MOOC Resolución de problemas matemáticos y uso de tecnologías digitales: Su diseño e implementación

POVEDA-FERNÁNDEZ, William & GÓMEZ-ARCIGA, Adrián

W. Poveda & A. Gómez

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – IPN
wpoveda@cinvestav.mx, agomeza@cinvestav.mx

A. Alvarado, G. Carmona y A. Mata (Dirs.) Una visión integradora. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

The availability of diverse digital technologies raises new questions as to what transformations of educational systems are necessary, and how to incorporate them into learning environments. Technological changes demand a transformation of educational practices and require modifying teaching processes to make students the center of all activity while teachers act as supports for developing abilities and skills related to problem-solving. How could we design and implement an online learning scenario (MOOC) that fosters the use of digital technologies to engage the participants in a continuous mathematical discussion to understand concepts and to solve problems? The results showed that the design of interactive activities and the coordinated use of digital technologies (GeoGebra, Wikipedia, KhanAcademy, WolframAlpha, Open edx and virtual forums) became important for the participants to formulate conjectures, to look for different ways to validate them and to communicate results. The participants worked collaboratively and transited from the use of visual and empirical arguments to the presentation of geometric and algebraic validation.

Resolución de Problemas, Tecnologías Digitales, MOOC, Diseño de actividades

Introducción

Las tecnologías digitales abren nuevas rutas en el proceso de aprendizaje, no solo para obtener o compartir información, sino también para que los estudiantes compartan ideas, discutan, critiquen y se involucren en actividades matemáticas. Los teléfonos inteligentes o tabletas digitales permiten utilizar sistemas de comunicación entre los individuos que favorecen la interacción dentro de una gran y heterogénea comunidad virtual; factores tales como la ubicación geográfica, la edad, el nivel académico o el idioma no son un obstáculo para que un individuo pueda acceder y participar en actividades de su interés.

La disponibilidad de diversas tecnologías digitales abre nuevas interrogantes sobre qué transformaciones son necesarias en el sistema educativo y cómo incorporarlas en los ambientes de aprendizaje (Gros, 2016). Un ambiente de aprendizaje emergente son los Cursos Masivos Abiertos en Línea (MOOC por sus siglas en inglés). Estos suponen que sus participantes deben poseer ciertos conocimientos mínimos, sin embargo, la comunidad virtual que genera un curso masivo comprende a personas que pueden poseer diferentes niveles de estudios, edad, dominio o conocimiento previo de la materia, entre otros. Un MOOC es diseñado por una institución educativa a través de uno o varios de sus expertos en el tema y puede ser utilizado por cualquier individuo como un medio para su propio desarrollo personal.

El carácter abierto y masivo de un MOOC abre la posibilidad de que la comunidad de participantes sea numerosa (generalmente miles de personas) y heterogénea: diferentes niveles de estudios, edad, conocimiento de la tecnología y dominio o conocimiento previo de la materia. En el desarrollo de las actividades de un MOOC no existe un profesor encargado de responder o dar seguimiento puntual a cada participante. Cada integrante está a cargo de su aprovechamiento, desarrollo y participación en las actividades apoyado por la retroalimentación general que proporciona los encargados del MOOC, así como las interacciones con el resto de la comunidad participante en el curso. Es posible que un participante, dependiendo de su tiempo e intereses se involucre de una manera más profunda en una, varias o todas las actividades. Por ello, el diseño de las actividades debe conducir a los participantes a ser autónomos en su aprendizaje en un entorno de participación y colaboración con sus pares y sin la presencia de un maestro.

El diseño o la selección de tareas o problemas matemáticos son relevantes para promover y documentar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. También, un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) puede utilizarse para integrar los procesos que intervienen en la resolución de problemas ya que pueden generar representaciones o modelos dinámicos de los problemas matemáticos donde el movimiento de objetos (puntos, rectas, segmentos, polígonos, etc.) puede ser explorado y explicado en términos de relaciones matemáticas. Así, las representaciones dinámicas de los problemas se convierten en una fuente que involucra a los estudiantes en la reflexión e investigación matemática (Aguilar-Magallón & Poveda, 2017).

En el diseño de un ambiente de aprendizaje MOOC, las actividades se deben relacionar con las formas en las que se aborda el contenido; es decir, el tipo de ambiente de aprendizaje que se genera a través del uso sistemático y coordinado de tecnologías digitales (Quinton & Allen, 2014) ¿Cómo afrontar el reto que los individuos consideren a las tecnologías digitales como herramientas para extender y compartir sus ideas, dentro de una comunidad heterogénea, en un ambiente de resolución de problemas matemáticos que fomente la reflexión y la crítica?

La pregunta de investigación que guio este estudio fue ¿Cómo diseñar e implementar un ambiente de resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales en un escenario de aprendizaje MOOC, donde las tareas y actividades promuevan el pensamiento matemático entre sus participantes? Así, se diseñó un ambiente de resolución de problemas matemáticos y uso coordinado de tecnologías digitales en un entorno MOOC, donde las tareas y actividades promovieran en los participantes la formulación de conjeturas con base en la observación del movimiento de objetos matemáticos y la búsqueda de argumentos que validen y sustenten tales conjeturas y así, se involucren en un ambiente de discusión y reflexión matemática.

El diseño de las tareas matemáticas se basó el marco de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales que propone Santos-Trigo (2014). Para la estructura del MOOC se utilizó el modelo RASE (Resources-Activities-Support-Evaluation)[2] de Churchill, King, y Fox (2016). El curso se construyó en la plataforma *Open edx*[3].

Las Actividades involucraron tareas o problemas matemáticos como una plataforma para que los estudiantes desarrollaran una forma de pensamiento matemático, es decir, un medio para que los participantes fomenten sus procesos de construcción o desarrollo del pensamiento matemático. Así, un aspecto fundamental en el diseño de las Actividades fue el dar movimiento a figuras geométricas simples como triángulos, rectángulos, entre otros, mediante modelos o configuraciones dinámicas del problema elaborados en GeoGebra que, en conjunto, con una serie de preguntas proporcionadas a los participantes permiten observar relaciones e invariantes entre los diversos objetos de la configuración dinámica. El propósito fundamental fue que el participante observara el comportamiento o variación de algunos objetos o atributos (medida de ángulos, áreas, perímetros, etc.) y propusiera conjeturas que den cuenta de su comportamiento y las sustentara con argumentos.

Otro de los objetivos de las Actividades fue que los participantes, en forma individual y en colaboración con otros, se involucraran en los procesos de resolución de problemas. Es decir, plantear interrogantes como punto de partida para la comprensión de ideas matemáticas, establecer relaciones entre los objetos presentes en la configuración dinámica, formular conjeturas y justificarlas.

[2] Los cuatro componentes RASE se referencian con la primera letra en mayúscula (Recursos, Actividades, Soporte, Evaluación).
[3] Para mayor información https://open.edx.org/about-open-edx

Marco conceptual

Zhang et al. (2016) y Sergis, Sampson, y Pelliccione (2016) afirman que los MOOCs generan oportunidades para investigar sobre el proceso de aprendizaje de los participantes y ofrecen nuevas posibilidades para la construcción del conocimiento a través de un ambiente de participación y colaboración. Según Sinclair y Kalvala (2015), la eficacia de un MOOC depende del tipo de actividades o tareas propuestas a sus participantes; sugieren que éstas deben generar y promover un ambiente de discusión para el intercambio de ideas de manera que atraigan la atención de los participantes, les planteen retos y fomenten su curiosidad. ¿Cómo diseñar actividades en línea para promover el aprendizaje matemático en un ambiente de colaboración que incorpore tecnologías digitales?

En el campo de la educación matemática, las propuestas curriculares actuales promueven un énfasis en la resolución de problemas y en el uso de herramientas digitales (NCTM, 2000; 2009). Santos-Trigo (2014) y Schoenfeld (1992) argumentan que aprender matemáticas está relacionado con la resolución de problemas ya que es un medio que permite identificar, explorar, probar y comunicar las estrategias de solución. Los procesos que intervienen en la resolución de problemas son: formulación de preguntas, búsqueda de diversos métodos de solución, explorar diferentes representaciones, búsqueda de patrones, variantes y relaciones entre objetos matemáticos, presentación de argumentos, comunicación de resultados, planteamiento de preguntas y formulación de nuevos problemas (Santos-Trigo, 2014). La resolución de un problema va más allá de aplicar un procedimiento mecánico; por lo que es necesario que el estudiante adquiera un hábito de cuestionamiento, mediante el cual, pueda resolver problemas matemáticos (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013).

En los procesos que intervienen durante el desarrollo de una tarea matemática el uso coordinado de diversas tecnologías digitales ofrece a los estudiantes oportunidades para representar, explorar, compartir y discutir los conceptos y la resolución de problemas. Un SGD, por ejemplo, GeoGebra, ofrece la posibilidad de examinar situaciones matemáticas desde distintas perspectivas permitiendo a los estudiantes tener nuevas formas de visualización de los conceptos y objetos de estudio, identificar y explorar de una forma más precisa los elementos matemáticos que cuando se utiliza solo papel y lápiz (Santos-Trigo, Moreno-Armella, & Camacho-Machín, 2016). Además, las ideas generadas pueden ser compartidas utilizando algún sistema de comunicación en línea y ser contrastadas con las de la comunidad virtual.

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) argumentan que el uso de un SGD permite a los estudiantes desarrollar formas de razonamiento, que no serían posibles en un ambiente de papel y lápiz. Presentan un marco para caracterizar las formas de razonamiento matemático en cuatro episodios que surgen como resultado del uso sistemático de la tecnología digital, en particular un SGD, en el proceso de resolución de problemas.

El primero consiste en la *comprensión del problema*, el estudiante debe identificar los objetos matemáticos involucrados y establecer sus propiedades matemáticas, para posteriormente, construir un modelo dinámico que lo represente. Por ejemplo, si el problema contempla un rectángulo, el estudiante debe identificar las propiedades de sus lados, ángulos, diagonales, etc., para representarlo dinámicamente en un SGD.

El segundo episodio comprende *la exploración del problema*. La representación dinámica de la situación matemática se convierte en un medio para que el estudiante observe el comportamiento de los atributos de los objetos matemáticos al mover algunos elementos dentro del modelo dinámico.

Esto permite efectuar exploraciones que llevan a la formulación de conjeturas. Por ejemplo, se puede observar la variación del valor del área de una familia de rectángulos de perímetro fijo cuando se modifica la longitud de uno de sus lados.

El tercer episodio, *diferentes acercamientos hacia la solución del problema,* promueven la búsqueda de diversas estrategias de solución. El uso de un SGD juega un papel importante ya que, por ejemplo, un acercamiento dinámico puede consistir en identificar las propiedades, patrones o invariantes de un objeto cuando se mueve, y argumentarlos por medios visuales (gráfica) o empíricos (datos numéricos y tablas en la hoja de cálculo). El objetivo es utilizar diferentes conceptos y recursos para generar diferentes estrategias de solución: dinámicas, algebraicas, geométricas, entre otras.

El cuarto episodio es la *integración*. Aquí se deben relacionar los diversos acercamientos a la solución del problema, hacer explícitos y relacionar los conceptos matemáticos utilizados. Otra característica importante de este episodio es la extensión del problema; por ejemplo, generalizar los resultados obtenidos mediante el cambio de alguna o varias condiciones del problema inicial.

¿Cuáles componentes deben ser considerados a la hora de diseñar un ambiente de aprendizaje en línea para promover el aprendizaje matemático en los participantes? Churchill et al. (2016) proponen un marco para el diseño de ambientes de aprendizaje en línea (RASE), afirman que los Recursos disponibles (videos, imágenes, documentos digitales, calculadoras, software, etc.) deben ser utilizados como una herramienta para mejorar, transformar y crear nuevas capacidades cognitivas durante el proceso de construcción de conocimiento del individuo. Así mismo, en conjunto con los Recursos, se requieren considerar tres elementos adicionales:

1. *Actividades*. El objetivo es involucrar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje a través del uso de Recursos en diversas tareas, como experimentos y resolución de problemas.

2. *Soporte.* Es necesario contemplar los medios para proporcionar ayuda a los estudiantes en el momento en que se les presente alguna interrogante relacionada con la tarea que están realizando.

3. *Evaluación*. La evaluación debe permitir a los estudiantes mejorar constantemente su aprendizaje, es decir, una Actividad debe favorecer que trabajen en tareas, desarrollen y evidencien su aprendizaje mediante algún mecanismo (por ejemplo, escribir las ideas, resultados o solución de la tarea o problema). La Evaluación enfatiza que los alumnos puedan analizar la retroalimentación recibida, proporcionada a través de los medios de Soporte, con la finalidad de refinar o ampliar los conceptos o ideas iniciales. En un MOOC, cuando un participante plantea una idea o solución de un problema a través del foro de discusión, y puede obtener una retroalimentación por parte de la comunidad virtual que genera el curso masivo, de esta forma, puede replantear, extender o corregir sus ideas iniciales.

Churchill et al. (2016) argumentan que, para el logro de un aprendizaje, el diseño de las Actividades debe: 1) contemplar y fomentar la participación activa de los estudiantes en un ambiente de reflexión, colaboración y discusión y 2) centrarse en un contexto donde las tareas o problemas involucren a los estudiantes en un proceso de resolución de problemas.

Así, en un ambiente de aprendizaje en línea, se debe incluir una propuesta sobre los contenidos y una posible ruta de cómo estudiarlos en un ambiente de trabajo en equipo y colaboración, donde cada persona participa activamente en un proceso de discusión ya sea preguntando, comentando o proporcionando sugerencias o diferentes formas de encontrar la solución a un problema Santos-Trigo (2016). En este sentido, la herramienta Foro de discusión, se convierte en un medio de comunicación entre sus participantes y les ofrece la oportunidad de plantear y aclarar sus dudas, conocer las ideas de sus compañeros y contrastar sus puntos de vista con los de otros (Poveda & Aguilar-Magallón, 2017).

El aprendizaje de las matemáticas implica resolver problemas en términos de observar una situación, formular preguntas y buscar siempre diferentes caminos para su resolución. Por ello, se debe valorar la importancia de formular de preguntas como un primer paso para estructurar el ambiente de aprendizaje y las discusiones dentro de las Actividades.

Santos-Trigo (2014) comenta que el aprendizaje de las matemáticas implica enfrentarse a dilemas que necesitan resolverse mediante la formulación de preguntas y búsqueda de diferentes caminos para responderlas. Además, señala que:

> El entendimiento o comprensión de las ideas matemáticas no es un proceso final, sino gradual y dinámico que se va robusteciendo en función de la necesidad de responder y resolver una serie de cuestionamientos que emerjan dentro y fuera de la propia comunidad de aprendizaje (Santos-Trigo, 2014a, p. 23).

Las tecnologías digitales permiten a los individuos comunicarse e interactuar entre ellos y desarrollar conocimiento matemático. Además, “[…] los estudiantes construyen, desarrollan, refinan, o transforman sus formas de comprender y resolver problemas como resultado de formular preguntas relevantes y responderlas con el uso de distintos medios, incluyendo las herramientas computacionales” (Santos-Trigo, 2008, p. 189).

Metodología

Se describen principios asociados con el diseño del MOOC Resolución de Problemas Matemáticos y uso de Tecnologías Digitales, sus participantes y procedimientos utilizados durante la implementación del curso masivo y la forma de organizar y analizar los datos obtenidos.

1 Diseño del MOOC Resolución de Problemas Matemáticos

El MOOC se construyó en la plataforma digital *Open Edx*, contempló un total de cinco secciones y estuvo a disposición de los participantes por un tiempo de siete semanas. Los Recursos comprendieron configuraciones dinámicas de un problema elaboradas en GeoGebra, videos de KhanAcademy y vínculos a fuentes de información: Wikipedia, KhanAcademy y WolframAlpha.

Durante el diseño de las Actividades del MOOC, uno de los objetivos fue que los problemas matemáticos fueran vistos como un medio para que los participantes planteen preguntas y busquen diversas formas de contestarlas, como una ruta para el desarrollo del hábito de cuestionamiento que les ayude a resolver problemas en matemáticas; así como en cualquier otra área.

Una parte esencial de las Actividades es que las tareas matemáticas permitieran a los participantes mover los objetos de un modelo dinámico del problema, identificar visual o empíricamente las relaciones entre éstos y conjeturar una posible solución del problema. Su validación transita desde el uso de argumentos empíricos o visuales hasta la presentación de una prueba o demostración matemática.

Las Actividades del MOOC fueron estructuradas en tres momentos:

1. *Movimiento.* A partir de un modelo dinámico que representa una situación matemática, con el objetivo que los participantes exploren el problema y planteen preguntas sobre el comportamiento de los objetos y sus propiedades. En este proceso, las plataformas Wikipedia y KhanAcademy pueden ser utilizadas por los participantes para consultar y estudiar los conceptos matemáticos involucrados en el problema.

2. *Formulación de conjeturas.* Las preguntas planteadas en la etapa anterior son la base y el camino para identificar y formular conjeturas. En una primera instancia, deben ser sustentadas o refutadas mediante argumentos visuales o empíricos, para ello se pueden utilizar las estrategias de mover objetos, medición de sus atributos y lugar geométrico.

3. *Justificación de conjeturas.* Toda conjetura identificada debe ser justificada utilizando conceptos y relaciones matemáticas. Por ejemplo, mediante argumentos algebraicos, geométricos, entre otros.

El MOOC fue estructurado en cinco sesiones de trabajo, la Tabla 3.1 describe las Actividades matemáticas y los objetivos en cada una de las sesiones.

Tabla 3.1 Conjunto de Actividades del MOOC

Conjunto de actividades	Objetivos
Sesión de trabajo 1 1. Importancia de formular preguntas. 2. Resolución de problemas y uso de tecnologías digitales.	Relacionar las actividades de resolución de problemas con el aprendizaje de las matemáticas. Se promueve que los estudiantes formulen preguntas como un camino para comprender ideas matemáticas y resolver problemas.
Sesión de trabajo 2. 1. El segmento y su recta mediatriz. 2. El triángulo isósceles. 3. El triángulo equilátero. 4. El triángulo rectángulo e isósceles.	Mover objetos, observar el movimiento de las figuras y formular algunas conjeturas sobre su comportamiento tras el movimiento. Toda conjetura que se identifique debe justificarse, en una primera fase, la explicación puede estar sustentada a partir de argumentos visuales o empíricos, para posteriormente construir y presentar otro tipo de argumentos (geométricos, algebraicos, etc.).
Sesión de trabajo 3. Cuestionario 1 1. Las medianas de un triángulo. 2. Las alturas de un triángulo. 3. Las bisectrices de un triángulo.	Analizar el movimiento de objetos para comprobar o refutar visualmente algunas relaciones y conjeturas.
Sesión de trabajo 4 41. La parábola como lugar geométrico. 42. Explorar el comportamiento del área de una familia de rectángulos de perímetro fijo que se puede modelar a través de un lugar geométrico.	Introducir al participante en el estudio de lugares geométricos como una estrategia para resolver problemas.
Sesión de trabajo 5. Cuestionario 2 1. Extender el problema de la parábola. 2. Un problema de variación que se puede resolver utilizando la estrategia de lugar geométrico.	Plantear preguntas que sirvan de punto de partida para que, posteriormente, el participante les dé seguimiento y las analice en un contexto más amplio. La intención es que cada persona siga buscando información que le ayude a extender su comprensión y desarrolle habilidades de resolución de problemas.

Fuente: Elaboración propia.

Se utilizaron diversas herramientas digitales para dar Soporte a los participantes: (1) Wikipedia, KhanAcademy, WolframAlpha, permiten consultar en línea conceptos o relaciones matemáticas, (2) *El Foro de discusión* como un medio de comunicación que ofrece la oportunidad a los participantes de plantear sus dudas y recibir retroalimentación como parte de la comunidad y compartir ideas y participar en las discusiones que se generan en el desarrollo de las tareas o problemas propuestos. El trabajo de los participantes se podría convertir en un punto de referencia para que otros retomen o extiendan las ideas y las contrasten o discutan dentro de la comunidad virtual que genera el curso masivo.

La Evaluación fue parte integral de todas las Actividades de aprendizaje como un componente formativo, es decir, su finalidad es que el participante reciba la retroalimentación necesaria para mejorar su aprendizaje. Durante el diseño de las Actividades, se contempló el modelo de evaluación que propone Santos-Trigo (2014) en el cual describe tres momentos y que intentan analizar el proceso utilizado por los estudiantes al resolver una tarea matemática.

El primero es el entendimiento del problema, un estudiante debe mostrar si lo entiende y cuestionarse: ¿Las condiciones del problema son razonables? ¿Es posible estimar una solución? El segundo se relaciona con la habilidad del estudiante para seleccionar y usar estrategias de solución, presentar un plan y ejecutarlo. El tercero es revisar la solución: analizar su significado y verificar los procesos que llevaron a esa solución.

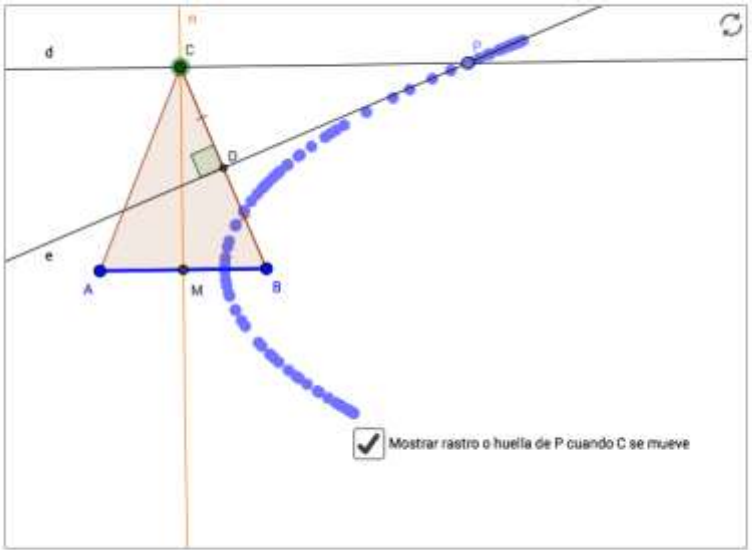
De esta manera, los participantes son los encargados de su propia evaluación, ya que a través del foro de discusión, como medio de Soporte, pueden analizar la retroalimentación recibida con la finalidad de refinar o ampliar los conceptos o ideas iniciales.

A continuación, se muestra una de las Actividades de la Sesión de trabajo 4 en la cual se resaltan los modelos dinámicos de las situaciones matemáticas, Khan Academy como parte de los Recursos y el Foro de discusión como un medio de Soporte y de Evaluación.

En el primer momento de la Actividad, se proporciona a los participantes una representación dinámica que involucra el segmento AB y su recta mediatriz n, y dos nuevos elementos: una recta perpendicular a n que pasa por C y la recta mediatriz del lado BC (Figura 3.1), P es la intersección de ambas rectas. El objetivo es que los participantes enfoquen su atención en el rastro o huella deja P cuando se mueve el punto C. Con ayuda de la casilla *Mostrar rastro de P cuando se mueve C*, que proporciona la configuración dinámica, es posible visualizar el lugar geométrico de P cuando se mueve el punto C. Se cuestiona a los participantes sobre ¿Qué propiedades posee o muestra el lugar geométrico? ¿A cuál figura se parece?

Como parte de la comprensión del problema se cuestiona a los participantes en el Foro de discusión sobre ¿Cuál es la definición de una parábola? ¿Cuáles son los elementos de una parábola? Y analizar el lugar geométrico del punto P que se generó al mover el punto sobre la perpendicular n. ¿Cuáles serían tus candidatos para ubicar el foco y la directriz de esa parábola?

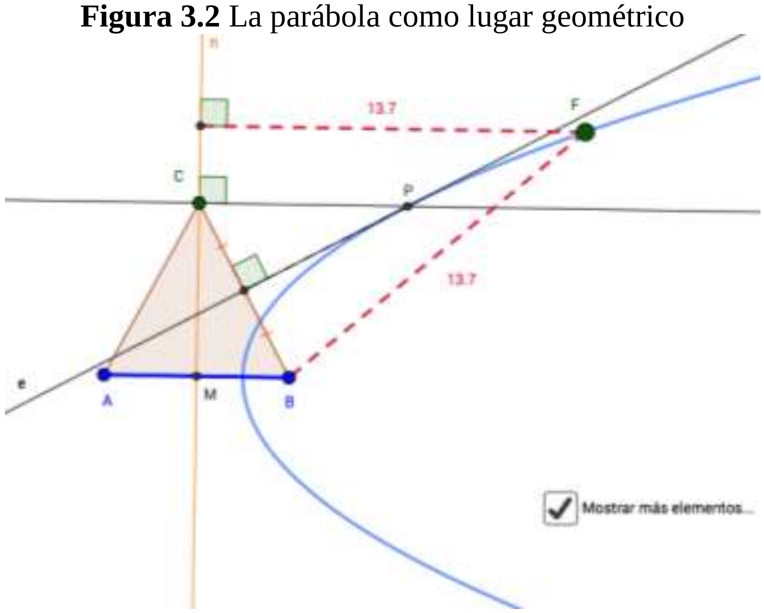
Figura 3.1 La construcción de la parábola como lugar geométrico



Fuente: Actividad del MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales.

En la formulación de conjeturas y búsqueda de justificaciones, se proporciona a los participantes el modelo dinámico que muestra la Figura 3.2 y los cuestiona sobre ¿Qué curva u objeto matemático representa el lugar geométrico del punto *P* cuando *C* se mueve sobre la mediatriz del segmento *AB*? ¿Qué propiedades importantes caracterizan ese lugar geométrico? ¿Cómo sustentar o argumentar matemáticamente que la trayectoria de *P* cuando *C* se mueve se trata de una parábola? ¿Qué se debe probar y cómo? ¿Dónde se encuentra el punto que genera el lugar geométrico? ¿Qué significa que esté en la mediatriz del lado *BC*?

Figura 3.2 La parábola como lugar geométrico



Fuente: Actividad del MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales.

2 Participantes y procedimientos

En el MOOC se inscribieron 2491 personas. El único requisito solicitado fue poseer o estar cursando estudios de bachillerato a nivel de México. En cuanto a las edades de los participantes, hubo 361 personas entre 16 y 20 años, 923 entre 21 y 30 años, 557 mayores a 50, entre otros. Con respecto al grado académico resalta que se inscribieron 78 personas con un doctorado, 322 con maestría, 1051 con licenciatura, 1053 a nivel de bachillerato, entre otros.

El equipo que diseñó y monitoreó el desarrollo de las Actividades del curso solo intervenía cuando se requería moderar u orientar la discusión en los foros. Esta intervención incluía la selección de las entradas y su clasificación en tres categorías: respuestas de los participantes a las actividades planteadas, dudas o errores conceptuales o en las ideas matemáticas y extensiones del problema. Todas las discusiones de los foros se analizaron y se envió un resumen después de cada sección a los participantes con las ideas principales.

Los datos de este estudio se recolectaron por medio de los foros de discusión, en total hubo 35 foros que incluyeron 9573 comentarios de los participantes. La unidad de análisis fueron las conversaciones de los participantes en cada Actividad. Ernest (2016) argumenta que en la conversación como unidad de análisis intervienen: un hablante/proponente, un oyente/crítico y un Texto Matemático. El hablante/proponente plantea una idea (Texto Matemático) y el oyente/crítico responde proporcionando su punto de vista, aceptando o modificando la idea original. Posteriormente, el hablante/proponente puede asumir el rol de oyente/crítico, de esta manera, se alternan sus roles. Este proceso se repite varias veces y se complementa con la incorporación de otros participantes.

Para realizar el análisis de las conversaciones en los foros, se observaron dos tipos de interacciones: (1) Participante-Actividades, son las respuestas que proporcionaron los integrantes a las preguntas de los problemas y (2) Participante-comunidad virtual, las discusiones que generaron las preguntas o dudas que plantearon los participantes en las actividades propuestas en el curso masivo.

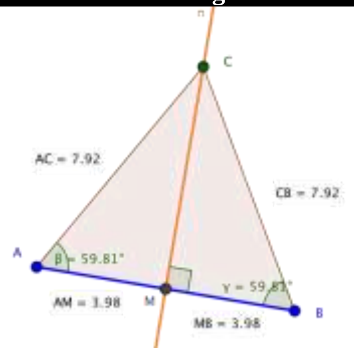
Presentación de los resultados

En esta sección se discuten los episodios en la resolución de problemas y uso de tecnologías digitales que mostraron los participantes en las sesiones de trabajo dos y cinco del MOOC y el impacto de las discusiones en los foros como un medio de comunicación que ofrece a los participantes la posibilidad de plantear y exhibir sus ideas como parte de la comunidad y compartirlas y participar en las discusiones que se generan en el desarrollo de las tareas o problemas propuestos, según la unidad de análisis seleccionada. En esta investigación, interesan los comportamientos que asumen o adquieren los participantes en un curso masivo, la evolución que tienen como comunidad virtual, a través del desarrollo de las Actividades y no así individualmente.

1 Sesión de trabajo 2

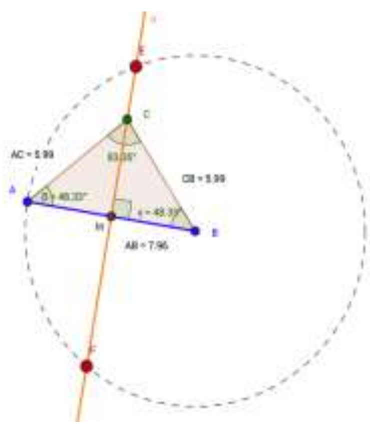
En esta sesión, la primera parte de la Actividad 1 tenía como objetivo introducir el movimiento de objetos como un medio para identificar relaciones entre éstos. Las Tablas 4.1 y 4.2 muestran el resumen las principales interacciones en los foros de discusión y los resultados obtenidos.

Tabla 4.1 El triángulo isósceles

Actividad 1: El triángulo isósceles	Interacciones en los foros	Resultados
 https://ggbm.at/RY939EbA Se traza el punto C sobre la recta n y el triángulo ABC. ¿Qué propiedades tiene el triángulo y que ocurre cuando el punto C se mueve sobre la recta n?	En general, los participantes reconocieron que al mover el punto C sobre la recta n se generaba una familia de triángulos isósceles. Aquí se formuló una primera conjetura: *Se traza un segmento AB y la recta perpendicular n al segmento que pasa por el punto medio del segmento AB, si el punto C es un punto en la recta n, entonces la famila de triángulos ABC que se genera al mover el punto C siempre son isósceles (cuando C coincide con M, no existe triángulo).*	Señalaron que las medidas de los lados *AC* y *BC* (o ángulos *CAB* y *CBA*) eran las mismas sin importar la posición del punto *C*. Se consideraron los triángulos *ACM* y *BCM* y demostraron que son congruentes, así *AC=BC*.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4.2 El triángulo equilátero

Actividad 1: El triángulo isósceles	Interacciones en los foros	Resultados
 https://ggbm.at/Sdjuuutw En el mismo modelo dinámico se plantean dos interrogantes: ¿Existe una posición del punto C en la recta n donde el triángulo ACB sea equilátero? ¿Dónde ubicar el punto C para que el triángulo sea rectángulo?	Los participantes movieron el punto C sobre la recta n y observaron (a partir de enfocar la atención hacia longitud de los lados/ángulos) que si existían posiciones, en algunos casos aproximadas, donde el triángulo *ACB* era equilátero o rectángulo. Surgieron varias formas de identificar la posición de C, por ejemplo, una involucraba trazar un círculo con centro en *A* o *B* y radio la longitud del segmento *AB*. El punto de corte del círculo y la recta *n* determina la posición de *C* para la cual el triángulo *ACB* es equilátero. De manera similar, al trazar la circunferencia con centro en *M* (punto medio) y radio la mitad del segmento *AB*, la intersección de esta circunferencia con la recta n es la posición para *C* donde el triángulo *ACB* es rectángulo.	Algunos participantes argumentaron que la ubicación del punto *C* donde se cumplía que los tres lados del triángulo tenían la misma longitud (o cuando el ángulo *ACB* media 90) era suficiente para sustentar que era posible construir esos triángulos. Sin embargo, en el Foro se comentó que era importante "precisar" cómo ubicar el punto *C* para que los triángulos fueran equiláteros/rectángulos.

Fuente: Elaboración propia.

2 Discusión de la Actividad

Durante el desarrollo de la Actividad y como parte del proceso de resolución de problemas, los participantes enfocaron la atención hacia las propiedades de los objetos como la recta mediatriz de un segmento, la congruencia entre segmentos y los triángulos rectángulos, isósceles y equiláteros.
Los participantes buscaron información en Wikipedia y la presentaron en las conversaciones para clarificar los conceptos de recta mediatriz de un segmento, congruencia de segmentos y ángulos, triángulos rectángulos, isósceles y equiláteros. En este proceso, las conversaciones fueron un medio que permitió a los participantes reflexionar sobre los conceptos anteriores y la necesidad de definir en forma precisa los conceptos matemáticos.

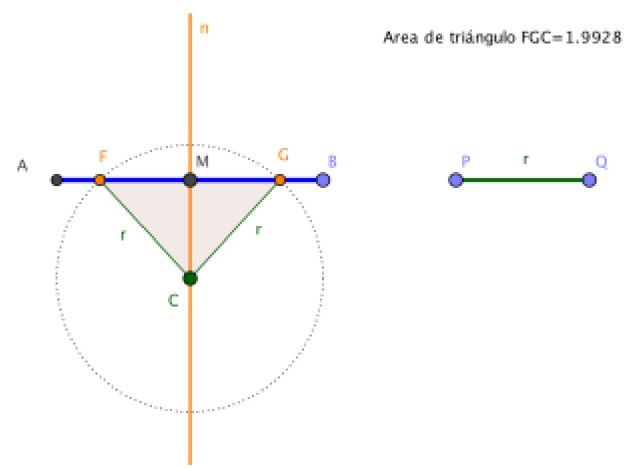
Los participantes exploraron los modelos dinámicos y observaron las propiedades de objetos matemáticos involucrados. El movimiento y la medición, como estrategias visuales y empíricas hacia los acercamientos a la solución del problema, les permitió identificar relaciones entre los objetos y se convirtieron en el camino para que formularan conjeturas.

En las conversaciones, resaltó que los participantes únicamente respondieron las preguntas de cada Actividad y no formularon otras. Por lo tanto, el grupo coordinador planteó cuestionamientos que sirvieran como base para que los participantes enfocaran su atención sobre algunos objetos, por ejemplo, en la Actividad del triángulo equilátero, la búsqueda de diversas soluciones permitió a los participantes observar la existencia de varias soluciones y construir y presentar justificaciones que involucran relaciones o resultados matemáticos.

3 Sesión de trabajo 5

La Actividad involucró un modelo dinámico que incluía un segmento AB, su recta mediatriz n, un punto móvil C sobre n y una familia de triángulo isósceles FGC, de tal manera que el lado FG estuviera sobre AB y sus lados congruentes midieran una longitud dada: r (Figura 4.1).

Figura 4.1 Modelo dinámico que representa un triángulo isósceles de lados congruentes r



Fuente: Actividad del MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales.

En las conversaciones, los participantes reconocieron que la longitud de FG cambiaba al mover el punto C, la medida de los lados CF y CG se mantenía invariante y el área de la familia de triángulos cambiaba. Además, determinaron que la altura h sobre FG variaba en el intervalo de 0 a r y si $h = 0$ ó $h = r$, entonces el área del triángulo era cero. También, indicaron que si la longitud de MC es mayor que r entonces no era posible que se formara un triángulo (Figura 4.2).

Figura 4.2. Conversaciones de los participantes: El dominio de la altura h.

discussion posted hace 5 meses by jhernandezf

PINNED

Al mover el punto C, la altura y el área del triángulo FGC cambia.

discussion posted hace 5 meses by jhernandezf

PINNED

Al mover C observo que es posible que se formen o no triángulos. Probé con varias medidas de r y siempre pasa lo mismo. ¿el área máxima depende solo de la altura? ¿cuál es el dominio de h? ¿si h = 0 existe triángulo? ¿cuál es el valor máximo de h?

Profemarco
hace 5 meses

Es correcto la altura y el área cambian, la altura se mueve de 0 a r.

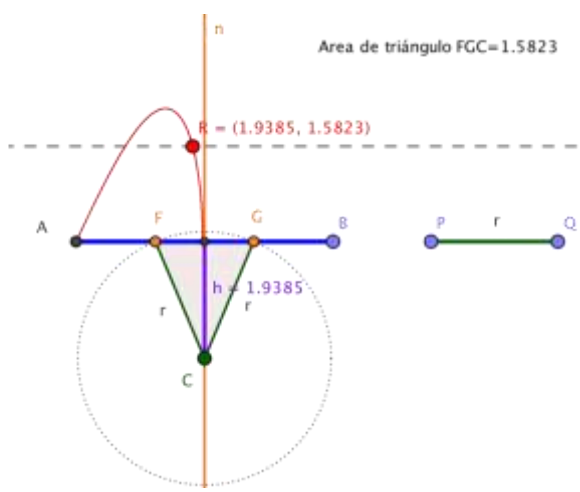
discussion posted hace 5 meses by VictorFelix

PINNED

En el triángulo FGC cuando su altura aumenta su base disminuye y viceversa. Por un lado, cuando la altura es máxima su base es cero, originando un área cero. Si la altura se reduce a cero para que su base sea máxima, el área también será cero. Consecuentemente, al variar la altura desde cero hasta máxima, su área variará también desde cero, hasta un valor máximo para luego disminuir nuevamente a cero cuando la altura sea máxima. Esto indica que habrá algún valor de la altura para el cuál el área sea máxima.

Con la finalidad de representar gráficamente la variación del área de la familia de triángulos isósceles como resultado de mover el punto C sobre la recta n y que los participantes observaran la importancia del lugar geométrico como una estrategia para resolver problemas, se les proporcionó el modelo dinámico representado en la Figura 4.3. En la construcción, el punto R relaciona la longitud de la altura con el área del triángulo.

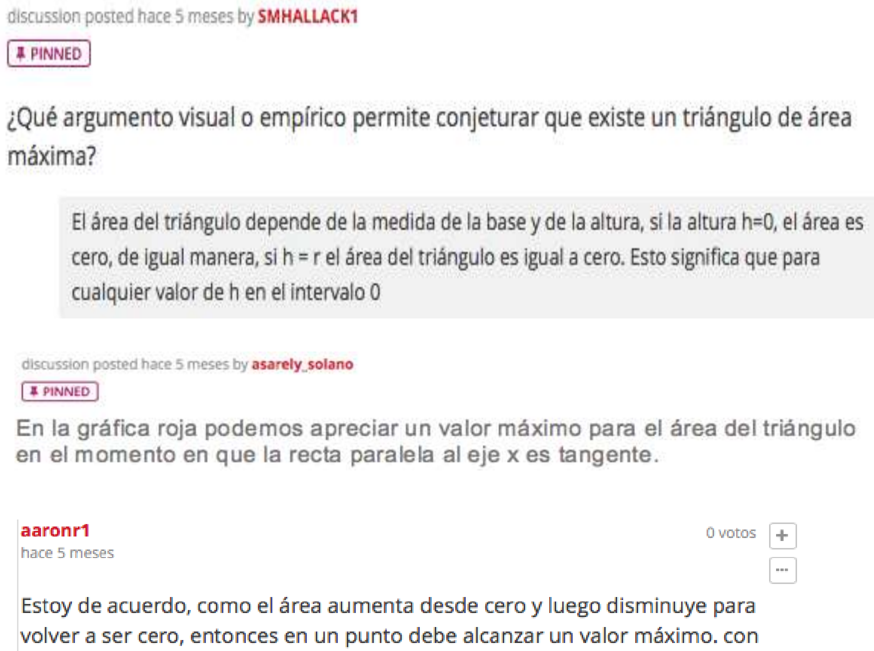
Figura 4.3. El lugar geométrico que modela la variación del área de una familia de triángulos isósceles



Fuente: Actividad del MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales.

Los participantes al mover el punto C, identificaron que R tiene por abscisa la longitud de la altura h y como ordenada el valor del área del triángulo. También, mencionaron que el lugar geométrico les ayudó a visualizar la existencia de un triángulo de área máxima y argumentaron que, al mover el punto C, el valor del área aumenta desde cero y después disminuye para volver a ser cero, por lo tanto, existe un triángulo de área máxima (Figura 4.4).

Figura 4.4. Evidencias de los participantes: Existencia de un triángulo de área máxima.



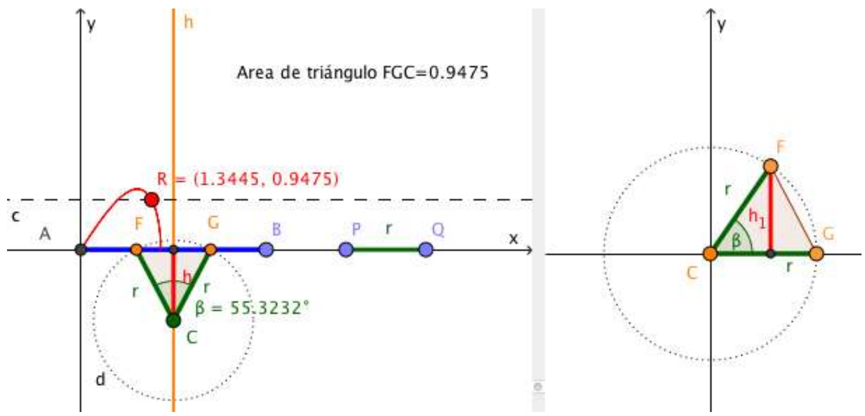
Como resultado de estas exploraciones, en el Foro algunos participantes mencionaron que el lugar geométrico correspondía a una parábola, la comunidad indicó que tal afirmación parecía no ser correcta. El equipo coordinador del curso planteó la pregunta*: ¿el lugar geométrico es una parábola? Si es así, ¿cuál es el foco y la directriz?* Las respuestas proporcionadas por los participantes, exhibieron un enfoque algebraico; uno mencionó que el lugar geométrico tiene como ecuación $A(h) = h\sqrt{r^2 - h^2}$, con r constante, por lo tanto, no se trataba de una parábola.

Otra conjetura presentada en las conversaciones fue que el triángulo de mayor área está determinado por la altura máxima. La comunidad virtual acordó que esa idea no era correcta. Ante estos comentarios, el equipo coordinador planteó en el Foro la pregunta *¿Por qué creen que es incorrecto?* Algunos participantes mencionaron que la base, al igual que la altura, es variable, por lo tanto, el área no se obtiene cuando la altura es máxima.

Los participantes se cuestionaron sobre cómo determinar la posición exacta del punto C donde se genera el triángulo de área máxima, sin depender de la precisión de GeoGebra, como resultado de las exploraciones concluyeron que el área máxima se alcanza cuando el valor del ángulo $FCG = \beta$ es de 90 grados. Ante esto, algunos participantes preguntaron en el Foro: ¿Cómo justificar que el área máxima se obtiene cuando $\beta = 90°$? La pregunta fue respondida en conversaciones posteriores ya que la atención se centró en la existencia de dos posiciones para el punto C, una arriba y otra por abajo del eje X, donde era posible construir un triángulo de área máxima.

Posteriormente, se proporcionó a los participantes un nuevo modelo dinámico en donde el triángulo FGC fue colocado de tal manera que el punto C coincidiera con el origen del plano cartesiano y el lado CG estuviera sobre el eje X; además se construyó la altura h_1 sobre CG (Figura 4.5). Se solicitó a los participantes mover el punto C (parte izquierda de la Figura 4.3) y observar el comportamiento del triángulo FGC en la parte derecha de la Figura 4.5.

Figura 4.5 Modelo dinámico donde se visualiza la altura sobre la base CG del triángulo CFG



Fuente: Actividad del MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales.

En las conversaciones, los participantes coincidieron en que la nueva representación del triángulo FGC les permitió observar la relación que existe entre el punto máximo del lugar geométrico y el ángulo β y, así, concluir que de todos los triángulos isósceles que se forman, el de área máxima es también triángulo rectángulo. Observaron que h_1 maximiza el área del triángulo FGC, pues la base CG permanece constante (Parte derecha de la Figura 4.5), y h_1 es máxima cuando mide lo mismo que el radio de la circunferencia, es decir, cuando está sobre el eje Y.

El grupo coordinador, luego de los acercamientos anteriores, propuso la siguiente pregunta en el foro: ¿se podrá justificar de alguna otra manera? Esto impulsó a los participantes a plantear y compartir en las conversaciones otros acercamientos para justificar que el triángulo de área máxima es el rectángulo, utilizando desigualdades y trigonometría.

En el primer caso, la conversación inició cuando un participante indicó que en el triángulo FGC (Figura 4.6) la base CG es constante e igual a r y $0 < h_1 < r$. Al multiplicar por $\frac{r}{2}$, se tiene $0 < \frac{rh_1}{2} < \frac{r^2}{2}$, donde $\frac{rh_1}{2}$ es el área del triángulo FGC. Este razonamiento matemático fue objeto de discusión, los demás participantes en la conversación expusieron que h_1 podía ser, también igual a r, por lo cual, $0 < \frac{rh_1}{2} \leq \frac{r^2}{2}$. Así, asociaron el área máxima con la expresión algebraica $\frac{r^2}{2}$, es decir, un triángulo rectángulo e isósceles de base y altura igual a r.

La justificación basada en argumentos trigonométricos se basó en la Figura 4.7. Los participantes consideraron uno de los dos triángulos rectángulos que conforman a FGC y el ángulo $\frac{\beta}{2}$ formado entre la hipotenusa y la altura. Mencionaron que el área es $A = \frac{base \cdot altura}{2}$ donde la base es $r\, sen\frac{\beta}{2}$ y la altura es $r\, cos\frac{\beta}{2}$ (Figura 4.8). Así:

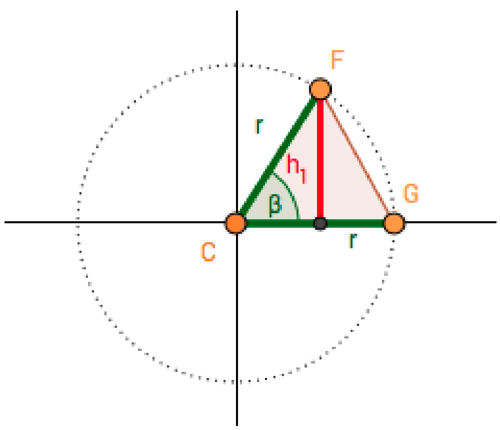
$$A = \frac{r\,sen\frac{\beta}{2} \cdot r cos\frac{\beta}{2}}{2} = \frac{r^2 sen\frac{\beta}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2}}{2}, \qquad (1)$$

al utilizar $sen(2x) = 2sen\,x \cdot \cos x$ en (1) se obtiene

$$A = \frac{r^2 sen\left(2 \cdot \frac{\beta}{2}\right)}{4} = \frac{r^2 sen\beta}{4}. \qquad (2)$$

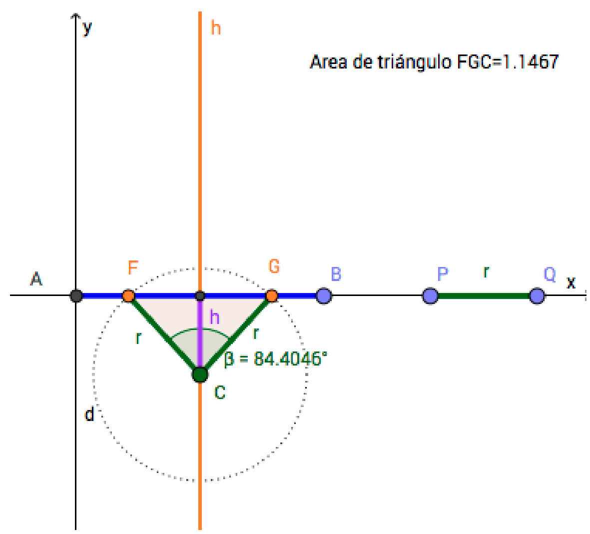
Para maximizar esta última expresión, utilizaron el hecho de que la función seno alcanza un valor máximo en $\beta = 90^o$. De esta manera, obtuvo que $\frac{r^2 sen 90^0}{4} = \frac{r^2}{4}$ es el área máxima de la mitad del triángulo FGC y, por consecuencia, $\frac{r^2}{2}$ es el área máxima del triángulo FGC. Así, la base y la atura deben ser iguales, es decir, se trata de un triángulo rectángulo e isósceles.

Figura 4.6. Representación dinámica de un triángulo isósceles



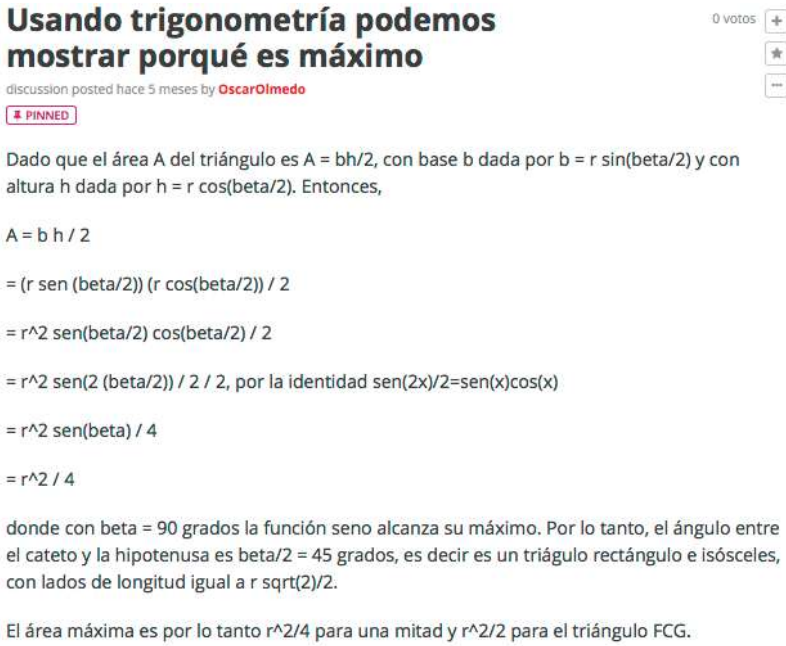
Fuente: Actividad del MOOC.

Figura 4.7. Representación dinámica de un triángulo isósceles de lados congruentes r



Fuente: Actividad del MOOC.

Figura 4.8 Evidencias de los participantes: Uso de argumentos trigonométricos



Usando trigonometría podemos mostrar porqué es máximo

0 votos

discussion posted hace 5 meses by OscarOlmedo

PINNED

Dado que el área A del triángulo es A = bh/2, con base b dada por b = r sin(beta/2) y con altura h dada por h = r cos(beta/2). Entonces,

A = b h / 2

= (r sen (beta/2)) (r cos(beta/2)) / 2

= r^2 sen(beta/2) cos(beta/2) / 2

= r^2 sen(2 (beta/2)) / 2 / 2, por la identidad sen(2x)/2=sen(x)cos(x)

= r^2 sen(beta) / 4

= r^2 / 4

donde con beta = 90 grados la función seno alcanza su máximo. Por lo tanto, el ángulo entre el cateto y la hipotenusa es beta/2 = 45 grados, es decir es un triágulo rectángulo e isósceles, con lados de longitud igual a r sqrt(2)/2.

El área máxima es por lo tanto r^2/4 para una mitad y r^2/2 para el triángulo FCG.

Inicialmente, el participante que expuso la idea general de la demostración anterior, dio seguimiento, a través del foro a los comentarios de otros y cuando alguno planteaba alguna interrogante o duda, respondía aclarando la situación. Además, este comportamiento del participante, generó que se corrigieran algunos errores de la demostración inicial colaborativamente y que, las personas comprendieran ideas tales como trabajar con el ángulo $\frac{\beta}{2}$ y las identidades trigonométricas relacionadas.

4 Discusión de la Actividad

Las diversas representaciones y las ventajas que ofrece GeoGebra para visualizar de manera instantánea la variación en los atributos (longitudes, ángulos, áreas, etc.) de objetos geométricos ayudaron a los participantes a establecer conjeturas que posteriormente justificaron. En este camino, una estrategia visual y empírica importante fue el uso de un lugar geométrico que representaba la variación del área de una familia de triángulos como un recurso adicional para resolver un problema.

En la Actividad, los participantes identificaron los conceptos matemáticos involucrados en las representaciones dinámicas de los problemas y sus propiedades, movieron los objetos matemáticos como una ruta para identificar relaciones entre éstos, formularon conjeturas y su validación involucró argumentos visuales o empíricos y la presentación de una prueba o demostración matemática. En este proceso, los participantes reconocieron que el movimiento de tales objetos, la medición de sus atributos y los lugares geométricos son estrategias, asociadas al uso de un SGD, que conducen hacia la solución del problema.

En las conversaciones, hubo una evolución con respecto a las Actividades anteriores, ya que los participantes se plantearon la necesidad de pensar siempre en la justificación de las conjeturas formuladas utilizando, además de los acercamientos visuales o empíricos, enfoques algebraicos y geométricos.

Asimismo, plantearon una mayor cantidad de preguntas, a diferencia de las Actividades de la Sesión de Trabajo 2, donde la búsqueda de respuestas los condujo a explorar diversas formas de resolver el problema y, así, construir o desarrollar sus formas de comprender y resolver problemas apoyados con el uso de GeoGebra.

En el desarrollo de las Actividades, sobresalieron participantes que proporcionaron retroalimentación a otros y aquellos que siguieron puntualmente las discusiones que iniciaron. Por ejemplo, los participantes que plantearon una justificación basándose en un enfoque algebraico y en ideas trigonométricas contestaban regularmente las preguntas de otros en relación a los razonamientos expuestos.

La moderación en los foros que realizó el equipo de diseño del MOOC orientó la discusión de los participantes en búsqueda de respuestas a las preguntas planteadas. Varios participantes asumieron un rol de proporcionar soporte o ayuda a otros a través de los comentarios y contribuciones que se expresaron en los foros.

De esta manera, el diseño de las Actividades y la intervención de grupo coordinador en los foros, permitió a los participantes comunicar y contrastar sus ideas en una comunidad virtual, lo cual favoreció la construcción o refinamiento de conceptos e ideas matemáticas ampliando sus recursos matemáticos y estrategias en la resolución de problemas.

El estudio permitió observar el comportamiento de los participantes en las conversaciones que se generaron alrededor de los foros de cada Actividad. Un aspecto crucial que fomentó la interacción y discusión entre los participantes fue el proceso de moderación en las conversaciones por parte del grupo coordinador. Sin la existencia de un profesor encargado de responder o dar seguimiento puntual a cada integrante del curso, resultaron importantes los roles que asumieron algunos participantes en las conversaciones. Algunos participantes aclararon dudas e indicaron errores en los razonamientos matemáticos que otros proponían. Esta retroalimentación promovió la independencia de los participantes y favoreció su proceso de aprendizaje. Otro grupo de participantes daba seguimiento a los comentarios que otros plantearon en relación a las preguntas, ideas matemáticas y extensiones del problema propuestas por ellos. Esto permitió construir y desarrollar diversas formas de resolver un problema.

Para trabajo futuro, y dadas las conclusiones obtenidas en esta investigación, se pretende crear un curso masivo que involucre a los participantes en el proceso de crear sus propias construcciones dinámicas, para ello se puede utilizar GeoGebraTube para almacenar, generar y compartir, en las conversaciones de los foros, el vínculo de los modelos dinámicos. Estos serán otra fuente para recabar información sobre cómo un participante identifica los elementos relevantes en el enunciado del problema y busca la manera de relacionarlos para construir el modelo dinámico que lo representa.

Agradecimientos

A la Universidad de Costa Rica (UCR) por el apoyo brindado.

Conclusiones

Los resultados anteriores muestran que las diversas tecnologías digitales utilizadas en este estudio permitieron crear un ambiente de aprendizaje basado en resolución de problemas en un entorno MOOC. Durante la construcción del MOOC, las características técnicas de la plataforma hicieron posible incluir fuentes de información tales como Wikipedia, KhanAcademy y vínculos a otros sitios de Internet, representaciones dinámicas de un problema elaboradas en GeoGebra y medios de comunicación entre los participantes. La integración de estos componentes permitió estructurar actividades que favorecieron la consulta de información, exploración de modelos dinámicos de un problema y la comunicación entre los participantes, todo esto sin salir de la plataforma.

El uso coordinado de diversas herramientas digitales ofreció los medios y recursos para crear un escenario de aprendizaje MOOC en una plataforma en línea. En este escenario, los participantes trabajaron en un ambiente de colaboración que les permitió compartir sus ideas a través del Foro de discusión durante todo el proceso de resolución de las actividades (comprensión del problema, formulación de conjeturas, formas de validación y la búsqueda de diversas maneras de cómo resolver los problemas.

En este contexto, todos los participantes tuvieron una oportunidad de explorar los modelos dinámicos y conceptualizarlos como un punto de partida para identificar conceptos, buscar relaciones y buscar diversas maneras o argumentos para sustentarlas. En este proceso, los participantes mostraron heurísticas asociadas con el uso de las herramientas como el arrastre o movimiento ordenado de objetos dentro de la configuración, la cuantificación de atributos como medida de segmentos, ángulos, áreas, etc., la generación de lugares geométricos y el uso de deslizadores.

En las Actividades del MOOC Resolución de Problemas Matemáticos y uso de Tecnologías Digitales hubo una variedad de tipos de participantes con diferentes niveles académicos, edades y conocimientos matemáticos. Como consecuencia, se generó un ambiente de participación en los Foros con diferentes roles. Algunos participantes aclararon dudas e indicaron errores en los razonamientos matemáticos que otros proponían. Esta retroalimentación promovió la independencia de los participantes y favoreció su proceso de aprendizaje. Otro grupo de participantes daba seguimiento a los comentarios que otros plantearon en relación a las preguntas, ideas matemáticas y extensiones del problema propuestas por ellos. Esto permitió construir y desarrollar diversas formas de resolver un problema.

El papel de los diseñadores del curso o grupo coordinador durante el diseño e implementación de las Actividades permitió que se generara un ambiente de trabajo colaborativo entre los participantes. Las preguntas iniciales de las Actividades guiaron a los participantes a buscar diversas formas de responder y en consecuencia a resolver los problemas planteando conjeturas, basadas en el movimiento de los objetos matemáticos presentes en la configuración dinámica y sus relaciones o invariantes.

La moderación y planteamiento de preguntas en todas las conversaciones por parte del grupo coordinador, permitió que los participantes plantearan preguntas y formas de responderlas conforme avanzaban en el desarrollo de las Actividades, esto les permitió evolucionar en su pensamiento matemático, un ejemplo de lo anterior son las preguntas que se plantearon en el último problema del curso y las diversas formas de responderlas que los llevaron a encontrar diversas rutas de solución y justificaciones algebraicas, geométricas y trigonométricas.

Un aspecto fundamental que favoreció lo anterior fue la herramienta foros de discusión que ofrece la plataforma y la posibilidad de moderar las discusiones. Sin embargo, una debilidad detectada de esta herramienta fue que no contaba con un sistema de escritura matemática, lo que causó en varias ocasiones que los participantes mal interpretaran los comentarios de otros. Un factor que ayudaría mucho y que no cuenta la plataforma es poder incluir imágenes en los foros, así los participantes podrían subir una captura de pantalla de su trabajo y no realizar la descripción escrita.

Es importante reconocer que el diseño del MOOC implica tener en cuenta lo relacionado con los niveles de compromiso y responsabilidad de los participantes. El objetivo es buscar que éstos creen la conciencia y necesidad de que ellos mismos monitoreen sus avances en la comprensión y uso de las ideas matemáticas en la resolución de problemas.

Referencias

Aguilar-Magallón D, & Poveda, W. (2017). Problem Solving Opportunities with Digital Technology in Problem Solving Environments. En Galindo, E., & Newton, J., (Eds.) Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2016). Framework for Designing Mobile Learning Environments. En D. Churchill et al. (Eds.), Mobile Learning Design, lecture Notes in Educational Technology (pp. 3-25). Singapore: Springer.

Ernest, P. (2016). The unit of analysis in mathematics education: bridging the political-technical divide? Educational studies in mathematics, 92 (1), 37-58.

Gros, B. (2016). The Dialogue Between Emerging Pedagogies and Emerging Technologies. En B. Gros, Kinshuk, M. Maina, The Future of Ubiquitous Learning Designs for Emerging Pedagogies (pp. 3-24). Berlin Heidelberg: Springer.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2009). Focus in High School Mathematics: Reasoning and sense making. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Poveda, W. & Aguilar-Magallón, D. (2017). A Massive Online Course: Mathematical Problem Solving and Digital Technologies. En Galindo, E., & Newton, J., (Eds.) Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Quinton, S. & Allen, M. (2014). The social processes of web 2.0 collaboration: Towards a new model for virtual learning. En M. Gosper & D. Ifenthaler (Eds.), Curriculum Models for the 21st Century (pp. 35-53). New York: Springer.

Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho-Machín, & L. Blanco (Eds.), Investigación en educación matemática XII (pp. 159-192). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Santos-Trigo, M. (2014). La Resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. Segunda Edición. Editorial Trillas, Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, ISBN-978-607-17-2039-9.

Santos-Trigo, M. (2014a). La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. Segunda edición. México: Trillas, Asociación Nacional de profesores de matemáticas.

Santos-Trigo, M. (2016). Las tareas múltiples y la tecnología digital. Revista C2 Ciencia y Cultura [en línea]. Recuperado el 4 de enero de http://www.revistac2.com/las-tareas-multiples-y-tecnologia-digital/.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2011). Framing a problem solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the Seventh Conference of the European society for Research in Mathematics Education (pp. 2258-2277). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. The Mathematics Enthusiast, 10(1), 279-302.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 48 (6), 827-842.

Schoenfeld A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 334-371.) New York: Macmillan.

Sergis, S., Sampson, D., & Pelliccione, L. (2017). Educational Design for MOOCs: Design Considerations for Technology-Supported Learning at Large Scale. En M. Jemni, Kinshuk, & M. Khribi (Eds.), Open Education: from OERs to MOOCs (pp. 39-71). Berlin Heidelberg: Springer.

Sinclair, J. & Kalvala, S. (2015). Engagement measures in massive open online courses. En L. Uden, D. Liberona, & T. Welzer (Eds.), Learning Technology for Education in Cloud. (Vol. 533, pp. 3-15). Switzerland: Springer International Publishing.

Zhang, Q., Peck, K., Hristova, A., Jablokow, K., Hoffman, V., Park, E., & Bayeck, R. (2016). Exploring the communication preferences of MOOC learners and the value of preference-based groups: Is grouping enough? Educational Technology Research and Development, 64 (4), 809-837.