de los objetos representados en el bosquejo. Por otra parte, con el uso de la herramienta se utilizó, en todos los casos, como primera aproximación, construir una solución parcial, que mediante las propiedades del arrastre se constituye en una familia de soluciones parciales.

La construcción de tales soluciones parciales involucra externalizar las relaciones entre los objetos geométricos mediante los medios representacionales de la herramienta. Con GeoGebra, los participantes apoyados por el arrastre, llevaron a cabo procesos de verificación visual de que es posible satisfacer todas las condiciones del problema, como medio para seguir avanzando en el proceso de solución. Por otra parte, la utilización de elementos auxiliares resulta de vital importancia para explicitar relaciones que de otra forma quedarían ocultas. Con el uso de GeoGebra es posible llevar a cabo formas de trabajo exploratorias, como se observa en la aproximación de Carlos y Pedro, en donde el preguntarse acerca del comportamiento de los objetos en una configuración permitió visibilizar una herramienta (la parábola) que generalmente no se utiliza para resolver problemas geométricos.

Tabla 5.1 Formas de razonamiento

Equipo/ Aspecto	**Eva y Natalia**	**Gustavo y Miguel**	**Carlos y Pedro**
Ruta de solución	1. Solución parcial (circ. tangente a c_1, pero no a $x = -1$). 2. Verificación (visual) que existe la solución. 3. Trazos auxiliares e identificación de punto relevante (que se convierte en punto de tangencia de la solución) 4. El punto relevante genera un lugar geométrico (LG) reconocible visualmente (rectas perpendiculares). 5. Trazar el LG con el comando recta a partir de los datos. 6. Construir centro de la circunferencia que resuelve el problema. 7. Determinación (visual) del LG del punto objetivo.	1. Solución parcial (circ. tangente a $x = -1$, pero no a c_1). 2. Verificación (visual) que existe la solución. 3. Trazos auxiliares e identificación de punto relevante. Uso de objetos relevantes en otros problemas (mediatriz) 4. No se identificó punto relevante, pero se descubrieron relaciones que llevan directamente a la solución (en la solución *BDE* y *EAR*, con R= (3,0), isósceles semejantes y recta *ED* pasa por *R*). 5. Construcción de los objetos que satisfacen las propiedades encontradas en el punto anterior previa. 6. Determinación (visual) del LG del punto objetivo.	1. Trazo de objetos auxiliares. 2. Formulación de una conjetura incorrecta. 3. Verificación (visual) de que la conjetura es falsa. 4. Se dieron cuenta de que habían construido una solución parcial que satisface dos condiciones (tangente a $x = -1$ y pasa por C, sobre c_1). 5. Identificación de punto relevante (que se convierte en centro de la solución). 6. Determinación (visual) del LG del punto objetivo.
Forma de razonamiento	Actividad orientada por el objetivo de construir una solución parcial, encontrar un punto relevante que describa un LG que se pueda construir como recta o cónica, a partir del cual completar la solución.	En principio buscaron construir una solución parcial para después completarla. No identificaron un punto relevante que describiera un LG (recta o cónica) para completar la solución. Los trazos auxiliares les permitieron identificar relaciones no buscadas de antemano (serendipity), en sub-configuraciones (triángulos), que les condujeron a la solución directa.	No tenían un objetivo determinado de antemano. Su actividad inicial fue completamente exploratoria al trazar elementos auxiliares. Sin proponérselo construyeron una solución parcial que satisface dos condiciones y a partir de ahí, visualizaron un punto que describe una parábola, cuya intersección con una recta lleva directamente a la solución. Fue posible construir la solución ya que el foco y directriz de la parábola fueron fácilmente identificables.
Efecto de la herramienta	El arrastre se utilizó como herramienta de verificación.	El arrastre se utilizó como herramienta de verificación. La exactitud de los trazos permitió identificar relaciones no buscadas previamente.	El arrastre se utilizó como herramienta de verificación.

Fuente: Elaboración Propia

6. Agradecimiento

Agradecemos al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y a la Secretaría de Educación Pública por el apoyo brindado para la realización de este trabajo a través del proyecto Conacyt-168543 y proyecto PRODEP UDG-PTC-1377, respectivamente.

7. Conclusiones

Los resultados del estudio ofrecen ideas importantes que pueden servir para el diseño e implementación de actividades de aprendizaje y enseñanza a partir de un problema considerado como rutinario, al abordarse con un software como GeoGebra. Sea visto como una oportunidad para conectar diferentes contenidos matemáticos a partir de la extensión y generalización de resultados, en las cuales el movimiento de los objetos matemáticos ofrece distintas maneras de estudiar conceptos. En este proceso, el empleo de heurísticas ligadas al movimiento es clave para conseguir las configuraciones dinámicas y conectar diferentes elementos de las configuraciones con sus representaciones algebraicas. Los modelos dinámicos de los problemas rutinarios que se encuentran en los libros de texto de Geometría Analítica son puntos de partida para identificar y explorar relaciones matemáticas, formular conjeturas, intentar justificarlas y comunicar resultados. Por ejemplo, los participantes construyeron un modelo dinámico basado en la heurística que consiste en arrastrar un punto sobre una circunferencia para controlar el movimiento de una recta y de forma coordinada, emplearon el comando deslizador para identificar relaciones entre los objetos geométricos de la configuración y explorar familias de secciones cónicas (parábolas, elipses e hipérbolas). Asimismo, identificaron y relacionaron el papel del deslizador con un parámetro para obtener un modelo analítico y construir de manera algebraica las cónicas.

Las propuestas curriculares generalmente se organizan en términos de principios, normas y formas de pensar que caracterizan el desarrollo y práctica de la disciplina (NCTM, 2010). ¿En qué medida los profesores siguen esos principios para interpretar los programas y orientar sus prácticas de enseñanza? En particular, ¿En qué medida se emplean y promueven actividades que fomentan el uso coordinado de la tecnología digital? Se tiene evidencia de que el uso sistemático de un SGD no solo mejora lo que los profesores hacen con el uso de papel y lápiz, sino también extiende y abre nuevas rutas de razonamiento para desarrollar conocimiento matemático. Por lo tanto, el razonamiento asociado con el uso de las herramientas digitales necesita ser caracterizado y explicitado en el currículo con el fin de que los profesores lo incorporen a sus prácticas de enseñanza.

La exploración del modelo dinámico no sólo es relevante para identificar y formular conjeturas o relaciones matemáticas, sino que favorece razonar las tareas en términos de aproximaciones gráficas y visuales sin que exista de forma explícita un modelo analítico. Existe evidencia de que la construcción de un modelo dinámico ofrece la oportunidad de explorar en tiempo real el comportamiento de algunos parámetros como resultado del movimiento. Con el uso sistemático de un SGD es posible extender el análisis a diferentes casos al mover diferentes objetos que se encuentran en un modelo dinámico inicial, por ejemplo, un punto o una recta que aparecen como fijos en un primer momento, pueden ser desplazados a otra posición sobre el plano y sus propiedades se mantendrán. En este contexto, las propuestas curriculares necesitan explicitar no sólo los cambios debido a las nuevas rutas de aprendizaje para la construcción de resultados matemáticos en las cuales es necesario explicitar las estrategias de enseñanza que ayuden a los estudiantes a incorporar el uso sistemático de las herramientas digitales en las experiencias de resolución de problemas, sino también identificar características de las tareas que ofrezcan a los estudiantes amplias oportunidades de incorporar elementos del pensamiento matemático a su aprendizaje.

8 Referencias

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. ZDM, 34(3), 66-72.

Baccaglini-Frank, A. & Mariotti, M. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 15, 225-253.

Berger, W. (2014). A more beautiful question: The power of inquiry to spark breakthrough ideas. New York, NY: Bloomsbury.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nichols, J., Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second grade mathematics project. Journal for Research in Mathematics Education, 22, 3-29.

Cullen, C. J., Hertel, J. T. & John, S. (2013). Investigating Extrema with GeoGebra. Mathematics Teacher, 107(1), pp. 68-72.

Donald, M. (1993). Origins of the modern mind. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Espinosa-Pérez, H. (2012). Resolución de problemas de geometría mediante el uso de un software de geometría dinámica: recursos, procedimientos, heurísticas y el contenido matemático. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Glaister, E. & Glaister, P. (2006). Introducing conics without eccentricity. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37(2), 235-245.

Guven, B. (2008). Using Dynamic Geometry Software to Gain Insight into a Proof. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 13, 251-262.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., y Human, P. (1997). Making sense: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth, NH: Heinemann.

Kaput, J. J., & Schorr, R. Y. (2008). Changing representational infrastructures changes most everything. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and Perspectives (Vol. 2, pp. 211-253). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Karatas, I. (2011). Experiences of Student Mathematics Teachers in Computers-Based Mathematics Learning Enviroments. International Journal for Mathematics Teaching and Learning. Recuperado el 19 de enero de 2018 de http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/karatas.pdf.

Kindle, J. H. (1970). Teoría y problemas de geometría analítica plana y del espacio (Trad. Luis Gutiérrez Díez y Ángel Gutiérrez Vázquez). México: McGraw-Hill.

Koehler, M. J. & P. Mishra (2009). What is technological pedagogical content knowledge? Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9(1), pp.60-70.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27,* 29-63.

Lehmann, C. (1990). Geometría Analítica (Díaz, R. Trad.). México: Limusa. (Primera edición 1942).

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 13, 135-157.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. Educational Studies in Mathematics, 67(3), 255-276.

Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A new framework for teacher knowledge. Teachers College Record, 108 (6), 1017-1054.

Moreno-Armella, L. & Hegedus, S. J. (2009). Co-action with Digital technologies. ZDM Mathematics Education, 41(4), 505-519

Moreno-Armella, L. (1996). Mathematics: a historical and didactic perspective. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 27(5), 633-639.

Moreno-Armella, L. (2002). Fundamentación cognitiva del currículo matemático. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas (pp. 40-66). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Moreno-Armella, L., & Santos-Trigo, M. (2008). Democratic access and use of powerful mathematics in an emerging country. In L. D. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education, 2nd Edition (pp. 319-351). New York: Taylor & Francis.

Moreno-Armella, L., & Santos-Trigo, M. (2015). The use of digital technology in mathematical practices. In L. D. English and D. Kirshner (Eds.), Handbook of International Research in Mathematics Education, 3rd Edition (pp. 595-616). New York: Roudledge.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J., & Kaput, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. Educational Studies in Mathematics, 68, 99-111.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2010) Mathematics Curriculum. Issues, Trends, and Future Directions, edited by Reys, B.J., Reys, R.E. and Rubenstein, R., The Council, Reston, VA.

Pea, R. D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. En A. Schoenfeld (Ed.), Cognitive Science and Mathematics Education (pp. 89-122). Hillsdale: Erlbaum.

Polya, G. (2009). Cómo plantear y resolver problemas (Trad. Julián Zugazagoitia). México: Trillas. (Trabajo original publicado en 1945).

Reyes-Rodríguez, A. (2009). Uso de herramientas computacionales en la resolución de problemas: implicaciones en el aprendizaje (Tesis doctoral inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.

Santos-Trigo, M. (2007). La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. Mexico: Trillas.

Santos-Trigo, M. & Barrera-Mora, F. (2011). High School Teachers Problem Solving Activities to Review and Extend Their Mathematical and Didactical Knowledge. *PRIMUS, 21* (8): 701-720.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machin, M. (2011). Framing a problem solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. Proceedings of the Seventh Conference of the European society for Research in Mathematics Education. Recuperado el 28 de noviembre de 2011, de http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/15b/CERME7-WG15B-Paper18_Camacho.pdf

Santos-Trigo, M. & Moreno-Armella, L (2016). The Use of Digital Technology to Frame and Foster Learners' Problem-Solving 2 Experiences. En P. Felmer et al. (eds.), Posing and Solving Mathematical Problems, Research in Mathematics Education. Springer.

Santos-Trigo, M. & Reyes-Rodríguez, A. (2011). Teachers' use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42 (3), 313-336.

Santos-Trigo, M. & Reyes-Rodríguez, A. (2016). The use of digital technology in finding multiple paths to solve and extend an equilateral triangle task. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(1), 58-81.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Simon, M. A. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. Educational studies in mathematics, 26(1), 71-94.

Steen, L.A. (1988). The science of patterns. *Science, 240*(29), 61-616.

Stein, M. K. & Smith M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3, 268-275.

Vygotsky, L. S. (1962). Thought and language. Cambridge, MA: MIT Press.

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of the higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wertsch, J. V. (1993). Voices of the Mind: A Sociocultural Approach to Mediated Action. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Construcción, exploración e integración de modelos dinámicos para el desarrollo profesional de profesores de matemáticas de bachillerato

OLVERA-MARTÍNEZ, María del Carmen & ALVARADO-MONROY, Angelina

M. Olvera & A. Alvarado

Universidad Juárez del Estado de Durango , Facultad de Ciencias Exactas

carmen.olvera@ujed.mx, aalvarado@ujed.mx

C. Cristóbal, M. Olvera, V. Vargas (Dirs.) Educación para la interdisciplinariedad. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

The incorporation of dynamic models in the teaching of mathematics demands that the teacher knows the handling of concepts, objects, processes and mathematical ideas that must be taught and also develops skills in the use of digital technologies for its construction. Thus, the professional development environments that promote the use of digital technologies in the analysis and reflection of mathematical contents have become increasingly relevant.

In this chapter we present a study which aim was to analyze and document the resources, strategies and ways of reasoning that high school teachers construct and develop in a technology enhanced problem-solving environment that involves the study of functions. The problem-solving tasks were designed and implemented to the participants had an opportunity to revise and extend knowledge about the definition of function, covariation and rate of change, family of functions and modeling, combining and transforming of functions and multiple representation of functions and its structure is based on four episodes of problem solving and the use of proposed digital technologies by Santos-Trigo and Camacho-Machín (2011).

During the implementation, the teachers explored dynamic constructions of the problems that allowed them observe relationships, patterns, variants and invariants among the mathematical objects involved through multiple representations; identify properties of these objects; and develop different forms of reasoning, encouraging a deep understanding of the concept of function. Likewise, the coordinated use of digital technologies allowed the participants to develop forms of reasoning that reflected a transition from the empirical to the formal reasoning. Similarly, they formulated conjectures based on visual arguments that later were supported through geometric and algebraic arguments. They also recognized and valued that the use of digital tools offers new routes to represent, explore and solve problems. Thus, the results give evidence to consider this proposal like a feasible professional development´s environments for develop mathematical abilities, deep knowledge and ways of reasoning in high school's teachers using digital technologies in problem-solving tasks.

Resolución de Problemas, Tecnología Digital, Formación de Profesores, Modelos Dinámicos

1. Introducción

En la actualidad, el uso de la tecnología digital abarca muchas de las actividades de la vida diaria y de manera paulatina ha impactado en el desarrollo del conocimiento matemático (Dick & Hollebrands, 2011). Es cada vez más evidente que el uso de la tecnología digital está cambiando la manera en que las matemáticas son enseñadas y aprendidas, ya que la disponibilidad de estas herramientas poderosas y versátiles ha posibilitado que muchas tareas matemáticas complejas sean realizadas fácilmente (Leung, 2013). Al respecto, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés, 2008) expone que la tecnología digital es una herramienta esencial para el aprendizaje de las matemáticas en el siglo XXI y promueve que tanto profesores como estudiantes deben tener acceso regular a las tecnologías que apoyan las actividades que favorecen el desarrollo del razonamiento, la comunicación y la resolución de problemas. En este sentido, incorporar el uso sistemático de tecnologías digitales en la resolución de problemas ofrece la posibilidad de examinar tareas matemáticas desde distintas perspectivas que involucran el uso de diversos conceptos, recursos y representaciones favoreciendo el desarrollo del pensamiento matemático.

Mientras que las matemáticas han sido una herramienta necesaria para avanzar en la investigación y desarrollo de nuevas tecnologías, en el aula de matemáticas hay un retraso en el aprovechamiento de las ventajas de usar la tecnología al servicio del avance del aprendizaje de las matemáticas (Dick & Hollebrands, 2011). Uno de los posibles factores es que la incorporación y el uso coordinado de diversas tecnologías digitales en el salón de clases representa un reto para los profesores, ya que requiere que éstos amplíen su conocimiento sobre el manejo de herramientas digitales y analicen los propósitos, potencialidades y limitaciones de cada una de ellas, así como los cambios que genera su uso dentro del aula. Además, la enseñanza de las matemáticas, dentro de este ambiente, demanda de los profesores un dominio profundo de los contenidos disciplinarios y también, un conocimiento que les permita tomar decisiones para promover el aprendizaje de sus estudiantes.

En este sentido, surge la necesidad de diseñar ambientes de desarrollo profesional en los cuales el profesor se enfrente a tareas que involucren la resolución de problemas con el uso sistemático de tecnologías digitales como plataformas u oportunidades para analizar conceptos y objetos matemáticos desde diferentes perspectivas. Algunas preguntas que pueden guiar investigaciones en esta dirección son: ¿Qué tipo de actividades deben proponerse a los profesores para desarrollar conocimiento matemático y habilidades en la resolución de problemas con el uso de tecnologías digitales?, ¿qué tipo de tecnologías digitales favorecen el análisis, la reflexión y la comprensión de conceptos y objetos matemáticos en los profesores?, ¿en qué medida el uso de tecnologías digitales puede promover el desarrollo de diversas formas de razonamiento y estrategias en los profesores?

Diversas propuestas curriculares en el ámbito internacional (Common Core State Standards Initiative, 2010; NCTM, 2000; 2009) consideran al concepto de función como parte central del currículo del nivel medio superior (Cooney, Beckmann, & Lloyd, 2010). La enseñanza de dicho concepto requiere que el profesor comprenda, analice y reflexione sobre las principales ideas que giran en torno a su estudio y, en general, de lo que espera que sus alumnos aprendan. Cooney et al. (2010) sugieren que el profesor debe conocer, a profundidad, cinco ideas fundamentales sobre funciones: el concepto de función, covariación y tasa de cambio, familia de funciones, combinación y transformación de funciones y sus múltiples representaciones. Cuando se involucra el uso de tecnologías digitales en la resolución de problemas sobre funciones, se generan diversas oportunidades para analizar, presentar, identificar y explorar relaciones, conexiones, variantes e invariantes. Por lo anterior, resulta importante incluir dentro de las actividades de los ambientes de desarrollo profesional docente de nivel medio superior el estudio del concepto de función enfatizando, con base en las sugerencias de las propuestas curriculares actuales, en la resolución de problemas y la incorporación de tecnologías digitales.

En este sentido, resulta relevante especificar cómo es entendida la resolución de problemas en este estudio. De acuerdo con Lesh y Zawojewski (2007), la resolución de problemas es un proceso que “involucra varios ciclos iterativos de expresar, probar y revisar interpretaciones matemáticas y de ordenar, integrar, modificar, revisar o refinar grupos de conceptos matemáticos dentro y más allá de las matemáticas” (p. 782). De esta definición, en este estudio, se conserva la idea de concebir a la resolución de problemas como un proceso que involucra ciclos iterativos, en donde el estudiante o la persona que resuelve problemas, con la incorporación de tecnologías digitales, transita por los episodios de comprensión del problema, exploración del problema, diferentes acercamientos hacia la solución del problema, integración de los acercamientos y extensiones del problema inicial; y al generar dicha extensión se enfrenta a un nuevo ciclo. Sin embargo, a diferencia de las ideas de estos autores, el problema que se presenta en este estudio se encuentra en un contexto puramente matemático, en términos de Barrera-Mora & Santos-Trigo (2002), es decir, la situación involucra solamente aspectos matemáticos, y posee una estructura que permita a los estudiantes formular preguntas, usar diversas representaciones, plantear conjeturas, utilizar argumentos y comunicar resultados.

En este sentido, la enseñanza de la resolución de problemas debe ser continua, por lo tanto, la discusión de problemas, la búsqueda de diversas soluciones y métodos para resolver problemas deben ser consideradas todo el tiempo (Krulik & Rudnick, 1993). Los elementos clave en la resolución de problemas son la caracterización de los problemas y lo que implican los procesos de resolución de problemas, es decir, actividades como: dar sentido a conceptos o enunciados del problema; buscar diferentes maneras de representar, explorar y resolver una tarea; extender el dominio de la tarea inicial; y desarrollar un lenguaje apropiado para comunicar y discutir resultados (Santos-Trigo, 2014). De esta manera, durante el proceso de aprender matemáticas se pone atención especial al tipo de problemas que permiten no sólo buscar respuestas o explicaciones, sino también pensar en torno al significado y formas de razonamiento asociadas con la solución de los problemas.

En este capítulo se presenta un estudio, en el cual se diseñó e implementó un ambiente de desarrollo profesional con profesores de matemáticas del nivel medio superior, que tuvo como objetivo analizar y documentar las formas en que éstos representaron, exploraron y dieron sentido a los objetos y conceptos matemáticos involucrados en la resolución de problemas que favorecen el análisis de ideas fundamentales que giran en torno al concepto de función. Para esto, se analizaron y describieron los recursos, estrategias y las formas de razonamiento que los profesores exhibieron al resolver problemas que involucraban el estudio de funciones y fomentaban el uso sistemático y coordinado de tecnologías digitales. Es decir, se promovió la deconstrucción del concepto de función, ya que los profesores se involucraron en actividades que les permitieron deshacer analíticamente los elementos que constituyen a dicho concepto y, de esta manera, refinar sus conocimientos y concepciones previas del concepto de función.

El capítulo está organizado en cuatro secciones, en las cuales se precisan las características, los resultados y las conclusiones del estudio. Primero, se presenta el marco conceptual que da sustento al estudio, el cual está conformado por las ideas sobre resolución de problemas y el marco propuesto por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011), del que se retoman los episodios de resolución de problemas cuando se incorpora el uso de tecnologías digitales; las ideas de Pea (1985) y de Moreno-Armella (2002) sobre el uso de las tecnologías digitales en la educación matemática; y, las cinco ideas fundamentales sobre funciones propuestas por Cooney et al. (2010).

Enseguida, se especifican las características de la metodología que se siguió en el estudio, se describen los participantes, la manera en que se llevó a cabo el diseño y la implementación de las actividades. Después se describen los resultados reportando los recursos, estrategias y representaciones que desarrollaron los profesores durante el trabajo en las actividades. Además, se presenta una discusión sobre la manera en que el uso de tecnologías digitales influyó para el desarrollo de las diferentes formas de razonamiento que exhibieron los profesores. Finalmente, se exponen las principales conclusiones que se obtuvieron del estudio y algunas reflexiones finales que se desprenden de los resultados obtenidos.

2. Marco Conceptual

La resolución de problemas matemáticos es un campo de investigación y práctica en educación matemática que fomenta un enfoque inquisitivo para desarrollar y comprender conocimiento matemático (Santos-Trigo, 2007). Como un campo de investigación, la agenda de resolución de problemas incluye el análisis de componentes cognitivos, sociales y afectivos que influyen y dan forma al desarrollo de la habilidad de resolución de problemas en los estudiantes. Como un acercamiento instruccional, la agenda incluye el diseño e implementación de propuestas curriculares y materiales correspondientes que mejoran las actividades de resolución de problemas. En ambos sentidos, se promueve la caracterización de los problemas y lo que implican los procesos de resolución de problemas (Santos-Trigo, 2014).

Los contenidos matemáticos que deben ser aprendidos, los problemas de los libros de texto, o bien, problemas rutinarios y no rutinarios pueden servir de plataformas para obtener y desarrollar las competencias de resolución de problemas en los estudiantes y así, participen en actividades de resolución de problemas tales como: dar sentido a conceptos u objetos matemáticos, explorar diversas estrategias de solución, formular conjeturas y, eventualmente, justificarlas. La manera de organizar e implementar actividades de resolución de problemas pueden tomar diferentes rutas dependiendo de los objetivos del instructor, el nivel de educación y los recursos o antecedentes de los estudiantes. Las estrategias de instrucción involucran fomentar y valorar la participación de los estudiantes en grupos pequeños, discusiones en grupo, desarrollo de comportamientos de resolución de problemas y la constante reflexión matemática de los estudiantes (Santos-Trigo, 2014).

En este estudio, se consideran problemas que implican el análisis y reflexión de las ideas fundamentales que giran en torno al concepto de función, ya que es considerado central en el estudio de las matemáticas por su importancia en la modelización de una amplia gama de fenómenos y se ha convertido en "una idea unificadora importante en matemáticas" (NCTM, 1989, p. 154) que se encuentra incorporada en todo el currículo de las matemáticas escolares. Dada esta relevancia de las funciones principalmente en el nivel medio superior, es necesario que el profesor deconstruya el concepto de función de manera que le permita conocer las características que las distinguen de otras relaciones y ser capaz de identificarlas en sus diferentes representaciones (Steele & Hillen, 2012).

Las ideas fundamentales sobre funciones que se abordaron en las actividades de este estudio son: el concepto de función, covariación y tasa de cambio, familias de funciones, combinación y transformación de funciones y múltiples representaciones de funciones (Cooney et al., 2010). El análisis de estas ideas pretende dar respuesta a las preguntas: ¿qué es una función?, ¿cuáles son las principales características que definen a una función?, ¿qué tipos de funciones existen?, ¿cómo se caracterizan los diferentes tipos de funciones?, ¿cómo identificar a qué tipo de familia pertenece una función?, ¿qué condiciones se deben cumplir para que dos funciones puedan combinarse?, ¿de cuántas maneras puede representarse una función?, ¿cómo están relacionadas las diferentes representaciones de una función?; y así, fomentar la deconstrucción del concepto de función.

Cuando se incorpora la tecnología digital en la resolución de problemas, ésta puede tomar dos roles: *amplificador* o *reorganizador cognitivo* (Pea, 1985). Como *amplificador*, es una extensión cognitiva que permite aumentar las capacidades mentales a través del uso de una herramienta, facilitando o extendiendo aquello que se puede hacer sin la herramienta. Moreno-Armella (2002) sugiere pensar en las tecnologías amplificadoras como una lupa; "la lupa deja ver, amplificando, aquello que podía ser visto a simple vista [sin cambiar] la estructura del objeto de nuestra visión" (p. 85). Por ejemplo, en GeoGebra se puede obtener de manera rápida la gráfica de una función y, además, tener una mejor visión de ésta al modificar las escalas o el *zoom*. Como *reorganizador cognitivo*, la herramienta digital reestructura la cognición en su funcionamiento y en la manera en que se organiza.

Es decir, una herramienta actúa como reorganizador cuando permite acceder a otro nivel y construir un nuevo conocimiento cualitativamente distinto de aquel que se podría haber construido sin el uso de la herramienta. En este sentido, Moreno-Armella (2002) sugiere pensar en un microscopio; "con el microscopio podemos ver lo que no era posible sin dicha herramienta" (p. 85). Por ejemplo, la exploración de modelos dinámicos de un problema en GeoGebra favorece la identificación de relaciones entre objetos matemáticos y la formulación de conjeturas que difícilmente podrían surgir en un ambiente de papel y lápiz.

El diseño e implementación de las actividades de este estudio tuvieron como base los episodios que proponen Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) para la resolución de problemas con la incorporación de herramientas digitales. Estos episodios ayudan a estructurar y analizar las maneras de usar las herramientas digitales en el desarrollo del pensamiento matemático cuando se resuelven problemas: *comprensión del problema, exploración del problema, diferentes acercamientos hacia la solución del problema, e integración de los acercamientos*.

El episodio de *comprensión del problema* es considerado crucial para pensar en las posibles maneras de resolverlo; aquí se identifican los elementos relevantes en el enunciado del problema y se piensa en cómo relacionarlo para explorarlo matemáticamente. En la *exploración del problema*, se utiliza la información que se identificó en la fase de comprensión y se elige la manera de representar y explorar el problema, con la finalidad de observar e identificar patrones y relaciones entre objetos matemáticos, por ejemplo, el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como GeoGebra es un medio para construir modelos dinámicos del problema que posibilitan la visualización de invariantes y patrones entre los objetos matemáticos. En el episodio *diferentes aproximaciones hacia la solución del problema*, se promueve la búsqueda de múltiples estrategias de solución con la finalidad de que se tenga la oportunidad de usar diferentes conceptos y recursos para representar, explorar y resolver problemas; por ejemplo, se pueden considerar acercamientos dinámicos, algebraicos y geométricos.

En el episodio de *integración*, se analizan los diferentes acercamientos, los argumentos que apoyan las estrategias usadas y las justificaciones de las conjeturas generadas durante las exploraciones, así como la generación de extensiones del problema inicial, o bien, de nuevos problemas. Este marco permitió estructurar y guiar el diseño de las actividades de este estudio de manera que promovieran el desarrollo del pensamiento matemático, haciendo énfasis en la construcción de modelos dinámicos que permitieran un acercamiento inicial de tipo visual o empírico hacia la solución del problema.

3. Componentes Metodológicos y Procedimientos

En una investigación cualitativa se estudian problemáticas y procesos "que no se examinan o miden en forma rigurosa en términos de cantidad, monto, intensidad o frecuencia" (Denzin & Lincoln, 1994, p. 4). Asimismo, buscan comprender cómo se crean y se da significado a situaciones relacionadas con el quehacer cotidiano de individuos o grupos, mediante un contacto prolongado con los escenarios en los que se desarrollan (Denzin & Lincoln, 1994). Así, la naturaleza de este estudio es cualitativa ya que interesa analizar, describir y discutir los recursos, estrategias y formas de razonamiento que los profesores de nivel medio superior exhiben cuando resuelven problemas sobre funciones con apoyo de tecnologías digitales; en particular, en qué medida las actividades propuestas en este ambiente de desarrollo profesional promueven una mayor comprensión del concepto de función en los profesores.

3.1 Participantes

En el estudio participaron ocho profesores de matemáticas del nivel medio superior en México durante un curso de Educación Matemática y Nuevas Tecnologías en el primer semestre de un programa de maestría en Matemática Educativa. La formación profesional de los participantes estaba relacionada con las áreas de Matemáticas Puras, Matemáticas Aplicadas, Ingeniería Industrial, Ingeniería Metalúrgica y Licenciatura en Actuaría. La experiencia docente de los participantes es principalmente en el nivel bachillerato, sólo dos profesores habían impartido clases de matemáticas en secundaria. La mayoría de los participantes estaban en sus primeros años de experiencia como profesores de matemáticas, únicamente dos contaban con más años de experiencia frente a grupo, 40 y 15 años respectivamente.

Respecto a la experiencia con el uso de tecnologías digitales, al momento de iniciar el curso, los profesores mostraron práctica en la búsqueda de información por Internet y en el manejo de un procesador de texto para elaborar los reportes de las actividades. A pesar de que seis profesores ya habían manejado alguna herramienta digital relacionada con matemáticas como Matlab, Sketchpad, Derive, Maple 12, R, Winplot, lenguajes de programación C y C++; sólo tres de ellos tenían experiencia en el manejo de GeoGebra como graficador y de la hoja de cálculo.

3.2 Diseño de las actividades

Las actividades diseñadas para este estudio se basan en problemas que promueven el desarrollo de las cinco ideas fundamentales (IF) sobre funciones: IF 1. El concepto de función, IF 2. Covariación y tasa de cambio, IF 3. Familias de funciones, IF 4. Combinación y transformación de funciones y IF 5. Múltiples representaciones de funciones (Cooney et al., 2010). En este sentido, en cada actividad se abordaba una o más ideas fundamentales (ver Tabla 3.1). Debido a que el concepto de función es muy amplio e involucra una gran de variedad de ideas matemáticas para su mayor comprensión, se decidió diseñar actividades donde se involucrara el análisis de las características y propiedades de la función; la construcción de una definición del concepto; el reconocimiento de las características de la función lineal, cuadrática, radical y exponencial; el análisis del comportamiento de la gráfica de la suma y producto de funciones lineales; la comparación entre la función lineal y exponencial; ya que se consideraron ideas fundamentales que se desarrollan en el nivel de bachillerato.

En las actividades se plantearon problemas no rutinarios que proporcionaran oportunidades para que los profesores exploraran distintas maneras de solución, usaran múltiples representaciones, formularan conjeturas, presentaran argumentos y comunicaran resultados. Se consideraron problemas que resultaran desafiantes para los participantes, es decir, que no contaran con algún método de solución inmediato; además, de que existiera más de una manera para resolverlos. La situación que se presenta está dentro de un contexto puramente matemático (Barrera-Mora & Santos-Trigo, 2002); en este sentido, un objetivo puede ser la formulación de un problema o la búsqueda de una solución a una pregunta planteada.

En este tipo de problemas el principal interés, es que los estudiantes, haciendo uso de una serie de recursos matemáticos, puedan entender la situación para poder plantear un método o camino de solución. Un paso fundamental es identificar la información relevante y acceder a un conjunto de conceptos que permitan explorar casos particulares y eventualmente presentar un plan de solución. Las ideas, relaciones, discusiones y reflexiones que surgen durante el proceso de resolución del problema se circunscriben en el ámbito puramente matemático.

Es por esto que, las actividades promueven el planteamiento de preguntas, el uso de recursos y estrategias que permitan examinar cualidades matemáticas asociadas al proceso de solución. En las actividades el uso de herramientas digitales (Internet, GeoGebra y hoja electrónica de cálculo), es un factor relevante pues posibilitan la exploración de diversas estrategias de solución a los problemas y la formulación de conjeturas basadas en las exploraciones.

En la Tabla 6.1 se expone de manera resumida el propósito e intención general de cada actividad, y las ideas fundamentales sobre funciones que se involucran en cada una de ellas.

Tabla 6.1 Actividades: propósito e ideas fundamentales

Actividades	**IF**
Actividad 1. Sobre el concepto de función. El objetivo era conocer la noción que los profesores tenían sobre el concepto de función, cómo la definían y ejemplificaban y a qué tipo de representaciones recurrían para ello. También, se deseaba identificar las características que los profesores consideran esenciales de una función, apoyándose de una búsqueda de información en Internet sobre el tema y un posterior análisis y discusión sobre esas ideas centrales.	IF 1 IF 5
Actividad 2. El problema del rectángulo. Se abordaba un problema que involucraba el estudio de una función cuadrática. Se deseaba que los profesores desarrollaran dos acercamientos: dinámico y algebraico; con la finalidad de que contrasten los resultados obtenidos, identifiquen los conceptos matemáticos involucrados, y que discutan ventajas y limitaciones de cada uno.	IF 1 IF 2 IF 3 IF 5
Actividad 3. El problema de los postes telefónicos. El propósito era abordar el estudio de una función radical. Específicamente se deseaba conocer en qué momento esa función tenía un valor mínimo. Se pretendía promover diferentes acercamientos a la solución como: numérico (hoja de cálculo), dinámico (GeoGebra), geométrico, algebraico (WolframAlpha). La idea es discutir sobre la manera en que se integran diversos conceptos matemáticos en cada uno de los acercamientos y la forma en que el uso de herramientas digitales promueve el análisis de ideas y significados matemáticos involucrados con la función radical.	IF 1 IF 2 IF 5
Actividad 4. Combinación y transformación de funciones. Se pretendía que los profesores exploraran y analizaran la suma y multiplicación de dos funciones lineales. Las preguntas que se discutieron estuvieron dirigidas a encontrar relaciones entre las características de las funciones iniciales y las características de la función resultante. Finalmente, se abordó el problema de encontrar una función lineal g, a partir de una función lineal f conocida, de tal manera que la gráfica de la función producto ($\mathrm{h} = \mathrm{f} \cdot \mathrm{g}$) sea tangente a las gráficas respectivas de las funciones lineales iniciales.	IF 1 IF 4 IF 5
Actividad 5. Inversiones bancarias. La función exponencial se abordó partiendo del análisis de una situación que involucra la inversión a plazo de cierta cantidad de dinero en un banco, con ciertas condiciones en la tasa de rendimiento. Inicialmente se promueve el uso de Excel para observar la variación h comportamiento de los datos y después se incorpora GeoGebra para explorar el efecto que tiene en la gráfica la variación de cada uno de los parámetros a, b y c.	IF 1 IF 2 IF 3 IF 5

Fuente: Elaboración Propia

Parte central en el diseño de las actividades es que cada una se analizó previamente con la finalidad de identificar las diferentes maneras de resolver los problemas, así como las formas de razonamiento que surgen con el uso de papel y lápiz y al utilizar tecnologías digitales. Se discuten las construcciones, exploraciones y estrategias de cada acercamiento con el objetivo de contrastarlos. Este análisis previo permitió el diseño de las hojas de trabajo que proporcionan preguntas que guían la reflexión de aquellas ideas matemáticas relevantes para el estudio. La idea fue que las preguntas propuestas en las actividades fueran plataformas de aprendizaje para involucrar a los participantes en el análisis y discusión de las diferentes formas de enfocar y ampliar los problemas (Santos-Trigo, Camacho-Machín, & Olvera-Martínez, en prensa).

En este capítulo se presenta la actividad denominada “El problema del rectángulo” que involucra el estudio de una función cuadrática. Con la finalidad de orientar la solución del problema, se diseñó una hoja de trabajo donde se plantearon preguntas que promovieran el análisis de los conceptos y objetos matemáticos involucrados y provocaran que los profesores desarrollaran dos tipos de acercamientos hacia la solución del problema: dinámico y algebraico. A continuación, se muestra la estructura de la hoja de trabajo utilizada.

Problema: ABCD es un rectángulo. $\overline{AB}$ tiene una longitud de 6.5 cm, $\overline{BC}$ mide 4 cm. M es un punto sobre el segmento $\overline{AB}$, N es un punto sobre el segmento $\overline{BC}$, P es un punto sobre el segmento $\overline{CD}$ y Q es un punto sobre el segmento $\overline{DA}$. Además, se tiene que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$. ¿Dónde debe ubicarse el punto M para que el cuadrilátero $MNPQ$ tenga la mínima área posible? (Santos-Trigo, Camacho-Machín, & Olvera-Martínez, 2014).

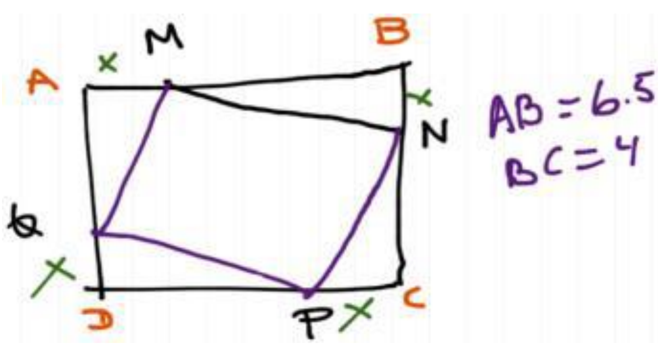
Un acercamiento dinámico usando el software de GeoGebra

1. Leer individualmente la tarea propuesta. Identificar y comentar los elementos fundamentales que ayudan a darle sentido al problema.
2. Usar el software dinámico GeoGebra para dibujar el rectángulo $ABCD$ utilizando los diferentes comandos del menú (perpendicular, rotación, círculo, etc.). Construir un modelo dinámico en el cual se pueda mover el punto M a lo largo del segmento $\overline{AB}$ para generar una familia de cuadriláteros inscritos. Comentar el proceso de construcción del modelo dinámico.
3. ¿Qué propiedades mantiene esa familia de cuadriláteros $MNPQ$? ¿Se obtiene el cuadrilátero inscrito en cualquier posición del punto M? Explicar cuál es el dominio de M para construir siempre el cuadrilátero.
4. Hallar la representación gráfica del comportamiento del área del cuadrilátero inscrito encontrando el lugar geométrico del punto que relaciona la posición del punto M sobre el segmento $\overline{AB}$ con el área del cuadrilátero correspondiente. ¿Qué propiedades tiene la representación gráfica del área?
5. Identificar visualmente en qué punto sobre la gráfica, el área del cuadrilátero alcanza su valor mínimo. ¿Existe algún patrón asociado con la posición del punto M, la longitud de los lados del cuadrilátero y el área mínima? Obtener una tabla que muestre algunos valores del segmento $\overline{AM}$ y el área del cuadrilátero correspondiente.

Sobre el modelo algebraico

1. ¿Existe alguna relación entre el área de los cuatro triángulos que aparecen en las esquinas de la siguiente figura, el área del rectángulo dado y el área del cuadrilátero inscrito? Utilizar una notación adecuada para identificar las figuras que aparecen en la representación de la tarea (Figura 6.1).

Figura 6.1 Propuesta de notación para representar algebraicamente el problema



Fuente: Elaboración propia

2. Hallar una expresión para el área del cuadrilátero $MNPQ$. Graficar esta expresión y discutir qué tipo de propiedades tiene.
3. Hallar la posición del punto M para la cual el cuadrilátero $MNPQ$ alcanza un área mínima. Comparar este valor con el obtenido previamente en GeoGebra.

4. Cambiar las dimensiones de los lados del rectángulo inicial por a y b respectivamente, y hallar el modelo general que describe el área del cuadrilátero inscrito. ¿Cuál es el valor de $\overline{AM}$ para que el área del cuadrilátero inscrito tenga un valor mínimo en términos de los lados a y b del rectángulo?
5. Explorar algebraica y dinámicamente un caso en el cual el rectángulo inicial sea reemplazado por un paralelogramo.
6. Discutir qué características del pensamiento y razonamiento matemático están involucradas tanto en el enfoque dinámico como en el algebraico para la solución del problema.

3.3 Implementación de las actividades

Las actividades se trabajaron durante diez sesiones con una duración de tres horas cada una, cada actividad se abordó en dos sesiones y se aplicaron en el orden propuesto en el nombre. La manera en que los profesores trabajaron durante las sesiones fue: individual, en pareja y grupal. En un primer momento, los profesores trabajaron de manera individual en la solución de los problemas con la finalidad de tener registro de las dificultades y limitaciones de sus primeros intentos por resolver el problema. Cuando los participantes mostraban avance en la solución de las actividades, comentaban o exponían frente al grupo las diferentes rutas de solución, las conjeturas formuladas y los resultados encontrados, además de sus pruebas o justificaciones respectivas. Antes de exponer los avances o soluciones frente a grupo, los participantes intercambiaban ideas sobre sus estrategias. En algunas actividades se solicitó el trabajo en parejas, ya que era necesaria la comparación de información y estrategias y la discusión de las situaciones planteadas.

Durante las exposiciones, se cuestionaba a los participantes el porqué de los procedimientos efectuados o de las estrategias desarrolladas, con el objetivo de identificar qué recursos y habilidades estaba poniendo en juego. Los avances en la solución del problema desarrollados por los profesores eran entregados al finalizar cada sesión. Las sesiones de trabajo eran dirigidas por el investigador, quién moderaba las discusiones grupales, cuestionaba a los participantes sobre las estrategias desarrolladas, revisaba y analizaba los reportes escritos y daba la retroalimentación respectiva durante la siguiente sesión.

Es importante señalar la relevancia que tuvo el diseño de las hojas de trabajo en el estudio pues las preguntas ahí planteadas permitieron guiar a los profesores durante el desarrollo de la solución de los problemas. La manera en que fueron estructuradas llevó a los participantes a identificar información y relaciones esenciales para la solución del problema y los resultados que iban encontrando los relacionaban y utilizaban para responder las preguntas subsecuentes. Cada uno de los cuestionamientos tuvo como objetivo conocer más sobre la forma en que estaba razonando el participante al responder, así como promover la formulación de conjeturas, la búsqueda de diferentes soluciones y la generalización.

3.4 Recolección y análisis de datos

La recolección de datos se llevó a cabo mediante diversos instrumentos: reportes escritos, archivos electrónicos de GeoGebra y Excel elaborados por los participantes, videograbaciones de las sesiones de trabajo, entrevistas no estructuradas y el registro de las observaciones durante cada sesión. Los datos se analizaron comparando inicialmente, la información recolectada, y consistió en tres fases: reducción de datos, organización y despliegue de datos, y elaboración de las conclusiones (Miles & Hubberman, 1994). Se seleccionaron aquellos datos que permitían mostrar evidencia de los diferentes acercamientos hacia la solución de los problemas.

Cada actividad se analizó de acuerdo con los objetivos planteados y las ideas fundamentales involucradas. Inicialmente, se describen los resultados obtenidos y su presentación se organizó con base en los episodios propuestos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011). Posteriormente, se comentan en una breve discusión los resultados relevantes en términos de las cinco ideas fundamentales sobre funciones y el impacto del uso sistemático de las tecnologías digitales en la actividad. Las conclusiones se elaboraron tomando en cuenta las regularidades identificadas durante el análisis de datos y contrastándolas con las ideas expuestas en el marco conceptual.

4. Presentación y discusión de los resultados

En esta sección se muestran los resultados obtenidos en la implementación de la actividad "El problema del rectángulo". Se ilustra la manera en que los profesores interactuaron con las herramientas tecnológicas y cómo las utilizaron para representar y explorar el problema. Esta actividad refleja cómo los participantes se involucraron en el uso de un sistema de geometría dinámica durante las fases de la resolución del problema que implican comprender y explorar el enunciado del problema, la identificación de relaciones, buscar argumentos para sustentar conjeturas y buscar extensiones y conexiones del problema inicial. Se identificaron las diferentes estrategias de solución que los profesores desarrollaron durante la solución del problema. Los resultados se organizaron, para su presentación, en los cuatro episodios involucrados en la resolución de problemas cuando se incorpora el uso de tecnologías digitales (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2011).

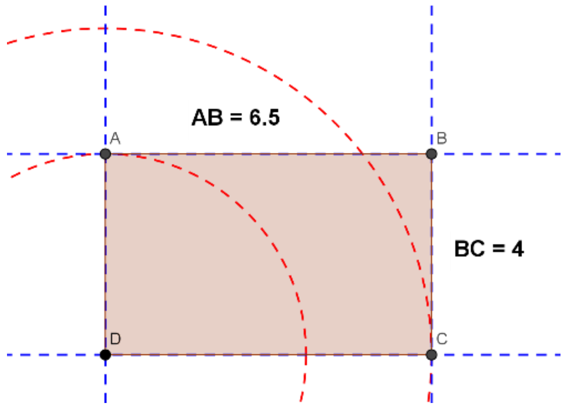
El problema planteado involucraba trabajar con la función cuadrática. Se pidió encontrar dónde debe ubicarse el punto M para que el cuadrilátero MNPQ inscrito en el rectángulo $ABCD$ tenga la mínima área posible bajo las siguientes condiciones: $\overline{AB}$ *tiene una longitud de 6.5 cm.,* $\overline{BC}$ *mide 4 cm.* M *es un punto sobre el segmento* $\overline{AB}$, N *es un punto sobre el segmento* $\overline{BC}$, P *es un punto sobre el segmento* $\overline{CD}$ *y* Q *es un punto sobre el segmento* $\overline{DA}$. *Además, se tiene que* $\overline{AM}=\overline{BN}=\overline{CP}=\overline{DQ}$.

4.1 Comprensión del problema

Antes de iniciar con algún acercamiento a la solución, se les cuestionó a los profesores sobre ¿qué es un rectángulo?, ¿de qué manera se puede dibujar un rectángulo? y, ¿cómo se puede construir el cuadrilátero inscrito?, con la finalidad de que identificaran las propiedades de estos objetos geométricos y apoyados en esa información lograran construir el modelo dinámico del problema en GeoGebra. Todos los profesores lograron hacer la construcción, las diferencias encontradas entre las estrategias desarrolladas estuvieron relacionadas con los comandos de GeoGebra utilizados para construir el rectángulo inicial y controlar el movimiento de puntos. La principal estrategia que exhibieron los profesores involucró el uso de segmentos, circunferencias y rectas perpendiculares que cumplieran las condiciones del problema (Figura 6.2).

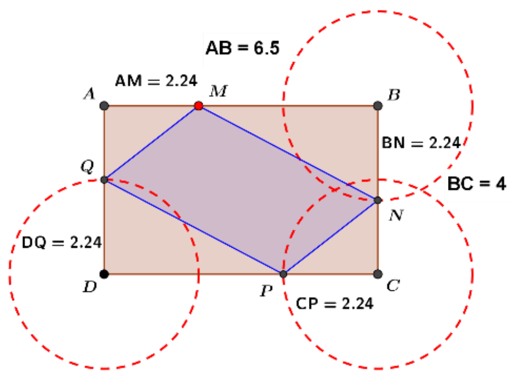
Para construir el cuadrilátero inscrito $MNPQ$, ubicaron el punto M sobre el segmento $\overline{AB}$. Localizaron los puntos N, P y Q mediante el trazo de circunferencias de radio igual a la longitud del segmento $\overline{AM}$ con centro en los puntos B, C y D, y encontraron sus intersecciones con el rectángulo $ABCD$. De esta manera, garantizaron que $\overline{AM}=\overline{BN}=\overline{CP}=\overline{DQ}$. Por último, unieron los puntos M, N, P y Q para formar el cuadrilátero (Figura 6.3).

Figura 6.2 Construcción del rectángulo inicial



Fuente: Producciones de los profesores

Figura 6.3 Modelo dinámico del problema



Fuente: Producciones de los profesores

4.2 Exploración del problema

¿Qué propiedades conserva la familia de cuadriláteros que se generan?, ¿se puede decir que $MNPQ$ es paralelogramo?, ¿por qué?, ¿se obtiene el cuadrilátero inscrito en cualquier posición del punto M?, ¿por qué? La búsqueda de respuestas a estas preguntas propició que los profesores comenzaran a explorar qué sucedía cuando se movía el punto M sobre el segmento $\overline{AB}$. Como primer paso, todos identificaron que los triángulos AMQ y CPN eran congruentes, de la misma manera que BNM y DQP. Tres profesores justificaron la congruencia de los triángulos por el criterio Lado-Ángulo-Lado (LAL): $\overline{AM}$=$\overline{CP}$, $\overline{QA}$=$\overline{NC}$ y los ángulos QAM y NCP miden 90° (Figura 6.4). Cinco profesores mencionaron que los triángulos AMQ y CPN eran congruentes porque sus lados correspondientes tienen la misma longitud, criterio de congruencia Lado-Lado-Lado (LLL, Figura 6.5).

Es importante señalar el uso del lenguaje matemático por parte de los profesores, quienes en sus reportes escritos mencionaron que los triángulos AMQ y CPN son *iguales*, únicamente un profesor se refiere a éstos como *congruentes*. Como resultado de este análisis, siete de los profesores concluyeron que el cuadrilátero $MNPQ$ era un paralelogramo, pues sus lados opuestos tienen la misma longitud.

También, observaron que, (1) cuando movían el punto M sobre el segmento $\overline{AB}$, el punto M se aproximaba al punto A, lo que provocaba que el cuadrilátero $MNPQ$ tendíera a coincidir con el rectángulo $ABCD$ y, (2) cuando el punto M se acercaba al punto B, de la misma manera lo hacía el punto N hacia el punto C, por las condiciones del problema (Figura 6.6). Dado que la longitud del segmento $\overline{BC}$ era de 4 *cm*, la longitud mayor que puede tener el segmento $\overline{AM}$ era de 4 *cm*. Si $\overline{AM}$ tuviera una longitud mayor a la mencionada, el cuadrilátero $MNPQ$ no se podría construir ya que no se cumpliría la condición $\overline{AM}$=$\overline{BN}$=$\overline{CP}$=$\overline{DQ}$. Así, la longitud del segmento $\overline{AM}$ debía estar en un intervalo de [0,4].

Figura 6.4 Justificación de congruencia de triángulos: caso LAL

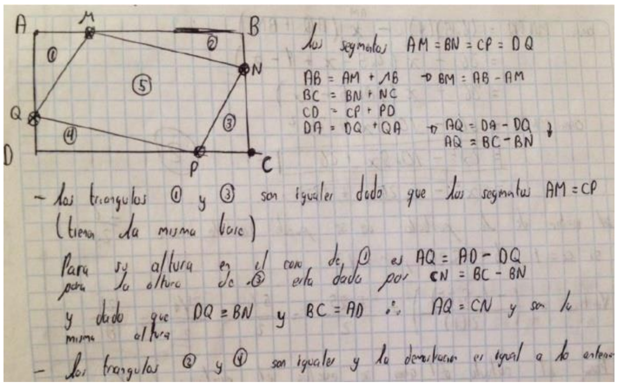
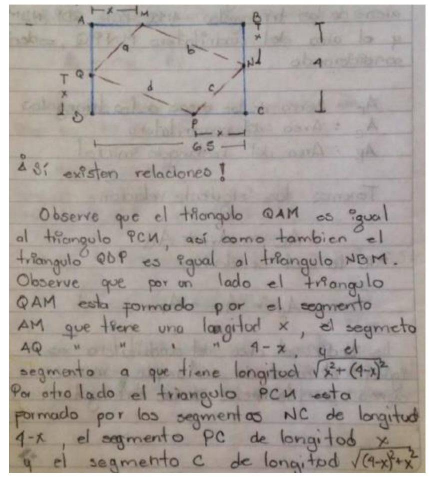
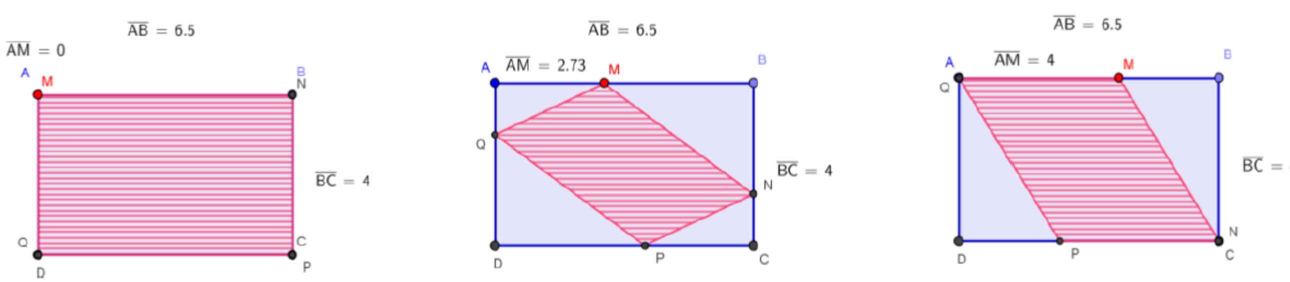


Figura 6.5 Justificación de congruencia de triángulos: caso LLL



Fuente: Producciones de los profesores

Figura 6.6 Exploración del movimiento del punto M



Fuente: Producciones de los profesores

Al mover el punto M sobre el segmento $\overline{AB}$, los profesores observaron que el área de $MNPQ$ variaba respecto a la posición que tomaba el punto M. Esta variación la representaron mediante una gráfica que relacionaba la longitud del segmento $\overline{AM}$ con el área correspondiente del cuadrilátero $MNPQ$. Para trazar esta gráfica, encontraron el lugar geométrico del punto H, el cual es la intersección de dos rectas perpendiculares a los ejes horizontal y vertical que representan la longitud del segmento $\overline{AM}$ y el valor del área de $MNPQ$ respectivamente (Figura 6.7). Únicamente tres profesores ingresaron directamente las coordenadas del punto H: $(longitud\ de\ \overline{AM}, área\ de\ MNPQ)$, para encontrar dicho lugar geométrico.

4.3 Diferentes aproximaciones hacia la solución del problema

Una vez que los profesores exploraron el problema y observaron la manera en que variaban las cantidades involucradas, comenzaron a desarrollar diferentes acercamientos hacia la solución del problema. En un inicio, todos los participantes hicieron una *aproximación empírica*. Esto es, observaron los valores de la longitud del segmento $\overline{AM}$ y el área de $MNPQ$ que se obtenían cuando el punto M se movía sobre el segmento $\overline{AB}$ e identificaron, en la representación gráfica, que cuando la longitud del segmento $\overline{AM}$ crece, el área del cuadrilátero $MNPQ$ disminuye hasta llegar a un punto (mínimo) en el que el área comienza a aumentar, incluso conjeturaron que se trataba de una parábola. Ubicaron de manera aproximada el punto mínimo y reportaron que se encuentra cuando la longitud de $\overline{AM}$ tiene un valor entre 2.57 y $2.68\ cm$, siendo $12.22\ cm^2$ el valor del área de $MNPQ$, aproximadamente. Algunos profesores complementaron su aproximación empírica identificando el punto mínimo en una tabla que mostraba el registro de las coordenadas del punto H, es decir, la relación entre la longitud del segmento $\overline{AM}$ y el área de $MNPQ$ correspondiente, aunque en esta estrategia obtuvieron diferentes valores que podían ser la solución (Figura 6.8).

Posteriormente, surgieron otras estrategias en donde los profesores hicieron uso de diversos recursos con la finalidad de acercarse más a la solución del problema. Cuatro profesores, se enfocaron en *localizar el vértice de la parábola*. Debido a que habían conjeturado que la representación gráfica parecía ser una parábola, decidieron asociarle una cónica y corroboraron que se trataba de una parte de una parábola. Así, trazaron una perpendicular al eje vertical que intersecaba a la parábola en dos puntos (T y S, en la Figura 6.9), luego trazaron la mediatriz de esos puntos y en su intersección con la parábola, ubicaron el vértice con coordenadas $(2.66, 12.22)$.

Figura 6.7 Representación gráfica de la variación

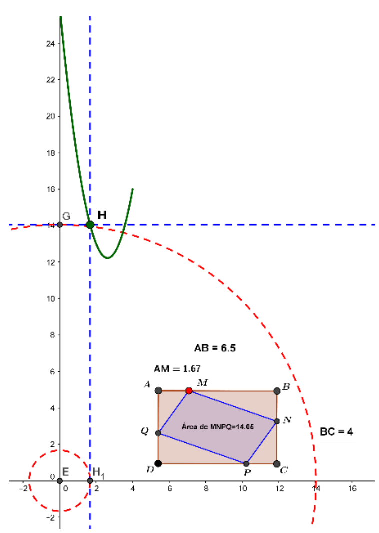
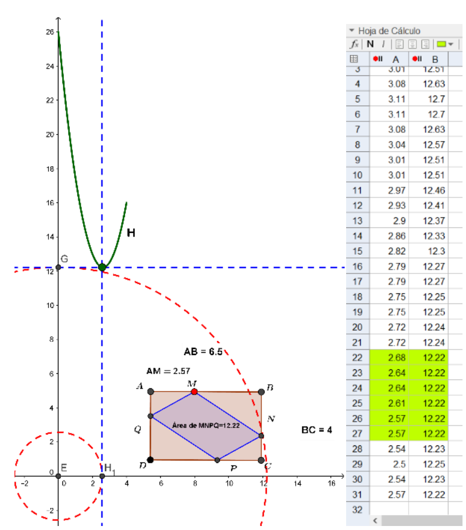


Figura 6.8 Aproximación empírica a la solución del problema



Fuente: Producciones de los profesores

Tres profesores llevaron a cabo un acercamiento en el que involucraron el *uso de la recta tangente a la parábola*. Una vez que ajustaron la cónica y obtuvieron la parábola, trazaron la recta tangente a ella que pasa por el punto H y calcularon su pendiente (Figura 6.10).

Enseguida, ingresaron en la barra de entrada un punto Z con coordenadas $(longitud\ del\ segmento\ \overline{AM}, pendiente\ de\ la\ recta\ tangente\ a\ la\ parábola)$ del cual encontraron el lugar geométrico que describe al mover el punto M y obtuvieron un segmento de recta; luego trazaron una recta sobre ese lugar geométrico para encontrar la intersección con el eje horizontal, punto T. Este punto les proporcionó el valor de la longitud el segmento $\overline{AM}$ cuando el área de $MNPQ$ es mínima (Figura 6.10). Este acercamiento es una representación geométrica de los procesos algebraicos propios para encontrar el valor mínimo de la función. Esto es, encontrar el lugar geométrico del punto que relaciona la longitud del segmento $\overline{AM}$ con el valor de la pendiente de la recta tangente a la parábola es equivalente a obtener la derivada de la función y localizar el punto T es equivalente a calcular el valor de x para el cual la derivada vale cero.

Figura 6.9 Localización del vértice de la parábola asociada al lugar geométrico

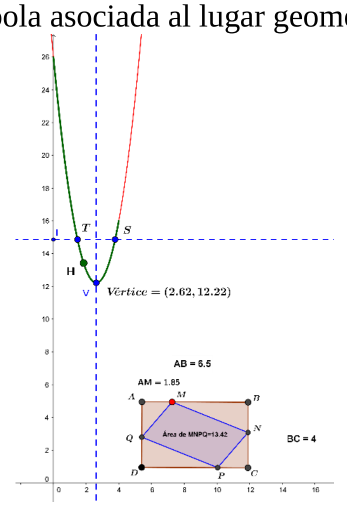
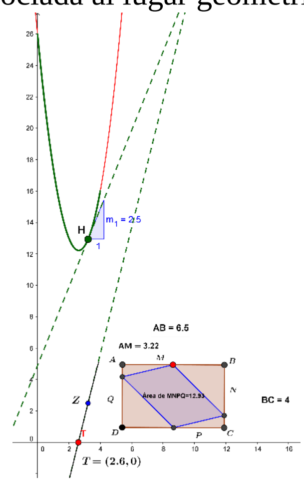


Figura 6.10 Uso de la recta tangente a la parábola asociada al lugar geométrico



Fuente: Producciones de los profesores

En el *acercamiento algebraico*, los profesores retomaron el hecho de que los triángulos AMQ y CPN son congruentes al igual que los triángulos BNM y DQP y consideraron posible encontrar el área del cuadrilátero $MNPQ$ restando el área correspondiente a los cuatro triángulos de las esquinas al área del rectángulo inicial. Encontraron:

$$A(MNPQ) = A(ABCD) - 2A(triángulo\ AMQ) - 2A(triángulo\ BNM) \qquad (1)$$

Si la longitud del segmento $\overline{AM}$ se representa como x, la expresión que representa el área de $MNPQ$ encontrada era $f(x) = 26 - 10.5x + 2x^2$. Una vez que encontraron la función que modela al problema, observaron que se trataba de una función cuadrática, la cual gráficamente es una parábola. Por lo tanto, para calcular el valor mínimo de esa función, recurrieron a procesos propios del cálculo, esto es, derivaron la función y después igualaron a cero la derivada de la función, $f'(x) = 4x - 10.5$, resolvieron la ecuación y encontraron que cuando $x = 2.625$, se obtiene un área mínima de $12.22\ cm^2$. Los profesores observaron que los valores obtenidos en los acercamientos dinámicos eran una aproximación cercana a los valores encontrados con el modelo algebraico.

Posteriormente, se planteó la pregunta ¿qué sucede cuando las dimensiones del rectángulo inicial cambian y se considera que sean $a\ y\ b$? Los profesores partieron de la misma idea algebraica anterior y obtuvieron que $A(MNPQ) = 2x^2 - (a+b)x + ab$ y cuando $x = \frac{a+b}{4}$, se obtiene el área mínima de $MNPQ$.

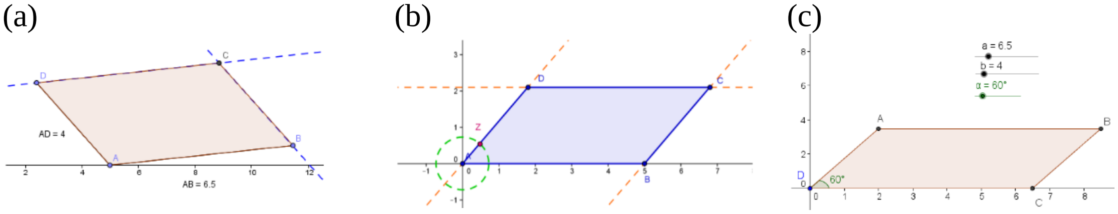
4.4 Integración

En este episodio los profesores investigaron qué sucedía si el cuadrilátero $MNPQ$ se inscribía en un paralelogramo conservando las condiciones del problema inicial. Esta extensión del problema inicial tuvo como finalidad observar qué propiedades y resultados se mantenían. Para iniciar la construcción del modelo dinámico los profesores tuvieron que considerar las propiedades de un paralelogramo para poder trazarlo se obtuvieron tres estrategias diferentes en su construcción. Una de ellas, involucró el uso del comando *segmento de longitud dada* y paralelas. En este tipo de construcción, los profesores no tuvieron control de las dimensiones de los segmentos del paralelogramo, podían mover un extremo del segmento; sin embargo, este movimiento no cambiaba su longitud, únicamente, lo rotaba afectando la medida del ángulo formado entre los segmentos (Figura 6.11a).

Otra estrategia fue similar a la del problema inicial, sólo que ahora consideraron variar el ángulo formado entre los segmentos $\overline{AB}$ y, por lo que el movimiento de la recta que pasa por el punto A, fue contralado por el punto Z que estaba definido sobre una circunferencia, con esta construcción generaron una familia de paralelogramos variando el ángulo entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ cuando movían Z (Figura 6.10b). En la tercera estrategia, utilizaron deslizadores para las longitudes de los segmentos $\overline{DC}$, $\overline{DA}$ y para la medida del ángulo entre ellos generando los parámetros a, b y α respectivamente (Figura 6.11c). La exploración en GeoGebra fue similar al caso inicial. Como resultado de las primeras exploraciones en el modelo dinámico del problema, identificaron que al mover el punto M, la longitud del segmento $\overline{AM}$ no puede ser mayor que la longitud del segmento $\overline{BC}$, pues ya no se podría dibujar el cuadrilátero $MNPQ$; conservándose así la idea del problema inicial acerca del dominio del punto M.

Figura 6.11 Estrategias para la construcción del paralelogramo $ABCD$

(a) (b) (c)



Fuente: Producciones de los profesores

Los acercamientos a la solución del problema mantuvieron la misma esencia de los desarrollados en el caso inicial: aproximación empírica, localización del vértice de la parábola, uso de la recta tangente a la parábola. Únicamente tres profesores desarrollaron el *acercamiento algebraico* y considerando que x en la longitud de $\overline{AM}$ encontraron que:

$$Área\ de\ MNPQ = (2x^2 - (a+b)x + ab)sen\alpha \qquad (2)$$

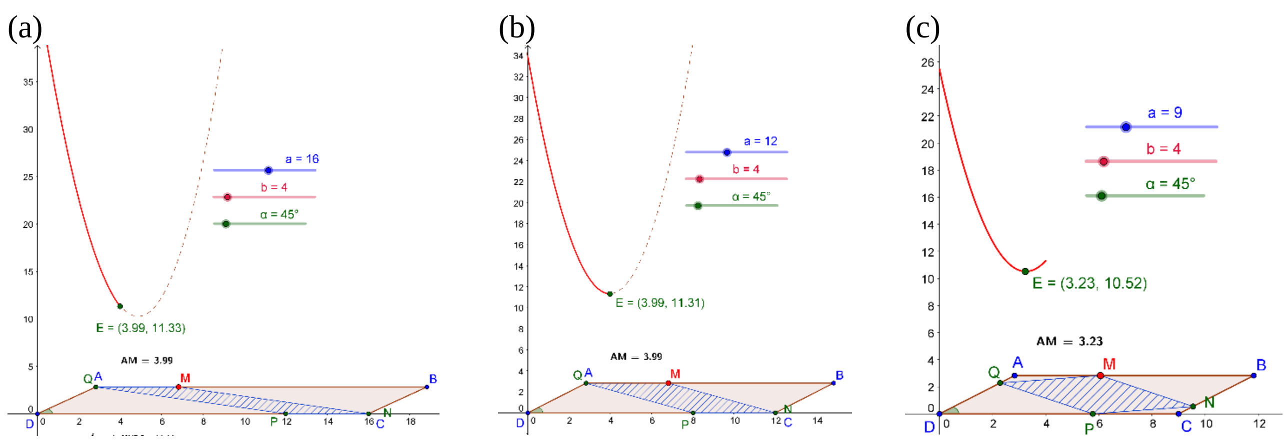
Por lo tanto, siguiendo los procedimientos de cálculo, obtuvieron que el área mínima de $MNPQ$ se alcanzaba cuando $\frac{a+b}{4}$. De esta manera, los profesores concluyeron que, independientemente de las dimensiones de los lados del paralelogramo y del ángulo formado entre ellos, siempre se iba a conservar que el valor mínimo del área de $MNPQ$ se alcanzaría cuando $\overline{AM} = \frac{a+b}{4}$.

Con la finalidad de que corroboraran si la fórmula que habían encontrado era aplicable para cualesquiera dimensiones, en la discusión grupal se promovió la exploración de casos particulares considerando diferentes longitudes de los segmentos y manteniendo fijo el ángulo formado entre ellos. Se retomó la construcción que involucraba deslizadores, se mantuvo fija la medida del ángulo α y del segmento $\overline{BC}$ (deslizador b), sólo se variaba la longitud del segmento $\overline{AB}$ (deslizador a). Al explorar ejemplos particulares, encontraron que el lugar geométrico cambiaba (Figura 6.12)

Estas observaciones llevaron a los profesores a investigar el valor mínimo en cada lugar geométrico. Una profesora señaló que en las figuras 6.12b y 6.12c el valor mínimo parece estar en el vértice de la parábola asociada mientras que, en la Figura 4.11a, el lugar geométrico no llega al vértice por lo que el valor mínimo corresponde al extremo derecho. Esta conjetura, generó que los profesores recordaran el dominio de la función en el problema. El segmento $\overline{BC}$ fue considerado el de menor longitud, por lo tanto, el dominio de la longitud del segmento $\overline{AM}$ era [0, b].

Los profesores identificaron que la fórmula les proporcionaba el vértice de la parábola asociada al lugar geométrico, pero en ocasiones ese punto no se encontraba dentro del dominio de la función del problema. Así, reconocieron dos situaciones: (1) la fórmula es aplicable cuando el vértice de la parábola asociada se encuentra dentro del dominio de la función del problema; (2) cuando el vértice de la parábola asociada está fuera del dominio de la función del problema, el valor mínimo del área de $MNPQ$ se localiza en $x = b$, siendo b la medida del segmento menor.

Figura 6.12 Lugares geométricos encontrados al variar el parámetro a



Fuente: Producciones de los profesores

Cuando se enfocaron en conocer la relación que debe existir entre las longitudes de los segmentos en cada situación, encontraron que cuando el vértice de la parábola asociada y el punto extremo del lugar geométrico coinciden se tiene que $a = 3b$.

Además, al analizar casos particulares, determinaron que (1) cuando $a = 3b$, el vértice de la parábola es el extremo derecho del lugar geométrico, en $x = b$, o bien, en $x = \frac{a+b}{4}$; (2) cuando $a > 3b$, el vértice de la parábola asociada no está dentro del dominio de la función del problema, por lo tanto el mínimo se alcanza cuando $x = b$; y, (3) cuando $a < 3b$, el mínimo coincide con el vértice de la parábola asociada, es decir, cuando $x = \frac{a+b}{4}$.

Los profesores reconocieron que las restricciones en el dominio de una función pueden hacer no válidos aquellos resultados obtenidos de manera general sin tomar en cuenta el dominio de la función del problema en particular y concluyeron que es necesario conocer las dimensiones del paralelogramo y el dominio de la función para encontrar la posición del punto M donde el valor de la función es mínimo.

4.5 Discusión de los resultados

Es importante reflexionar sobre la manera en que el trabajo con actividades como la que se presentó en este capítulo favorece en los profesores el desarrollo de habilidades y conocimientos matemáticos, así como de diversas formas de razonamiento, algunas de éstas fuertemente vinculadas con los comandos y acciones que permite GeoGebra. Cuando los profesores comenzaron la construcción del modelo dinámico del problema se adentraron en un análisis de las propiedades y relaciones de los objetos matemáticos involucrados para poder establecer sus estrategias de construcción.

La posibilidad de mover o arrastrar puntos y rectas en las construcciones dinámicas permitió que los profesores exploraran el comportamiento de los objetos matemáticos y sus atributos lo que los llevó a identificar relaciones, variantes e invariantes entre dichos objetos y así, formular conjeturas que posteriormente justificaron con argumentos matemáticos. Particularmente, las exploraciones en el modelo dinámico del problema favorecieron el desarrollo de estrategias de solución del problema sin necesidad de establecer, explícitamente, expresiones algebraicas que modelaran el problema y que son diferentes a las tradicionalmente elaboradas con papel y lápiz, por ejemplo, la estrategia que involucraba el uso de la recta tangente a la parábola. Un elemento importante en las exploraciones fue el uso de deslizadores para variar las dimensiones de los lados del paralelogramo inicial y del ángulo comprendido entre ellos, ya que ofreció la oportunidad de analizar diversos casos particulares lo que sirvió como punto de partida para reflexionar sobre la importancia del dominio de las funciones. En este sentido, el uso de GeoGebra también brindó la posibilidad de analizar ideas matemáticas como la variación y las características de una función, pues los profesores identificaron, en las exploraciones de los modelos dinámicos, las variables involucradas en el problema y su relación de dependencia: a cada valor de la variable independiente (longitud del segmento $\overline{AM}$) le corresponde uno y sólo un valor de la variable dependiente (área del cuadrilátero $MNPQ$).

Parte importante en el estudio de funciones es el uso de múltiples representaciones lo cual se vio ampliamente favorecido por el uso de GeoGebra. La posibilidad que brinda GeoGebra de contar, en una misma ventana, con diferentes representaciones como la dinámica, gráfica, tabular y algebraica permitió que los profesores identificaran y establecieran vínculos y conexiones entre las representaciones. Además, con el análisis y contraste entre distintos acercamientos hacia la solución fue posible resaltar características de la función en cada representación y valorar la utilidad y pertinencia de cada una de las representaciones y los acercamientos hacia la solución del problema.

5 Agradecimientos

Se agradece el financiamiento al Programa de Fortalecimiento de la Calidad Educativa a través de los proyectos P/PFCE-2016-10MSU0010C-06 de la DES de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez del Estado de Durango y al Programa de Apoyos Institucionales y Financiamiento a Proyectos de Investigación 2017 del Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Durango (COCYTED), a través del proyecto Reunión Nacional de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas 2017. Se extiende el agradecimiento al Grupo Internacional de Investigación Campus Viviente de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (CITeM) por el apoyo para realizar este estudio. Por último, se agradece al estudiante Carlos Michelle Díaz Leyva por su apoyo y participación en el desarrollo de este trabajo.

6 Conclusiones

El NCTM (2009) argumenta que el razonamiento en matemáticas a menudo comienza con la exploración, luego la generación de conjeturas, posibles inicios falsos y las explicaciones parciales antes de que se obtenga el resultado final. En este contexto y con base en los resultados, es posible argumentar que el uso de GeoGebra, como amplificador y reorganizador cognitivo, favoreció que los profesores construyeran conocimiento y desarrollaran diferentes formas de razonamiento que difícilmente se pudieran llevar a cabo en un ambiente de papel y lápiz. Como amplificador, permitió que los profesores exploraran el modelo dinámico del problema para identificar relaciones, patrones e invariantes entre objetos involucrados. De esta manera, los profesores pudieron formular conjeturas a partir de argumentos visuales, los cuales articularon e integraron con argumentos geométricos y acercamientos algebraicos para justificar dichas conjeturas. GeoGebra, como reorganizador cognitivo, favoreció la comprensión de conceptos matemáticos, pues permitió que los profesores integraran contenidos matemáticos, desarrollaran habilidades al resolver problemas y reorganizaran las ideas al establecer conexiones entre diferentes representaciones de los conceptos matemáticos involucrados; y, proporcionó información visual que sirvió de base para generar argumentos matemáticos que validaran sus conjeturas, reflejando un tránsito de lo visual o empírico a lo formal en el razonamiento de los problemas. GeoGebra fue crucial para conciliar los acercamientos visuales o geométricos con argumentos algebraicos para justificar las conjeturas formuladas por los profesores.

La discusión generada durante las actividades fue un elemento importante que ayudó a reflexión por parte de los profesores de su práctica docente y de la manera en que se pueden diseñar actividades que fomenten en sus estudiantes la comprensión de las ideas y características principales del concepto de función tratando de evitar las ideas erróneas que detectaron a lo largo del estudio. Los profesores reflexionaron sobre su forma de aprender y reconocieron que el uso de herramientas digitales ofrece nuevas rutas para representar, explorar y resolver problemas; además, en distintos niveles, se apropiaron de recursos, estrategias y representaciones para el diseño de actividades en el que se involucre el uso coordinado de tecnologías digitales. Así, los resultados obtenidos proporcionan fundamentos para considerar la metodología propuesta como un camino viable para la formación y desarrollo profesional de profesores de matemáticas de nivel medio superior, pues favorece la deconstrucción de conceptos, es particular en este estudio el concepto de función, al deshacer analíticamente los elementos que lo constituyen y refinar sus ideas y conocimientos preconcebidos.

Referencias

Barrera-Mora, F. & Santos-Trigo, M. (2002). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento. *Matemáticas Aplicadas y su Enseñanza. Serie Bachillerato*, 2, pp. 8-37. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Common Core State Standards Initiative (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington D.C.: National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers.

Cooney, T., Beckmann, S., & Lloyd, G. (2010). *Developing essential understanding of functions for teaching mathematics in Grades 9-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Denzin, N. & Lincoln, Y. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. En N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 1-17). Thousand Oaks: CA: Sage.

Dick, T. & Hollebrands, K. (2011). *Focus in high school mathematics: Technology to support reasoning and sense making*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Krulik, S. & Rudnick, J. (1993). Reasoning and problem solving. A handbook for elementary school teachers. Boston: Allyn and Bacon.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Leung, F. (2013). Part III, Introduction to section C: Technology in the mathematics curriculum. En M. A. (Ken) Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 517-524). New York: Springer International Handbooks of Education.

Miles, B. & Hubberman, A. (1994). *Quantitative Data Analysis*. USA: Sage Publications.

Moreno-Armella, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 81-86). Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

National Council of Teacher of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teacher of Mathematics (2008). *The role of technology in the teaching and learning of mathematics. a position of the National Council of Teachers of Mathematics.* Recuperado de http://www.nctm.org/uploadedFiles/ About_NCTM/Position_Statements/Technology%20final.pdf

National Council of Teacher of Mathematics (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pea, R. (1985). Beyond Amplification: Using the Computer to Reorganize Mental Functioning. *Educational Psychologist*, 20(4), 167-182.

Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM*, 39(5-6), 523-536.

Santos-Trigo, M. (2014). Problem solving in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 496-501). New York: Springer.

Santos-Trigo, M. & Barrera-Mora, F. (2005). Delving into conceptual frameworks: problem solving representations, and models and modeling perspectives. En G. M. Lloyd, M. Wilson, J. L. Wilkins, & S. L. Behm (Eds.), *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-8). Virginia, USA: PME

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2011). Framing a problem solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of the European society for Research in Mathematics Education* (pp. 2258-2277). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M., & Olvera-Martínez, C. (2014). Preservice high school teachers' construction and exploration of dynamic models of variation phenomena. En S. Carreira, N. Amado, K. Jones, & H. Jacinto (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving* (pp. 96-107). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M., & Olvera-Martínez, C. (en prensa). High school teachers' use of a Dynamic Geometry System to formulate conjectures and to transit from using empirical to geometric and algebraic arguments in problem solving approaches. En N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving: A Focus on Technology, Creativity and Affect*. Springer.

Steele, M. & Hillen, A. (2012). The content-focused methods course: A model for integrating pedagogy and mathematics content. *Mathematics Teacher Educator*, 1(1), 53-70.

Resolución de Problemas y Uso de Tecnologías Digitales en un Curso en Línea Masivo y Abierto

POVEDA-FERNÁNDEZ, William, AGUILAR-MAGALLÓN, Daniel Aurelio y OLVERA-MARTÍNEZ, María del Carmen

W. Poveda[1], D. Aguilar[1] y C. Olvera[2]

[1]Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – IPN
[2]Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas

wpoveda@cinvestav.mx

C. Cristóbal, M. Olvera, V. Vargas (Dirs.) Educación para la interdisciplinariedad. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

Digital technologies open up new routes in the mathematical learning process, not only to obtain information but also for students to share ideas, interact with each other or with experts in the discussion of mathematical concepts and ideas. How does the design and implementation of the Activities in a MOOC based on problem solving and coordinated use of digital technologies influences the construction and development of the mathematical knowledge of the participants? The results of this study indicate that the design of the activities and methodology implemented by the MOOC design team in the forums allowed and gave advantage to the discussion and analysis of how the systematic use of digital technologies is important in the representation, exploration, understanding of concepts and problem solving. The participants discussed their mathematical ideas and asked questions, problems and different ways to solve them.

Resolución de Problemas, Tecnologías Digitales, MOOC, Diseño de Actividades

1. Introducción

Las tecnologías digitales influyen cada vez más en el desarrollo de las actividades diarias de los individuos; diversas herramientas de comunicación son frecuentemente utilizadas en la búsqueda de información. Por ejemplo, un estudiante, después de su clase formal, puede consultar a través del uso de un celular, tableta o computadora: YouTube, Wikipedia o KhanAcademy para obtener información sobre conceptos o teoremas. También, es posible que encuentre cursos desarrollados por universidades, donde durante el desarrollo de las actividades, pueda interactuar planteando y discutiendo sus ideas con sus compañeros o expertos en el tema. La conectividad está alterando y cambiando los espacios y tiempos en los que se produce el aprendizaje (Gross, 2016).

Recientemente, diversas universidades a nivel mundial están compartiendo Cursos en Línea Masivos y Abiertos (*Massive Open Online Course*, MOOC por sus siglas en inglés) en los cuales cualquier persona puede inscribirse sin importar su nivel de estudios, ubicación geográfica, dominio o conocimiento previo de la materia. Dependiendo del tema y contenido que aborde un MOOC, puede ser que se solicite una cantidad mínima de requisitos a las personas interesadas. En un MOOC, no existe una restricción en cuanto al número de participantes (generalmente se inscriben miles), además, no existe un profesor encargado de responder o dar seguimiento puntual a cada participante, sino que cada participante está a cargo del desarrollo de sus actividades.

En el campo de la educación matemática, las propuestas curriculares actuales promueven un énfasis en la resolución de problemas y en el uso de herramientas digitales (NCTM, 2009). Los procesos que intervienen en la resolución de problemas son: formulación de preguntas, búsqueda de diversos métodos de solución, explorar diferentes representaciones, búsqueda de patrones, variantes y relaciones entre objetos matemáticos, presentación de argumentos, comunicación de resultados, planteamiento de preguntas y formulación de nuevos problemas (Santos-Trigo, 2014). El uso sistemático de tecnologías digitales resulta importante en los procesos anteriores de la resolución de problemas, por ejemplo, Santos-Trigo (2007) argumenta que un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), por ejemplo, GeoGebra, puede utilizarse para integrar los procesos que intervienen en la resolución de problemas ya que pueden generar representaciones o modelos dinámicos de los problemas matemáticos donde el movimiento de objetos particulares (puntos, rectas, segmentos, polígonos, etc.) puede ser explorado y explicado en términos de relaciones matemáticas. Así, las representaciones dinámicas se convierten en una fuente que involucra a los estudiantes en la reflexión e investigación matemática.

Churchill, King, y Fox (2013; 2016) proponen un marco para el diseño de ambientes de aprendizaje en línea llamado RASE, donde se deben integrar cuatro componentes: Recursos, Actividades, Soporte y Evaluación. Así, para el logro de un aprendizaje, el diseño de las actividades debe:

1. Contemplar y fomentar la participación de los estudiantes en un ambiente de reflexión, colaboración y discusión y,
2. Centrarse en un contexto donde las tareas o problemas involucren a los estudiantes en un proceso de resolución de problemas.

La pregunta de investigación que guió este estudio fue: ¿De qué manera el diseño de las Actividades basadas en la resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales y las interacciones entre los participantes de un MOOC durante el desarrollo de las tareas fomentan la construcción y desarrollo del conocimiento matemático de los participantes?**.** En esta investigación, se diseñaron cinco Actividades que comprendían tareas o situaciones reflejando la práctica de la disciplina, es decir, utilizar diversas representaciones, encontrar el significado e interpretar la solución y comunicar los resultados.

Basándose en las ideas anteriores, se construyó el MOOC llamado: Resolución de Problemas Matemáticos y Uso de Tecnologías Digitales, en la plataforma *Open edx*, (para mayor información https://open.edx.org/about-open-edx) fundamentado en los marcos de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales de Santos-Trigo (2014) y el modelo de diseño de ambientes de aprendizaje de Churchill et al. (2016). Un objetivo planteado durante del diseño de las Actividades del curso fue ofrecer la posibilidad a los participantes de involucrarse en discusiones relacionadas con los procesos de resolución de problemas. Se diseñaron cinco situaciones matemáticas, cada una fue representada dinámicamente utilizando un SGD para que los participantes tuvieran la oportunidad y la posibilidad de: explorar el problema basados en el movimiento de los objetos presentes, generar conjeturas y justificarlas a través de argumentos visuales o empíricos y posteriormente, construir un argumento que involucre propiedades y resultados matemáticos. En todo momento, se hizo conciencia en los participantes que el plantear interrogantes es punto de partida para la comprensión de ideas matemáticas.

El foro que ofrece *Open edx* se utilizó como un medio de Soporte y Evaluación, ya que es un medio de comunicación entre los participantes y les ofrece la oportunidad de plantear y aclarar sus dudas, conocer las ideas de sus compañeros y contrastar sus puntos de vista con los de otros (Poveda & Aguilar-Magallón, 2017). Interesa analizar la forma en que el diseño de las actividades matemáticas y las prácticas, tanto de los participantes como del equipo de diseño, durante la implementación del curso, promueven aspectos relacionados con el pensamiento matemático: el planteamiento de preguntas y la búsqueda de diversas maneras de responderlas; la formulación de conjeturas basadas en el movimiento de objetos matemáticos y la cuantificación de atributos como medida de segmentos, ángulos, áreas, etc.; y la búsqueda de argumentos que validen y sustenten esas conjeturas transitando desde los argumentos empíricos y visuales hasta la construcción de argumentos geométricos y algebraicos.

2. Marco Conceptual

Schoenfeld (1992) argumenta que la resolución de problemas es una actividad esencial en el aprendizaje de las matemáticas ya que es un medio que permite identificar, explorar, probar y comunicar los procesos de solución.

Un aspecto central en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes es la adquisición de estrategias, recursos[1] y una disposición para involucrarse en actividades que reflejen la práctica o actividad matemática (Santos-Trigo, 2008); es decir, identificar y contrastar diversas maneras de representar y explorar un problema, formular conjeturas y justificarlas, extender las condiciones iniciales del problema, y plantear nuevos problemas (Schoenfeld, 1985). Por otra parte, diversas tecnologías digitales proporcionan una base para transformar los materiales de aprendizaje tradicionales y ofrecer a los estudiantes otras formas para que desarrollen su pensamiento matemático (Santos-Trigo, 2014; Aguilar-Magallón & Poveda, 2017a).

Así, las tecnologías digitales juegan un papel importante en resolución de problemas, por ejemplo, si un estudiante no puede resolver el problema por falta de información sobre un concepto, puede utilizar Internet para consultarla de manera que le permita continuar con el proceso de resolución. Borba et al. (2016) comentan que los estudiantes acceden a sitios de información digitales como Wikipedia y WolframAlpha donde pueden consultar y estudiar conceptos o relaciones matemáticas referentes a un tema específico, lo que permite a los estudiantes conectar diversos temas y áreas de las matemáticas (Leung, 2013; Leung & Bolite-Frant, 2015).

En el proceso de resolución de problemas, el uso de un SGD:

> *Se vuelve importante para representar inicialmente el problema en términos de sus propiedades principales y más tarde para visualizar el problema de forma dinámica. Además, esta herramienta puede ser utilizada para cuantificar los atributos matemáticos como áreas, perímetros, ángulos, segmentos de longitudes, pendientes, etc., y observar cómo cambian cuando se mueven algunos objetos (puntos o líneas) dentro de la representación del problema (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2009, p. 275).*

Así, el uso sistemático de tecnologías digitales resulta importante en la representación, exploración, comunicación y comprensión de conceptos matemáticos en la resolución de problemas. Aramo-Immonen, Kärkkäinen, Jussila, Joel-Edgar, y Huhtamäki (2016) afirman que el foro proporciona la oportunidad para un aprendizaje activo y colaborativo en un MOOC; también, argumentan que el carácter abierto y masivo favorece las interacciones entre sus participantes. Según Sinclair y Kalvala (2015), la eficacia de un MOOC depende del tipo de actividades o tareas propuestas a sus participantes; sugieren que éstas deben generar y promover un ambiente de discusión para el intercambio de ideas de manera que atraigan la atención de los participantes, les planteen retos y fomenten su curiosidad.

Churchill et al. (2016) argumentan que se necesita un modelo para el diseño de ambientes de aprendizaje que proporcione, a profesores e investigadores, pautas para utilizar tecnologías digitales en el contexto de la enseñanza y aprendizaje. En esta dirección, proponen el modelo de diseño RASE que integra Recursos, Actividades, Soporte y Evaluación. Los Recursos, se refieren a los materiales disponibles a los estudiantes: videos, documentos digitales, calculadoras, modelos dinámicos elaborados en un SGD, etc. Las Actividades tienen como objetivo involucrar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje, en esta ruta, recomiendan utilizar la resolución de problemas. El Soporte se refiere a que se deben incluir diversos medios de comunicación que permitan a los estudiantes obtener ayuda o retroalimentación en el momento en que lo necesiten y fomentar su independencia del profesor o tutor. Cuando un participante del MOOC comparte sus ideas o resultados obtenidos, puede modificar o refinar sus conceptos, ideas y estrategias de resolución de problemas.

---

[1] Son todos los conocimientos que un individuo puede utilizar cuando se enfrenta a una situación matemática específica (Schoenfeld, 1985).

La Evaluación enfatiza que se debe crear conciencia en los estudiantes sobre reflexionar acerca de la retroalimentación recibida para que continúen su proceso de aprendizaje. Durante el diseño de las Actividades del MOOC, los problemas matemáticos deben ser vistos como un medio para que los participantes planteen preguntas y busquen diversas formas de contestarlas con ayuda de los Recursos o interactuando entre ellos. El objetivo es que el participante desarrolle el hábito de cuestionamiento que le ayude a resolver problemas en matemáticas; así como en cualquier disciplina del conocimiento humano.

En el MOOC Resolución de Problemas Matemáticos y Uso de Tecnologías Digitales, el objetivo del diseño de las Actividades fue que las tareas matemáticas permitan a los participantes mover los objetos de un modelo dinámico del problema, identificar visual o empíricamente las relaciones entre éstos y conjeturar una posible solución del problema. Su validación transita desde el uso de argumentos empíricos o visuales hasta la presentación de una prueba o demostración matemática. En esta ruta, un aspecto importante a incluir es un medio de comunicación que funcione como Soporte donde los participantes puedan plantear alguna interrogante o idea en cualquier momento y recibir retroalimentación, así, pueden reflexionar y tomar decisiones, como proceso de Evaluación, hacia el cumplimiento de sus objetivos de aprendizaje.

3. Metodología

Se describen los elementos del diseño del MOOC, sus participantes, metodología utilizada durante la implementación del curso y la forma de organizar y analizar los datos obtenidos.

3.1 Diseño de las Actividades

El curso pretende enfatizar que el aprendizaje de las matemáticas requiere problematizar o cuestionar las tareas o situaciones, pensar distintas maneras de resolver un problema, comprender y utilizar diversas representaciones, encontrar el significado e interpretar la solución y comunicar los resultados. Mediante este proceso, las preguntas se convierten en un medio que permiten a los participantes construir, desarrollar, refinar, o transformar sus formas de comprender y resolver problemas. Para ello, se utilizaron diversos Recursos, Actividades, medios de Soporte y formas de Evaluación. Los Recursos incluyeron representaciones dinámicas de los problemas elaborados en GeoGebra, vínculos a la plataforma Wikipedia y videos de KhanAcademy que permitan el estudio y consulta de conceptos o relaciones matemáticas.

Las Actividades comprendieron problemas matemáticos con la finalidad de que los participantes fomentaran sus procesos de construcción o desarrollo del pensamiento matemático. En cada Actividad se resaltó:

1. El movimiento de los objetos. Inicialmente, se proporciona a los participantes un modelo dinámico que contiene figuras simples con el propósito de que identifiquen y conecten los conceptos o propiedades matemáticas asociadas al problema que representa. Los Recursos tienen la finalidad de permitir a los participantes extender o refinar su conjunto de conocimientos e involucrarse en los procesos de resolución de problemas.

2. Formulación de conjeturas. Durante el desarrollo de cada Actividad, el trabajo de los participantes es plantear interrogantes sobre el comportamiento de algunos atributos de los objetos presentes y formular conjeturas que pueden ser sustentadas o refutadas utilizando argumentos visuales o empíricos.

3. Justificación de conjeturas. Toda conjetura propuesta por los participantes debe ser justificada. Así, las Actividades propuestas, promueven y cuestionan al participante para que construya y presente un argumento que involucre propiedades y resultados matemáticos. Por ejemplo, se pueden incluir resultados geométricos, argumentos de cálculo o geometría analítica.

El medio de Soporte fue el foro de discusión ya que ofrece la posibilidad de que los participantes planteen sus dudas, compartan ideas y participen en las discusiones generadas en el desarrollo de las tareas. Así, el trabajo de los integrantes puede ser un punto de referencia para que otros retomen o extiendan las ideas, las contrasten y discutan. Además, el foro es un medio para que los participantes reciban retroalimentación acerca de las ideas que plantean, esto les permite realizar un análisis y reflexión como parte de la Evaluación.

El MOOC se desarrolló en la plataforma *Open edx*, parte de la Secretaría de Educación Pública de México (para más información https://mexicox.gob.mx). La estructura del curso, las actividades y sus objetivos se muestran en la Tabla 7.1.

Tabla 7.1 Estructura de las actividades del MOOC

Conjunto de actividades	**Objetivos**
Sesión de trabajo 1 (una semana). Importancia de formular preguntas.	Relacionar las actividades de resolución de problemas con el aprendizaje de las matemáticas. Promover que los estudiantes formulen preguntas como un camino para comprender ideas matemáticas y resolver problemas.
Sesión de trabajo 2 (una semana). El problema de los granjeros: Dividir un cuadrado en dos áreas iguales.	Importancia del movimiento de objetos y la medición de atributos tal como el área de figuras geométricas. Resaltar la búsqueda de diversas maneras de resolver el problema y plantear preguntas para extenderlo.
Sesión de trabajo 3 (una semana). Un problema de construcción: un triángulo isósceles entre dos rectas paralelas.	Comprender el concepto de punto simétrico, explorar el modelo dinámico en búsqueda de relaciones o invariantes y justificar o refutar las conjeturas planteadas utilizando argumentos matemáticos.
Sesión de trabajo 4 (dos semanas). El segmento y su recta mediatriz, el triángulo isósceles., el triángulo equilátero y el triángulo rectángulo e isósceles.	Mover objetos, observar el movimiento de las figuras y formular algunas conjeturas sobre su comportamiento tras el movimiento. Justificar o refutar las conjeturas que se identifiquen en una primera fase, la explicación puede estar sustentada a partir de argumentos visuales o empíricos, para posteriormente construir y presentar otro tipo de argumentos (geométricos, algebraicos, etc.).
Sesión de trabajo 4 (dos semanas). La parábola como lugar geométrico. Explorar el comportamiento del área de una familia de rectángulos de perímetro fijo que se puede modelar a través de un lugar geométrico.	Introducir al participante en el estudio de lugares geométricos como una estrategia para resolver problemas.

Fuente: Elaboración propia

3.2. Implementación del MOOC, sus participantes y procedimientos

El MOOC tuvo una duración de siete semanas y el requisito solicitado a los interesados fue poseer o estar cursando estudios de nivel medio superior y se plantearon cinco Actividades, donde, durante su desarrollo, los participantes, tenían la posibilidad de expresar sus ideas en el foro, las veces que consideraran necesarias. El equipo de diseño del MOOC (ED) monitoreó la actividad de los participantes en los foros de la siguiente manera:

1. Dado que es probable que muchos comentarios planteados por los participantes se repitan y generen una gran cantidad de información que, en lugar de ayudarlos, los confundan o provoquen que pierdan el interés en presentar sus ideas, en cada Actividad se clasificaron los comentarios en cuatro categorías: respuestas a las preguntas que planteaba cada Actividad, acercamientos hacia la solución del problema (correctos e incorrectos), preguntas planteadas y, extensiones del problema. Posteriormente, se eliminaron aquellos que tenían ideas similares; se tomaron dos comentarios de cada categoría y fueron colocados de tal forma que se mostraran al inicio de las conversaciones, así los participantes les daban prioridad a estos comentarios para analizarlos y discutirlos.
2. Se intervenía en el foro sólo cuando se requería orientar y extender la discusión. No se respondían de manera directa las preguntas de los participantes, sino que, se planteaban preguntas con el objetivo de generar discusión y que ellos mismos buscaran diferentes formas de solucionar la situación.
3. Al final de cada Actividad, se planteó una serie de preguntas para promover la ampliación del tema y que los participantes buscaran extender los problemas iniciales.

Los datos de este estudio se recolectaron por medio de los foros de discusión. La unidad de análisis fueron las conversaciones de los participantes en cada Actividad. Ernest (2016) argumenta que en la conversación como unidad de análisis intervienen: un hablante/proponente, un oyente/crítico y un texto matemático. El hablante/proponente plantea una idea y el oyente/crítico responde proporcionando su punto de vista, aceptando o modificando la idea original. Posteriormente, el hablante/proponente puede asumir el rol de oyente/crítico, de esta manera, se alternan sus roles.

Al finalizar el curso, el equipo de diseño del MOOC, hizo una recapitulación de las conversaciones en cada Actividad del curso y seleccionó diez de los participantes más activos durante todo el curso (Yolanda, Karol, Alejandra, Alex, Carlos, Diego, Erick, Guillermo, Jhon y Alan), este conjunto se denomina Grupo. Interesa analizar cómo el diseño de las Actividades y las interacciones en el foro fomentan el proceso de construcción y desarrollo del conocimiento matemático, de los participantes: ¿Cómo interpretaron los participantes los objetos matemáticos presentes en las construcciones dinámicas que representan los problemas? ¿Qué propiedades asociaron a los conceptos? ¿Qué significados matemáticos construyeron? ¿Qué estrategias de solución asociadas a un SGD utilizaron? ¿Qué preguntas planteaban y cómo las respondían? y ¿Cómo influyó la metodología utilizada por el equipo de diseño durante la implementación del MOOC?

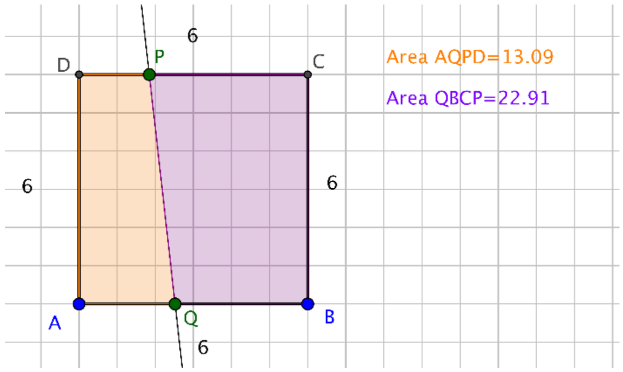
4. Presentación de Resultados

En esta sección se discute una de las Actividades del MOOC. El problema inicial fue: Dos granjeros desean sembrar un terreno que tiene forma de un cuadrado. ¿Cómo dividir el terreno para que cada granjero siembre exactamente la misma área? ¿Existen varias formas de hacer esa división? En cada Actividad se discute una solución diferente al problema.

4.1. Solución 1

En esta primera solución, los Recursos comprenden construcciones dinámicas de un cuadrado, enlaces a Wikipedia y un conjunto de preguntas para guiar el trabajo de los participantes. En el modelo dinámico del cuadrado (terreno), se trazan los puntos P y Q sobre los DC y AB, respectivamente, y la recta PQ que divide al cuadrado en dos regiones. Se resaltan los valores de las áreas de los cuadriláteros $AQPD$ y $QBCP$ (Figura 7.1). Se cuestiona a los participantes sobre: Al mover los puntos $A, B, P\ y\ Q$ ¿Qué ocurre con las áreas de las regiones? ¿Dónde situar los puntos P y Q para que las áreas de las regiones $AQPD$ y $QBCP$ sean las mismas?

Figura 7.1 Soluciones de Karol



Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Alan, Karol, Alejandra, Carlos, Erick, Guillermo y Jhon coincidieron en que al mover los puntos P y Q es posible obtener regiones de áreas iguales y se basan en el movimiento de objetos y la medición de áreas para determinar algunas soluciones: $P = C\ y\ Q = A$; $P = D\ y\ Q = B$; $y\ PQ$ mediatriz de DC (Figura 7.2).

Figura 7.2 Soluciones de Karol

Alejandra tiene razón cuando dice que la solución es cuando la recta PQ es una diagonal, pero noten que existen mas soluciones: 1. PQ es perpendicular a DC y pasa por su punto medio, es decir, PQ es mediatriz de DC.

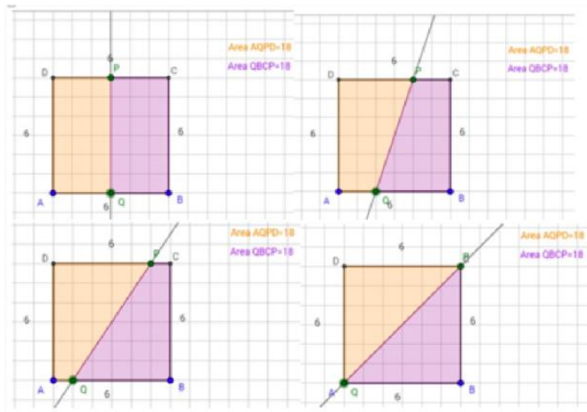
Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 4. Sol 1. Justificación

Esta publicación es visible para todos.

Fuente: MOOC Resolución de problemas matemáticos y uso de tecnologías digitales

Ninguno de los participantes logró observar la solución general: Si PQ pasa por O (centro del cuadrado) entonces el $área\ AQPD = área\ QBCP$. En las conversaciones, Karol compartió imágenes de cuatro soluciones basándose en argumentos visuales (valor del área de cada región) pero no identifica invariantes: no observó que, en todas las figuras que compartió, PQ pasa por O (Figura 7.3). El ED no intervino ya que en la siguiente parte de la Actividad se incluyó una serie de preguntas para que los participantes exploraran y formularan una conjetura de la solución del problema relacionada con el centro del cuadrado.

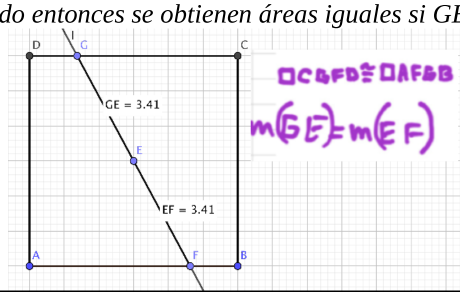
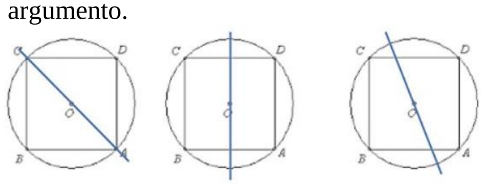
Figura 7.3 Soluciones de Karol



Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

En la siguiente parte, la conjetura, se cuestionó a los participantes: ¿Qué propiedad cumple la recta PQ para aquellos casos en que las áreas de las regiones son las mismas? ¿Resulta importante el centro del cuadrado y la posición de la recta que divide al terreno en regiones de la misma área? Los participantes exploraron y observaron algunas invariantes en los objetos involucrados en el problema. La Tabla 7.2 muestra la conjetura planteada por Alan y Erick y un resumen de las interacciones en el foro.

Tabla 7.2 Conjeturas formuladas por los participantes y sus interacciones en el foro

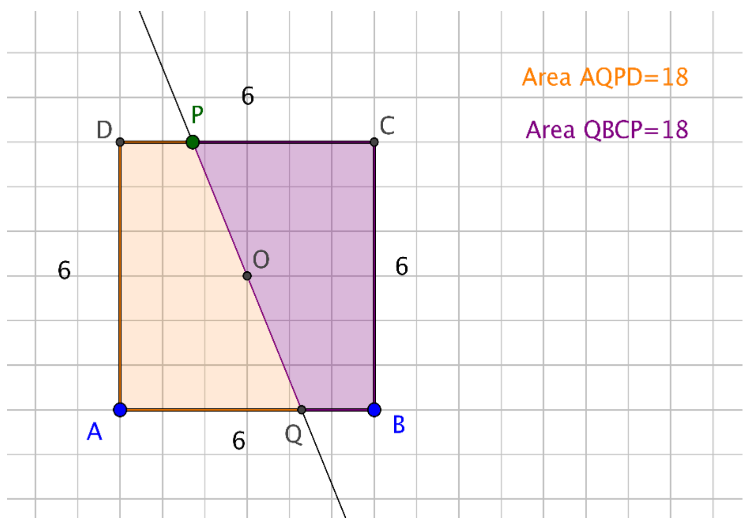
Conjetura planteadas por los participantes	**Interacciones en el foro**	**Resultados**
Alan **c**onstruyó un modelo dinámico del problema, lo compartió y formuló la conjetura: "*Si E es el centro del cuadrado entonces se obtienen áreas iguales si GE=FE*". 	Guillermo mencionó que toda recta que pasa por el centro tiene dicha propiedad, por lo cual, la conjetura se puede expresar utilizando el centro del cuadrado. Otros participantes, ninguno del Grupo, opinaron igual.	Alan menciona que la solución general se obtiene cuando la recta PQ contiene el centro de cuadrado.
Erick: "*Si PQ pasa por el centro del cuadrado entonces se convierte en un eje de simetría, por lo tanto, las áreas son iguales*". Carlos, Karol, Jhon y Guillermo presentan el mismo argumento. 	ED: "*¿Qué es un eje de simetría? ¿Cómo se define el eje de simetría de un cuadrado? ¿Cuántos ejes de simetría tiene un cuadrado?*" Los participantes, compartieron y comentaron información de Wikipedia sobre el eje de simetría, concluyeron que la conjetura es falsa.	Los participantes analizaron el concepto de eje de simetría de un cuadrado, para ello, P_x compartió información de Wikipedia. Concluyeron que los ejes de simetría del cuadrado son: cada diagonal, la mediatriz de los lados.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Para extender la discusión y guiar a los participantes en sus exploraciones, el ED cuestionó: *"¿Cuántas soluciones existen?"* Jhon, Karol y Alejandra coincidieron en que: *"Existen infinitas rectas que pasan por el punto O y cortan a los lados opuestos del cuadrado, por lo tanto, se tienen infinitas posibles formas de dividir el un cuadrado en dos regiones de área igual*". Las ideas mostradas en la Tabla 7.2 y la pregunta complementaria que planteó el ED sirvieron para identificar que la solución al problema se obtiene cuando PQ contiene a O, además, las soluciones son infinitas. Al final de las discusiones en el foro, los diez participantes del Grupo formularon su primera conjetura: "*Si la recta PQ pasa por el centro del cuadrado entonces PQ lo divide en dos áreas iguales"*, basados en el movimiento de P y Q y en la medición de las áreas de los dos polígonos que dividen el cuadrado.

Una vez que los participantes formularon una conjetura basada en las estrategias del movimiento de objetos y la medición de sus atributos, la siguiente parte consistió en hacerlos transitar a la búsqueda de relaciones matemáticas que sustentaran la conjetura. Para ello, se les proporcionó el modelo dinámico del problema representado en la Figura 7.4, el cual consistió en una modificación de la construcción original (ver Figura 7.2) ya que el punto Q no es móvil. Se les solicitó mover el punto P y observar qué pasa con las áreas de las regiones que se generan, además, cambiar la longitud de lado del cuadrado (moviendo A ó B). Luego, se plantearon las siguientes preguntas: ¿Cómo se sustenta matemáticamente la conjetura planteada? ¿Qué conceptos, propiedades y recursos matemáticos podemos usar para sustentar y demostrar la conjetura?

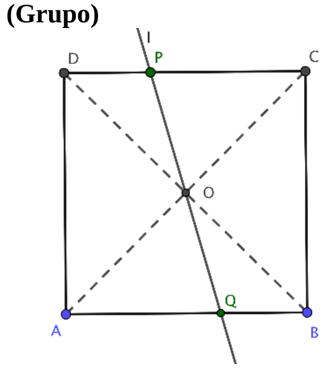
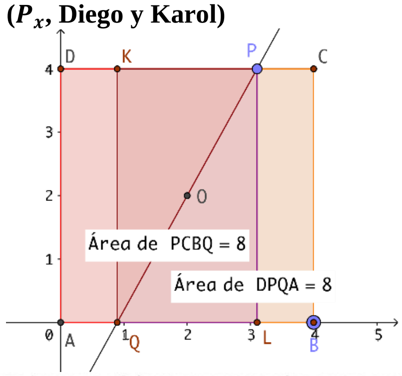
Figura 7.4 Modelo dinámico en la parte de Conjetura de la Actividad



Fuente: Actividad del MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales

En esta parte de la Actividad participaron ocho de los diez integrantes del Grupo, Yolanda y Alejandra no compartieron sus ideas en el foro. Todos discutieron y concluyeron la justificación 1 que muestra la Tabla 7.3, Alex recopiló las ideas, construyó y presentó un modelo dinámico que muestra la solución. Un participante que no pertenece al Grupo (P_x) presentó otro argumento para la justificación de la conjetura (justificación 2 de la Tabla 7.3), Diego y Karol afirmaron estar de acuerdo en las ideas, pero faltó justificar la congruencia de los rectángulos $AQKD$ y $LBCP$.

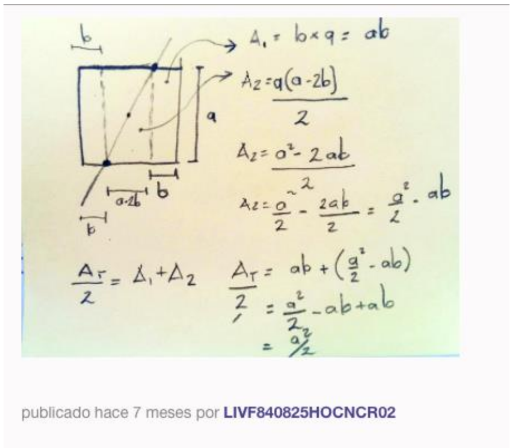
Tabla 7.3 Justificaciones, recursos y estrategias discutidas en el foro

Justificaciones presentadas por los particiopantes	**Recursos y estrategias de exploración y solución**
Justificación 1 (Grupo)  Se trazan las diagonales AC y BD, O es su punto de intersección. El triángulo DOP es congruente con el triangulo BOQ ya que tienen dos ángulos correspondientes congruentes y el lado correspondiente entre ellos también es igual, así, DP y BQ son congruentes. los cuadrilateros AQPD y QCCP tienen la misma área.	**Recursos:** Propiedades del cuadrado y sus diagonales, ángulos entre paralelas, ángulos opuestos por el vértice y congruencia de triángulos. **Estrategia**: Colocar un punto móvil P sobre el lado DC, construir la recta PO y trazar las diagonales del cuadrado. **Justificación:** $\Delta DOP \cong \Delta BOQ$ (por el criterio ALA), así $DP = BQ$, por lo tanto, los trapecios $AQPD$ y $QBCP$ son congruentes y tienen área igual.
Justificación 2 (P_x, Diego y Karol)  como vemos en esta imagen, si descomponemos las areas que se generan al atravezar un cuadrado con una linea que pase por su centro, podemos observar que cada lado esta compuesto por el area de un rectangulo y un triangulo, y que tienen las mismas medidas que las figuras complementarias, este argumento de forma grafica, demuestra que las areas son iguales. Los triángulos QKP y PLQ son congruentes por el criterio LLL. También los rectángulos son congruentes. Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 4. Sol 1. Justificación Esta publicación es visible para todos.	**Recursos:** Propiedades del cuadrado, congruencia de triángulos, ángulos entre paralelas, propiedades de rectas paralelas y perpendiculares. **Estrategia:** Colocar el punto móvil P sobre DC, trazar la recta PO y construir rectas perpendiculares a DC y AB que pasan por P y Q, respectivamente. **Justificación:** $\Delta QKP \cong \Delta PLQ$ (LAL) y los rectángulos $AQKD$ y $LBCP$ son congruentes (no proporciona argumentos).

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

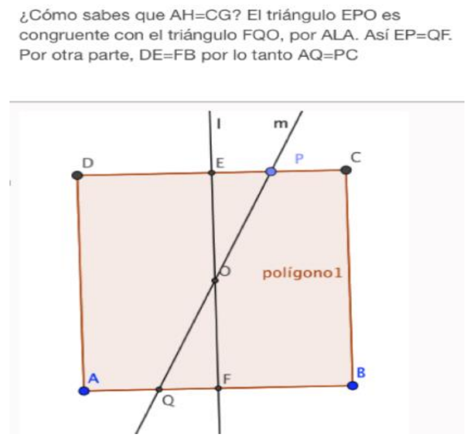
Diego planteó la pregunta: *"¿Cómo sabes que AQ=PC?"*, P_x compartió un modelo algebraico tratando de justificar la conjetura (Figura 7.5), pero no sustenta que *AQ*=*PC*. Posteriormente, el ED realizó la misma pregunta, otro participante que no pertenece al Grupo compartió una imagen (Figura 7.6) donde utilizó las ideas de la justificación 1 de la Tabla 7.2 para mostrar, por congruencia de triángulos, que *AQ*=*PC*.

Figura 7.5 Solución algebraica de P_x



Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro.

Figura 7.6 Justificación $AQ=PC$



Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro.

Con el objetivo de buscar otras soluciones al problema, el ED planteó en el foro: "*¿Existe otra opción para dividir el terreno? ¿Cuántas?".* Guillermo fue el único que propuso otra solución al mencionar que se puede hacer la división del terreno similar a un tablero de ajedrez donde la suma de las áreas de los cuadrados blancos es igual a la suma de las áreas de los cuadrados negros (Figura 7.7).

Figura 7.7 Solución de Guillermo

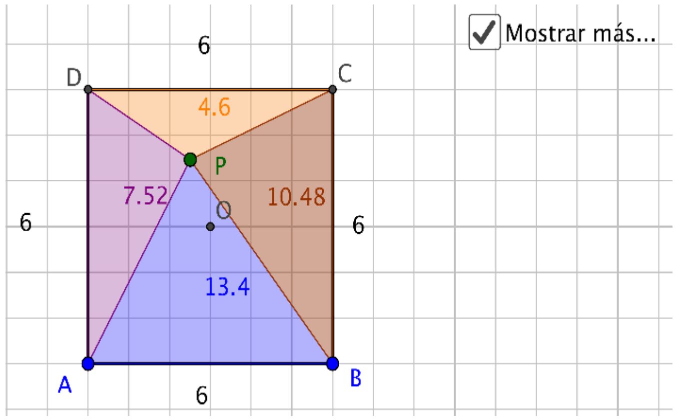
Si, por ejemplo -dado que no hay limitaciones en la división-, dividiendo el cuadrado como tablero de ajedrez y que uno tomo los cuadros blancos y otro los cuadros negros.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

4.2 Solución 2

En la búsqueda de otras soluciones, la siguiente Actividad proporcionó a los participantes un nuevo modelo dinámico del cuadrado, donde el punto P está en su interior (Figura 7.8); se les solicitó mover el punto P y observar que, efectivamente, P pertenece al interior del cuadrado $ABCD$: ¿Qué regiones se les puede asignar a los grajeros para que cada uno siembre la misma área?

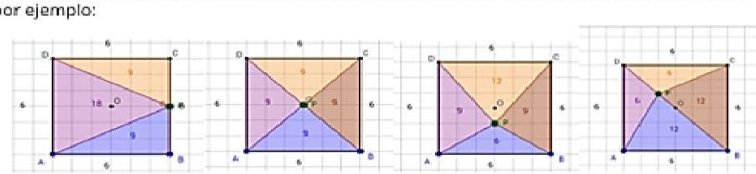
Figura 7.8 Modelo dinámico del cuadrado en la Solución 2



Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Los participantes exploraron, a través del movimiento de objetos y presentaron algunas soluciones (Tabla 7.4, P_y y P_z son participantes no pertenecientes al Grupo).

Tabla 7.4 Ideas e interacciones de los participantes en el foro

Ideas iniciales planteadas en el foro	**Discusiones en el foro**
Karol indica que es posible determinar una solución al problema cuando P pertenece a una de las diagonales del cuadrado o a la recta que une los puntos medios de AB y DC. Para ayudar a los granjeros podría decirles que pueden tomar cualesquiera dos regiones de por ejemplo:  por ejemplo del primer cuadro uno toma el color morado y el otro los que faltan, y así con los demás cuadros repartiéndolos de forma equitativa, sin embargo, hay que buscar la realidad del contexto, y una división del terreno como en cuadro 3 no sería algo muy usual, así que le diría a los granjeros que dividan el terreno como en la figura 2 para cumplir su labor. Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 5. Sol 2. Movimiento Esta publicación es visible para todos.	Los 10 participantes del Grupo comentaron que al mover los puntos A, B y P se pueden obtener las soluciones cuando: P coincide con alguno de los vértices, P es el punto medio de un lado o P es el centro del cuadrado. Ningún participante observó invariantes entre los objetos o sus atributos. No formularon una conjetura general.
Participante P_y Al mover P siempre se forman 4 triángulos Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 4. Sol 1. Justificación Esta publicación es visible para todos.	Carlos y Alejandra: "Mueve el punto P de tal forma que coincida con un vértice o que esté sobre un lado? ¿Cuántos triángulos se forman?"
Participante P_z: P debe coincidir con cualquier vértice Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 4. Sol 1. Justificación Esta publicación es visible para todos.	Carlos le indica que existen más soluciones: "Mueve el punto P, sin importar su posición, mientras esté dentro del cuadrado, la suma de las áreas de los triángulos opuestos es la mitad del área del cuadrado".

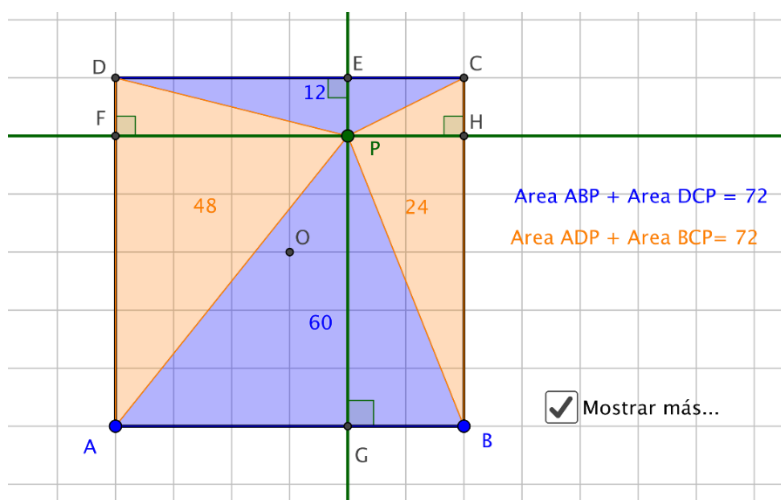
Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Alex formula la conjetura: "*Si P está sobre la mediatriz de cualquiera de los lados entonces se tiene que la suma de las áreas de los triángulos opuestos es la mitad del área del cuadrado*". Este comentario, no recibió ninguna respuesta ya que no fue jerarquizado por el ED.

Al igual que en la Solución 1, el ED no intervino, pues el diseño de la Actividad, en la siguiente sección (Conjetura) guía a los participantes a mover el punto P y observar la medida del área de cada uno de los triángulos que conforman el cuadrado: ¿Es posible identificar alguna relación entre los valores de las áreas? ¿Se cumple esta relación para cualquier posición del punto P? ¿Al variar la posición del punto P, qué ocurre con la suma de las áreas de los triángulos APB y DCP?

Todos los integrantes del Grupo formularon y compartieron la conjetura: *Si P es un punto que está dentro del cuadrado, la suma de las áreas de los triángulos opuestos es la mitad del área del cuadrado*. La sustentaron utilizando argumentos visuales y empíricos: el movimiento del punto P y la medición de áreas. Una vez establecida la conjetura, con el objetivo de buscar formas de justificarla utilizando relaciones matemáticas, se proporcionó a los participantes una modificación del modelo dinámico que se muestra en la Figura 7.8, se incluyeron las rectas FH y GE que pasan por P y perpendiculares a DC y AB, respectivamente (Figura 7.9). ¿Cómo validar matemáticamente esta conjetura? ¿Qué propiedades son importantes para presentar un argumento que sustente la conjetura? ¿Qué propiedades tienen los triángulos que se generan al trazar las rectas perpendiculares a los lados que pasan por el punto P?

Figura 7.9 Modelo dinámico del cuadrado en la Justificación de la Solución 2



Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Karol mencionó que, al trazar las rectas perpendiculares que pasan por P y mediante congruencia de triángulos, se puede justificar la relación entre sus áreas, sin embargo, no especificó cuáles triángulos tomar ni los criterios de congruencia a utilizar. Alan y Jhon retomaron tales ideas y utilizaron el criterio de congruencia de triángulos LLL y LAL para justificar la conjetura. Alex observó la existencia de triángulos rectángulos congruentes y presentó un modelo algebraico para sustentar la conjetura, finalmente, Diego planteó otra justificación basada en el movimiento del punto P y la cuantificación de las sumas de las áreas de los triángulos opuestos. La Tabla 7.5 muestra el detalle de las justificaciones.

La justificación de Diego generó una discusión entre varios de sus compañeros, algunos, en el proceso de comprensión de las ideas, utilizaron argumentos algebraicos para comprobarlo, sin embargo, no fueron del todo correctos. Por ejemplo, el participante P_x compartió un modelo algebraico para justificar la conjetura basado en un caso especial (cuadrado de lado 6), Karol y Alejandra le proporcionaron retroalimentación referida a que la justificación matemática se debe hacer en forma general y no en un caso específico. Posteriormente, P_x agradeció en el foro a Karol y Alejandra por la. La Tabla 7.6 muestra los detalles.

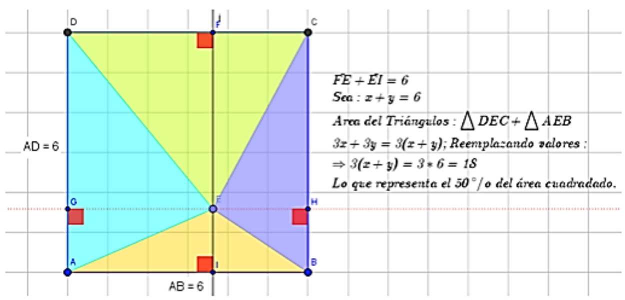
Tabla 7.5 Justificaciones de la conjetura y los recursos utilizados

Comentarios en los foros relacionados con la justificación de la Solución 2	**Recursos y justificación utilizados**
Alan y Jhon Al trazar rectas perpendiculares en P se forman rectángulos cuyas diagonales vendrían a ser los lados de los triángulos acutángulos generados en el cuadrado. En cada rectángulo se formo dos triángulos rectángulos. Para demostrar la conjetura utilizaríamos la altura y la base de cada de cada rectángulo, lo dividimos en 2 y seria el área de cada triángulo rectángulo, sumamos las áreas de acuerdo al color y demostraríamos que la suma de los triángulos opuestos por el vértice P son iguales al otro para de triángulos también opuestos por el vértice. Los triángulos AGP y AFP son congruentes ya que cumplen el criterio de congruencia LLL y AP es diagonal del rectángulo AGPF. Los triángulos FPD y EPD son rectángulos congruentes por LLL, igual para PEC y PHC y GBP y HPB, por lo tanto la suma de las áreas de los triángulos DCP y ABP es igual a la suma de las áreas de APD y BCP. Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 7. Sol 2. Justificación Esta publicación es visible para todos.	**Recursos:** Propiedades de rectas paralelas y perpendiculares, triángulos rectángulos congruentes. **Justificación 1.** ΔAGP ≅ ΔAFP (por LLL, AP es diagonal del rectángulo AGPF. ΔFPD ≅ ΔEPD (por LLL) ΔPEC ≅ ΔPHC (por LLL) ΔGBP ≅ ΔHPB (por LLL) Por lo tanto, $\Delta DCP + \Delta ABP = Area\ \Delta APD + \Delta BCP$.
Alex Propongo la siguiente justificación: JUSTIFICACIÓN DE LA CONJETURA Calculemos el área de los triángulos APD y BCP y sumémoslas: $\frac{DA \cdot FP}{2} + \frac{CB \cdot HP}{2}$ Ahora bien, dado que los segmentos DA y CB son lados del cuadrado, entonces tienen la misma longitud. Por lo que se pueden establecer las siguientes igualdades: $\frac{DA \cdot FP}{2} + \frac{CB \cdot HP}{2} = \frac{DA}{2}(FP + PH) = \frac{DA}{2}(FH)$ Análogamente calculemos la suma de las áreas de los triángulos DPC y ABP y usemos el dato de que los segmentos DC y AB tienen la misma longitud por ser lados del cuadrado: $\frac{DC \cdot EP}{2} + \frac{AB \cdot PG}{2} = \frac{DC}{2}(EP + PG) = \frac{DC}{2}(EG)$ Por otro lado, DC tiene la misma longitud que FH, ya que los segmentos AD y BC son paralelos, por ser lados del cuadrado. Por el mismo argumento DA es congruente con EG. De esto concluimos que: $\frac{DC}{2}(EG) = \frac{DA}{2}(FH)$ Que es lo que queríamos justificar Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 7. Sol 2. Justificación Esta publicación es visible para todos.	**Recursos:** Triángulos congruentes. **Justificación:** El área de ΔAPD y ΔBCP es igual a $\frac{AD \cdot FP}{2} + \frac{BC \cdot HP}{2} = \frac{AD \cdot BC}{2}(FP + HP) = \frac{AB \cdot AB}{2}$ dado que $AD = BC$ y $FP + HP = FH = AB$.
Diego Las suma alturas de los triángulos DCP y ABP se mantienen constantes cuando se mueve P, y su valor es igual a la longitud del lado del cuadrado. La suma de las áreas de los triángulos DCP y ABP es igual a la mitad del área del cuadrado ya que la suma de esas áreas es AB*GP/2 + DC*EP/2=AB(GP+EP)/2=AB(BC)/2=AB*AB/2. Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 7. Sol 2. Justificación Esta publicación es visible para todos.	**Justificación:** La recta perpendicular al lado DC que pasa por P es altura de los triángulos $DCP\ y\ ABP$. Así, la altura de los triángulos DCP y ABP varía pero su suma no y la suma de sus áreas es igual a la mitad del área del cuadrado.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Una vez que los participantes compartieron y discutieron las soluciones anteriores, el ED planteó la siguiente pregunta en el foro: "*¿Se podrá determinar otra solución diferente a las anteriores para dividir un cuadrado en dos áreas iguales? ¿Qué otras preguntas se pueden plantear?*".

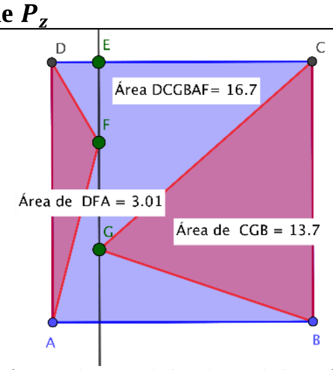
Tabla7.6 Interacciones en el foro y los resultados obtenidos

Idea inicial de P_x.	**Interacciones en el foro**	**Resultados**
 Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 7. Sol 2. Justificación Esta publicación es visible para todos.	Transcripción de las ideas de P_x: $FE + EI = 6$ Sea $x + y = 6$. $Área\ de\ \Delta DEC + \Delta AEB =$ $3x + 3y = 3(x + y) = 3 * 6 = 18.$ (50% del área del cuadrado). **Karol**: "*No se deben tomar valores específicos (lado del cuadrado igual a 6 unidades lineales)*". **Alejandra: "***La justificación se debe realizar en general*".	Se justifica la conjetura de Diego utilizando un modelo algebraico. Se establece que las demostraciones no se pueden basar en casos específicos.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

La Tabla 7.7 muestra otra solución del problema donde el participante P_z (no perteneciente al Grupo) construyó y compartió en el foro un nuevo modelo dinámico del problema con otra solución, basándose en la estrategia que utilizó Diego (Ver Tabla 7.5). Karol, Jhon y Alex discutieron y aprobaron la solución y su justificación, además, mencionaron que el uso de herramientas digitales tal como GeoGebra, fomenta este tipo de soluciones.

Tabla 7.7 Otra solución al problema propuesta por P_z

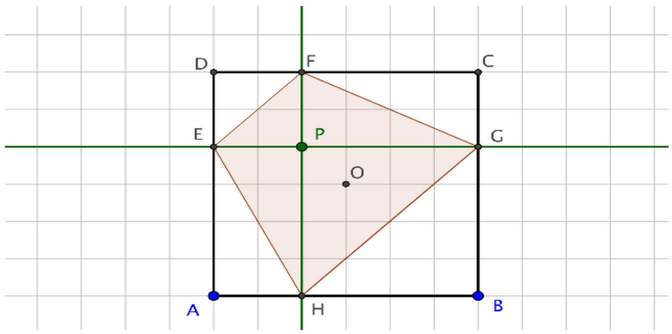
Solución de P_z	**Recursos, estrategias y justificación**
 Como mencionó Diego, la suma de las alturas de los triángulos AFD y BCG es constante y es igual al lado del cuadrado, sin importar la medida de su lado. Si sumamos las áreas de los triángulos DFA y CGB se tiene que es igual a la mitad del área del cuadrado, anteriormente Diego lo justificó: área DFA + área CGB= AD*AB/2=AB*AB/2 (AD=AB). Relacionado con: Problema 1 / Problema 1. Foro 5. Sol 2. Movimiento Esta publicación es visible para todos.	**Recursos:** Propiedades de rectas paralelas y perpendiculares. **Estrategia:** Colocar un punto móvil E sobre DC, trazar la recta m perpendicular a DC que pasa por E. Colocar dos puntos móviles F y G sobre m. **Justificación 1:** La suma de las alturas de ΔAFD y ΔBCG es constante e igual a AB sin importar la posición de E, F y G, por lo tanto $Area\ \Delta AFD\ +\ Area\ \Delta BCG$ es la mitad del área del cuadrado. **Justificación 2:** Trazar rectas paralelas a los lados que pasan por los puntos móviles para obtener triángulos congruentes.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro.

4.3 Solución 3

Con el objetivo de que los participantes buscaran otras soluciones al problema, se les proporcionó un nuevo modelo dinámico que representa un cuadrado de lado AB, un punto móvil P en su interior y las rectas perpendiculares a los lados que pasan por P (Figura 7.10). Se cuestiona a los participantes sobre cómo asignar a los granjeros áreas iguales. A diferencia de la Solución 1 y 2, el modelo dinámico no incluyó la medida del área de cada región.

Figura 7.10 Modelo dinámico del cuadrado Solución 3

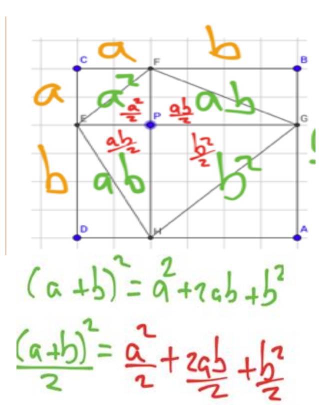


Fuente: Actividad del MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales

En esta parte, sólo participaron Alan, Karol, Alejandra y Alex del Grupo. Todos plantearon la conjetura: *El área asignada al primer granjero puede ser la del cuadrilátero EFGH y la del segundo el área restante*.

Karol complementó las ideas de otros participantes y proporcionó información adicional relacionada con recursos matemáticos, por ejemplo, comparte un link sobre la congruencia de triángulos de Wikipedia para clarificar el tema a un participante que no lo recordaba. Alan retomó esta idea y presentó una justificación no válida, Alex y Karol le proporcionaron retroalimentación al mencionarle los errores. Alan afirmó comprender, la Tabla 7.8 muestra los detalles de la conversación.

Tabla 7.8 Justificación de Alan y la retroalimentación proporcionada por otros

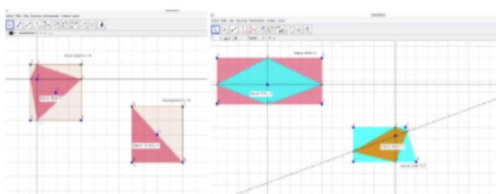
Idea de Alan	Interacciones en el foro	Resultados
	Alan: Utilizó el teorema de Pitágoras para determinar las diagonales de los cuadrados y rectángulos, utilizó áreas de triángulos para concluir que el área del cuadrilátero $EFGH$ es la mita del cuadrado original. Alex y Alejandra comentó que para ciertas posiciones del P la justificación es válida, sin embargo, no se abarcaba la totalidad de los casos. Karol y Alejandra: "¿Qué sucede si PECF no es cuadrado? Mueve el punto P hacia el lado AB".	Una justificación no se debe basar en casos especiales sino se debe hacer en forma general. El movimiento de objetos permite observar rápidamente casos donde la justificación no funciona.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Una vez concluida la Actividad, el ED planteó en el foro la siguiente pregunta: "*Hemos divido a un cuadrado en dos regiones de igual área ¿qué otras preguntas podemos plantearnos?"*. Un participante, no perteneciente al Grupo, mencionó que, tras seguir el mismo proceso para dividir el área del cuadrado en dos partes iguales, al mover el punto P, observó que la solución funcionaba también para el rectángulo, pero no para cualquier otro tipo de cuadrilátero y presentó en el foro la pregunta: "¿existe alguna forma de dividir cualquier cuadrilátero en dos áreas iguales?".

El comentario fue jerarquizado por el ED, quien al percatarse que no recibía respuesta, planteó la pregunta: "*¿Será posible determinar un cuadrilátero inscrito dentro de cualquier otro tal que sea la mitad de su área?"*. Diego resaltó la importancia de la búsqueda de información en el proceso de resolución de problemas y propuso una solución que se muestra en la Tabla 7.9

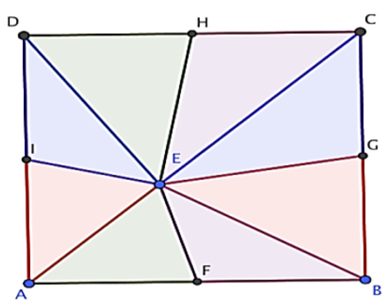
Tabla 7.9 Una extensión del problema

Extensión del problema	**Interacciones en los foros**
Extensión  ¿Será posible determinar un cuadrilátero inscrito dentro de cualquier otro tal que sea la mitad de su área?	**Diego**: Compartió información de Wikipedia relacionada con el teorema de Varignon: En cualquier cuadrilátero, los puntos medios de los lados forman un paralelogramo cuya área es la mitad del cuadrilátero original.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro

Alan formuló un nuevo problema: ¿Cómo dividir el cuadrado en 4 regiones con la misma área? Además, construyó y compartió en el foro un modelo dinámico del cuadrado resaltando una solución. Los detalles se muestran en la Tabla 7.10.

Tabla 7.10: Extensión del problema propuesta por Alan.

Idea de Alan	**Justificación**
Extensión porpuesta por Alan Muy interesante la forma de resolverlo, se me ocurrió la forma de dividir el cuadrado en 4 areas iguales trazando la mediana de cada triangulo.  . Al sumar las areas de los triángulos de igual color se obtiene la división del terreno en 4 areas iguales. Usé la propiedad de la mediana que garantiza que divide al triangulo en dos areas iguales. ¿que opinan?	En la búsqueda de respuestas, Alan utilizó la propiedad: Al trazar una mediana de un triángulo, éste queda dividido en dos áreas iguales. Así, construyó y presentó un modelo dinámico donde trazó la mediana (EI, EH, EG y EF) de cada triángulo. Al sumar las áreas de los triángulos EDI y EGC, se obtiene que su valor es un cuarto del área del cuadrado.

Fuente: Conversaciones de los participantes en el foro.

La extensión del problema anterior no fue jerarquizada por el ED ya que Alan lo presentó en la semana posterior a la que se discutió el problema de los granjeros. El comentario no recibió respuestas por parte de otros.

4.4 Discusión de los resultados

El diseño de las Actividades guio el trabajo de los participantes en la construcción y desarrollo del conocimiento matemático, ya que buscaron diversas formas de explorar los modelos dinámicos como un punto de partida para identificar conceptos, plantear conjeturas basadas en el movimiento de los objetos matemáticos presentes en la configuración dinámica y sus relaciones o invariantes. Lo anterior, permitió que todos los participantes del estudio transitaran desde soluciones visuales y empíricas (asociadas con el uso de las herramientas como el arrastre o movimiento ordenado de objetos dentro de la configuración y la cuantificación de atributos como medida de segmentos, ángulos, áreas, etc.) hasta la presentación de argumentos geométricos y algebraicos en la validación de las conjeturas formuladas.

Al inicio de las Actividades, los participantes formularon soluciones basadas en casos específicos o particulares sin observar invariantes en algunos objetos que conformaban la configuración dinámica del problema. El diseño de las Actividades los guio a ir más allá de las técnicas que se utilizan en papel y lápiz, por ejemplo, el movimiento de objetos y la medición de atributos (áreas) en forma instantánea les permitió relacionar objetos y formular conjeturas basados en la observación de invariantes (Ver Tabla 2). Otro aspecto importante del diseño de las Actividades fue incluir y propiciar el uso del foro como un medio para comunicar, discutir, contrastar y dar u obtener retroalimentación. Esto favoreció, en los participantes, la construcción o refinamiento de conceptos e ideas matemáticas y sus estrategias en la resolución de problemas. Durante la implementación del MOOC, el monitoreo y jerarquización de los comentarios que realizó el ED favoreció la discusión y refinamiento de ideas, por ejemplo, los comentarios que no fueron clasificados no recibieron respuesta, tal es el caso de la extensión del problema planteada por P_2. También, cuando el ED planteó preguntas, se fomentó en los participantes la discusión de ideas matemáticas, la formulación de nuevas soluciones y extensiones del problema (Ver Tabla 2 y 5). Otro factor que incidió en las discusiones fue el comportamiento que asumieron algunos integrantes, por ejemplo, Karol, Diego, Alex, Alejandra y Carlos proporcionaron retroalimentación a las ideas o preguntas de otros, esto promovió la independencia de los participantes y la construcción y su desarrollo del conocimiento matemático.

5 Agradecimientos

A la Universidad de Costa Rica (UCR) por el apoyo brindado.

6 Conclusiones

Los resultados muestran que las diversas tecnologías digitales utilizadas en este estudio y la integración de los componentes Recursos, Actividades, Soporte y Evaluación basados en la resolución de problemas favorecieron crear un ambiente de trabajo en colaboración. La plataforma digital permitió incluir representaciones dinámicas de los problemas elaboradas en GeoGebra, en las cuales los participantes tuvieron la oportunidad de explorar, identificar conceptos, buscar conjeturas y diversas maneras o argumentos para sustentarlas. En este proceso, utilizaron estrategias asociadas con el uso de las herramientas como movimiento de objetos dentro de la configuración dinámica y la cuantificación de sus atributos (longitudes y áreas).

Durante la etapa del diseño de un MOOC, se debe tener como objetivo que las tareas matemáticas posibiliten y fomenten crear la conciencia en los participantes para que ellos mismos monitoreen sus avances en la comprensión y uso de las ideas matemáticas en la resolución de problemas. Esto incluye reflexionar sobre las decisiones que se toman durante el proceso de resolución de problemas.

Sin la existencia de un profesor encargado de responder o dar seguimiento puntual a cada integrante del curso, resultó importante el diseño de las Actividades, ya que fueron guiando a los participantes a entender el problema, explorar la configuración dinámica basado en el movimiento de sus objetos, observar invariantes entre los objetos, formular conjeturas basadas en argumentos visuales y empíricos, justificar las conjeturas utilizando relaciones y argumentos matemáticos, analizar la generalidad de los métodos de solución y formular nuevos problemas.

Durante el desarrollo de las Actividades, las conversaciones fueron el elemento clave para que se cumpliera lo anterior. Resultaron importantes los roles que asumieron algunos participantes en las conversaciones. Un grupo de participantes tomó el rol de proporcionar retroalimentación a otros lo que favoreció la aclaración de dudas y el refinamiento de ideas relacionadas con conceptos matemáticos, la exploración del modelo dinámico, la formulación de conjeturas y su justificación. Así, los participantes avanzaron en el desarrollo y comprensión de las Actividades en forma colaborativa y sin depender de un profesor o tutor. Otro grupo de participantes daba seguimiento a los comentarios que otros plantearon con relación a las preguntas, ideas matemáticas y extensiones del problema propuestas por ellos. Esto permitió construir y desarrollar diversas formas de resolver un problema.

Las acciones que tomó el ED en sus intervenciones en el foro expandieron las discusiones, dichas acciones fueron: (1) las clasificación y jerarquización de los comentarios favoreció la creación de grupos de trabajo donde se discutían las ideas matemáticas, (2) las preguntas planteadas fueron respondidas de varias maneras fomentando la comprensión de conceptos e ideas matemáticas y, (3) las preguntas realizadas al final de cada parte de la Actividad permitieron encontrar otras soluciones y extensiones al problema.

Un factor por considerar en el trabajo a futuro es la posibilidad de que los participantes construyan y presenten sus propios modelos dinámicos de los problemas, ya que, en este estudio, pese a que no se solicitó explícitamente, el diseño de las actividades y la metodología aplicada por el ED durante la implementación del MOOC incentivó a varios participantes a construir y compartir sus construcciones dinámicas de los problemas, lo cual fomentó la discusión de ideas, las formas de resolver y extender el problema.

7 Referencias

Aguilar-Magallón, D. & Poveda, W. (2017). *Problem Posing Opportunities Whit Digital Technology in Problem Solving Environments*. En *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Aramo-Immonen, H., Kärkkäinen, H., Jussila, J., Joel-Edgar, S., & Huhtamäki, J. (2016). Visualizing informal learning behavior from conference participants' Twitter data with the Ostinato Model. *Computers in Human Behavior*, 55, 584-595.

Borba, M., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S., & Sánchez, M. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education: June 2016. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *8*(5), 589-610.

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2013). Learning design for science education in 21st century. *Journal of the Institute for educational research*, 45 (2), 404-421.

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2016). Framework for Designing Mobile Learning Environments. En D. Churchill, B. Fox, & M. King (Eds.), *Mobile Learning Design, lecture Notes in Educational Technology* (pp. 3-25). Singapore: Springer.

Ernest, P. (2016). The unit of analysis in mathematics education: bridging the political-technical divide? *Educational studies in mathematics*, *92*(1), 37-58.

Gros, B. (2016). The Dialogue Between Emerging Pedagogies and Emerging Technologies. En B. Gros, Kinshuk, & M. Maina (Eds.), *The Future of Ubiquitous Learning Designs for Emerging Pedagogies* (pp. 3-24). Berlin Heidelberg: Springer.

Leung, A. & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 191-225). New York: Springer.

Leung, F. (2013). Part III, Introduction to section C: Technology in the mathematics curriculum. En M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 517-524). New York: Springer.

National Council of Teachers of Mathematics (2009). F*ocus in High School Mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Santos-Trigo, M. (2007). La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(6), pp. 35-54.

Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho-Machín, & L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 159-192). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Santos-Trigo, M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. Segunda edición. México: Trillas, Asociación Nacional de profesores de matemáticas.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2009). Towards the construction of a framework to deal with routine problems to foster mathematical inquiry. *PRIMUS*, 19(3), 260-279.

Poveda, W. & Aguilar-Magallón, D. (2017). Mathematical Problem Solving and Digital Technologies in a Massive Online Course. En *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Schoenfeld A. (1985). *Mathematical problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-371.) New York: Macmillan.

Sinclair, J. & Kalvala, S. (2015). Engagement measures in massive open online courses. En L. Uden, D. Liberona, & T. Welzer (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud*. (Vol. 533, pp. 3-15). Switzerland: Springer International Publishing.

Apéndice A. Directorio Universidad Juárez del Estado de Durango

NÁVAR-GARCÍA, Oscar Erasmo. MsC
Rector

NÁPOLES-ORRANTE, María de Lourdes. MsC
Secretaria General

GARCÍA-SAUCEDO, Osvaldo. MsC
Subsecretario General Académico

MARTÍNEZ-AGUILAR, Manuel de Jesús. BsC
Subsecretario General Administrativo

MIER-CISNEROS, Rafael. MsC
Abogado General

MUÑOZ-MARTÍNEZ, Martha Elia. MsC
Directora Institucional de Posgrado e Investigación

GALLEGOS-VILLARREAL, Alfredo. MsC
Director de la Facultad de Ciencias Exactas

Apéndice B. Consejo Editor Universidad Juárez del Estado de Durango

Apéndice C. Comité Arbitral Universidad Juárez del Estado de Durango

ÁLVAREZ-SCHERER, María de la Paz. PhD.
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

ARCINIEGA-NEVÁREZ, José Antonio. PhD.
División de Ingenierías, Departamento de Hidráulica y Geomática, Universidad de Guanajuato, México.

BARRAZA-BARRAZA, Diana. PhD.
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango, México.

CAMACHO-MACHÍN, Matías. PhD.
Departamento de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna, Tenerife, España.

CONDE-SOLANO, Luis Alexander. PhD.
Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.

GARCÍA-RODRÍGUEZ, Martha Leticia. PhD.
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional, México.

GONZÁLEZ-ASTUDILLO, María Teresa. PhD.
Centro de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca, España.

LÓPEZ-MOJICA, José Marcos. PhD.
Área de Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

MARTÍNEZ-HERNÁNDEZ, César. PhD.
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Colima, México.

PÁEZ, David Alfonso. PhD.
Departamento de Educación, Universidad Autónoma de Aguascalientes, México.

PANTOJA-RANGEL, Rafael. PhD.
Universidad de Guadalajara (CUCEI), México.

PARADA-RICO, Sandra Evely. PhD.
Escuela de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Colombia.

RODRÍGUEZ-VÁZQUEZ, Flor Montserrat. PhD.
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

SÁNCHEZ- AGUILAR, Mario. PhD.
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

VÁZQUEZ-PADILLA, Rita. PhD.
Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, México.

ZALDÍVAR-ROJAS, José David. PhD.
Universidad Autónoma de Coahuila, México.

Apéndice D. Consejo Editor ECORFAN

GANDICA-DE-ROA, Elizabeth. PhD.
Universidad Católica del Uruguay, Montevideo

QUINTANILLA-CÓNDOR, Cerapio. PhD.
Universidad Nacional de Huancavelica, Peru

GARCÍA-ESPINOSA, Cecilia. PhD.
Universidad Península de Santa Elena, Ecuador

ALVAREZ-ECHEVERRÍA, Francisco. PhD.
University José Matías Delgado, El Salvador

GUZMÁN-HURTADO, Juan. PhD.
Universidad Real y Pontifica de San Francisco Xavier, Bolivia

TUTOR-SÁNCHEZ, Joaquín. PhD.
Universidad de la Habana, Cuba

NUÑEZ-SELLES, Alberto. PhD.
Universidad Evangelica Nacional, Republica Dominicana

ESCOBEDO-BONILLA, Cesar Marcial. PhD.
Universidad de Gante, Belgica

ARMADO-MATUTE, Arnaldo José. PhD.
Universidad de Carabobo, Venezuela

Apéndice E. Comité Arbitral ECORFAN

9 786078 534425
ISBN 978-607-8534-42-5