

Experimento de diseño para transitar hacia una definición formalmente operable de polígono en educación secundaria

MATA-ROMERO, Armando, ALVARADO-MONROY, Angelina y OLVERA-MARTÍNEZ, Carmen

A. Mata, A. Alvarado y C. Olvera

Universidad Juárez del Estado de Durango
armandomr@ujed.mx, aalvarado@ujed.mx, carmen.olvera@ujed.mx

A. Alvarado, G. Carmona y A. Mata (Dirs.) Una visión integradora. Tópicos Selectos de Educación en CITEM. ©ECORFAN- México, 2017.

Abstract

In this paper we research the focus of the lessons studied on polygons and directly relate this to standards and school goals. From an immersion in geometric contents and its instruction in middle school in Mexico, we have detected a limited polygon definition. Consequently, we note that some procedures and facts that involve the concept are treated in teaching only for convex polygons. Therefore, an investigation was carried out in the mentioned context, with the purpose of constructing (together) with the students an adequate and functional definition of a polygon, based on students' *concept image*. Also, our intention was to fortify the understanding of this concept, in order to achieve that it was used in the deduction of an algebraic expression to calculate the sum of the polygon's interior angles (valid for both concave and convex polygons). To argue the validity of such an expression, it was necessary for the students to understand the process of properly triangulate any polygon. In this sense, a didactic experience was designed and to prove its effectiveness, it was implemented with middle school students. Finally, the effect of the proposed didactic design on the formation and reconceptualization of the concept of polygon in the students was documented, as well as the effect on the development of their abilities to use it in the calculation of the sum of its interior angles.

Polygon, Concept Image, Concept Definition, Design Experiment

Introducción

Esta investigación se dirige, principalmente, a la formación y desarrollo de conceptos geométricos. La principal motivación ha sido que, en diferentes talleres de desarrollo profesional docente en geometría realizados por la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango (*Forma, espacio y medida y su enseñanza con tecnología*, profesores de secundaria, 2009; *La importancia de los conceptos geométricos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas*, profesores Escuelas Normales, 2011; *Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas*, profesores Escuelas Normales, 2014; *Diplomado Desarrollo del Pensamiento Matemático y Uso de la Tecnología para la Resolución de Problemas*, profesores de bachillerato, 2014-2015; *Seminario de Matemática Educativa*, 2017) se explora el conocimiento conceptual del profesor a través de preguntas que, al requerir respuestas justificadas, generan discusiones y propician una reconceptualización que permite llegar a acuerdos y solventar algunas deficiencias atribuidas a un manejo parcial de las definiciones de los conceptos (ver Tabla 1.1).

Responder adecuadamente tales preguntas representa un reto tanto para los profesores como para los estudiantes de diferentes niveles educativos. Por ejemplo, construir la definición de cuadrilátero envuelve a los estudiantes en un proceso complejo (Edwards & Ward, 2004). Con relación a la definición de paralelogramo, de Villiers (1998) menciona que: aunque los estudiantes puedan enunciar la definición convencional de paralelogramo como un cuadrilátero con lados opuestos paralelos ellos pueden no considerar los rectángulos, cuadrados y rombos dentro de este grupo. Esto se puede atribuir a que los estudiantes tienen en mente a los paralelogramo en los cuales no todos los ángulos o lados pueden ser iguales.

Tabla 1.1 Algunas preguntas para explorar en el conocimiento geométrico conceptual

<p>1. a) Si tengo tres segmentos de recta, ¿siempre puedo construir un triángulo?</p> <p>b) Una altura de un triángulo, ¿es una recta o un segmento de recta?</p> <p>c) ¿Es correcto decir: <i>las mediatrices de un triángulo</i>?</p> <p>d) ¿Es cierto que la altura de un triángulo es el lado del triángulo que va de un vértice al lado opuesto?</p> <p>e) ¿Es cierto que si dos triángulos tienen dos lados y un ángulo iguales, entonces son congruentes?</p> <p>f) ¿Es cierto que la suma de los ángulos de un triángulo es de 180°?</p>	<p>3. a) ¿Se puede construir una circunferencia que pase por 3 puntos?, ¿y por cuatro puntos?</p> <p>b) ¿Qué significa construir una circunferencia inscrita a un triángulo?</p> <p>c) ¿Siempre se puede inscribir un cuadrilátero a una circunferencia?, ¿Y circunscribir?</p>
<p>2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?</p> <p>a) Un cuadrado es un rectángulo.</p> <p>b) Un cuadrado es un cuadrilátero y viceversa.</p> <p>c) Un rectángulo es un paralelogramo y viceversa.</p> <p>d) Un cuadrado es un rombo.</p> <p>e) Un cuadrilátero (trapezio) es un paralelogramo.</p> <p>f) Un triángulo equilátero es isósceles.</p> <p>g) Con cuatro segmentos de recta siempre se puede construir un cuadrilátero.</p>	<p>4. a) ¿Qué es una razón?</p> <p>b) ¿Qué es una proporción?</p> <p>c) ¿razón y escala es lo mismo?</p> <p>d) ¿Qué significa la frase <i>segmentos proporcionales</i>?</p>
<p>5. a) ¿Qué es un polígono?</p> <p>b) ¿Se puede hablar de altura de un polígono?</p>	

Fuente: Elaboración propia

En esta investigación se pretende proponer experiencias para la formación y el desarrollo del concepto de polígono, dado que, en la exploración previa con dos grupos de secundaria se detectó que es un concepto que no es formalmente operable para los estudiantes, es decir, se les dificultó utilizarlo para deducir resultados y para resolver problemas que lo involucren. Limitan sus soluciones a los polígonos convexos, más aún, a los polígonos regulares.

En el Programa de Estudios del nivel secundaria de la asignatura de Matemáticas (Secretaría de Educación Pública, 2011), dentro del eje de Forma, Espacio y Medida de segundo grado, se encuentra el contenido correspondiente al cálculo de la suma de los ángulos interiores de un polígono. Tal contenido permanece en el nuevo Plan y Programas de Estudio para la Educación Básica (Secretaría de Educación Pública, 2017) dentro del mismo eje con el tema correspondiente a Figuras y Cuerpos Geométricos. En dicho tema, el aprendizaje esperado es que el estudiante deduzca y use las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares. Para lograrlo, sugieren trabajar en: el número de diagonales que pueden trazar desde un vértice, el número de diagonales en total y la suma de sus ángulos interiores.

La manera en que generalmente se aborda en el aula, es encontrando la suma de los ángulos interiores, en función del número de lados del polígono. Sin embargo, al revisar libros de texto de segundo grado de secundaria disponibles en la página de la Comisión Nacional de Libro de Texto Gratuitos (Conaliteg), se observó que dicho resultado se estudia únicamente con polígonos convexos, incluso en algunos casos sólo se trabaja con polígonos regulares, a través de la división en triángulos mediante diagonales trazadas desde un mismo vértice (Figura 1.1). Cuando el polígono es cóncavo, este procedimiento ya no es claro, pues no es posible hacer la división desde cualquier vértice ya que se tendrá al menos una diagonal fuera del polígono (Figura 1.2).

Figura 1.1. Diagonales trazadas desde un mismo vértice en un polígono convexo

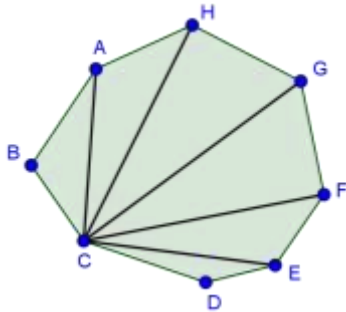
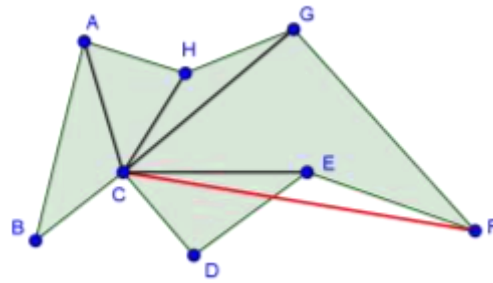


Figura 1.2 Diagonales trazadas desde un mismo vértice en un polígono cóncavo.



Fuente: Elaboración propia

Por lo anterior, surge la necesidad de obtener la suma de los ángulos interiores de un polígono mediante un proceso de división en triángulos por diagonales que no necesariamente estén trazadas desde un mismo vértice, ya que justificar matemáticamente, con base en el proceso planteado, que la suma de los ángulos interiores de un polígono es igual a $180^\circ(n - 2)$ si se tiene un polígono de n lados, es difícil para el caso de un polígono cóncavo y requiere de conocimientos propios de una licenciatura en matemáticas (Eves, 1985). Por otra parte, abordar este resultado sólo en polígonos convexos, limita el aprendizaje del estudiante de secundaria e incluso, se contrapone con las definiciones de lo que es un polígono establecidas en otros libros de texto, dado que en todas ellas la definición incluye también a los cóncavos, aunque no sean estudiados con la misma profundidad. Como antes se mencionó, el estudio de los polígonos en educación secundaria se concentra en los polígonos convexos. Así, en esta investigación se propone una secuencia didáctica para contrarrestar esta debilidad. La hipótesis es que dicha secuencia prepara al estudiante para un desarrollo conceptual profundo, desde la distinción entre polígonos cóncavos y convexos hasta la construcción de una definición “apropiada” del concepto de polígono (basada sobre elementos que los estudiantes ya definieron, comprendieron y pueden utilizar, además de que sea establecida en un sentido no circular), que le permita deducir un procedimiento para calcular la suma de sus ángulos interiores conociendo sólo el número de lados del mismo. Tal procedimiento se sustenta en un proceso de triangulación sin importar si se trata de un polígono cóncavo o convexo.

Para organizar este informe, en la sección 2 se abordan algunos aspectos teóricos que sustentan el diseño de la secuencia didáctica propuesta. En el apartado 3 se justifica la elección de la metodología de investigación basada en el diseño y se describe el proceso de diseño y la implementación de la secuencia didáctica. En la sección 4 se presentan los resultados obtenidos de la implementación. Finalmente, se muestran algunas conclusiones derivadas de la investigación y el rediseño sugerido a partir de los resultados obtenidos.

Marco Conceptual

La formación y desarrollo de conceptos es central en el pensamiento matemático. Los estudiantes necesitan experiencias que les permita extraer significado de las definiciones y poder establecer la relación entre la definición y los objetos que ésta representa. Tales experiencias apoyan a los estudiantes en el desarrollo de un pensamiento deductivo y en la comprensión del lenguaje matemático, caracterizado por su precisión para descartar la posibilidad de ambigüedades.

Actualmente tales experiencias están limitadas, sin embargo, en el nivel medio superior y superior se incrementan los requerimientos de un buen manejo de las definiciones y únicamente se asume que el estudiante debe estar capacitado para ello, sin considerar la dificultad que presentan los estudiantes para desenvolver o extraer significado de los conceptos y las definiciones. Diferentes estudios muestran que no es suficiente con que el estudiante sea capaz de expresar verbalmente la definición de un concepto para que pueda comprenderlo y utilizarlo de manera adecuada (Vinner, 1991; Bills & Tall, 1998; Selden & Selden 1995; Edwards & Ward, 2004).

Un primer paso en la resolución de problemas y en la producción de conjeturas y de demostraciones, se da cuando se comprenden los conceptos involucrados y se utilizan las definiciones de manera adecuada. Sin embargo, los estudiantes no hacen uso de ellas para resolver problemas o demostrar un enunciado donde están implicados y recurren a un representante concreto del objeto, alguna fórmula que los represente, sólo piensan en alguna característica del objeto, o bien, una definición “corta” (Alvarado & González, 2010). Es deseable incluir experiencias tempranas que fortalezcan el proceso de definir y su función al hacer matemáticas. Es necesario que los conceptos en el nivel básico sean revisados para determinar si pueden ser utilizados apropiadamente por los estudiantes. Se tiene la necesidad de hacer las definiciones y conceptos *formalmente operables* para los estudiantes (Bills & Tall, 1998), es decir, ellos deben ser capaces de usar un concepto y su definición para crear o reproducir de manera significativa un argumento formal, ya sea para la solución de un problema, para establecer una conjetura, o bien, para justificar o demostrar una proposición.

Múltiples investigaciones muestran que en la formación de un concepto es de gran importancia fortalecer la imagen que los estudiantes poseen de él y acercarlos de manera gradual a su definición (Tall & Vinner, 1981; Vinner & Hershkowitz, 1980; Vinner, 1991; 2011). Para Tall & Vinner (1981) la *imagen del concepto* es una estructura cognitiva individual asociada a un concepto; esto incluye todas las asociaciones de cuadros mentales, ejemplos, propiedades y procesos. Mientras que, con la *definición del concepto*, se refieren a la forma en que las palabras se utilizan para especificarlo. La definición de un concepto puede ser personal o formal y esta última posee las características para ser institucionalizada a largo plazo por la comunidad matemática. Tall & Vinner en diferentes investigaciones han encontrado que enriquecer la imagen del concepto da sentido a su definición formal y sostienen que una forma de instrucción que se ocupe de enriquecer la imagen que tienen los estudiantes del concepto ayuda a desarrollar la habilidad para visualizar y operar adecuadamente con los conceptos matemáticos. Por su parte, Dahlberg & Housman (1997) señalan que la tendencia de los estudiantes a evocar parte de su imagen del concepto, en lugar de su definición, cuando responden a una variedad de tareas matemáticas relacionadas no es necesariamente malo; establecen que, en ocasiones, es deseable tener a la mano la riqueza de las imágenes de los conceptos, dado que, esto les permite construir ejemplos, identificar aquellos que no lo son y visualizar contraejemplos. Lo anterior sirve de plataforma para edificar sobre la imagen del concepto del estudiante.

En esta misma dirección, Pinto & Tall (1999) pudieron observar que los estudiantes exhiben dos modos distintos de manejo de definiciones formales, uno *dando significado* a través de la consideración de ejemplos (frecuentemente visuales) y otro por *extracción de significado*, a través de la manipulación y reflexión sobre la definición misma. En la secuencia propuesta en este trabajo (secciones 3 y 4) se observan también estas dos formas de manejo, cuando los estudiantes tratan de dar significado a la definición de polígono, desde fortalecer su imagen a través de ejemplos visuales, posteriormente extraer significado de su definición para encontrar un procedimiento adecuado para triangulación de los mismos, y finalmente, establecer una fórmula funcional para calcular la suma de los ángulos internos de un polígono cualesquiera.

Para lograr lo anterior, la construcción de una gran variedad de ejemplos ha jugado un papel determinante tanto en la formación del concepto (Vinner, 1991) como en la clarificación (Dahlberg & Housman, 1997), la adquisición de significado del mismo y su uso en la generalización de un resultado (Watson & Mason, 2005).

Dada la naturaleza de este trabajo, resulta de interés la forma de estructurar una secuencia didáctica. En este sentido, Simon (1995) sugiere que en una trayectoria hipotética de aprendizaje, es necesario incluir: la meta de aprendizaje, las actividades de aprendizaje y considerar el pensamiento y aprendizaje que los estudiantes han desarrollado.

Finalmente, la incorporación de la tecnología digital en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática ha sido recurrente en las últimas décadas. En parte debido a su poder de visualización y a que puede ser tomada como una herramienta de reconceptualización que nos permite “ver más”. Además, las actividades con tecnologías digitales como GeoGebra, promueven la comprensión de conceptos matemáticos, conocer e interactuar con diferentes maneras de representarlos (Niss, 2014) y establecer conexiones entre ellas (Confrey & Smith, 1991). En este trabajo la incorporación de GeoGebra, tiene el objetivo de involucrar al estudiante en actividades en las que pueda analizar, identificar y explorar relaciones entre objetos geométricos.

Metodología

Este trabajo es exclusivamente cualitativo y se ha seguido como metodología la *investigación basada en el diseño*. Dado que, se pretende analizar el aprendizaje en contexto, mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza.

En este tipo de experimentos, el diseño y la investigación de su funcionamiento son interdependientes. El diseño es considerado central para promover el aprendizaje y crear conocimiento útil y más allá de centrarse en la creación de diseños eficaces para el aprendizaje, estos estudios explican por qué el diseño funciona y sugieren modos en que puede adaptarse a nuevas circunstancias (Cobb et al, 2003). Para Confrey (2006) son investigaciones extensas de prácticas educativas, provocadas por el uso de tareas curriculares innovadoras y cuidadosamente secuenciadas, que estudian cómo se aprende un sistema conceptual a través las interacciones ocurridas en el aula (medio, entre alumnos, alumno-profesor, etc.). Estas investigaciones pretenden documentar el proceso de aprendizaje a través de: los recursos, el conocimiento previo aplicado por los estudiantes en las tareas, la naturaleza de las interacciones en el aula, la evidencia escrita, el surgimiento y evolución de las concepciones.

De la misma manera que trata de documentar cómo se lleva a cabo el proceso de enseñanza mediante la observación y análisis del trabajo de los alumnos. También se caracterizan por un refinamiento progresivo ya que el diseño es constantemente revisado a partir de la experiencia. El proceso de investigación se compone de ciclos continuos de diseño, implementación, análisis y rediseño. Estos ciclos de diseño generan automáticamente rastros de documentación cuyas trayectorias revelan información importante sobre la naturaleza de los desarrollos que ocurren, relativos a los artefactos y a los sistemas conceptuales que subyacen (Lesh & Kelly, 2000). En esta metodología, durante el diseño y la experimentación se elaboran conjeturas, que se prueban y se refinan con base en la evidencias que se van documentando sobre lo que alumnos, profesores e investigadores aprenden durante el proceso.

1 Estructura del Experimento de Diseño

En este trabajo se llevó a cabo un experimento o estudio de diseño en un aula de enseñanza secundaria (estudiantes de 12-13 años de edad), en el cual un equipo de investigadores colabora con un profesor (quien forma parte del equipo de investigación) y dicho equipo asume la responsabilidad de la instrucción.

Para dicho estudio se han considerando cuatro fases: a) Estudio Exploratorio, b) Diseño de la propuesta didáctica, c) Experimentación, d) Análisis de las producciones de los alumnos y e) Rediseño.

1.1 Estudio Exploratorio

El propósito en esta fase de la investigación fue analizar las ideas matemáticas fundamentales en torno al concepto de polígono (tanto en el contexto matemático experto como en el contexto de la práctica escolar actual), con la finalidad de detectar características para el diseño de una herramienta conceptual que propiciara la formación y transformación de conocimientos sobre este concepto en los estudiantes. Uno de los aspectos importantes a considerar en el diseño de una secuencia didáctica, es comprender el conocimiento actual de los estudiantes involucrados en torno al objeto de estudio (Simon & Tzur, 2004). Así, antes del diseño se realizó una actividad exploratoria con estudiantes de secundaria con la finalidad de conocer cuál era el lenguaje utilizado por ellos cuando trataban con polígonos y sus características. Los resultados obtenidos de esta actividad sirvieron de base para el diseño de las actividades de la secuencia.

Durante esta fase, también se revisaron libros de matemáticas y textos utilizados en el nivel secundaria. Se entrevistaron a algunos profesores para saber cuál era la definición de polígono que ellos utilizaban, cuál era su imagen del concepto y cómo lo utilizaban para elaborar argumentos formales, por ejemplo, en deducir y/o explicar la expresión para calcular la suma de ángulos interiores de un polígono.

1.2 Diseño de la Propuesta Didáctica

El objetivo de la secuencia es que los estudiantes establezcan una definición adecuada (sin pérdida de formalidad, pero comprensible para ellos) del concepto de polígono, que comprendan la diferencia entre un polígono cóncavo y uno convexo y que logren deducir la expresión que representa la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados sin importar si es cóncavo o convexo.

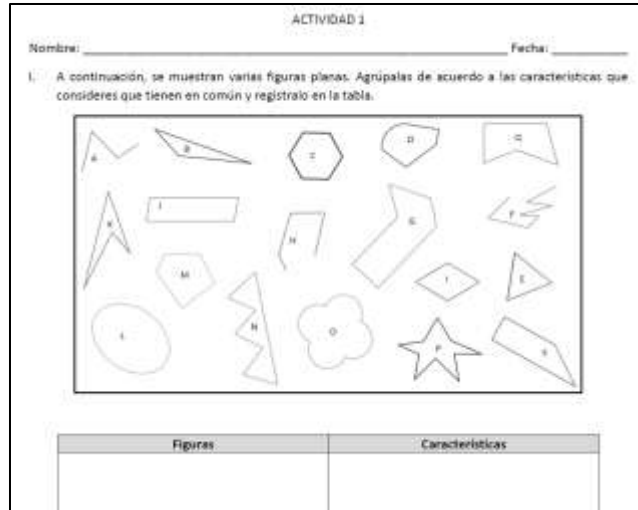
Las variables macro-didácticas utilizadas fueron: 1) las hojas de trabajo de trabajo que guiaron las sesiones y en las cuales los estudiantes comunican su pensamiento; y 2) el uso de manipulables diseñados en el ambiente dinámico GeoGebra.

La secuencia didáctica se conforma de tres actividades que enseguida se describen.

Actividad I. Definición de polígono

Esta actividad se diseñó para construir una definición aceptable de polígono (Figura 3.1). El propósito era que los estudiantes identificaran las principales características de un polígono: figura geométrica cerrada, formada con segmentos rectos, simple.

Figura 3.1 Actividad para construir la definición de polígono



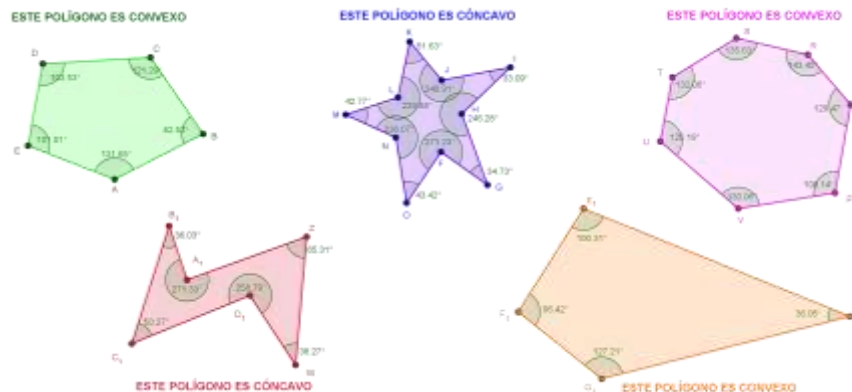
Fuente: Elaboración propia.

Actividad II. Identificar polígonos cóncavos y convexos

En la actividad se utiliza el ambiente dinámico GeoGebra con la intención de involucrar al estudiante en actividades en las que pueda analizar, identificar y explorar relaciones entre objetos geométricos. En dicho ambiente, se elaboraron manipulables para promover en el estudiante la identificación de las características principales de los polígonos convexos y cóncavos. En el manipulable de la Figura 3.2, el estudiante puede mover los vértices para modificar la forma de los polígonos y de acuerdo a la misma, aparece la leyenda de si es cóncavo o convexo. El objetivo era que los estudiantes identificaran qué sucedía cuando la leyenda cambiaba, es decir, se esperaba que reconocieran que bastaba con que un ángulo interior del polígono midiera más de 180° para que se considerara cóncavo.

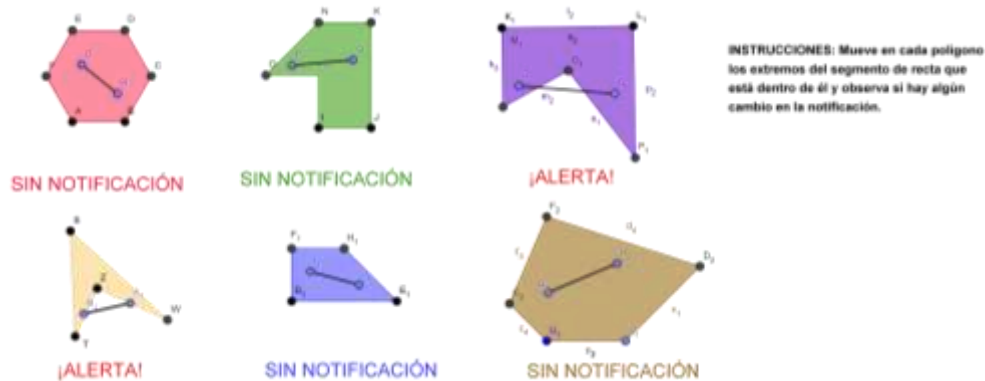
Mientras que en el manipulativo de la Figura 3.3, el estudiante puede mover los extremos de un segmento, que inicialmente aparece en el interior del polígono. Cuando se mueven los extremos puede ocurrir que el segmento, o una parte de éste, quede fuera del polígono y entonces se genera una leyenda de alerta. Los estudiantes buscan las características de los polígonos para los cuales eso sucede: los cóncavos.

Figura 3.2 Manipulativo en GeoGebra para identificar cóncavos y convexos en función de la medida de sus ángulos.



Fuente: Elaboración propia

Figura 3.3 Manipulativo en GeoGebra para determinar características de polígonos cóncavos y convexos con relación al segmento que une dos de sus puntos interiores



Fuente: Elaboración propia

En la hoja de trabajo utilizada para la Actividad II se pedía a los estudiantes lo siguiente:

1. Abre el archivo de GeoGebra llamado *polígonosegmentos.ggb*. En él encontrarás varios polígonos y dentro de cada uno de ellos, un segmento. En cada polígono mueve los extremos del segmento, observa lo que sucede y contesta las siguientes preguntas: ¿En qué polígonos te aparece el mensaje de ALERTA cuando mueves los extremos del segmento? ¿Por qué crees que aparece el mensaje de ALERTA? ¿Qué características comunes tienen los polígonos donde aparece el mensaje?

2. Abre el archivo *polígonosángulos.ggb*. Mueve los vértices de cada polígono de tal manera que: a) Conviertas todos a cóncavos; y b) Conviertas todos a convexos.

Finalmente, se pedía que observaran los cambios en las medidas de los ángulos y registraran la información en una tabla.

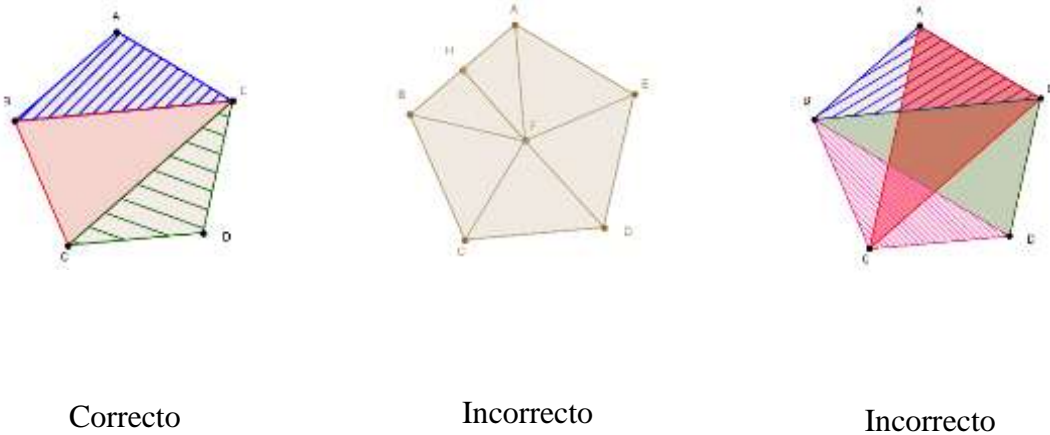
Actividad III. Cálculo de la suma de ángulos interiores de un polígono

En esta actividad los estudiantes debían deducir y utilizar la expresión para el cálculo de la suma de los ángulos interiores de un polígono conociendo sólo el número de lados del mismo, sin importar si el polígono es cóncavo o convexo. Para ello, en la primera parte debían realizar triangulaciones de polígonos, es decir, dividir en triángulos los polígonos siguiendo las reglas:

- Que todos los vértices de los triángulos sean vértices del polígono.
- Que los triángulos no se empalmen.

En la hoja de trabajo se les muestran ejemplos de divisiones correctas e incorrectas de un polígono (Figura 3.4).

Figura 3.4 Ejemplos presentados de triangulaciones correctas e incorrectas de polígonos



Fuente: Elaboración propia

En la segunda parte de esta actividad se les pide a los estudiantes que divididan un grupo de polígonos convexos en triángulos con base en las reglas establecidas y que registren en una tabla los valores de las variables: nombre del polígono, número de lados del polígono, número de triángulos en los que se dividió el polígono.

Enseguida, en la tercera parte analizan la información y contestan preguntas como:

¿qué procedimiento utilizaste para dividir en triángulos cada polígono?, ¿en cuántos triángulos quedaría dividido un hexágono /heptágono/decágono convexo?, ¿en cuántos triángulos quedaría dividido un polígono convexo de n lados?

En la cuarta parte de la actividad se repite lo descrito para la segunda parte, pero ahora aplicado a un grupo de polígonos cóncavos y deben responder preguntas similares a las de la tercera parte, pero ahora para este caso de los cóncavos.

De acuerdo a la información obtenida, deben contestar justificadamente la pregunta

¿existe alguna diferencia en el número de triángulos en que se divide un polígono convexo de n lados y uno cóncavo de n lados?

A continuación, se les presenta a los estudiantes la Tabla 3.1 la cual deben completar.

Tabla 3.1 Equivalencia de ángulos entre un polígono convexo y el mismo polígono triangulado

De acuerdo con las figuras 1 y 2 completa la tabla tomando en cuenta los ejemplos proporcionados.

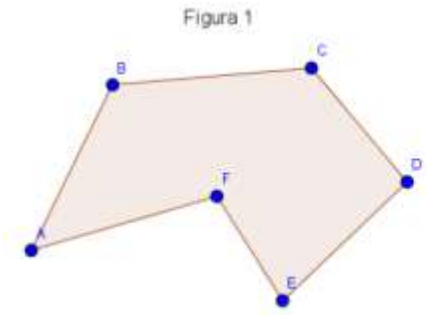


Figura 1

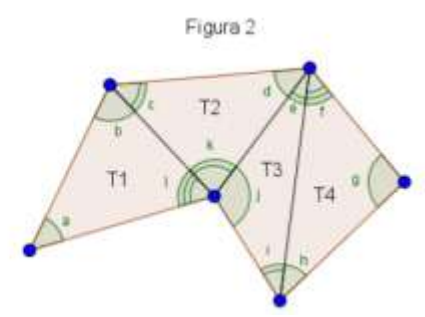


Figura 2

Ángulos interiores de la figura 1	Ángulos correspondientes en la figura 2
A	
B	$b+c$
C	
E	g
F	
$A+B+C+D+E+F$	

Fuente: Elaboración propia

Luego, utilizan el hecho conocido de que la suma de los ángulos interiores de cada triángulo, $T1$, $T2$, $T3$ y $T4$ es 180° y así deducen que $a+b+l+c+d+k+e+i+j+f+g+h=540^\circ$.

Las observaciones anteriores preparan a los estudiantes para contestar justificadamente las cuestiones y realizar los cálculos correspondientes de la Tabla 3.2.

Tabla 3.2 Preguntas para los estudiantes. Hoja de trabajo de la Actividad III

1) Calcula la suma de los ángulos interiores de la Figura 1 (Tabla 3.1) (es decir $A + B + C + D + E + F$).
2) ¿Cómo obtienes la suma de los ángulos interiores de la Figura 1, a partir del número de triángulos en que se dividió?
3) ¿Qué fórmula utilizarías para encontrar la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados de acuerdo al número de triángulos en que se divide según las reglas establecidas en el punto 1?
4) ¿Podrías encontrar la suma de los ángulos interiores de la Figura 1 (Tabla 3.1), a partir del número de triángulos en que se dividió?
5) ¿Podrías deducir una fórmula para encontrar la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados de acuerdo al número de triángulos en que se divide según las reglas establecidas desde el principio?

Fuente: Elaboración propia

Con esta parte de la actividad se espera que los estudiantes sean capaces de enunciar un método para calcular la suma de ángulos interiores de un polígono cualesquiera, dicho método deberá ser válido, tanto para convexos como para cóncavos.

1.3 Experimentación

Esta secuencia didáctica se implementó en dos grupos de segundo grado de educación secundaria en la ciudad de Durango, Durango en México; sin embargo, los resultados que se presentan en este trabajo son los obtenidos de uno de ellos. El grupo estaba conformado por 42 estudiantes, 20 mujeres y 22 hombres, cuyas edades se encontraban entre los 12 y 13 años. Los alumnos de este grupo se caracterizaban por atender las indicaciones de las actividades, ser participativos al socializar sus respuestas, trabajar en un ambiente colaborativo. Es importante mencionar que en el grupo ya se había abordado el tema de la suma de ángulos interiores de un polígono cinco meses antes de la implementación de las actividades y los estudiantes ya tenían experiencia previa en el manejo de GeoGebra.

La escuela secundaria en la que se llevó a cabo esta experimentación cuenta con aula HDT (Habilidades Tecnológicas para Todos) donde se imparten las clases de matemáticas. De esta manera, se contaban con una mesa de trabajo y una computadora para cada dos alumnos, lo cual favorecía el trabajo en parejas.

Las actividades fueron trabajadas, en primera instancia, de manera individual y después durante las exploraciones de los manipulables, se generaron discusiones en cada pareja conformada. Posteriormente, se abrió un espacio para la socialización de respuestas y para la discusión grupal. Las actividades se trabajaron durante dos sesiones de 90 minutos cada una.

Las evidencias del trabajo de los estudiantes se recolectaron desde los registros escritos en las hojas de trabajo previstas, las videograbaciones del trabajo en equipo y de la socialización, así como las notas de los investigadores y del profesor.

Resultados

En el estudio exploratorio se logró conocer el lenguaje que es cercano a los estudiantes cuando trabajan o se refieren a los polígonos: figura, vértices, esquinas, picos, lados rectos, segmentos, etc. También, se identificó que una definición de polígono que los profesores usualmente utilizan es la de «Figura geométrica plana limitada por una línea poligonal cerrada que no se corta a sí misma. Los segmentos que forman la poligonal son los lados del polígono y los puntos de enlace de éstos son los vértices.» Como se puede apreciar, para esta definición sería necesario definir antes “línea poligonal”, lo cual no sucede. Además, una vez que se da la definición de “polígono”, después es utilizada de manera natural con alguna representación semiótica pobre, es decir, se presentan algunos dibujos prototípicos en el contexto escolar, principalmente, polígonos convexos, más aún, regulares.

Algunas otras definiciones de polígono encontradas en el contexto fueron: «Una figura plana limitada por rectas que forman una línea quebrada cerrada» (Landaverde, 1977); «Una línea no recta, formada por segmentos se llama línea quebrada. Si los dos puntos extremos de una línea quebrada coinciden la figura que se obtiene es un polígono» (Bulajich & Gómez, 2002); «Figura plana cerrada limitada por segmentos de recta como lados» (Bronstein et al., 2007); «Figura plana cerrada limitada por tres o más segmentos de recta que terminan en pares en el mismo número de vértices y no se intersectan en puntos diferentes a sus vértices» (Borowsky & Borwein, 2005); y la definición que aparece en la Real Academia Española: «Porción del plano limitado por líneas rectas».

Estas definiciones, entre otras, fueron importantes para explorar, primero con profesores y, posteriormente, con estudiantes, qué tipo de definición podía surgir desde enriquecer la imagen del concepto que se tenía.

En relación a los resultados de la implementación de la secuencia, se dividen los resultados por actividad.

En la Actividad I, los estudiantes reconocen algunos elementos que les permiten clasificar y construir la definición de polígono. Distinguen entre figura abierta (no cerrada) y cerrada, identifican vértices (esquinas, picos), exploran número de lados y ángulos para clasificar. También, es notorio que reconocen la naturaleza de los lados (rectos y curvos) y asocian la ausencia de ángulos con lados curvos. Distinguen entre figuras regulares (normales) e irregulares e identifican a las líneas paralelas como una característica que los ayuda para clasificar un tipo especial de polígonos. En esta parte se destaca que no utilizan la palabra segmento. En la Figura 4.1 se muestra la producción de un estudiante correspondiente a la clasificación lograda de los ejemplos visuales presentados en la actividad mencionada en la Figura 3.1. En esta producción se aprecia que tal clasificación le permitió construir la definición de polígono, dado que, desde la imagen del concepto de polígono que posee, descarta de las figuras presentadas a las figuras [geométricas] abiertas, las que poseen lados curvos, las que no tienen vértices. Enriqueciendo con ello la imagen del concepto que lo lleva a construir una definición personal que posteriormente es discutida en grupo.

Durante la socialización el profesor motivaba a los estudiantes a expresar sus ideas de la clasificación realizada para conformar la definición de polígono: «alguien que quiera decir: “estas figuras las agrupe por...”». Se da una participación activa de los estudiantes: «las figuras *E*, *I* y *C* se parecen porque sus lados miden lo mismo»; «con ellas puedes hacer teselaciones»; «*Q*, *P*, *N* y *K* se parecen en que tienen ángulos interiores de más de 180° »; «*L*, *O* y *D* son figuras con formas circulares o semicirculares»; etc. Una vez que el profesor escucha todas las aportaciones, trata de establecer conexiones entre ellas y les pide a los estudiantes que lo ayuden a hacer un concentrado con las características que les interesan y que hacen que ellos no consideren a las figuras presentadas como polígonos: «las figuras que no tienen lados rectos»; «las figuras que no se cierran». También toma en cuenta aquellas aportaciones que se contraponen y trata de mediar para tomar acuerdos: «las que tienen formas “picudas” como *A*, *K* y *F*». Pregunta a los estudiantes sobre otras figuras con picos: «otras picudas son *N*, *G*, *Q* y *P*»; «sí, pero de todas esas con picos *A* y *F* no se cierran y las otras sí (*K*, *N*, *G*, *Q* y *P*)»; «son las que tienen ángulos de más de 180° y sí son polígonos (cóncavos)».

Finalmente, el profesor apoya la discusión y como conocimiento acordado y compartido se llega a establecer la definición de polígono como: *Figura plana, cerrada formada por lados rectos*. Esta definición se considera aceptable, sin ambigüedades y apropiada para el nivel educativo (aunque falta el atributo simple, es decir no se permiten intersecciones entre lados), a diferencia de la definición que se identificó en el estudio exploratorio como la definición tratada en secundaria. Además, para el adjetivo de “plana” los estudiantes pudieron darle el significado «en un mismo plano».

Figura 4.1 Producción escrita como resultado de la actividad 1 (Figura 3.1)

Figuras	Características
-A, F, H,	- Son Figuras Abiertas.
-L, D, O	- Son figuras que tienen un arco.
-K, B, P, n, m, G	- Son figuras irregulares.
-J, C, Q, E, I, J	- Son figuras regulares que comúnmente conocemos.
-L, O	- Estas figuras no tienen un ángulo recto, obtuso ni agudo.
-G, S, Q, C	- tienen un ángulo de 90° .
-x, b, F, N, D, S	- tienen un ángulo menor a 90° .
A, b, c, D, E, F, G, H, I, J, K, M, N, P, Q.	- tienen como mínimo 1 vértice.
L, O	- no tienen ningún vértice.

Fuente: Producción de un estudiante.

En las Actividades II y III, cuando los estudiantes tratan con triangulaciones en polígonos convexos, se encontró que la mayoría de los estudiantes sólo utilizan triangulaciones en polígonos convexos a partir de diagonales trazadas desde un vértice (ver Figura 4.2). Únicamente cinco (de 42) estudiantes triangularon de manera distinta (ver Figura 4.3). También se detectó un caso en que un estudiante realizó triangulaciones incorrectas tomando un punto interior para unirlo con los vértices. Como resultado de la socialización, los estudiantes fueron capaces de describir el proceso para triangular.

Figura 4.2 Procedimiento para triangular un polígono convexo utilizado por la mayoría de los estudiantes

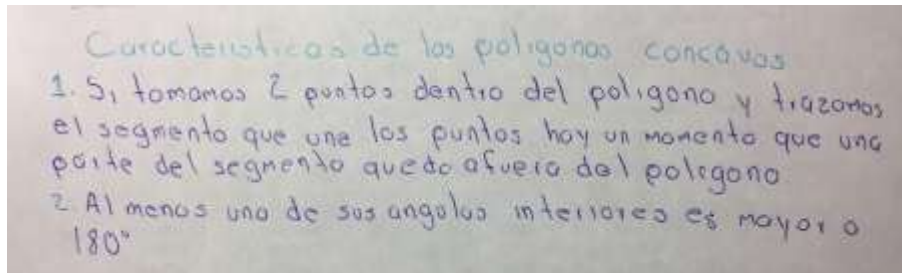
	Nombre del polígono: Pentágono Número de lados del polígono: 5 lados Número de triángulos en los que se dividió el polígono: 3 triángulos
	Nombre del polígono: Octágono Número de lados del polígono: 8 lados Número de triángulos en los que se dividió el polígono: 6 triángulos

Figura 4.3 Procedimiento alternativo para triangular un polígono convexo.

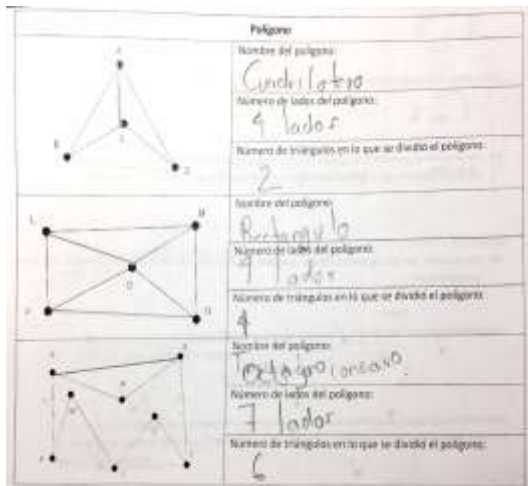
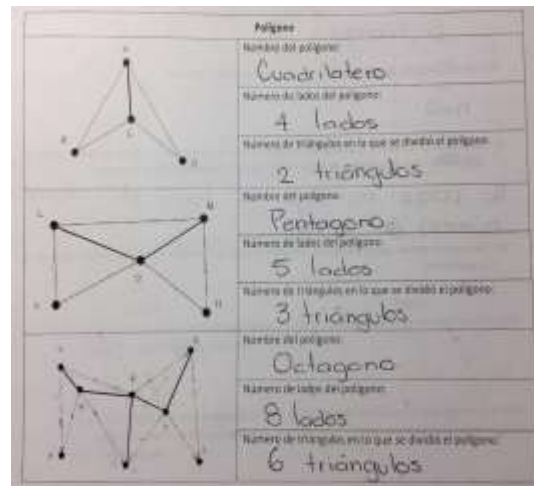
	Nombre del polígono: Pentágono Número de lados del polígono: 5 Número de triángulos en los que se dividió el polígono: 3
	Nombre del polígono: Octágono Número de lados del polígono: 8 Número de triángulos en los que se dividió el polígono: 6

Fuente: Producciones de los estudiantes.

Entre los resultados obtenidos en las Actividades II y III respecto al tratamiento con polígonos cóncavos, se destacan los siguientes: 1) reconocieron las características de los polígonos cóncavos (Figura 4.4); 2) la mayoría de los estudiantes triangularon a partir de segmentos trazados desde diferentes vértices (Figura 4.6); 3) la mayoría muestra dificultades para describir el proceso para triangular; y 4) de los 42 estudiantes, cuatro trazaron algunas diagonales fuera del polígono (un ejemplo se presenta en la Figura 4.5).

Figura 4.4 Caracterización de un polígono cóncavo

Fuente: Producción de estudiantes

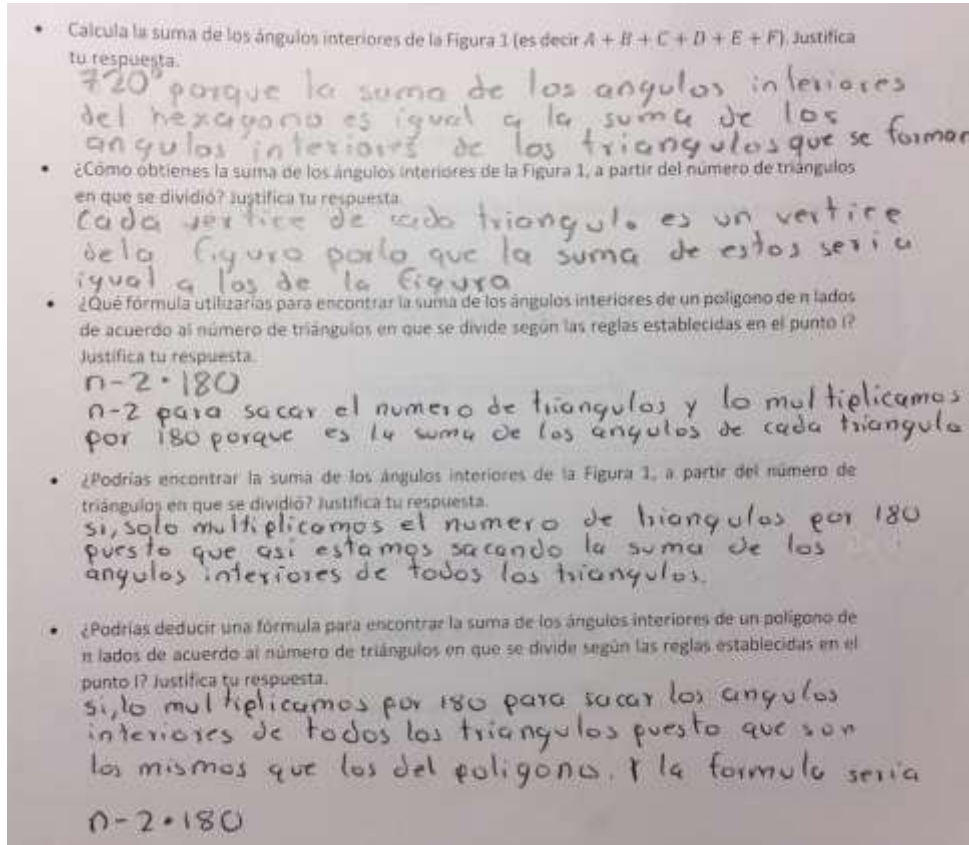
Figura 4.5 Procedimiento incorrecto para triangular polígonos cóncavos**Figura 4.6** Procedimiento correcto para triangular polígonos cóncavos

Fuente: Producciones de los estudiantes

En cuanto a la actividad III los estudiantes lograron deducir sin mayores problemas la fórmula para el cálculo de la suma de los ángulos interiores en polígonos convexos. En el caso de los polígonos cóncavos, la mayoría de los estudiantes (los que lograron realizar triangulaciones apropiadas y describir el proceso, por ejemplo, el estudiante de la producción de la Figura 4.6) lograron deducir la fórmula para el cálculo de la suma de los ángulos interiores, aunque presentaron mayores dificultades en el caso de cóncavos (ver Figura 4.7).

Para tal deducción, tanto en cóncavos como en convexos, la triangulación apropiada ha sido crucial, dado que ellos observan que el número de triángulos obtenidos dentro del polígono es igual a $n - 2$, considerando a n como el número de lados del polígono. Desde lo anterior y tomando en cuenta el hecho de que la suma de ángulos interiores de un triángulo es 180° , pueden llegar a la expresión $180^\circ(n - 2)$ para calcular la suma de ángulos interiores de un polígono cualesquiera.

Figura 4.7 Deducción de la fórmula para calcular la suma de ángulos interiores de un polígono



Fuente: Producción de los estudiantes

Agradecimientos

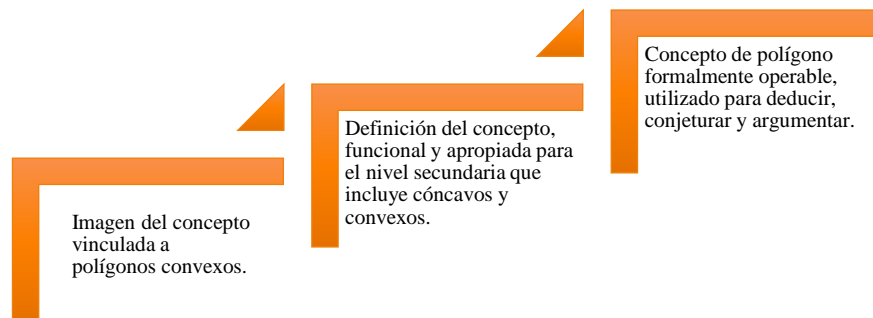
Los autores de esta investigación agradecen el financiamiento al Programa de Fortalecimiento de la Calidad Educativa a través de los proyecto P/PFCE-2016-10MSU0010C-06 de la DES de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez del Estado de Durango y al Programa de Apoyos Institucionales y Financiamiento a Proyectos de Investigación 2017 del Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Durango (COCYTED), a través del proyecto Reunión Nacional de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas 2017. También, se extiende el agradecimiento al Grupo Internacional de Investigación Campus Viviente de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (CITeM) por el apoyo para realizar este estudio. Se agradece la participación del estudiante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas Jesús Iván López Reyes en el desarrollo de esta investigación.

Conclusiones

Con la propuesta didáctica se logró ampliar la imagen del concepto de polígono que los estudiantes tenían muy enraizada y con ello, lograron establecer una definición funcional y aceptada en la comunidad de práctica. Como parte de ampliar su imagen de polígono, la consideración de múltiples ejemplos apoyó a que los estudiantes reconocieron su clasificación en polígonos convexos y cóncavos y en consecuencia sus características.

También, diversificaron sus procedimientos para triangular los polígonos a partir de segmentos trazados desde distintos vértices y que pertenezcan al interior del polígono, este procedimiento permitió incluir a los polígonos cóncavos y obtener resultados generales y no limitados únicamente a los convexos. Con ello, se fortalecen las aportaciones teóricas de Tall & Vinner (1981), dado que para ellos, un concepto se forma en varias etapas, el desarrollo de su imagen no es necesariamente coherente todo el tiempo, varios esquemas cognitivos se dan en la misma persona en diferentes contextos y algunos esquemas entran en conflicto con otros. Conocer esquemas cognitivos particulares de los estudiantes, sensibiliza a los profesores acerca de sus respuestas y de cómo enriquecer la imagen que tienen de un concepto para mejorar la comunicación y en consecuencia la enseñanza. Particularmente para este trabajo interesó saber qué imagen del concepto de polígono ayudaría a que los estudiantes llegaran a deducir un método para calcular la suma de ángulos interiores de un polígono (incluyendo cóncavos y convexos) y tal información fue utilizada para ayudarlos a construir su propia definición de polígono a través de una secuencia didáctica tratando de que no se tuvieran conflictos potenciales con la definición formal para que gradualmente esta definición se integrara dentro de la imagen de los estudiantes y pudieran manejarla hábilmente. Desde este punto, fue posible llevarlos a reproducir significativamente un argumento formal para justificar su deducción de la expresión para el cálculo de los ángulos interiores de un polígono convexo o cóncavo. Es decir, el concepto de polígono convenido es ahora formalmente operable (Bills & Tall, 1998) para ellos. No obstante, se considera necesario trabajar con resolución de problemas o situaciones que permitan evaluar si a largo plazo el concepto sigue siendo formalmente operable, sobre todo en el caso de los polígonos cóncavos, en los cuales se presentaron mayores dificultades en algunos estudiantes para realizar triangulaciones apropiadas y deducir la expresión algebraica para calcular la suma de sus ángulos interiores. El Gráfico 5.1 resume la evolución del concepto de polígono.

Gráfico 5.1 Evolución del concepto de polígono a través de la intervención didáctica.



Fuente: Elaboración propia

Por otra parte, durante la socialización se privilegió el uso de lenguaje apropiado y ese comportamiento se reflejó en sus registros escritos a medida que se avanzaba en la intervención didáctica. También, durante la socialización se demandaban explicaciones y justificaciones a los estudiantes y esto establece de manera implícita normas en la práctica matemática.

Las hojas de trabajo propuestas para las Actividades I, II y III fueron útiles para guiar, documentar y evaluar los progresos en el trabajo de los estudiantes, además de cumplir con la función de organizadores del pensamiento para permitirles comunicar sus ideas.

Con relación al uso de GeoGebra, en esta propuesta se concluye que ha sido un medio propicio para la visualización de variantes e invariantes y esto ha permitido una re-conceptualización de la definición de polígono. Es decir, acortar la distancia entre la imagen que los estudiantes tenían inicialmente de los polígonos y la definición del concepto lograda a partir de la interacción con los ambientes diseñados en GeoGebra y la extensión de su comprensión tanto de los polígonos cóncavos como de los convexos.

Desde la evaluación del funcionamiento didáctico, se han planteado mejoras que permitan un rediseño para iniciar otro ciclo de investigación. Entre los principales elementos para mejorar se han considerado:

- 1) Agregar un problema o situación para la evaluación en cada actividad.
- 2) Considerar más figuras geométricas en la Actividad I: más polígonos convexos y cóncavos, no-ejemplos (poliedros, figuras geométricas abiertas en el espacio y que no sean simples o que se corten en dos o más de sus lados),
- 3) Incluir items para el reconocimiento de exterior e interior de un polígono cóncavo para poder refinar los procedimientos de triangulación y utilizar la palabra segmento para evitar el uso de diagonal de un polígono (segmento que unen dos vértices no consecutivos) en la triangulación del mismo. Dado que, utilizarla puede llevar a los estudiantes a cometer errores en la triangulación de polígonos cóncavos al trazar “diagonales” entre vértices y que queden fuera del polígono (ver Figura 4.5),
- 4) Promover diferentes triangulaciones desde los polígonos convexos para transferirlas a triangulaciones de cóncavos
- 5) Incluir un mayor número de polígonos en los ejemplos de la Actividad III.

Para cerrar este capítulo, sólo falta mencionar que es necesario estudiar diferentes conceptos en el nivel básico y la forma en que son utilizados por los profesores y estudiantes para proponer mejoras que eviten limitar su significado.

Referencias

- Alvarado, A. & González, M. T. (2010). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias*, 28, 1, 73-84.
- Bills & Tall (1998) Operable Definitions in Advanced Mathematics: The case of the Least Upper Bound. *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. 2, (104-111). Stellenbosch, South Africa: PME.
- Borowski, E.J. & Borwein, J.M. (2005). *Collins Dictionary of Mathematics*. Second Edition. London, UK: Editorial Collins.
- Bronshtein, L.N. & Semendyayev, K.A., Musiol, G., Muehling, H., (2007). *Handbook of Mathematics*. Fifth Edition. Berlín Heidelberg: Springer.

- Bulajich, R. & Gómez J.A. (2002). Geometría. México, DF: Cuadernos de Olimpiada de Matemáticas.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiment in Educational Research. *Educational Researcher*, 32, 1, 9-13.
- Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (135-152). New York, NY: Cambridge University Press.
- Confrey, J. & Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. En R. Underhill & C. Brown (Eds.). *Proceedings of the 13th Annual Meeting of PME-NA*, (57-63). Blacksburg, VA: PME.
- De Villiers, M. (1998). To Teach Definitions in Geometry or Teach to Define? En A. Olivier & K. Newstead (Eds). *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (248-255). Stellenbosch: PME.
- Dahlberg, R., & Housman, D. (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 3, 283-299.
- Edwards, B., & Ward, M. (2004). Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis)use of Mathematical Definitions. *The American Mathematical Monthly*, 111, 5, 411-424.
- Eves, H. (1985). *Estudio de las Geometrías I*. México, DF: UTEHA.
- Landaverde, F. (1977). *Curso de Geometría para Secundaria y Bachillerato*. México, DF: Progreso.
- Lesh, R. & Kelly, A. (2000). Multitiered Teaching Experiments. En A. Kelly & R. Lesh (Eds). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (197-230). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Niss, M. A. (2014). Functions Learning and Teaching. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (238-241). London: Springer.
- Pinto, M., & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd International Conference of PME*. 4, (65-73). Haifa, Israel: PME.
- Secretaría de Educación Pública (2011). *Planes y Programas de Estudio 2011. Educación Básica Secundaria. Matemáticas*. México, D.F.: SEP.
- Secretaría de Educación Pública (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y Programas de Estudio para la Educación Básica, 2017*. México, CdMx.: SEP.
- Selden, A. & Selden, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 2, 123-151.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 2, 114-145.

- Simon, M. & Tzur R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6, 2, 91-104.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 2, 151-169.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed). *Advanced mathematical thinking* (65-81). Dordrecht: Kluwer.
- Vinner, S. (2011). The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. *ZDM*, 43, 2, 247-256.
- Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. En R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education* (177-184). Berkeley: University of California, Lawrence Hall of Science.
- Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.