El uso de tecnologías digitales en actividades que extienden la discusión matemática de los estudiantes

GÓMEZ-ARCIGA, Adrián & POVEDA-FERNÁNDEZ, William

A. Gómez & W. Poveda

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – IPN
agomeza@cinvestav.mx, wpoveda@cinvestav.mx

A. Alvarado, G. Carmona y A. Mata (Dirs.) Una visión integradora. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

The purpose of this study was to analyze the extent to which the systematic and coordinated use of digital technologies (GeoGebra, YouTube and Padlet) allows the students to represent and explore mathematical problems and, ways in which they can engage in mathematical discussion beyond the classroom. 18 high school students participated in problem solving activities that involved the concept of quadratic equation, they were studying the first mathematical course. The participants were familiar with the use of dynamic geometry system (GeoGebra), they were efficient in using basic tools such as: point, intersection, line, segment, perpendicular line, parallel line, trace, locus, polygon, regular polygon, circumference, distance or length, area and some input bar commands to represent geometric objects dynamically. The participants used GeoGebra to build dynamic models of the given problems and, often, constructed loci generated from the variation of parameters' values involved in the models using sliders. They also relied on the use of YouTube to remember or learn how to use formulas, and to carry out algebraic procedures. Similarly, they used Padlet to share and discuss information related to the topic in study. In general terms, there is evidence that the use of several digital technologies became important for students to understand and discuss mathematical ideas and to solve problems.

Resolución de Problemas, Tecnologías Digitales, Nivel Medio Superior

Introducción

La resolución de problemas y el uso de las tecnologías digitales ofrecen la oportunidad para que los estudiantes se involucren en actividades propias del quehacer y pensamiento matemático. ¿Cómo utilizar las tecnologías digitales cuando se desarrollan actividades matemáticas bajo el enfoque de la resolución de problemas? En respuesta a esta pregunta, hay que reconocer y discutir que existen varios tipos de tecnologías con potenciales distintos, lo que obliga a identificar las ventajas que ofrece una tecnología en particular cuando los estudiantes las usan sistemáticamente en la resolución de problemas (Santos-Trigo, Reyes-Martínez, & Aguilar-Magallón, 2015).

Las investigaciones que existen en torno al uso de las tecnologías digitales en ambientes que promueven la resolución de problemas presentan distintos enfoques y formas de incorporarlas en las actividades de aprendizaje. Esto es, buscan responder preguntas como: ¿qué acercamientos y soluciones muestran los estudiantes cuando usan alguna tecnología digital en particular para resolver un problema?, ¿cómo selecciona el profesor las tecnologías para explorar y solucionar un problema?, ¿cuáles son las características que debe tener la tecnología para que tanto profesores como estudiantes puedan aprovecharlas para construir conocimiento matemático?, ¿cuáles son las dificultades que aparecen al utilizar las tecnologías digitales en la resolución de problemas?

Algunas investigaciones reportan cómo el uso de la tecnología en la resolución de problemas influye y modifica la forma en que los profesores se enfrentan a problemas. Santos-Trigo, Reyes-Rodríguez, y Espinosa-Pérez (2007), reportan que el uso del SGD (Sistema de Geometría Dinámica, en este caso GeoGebra) ayuda a los profesores a monitorear sus procesos en la solución de un problema, permitiéndoles argumentar, validar y extender las actividades. Santos-Trigo y Reyes-Rodríguez (2011), observaron que para resolver un problema que implica modelación con el uso de un SGD, los profesores se involucraron en actividades y tareas como representar, identificar relaciones matemáticas, formar conjeturas y buscar argumentos a partir de mover de manera ordenada objetos dentro del modelo dinámico del problema.

Santos-Trigo, Moreno-Armella y Camacho-Machín (2016), resaltan la importancia del uso de las tecnologías digitales y sugieren que extienden los elementos que caracterizan un Espacio de Trabajo Matemático, pues observaron que los modelos dinámicos de los problemas abren la posibilidad de representar y explorar las tareas de distintas formas, promoviendo la participación activa de los profesores y estudiantes. Es decir, las tecnologías digitales facilitan a los estudiantes el compartir ideas e involucrarse en discusiones colectivas orientadas a la construcción y comprensión del conocimiento matemático.

Gómez-Arciga, Santos-Chávez y Basaldú-Gutiérrez (2016), en un estudio realizado con un grupo de estudiantes de nivel bachillerato, reportan que el uso sistemático de las tecnologías digitales favorece los hábitos de razonamiento matemático, pues construir modelos dinámicos permite que los estudiantes construyan e identifiquen objetos matemáticos y conceptos, definan variables, busquen relaciones, analicen casos más simples, hagan deducciones e interpreten soluciones. Debe destacarse que se implementaron muros digitales donde los estudiantes podían interactuar y discutir los problemas fuera del horario de clases.

Las investigaciones expuestas hasta el momento coinciden con trabajos recientes, por ejemplo: Alagic y Alagic (2013) y Poveda y Aguilar-Magallón (2017) afirman que los entornos de enseñanza tienen que contemplar el trabajo colaborativo, pues la interacción entre los participantes permite apropiarse de nuevos recursos y refinar sus estrategias.

Existe una propuesta sobre el uso de las tecnologías digitales en el ámbito educativo que se basa en un modelo denominado Aprendizaje Invertido. Consiste en asignarles materiales o recursos a los estudiantes para que los revisen fuera de clases y después, en un ambiente interactivo guiado por el profesor, apliquen los conceptos aprendidos para resolver los problemas planteados en clases (Green, 2012; Lawrence, 2014). Con base en estas ideas, durante la implementación de las actividades diseñadas para esta investigación, se propuso a los estudiantes consultar diversas fuentes de Internet donde pudieran recuperar información, fuera de clase, que les fuera útil para la resolución de los problemas planteados.

El uso coordinado de las tecnologías digitales amplía las posibilidades de alcanzar los objetivos deseados en la enseñanza matemática que, según Schoenfeld (1992), son: dar sentido a la disciplina, comprender conceptos relevantes, explorar problemas y situaciones problemáticas, desarrollar un punto de vista matemático, desarrollar un lenguaje formal y promover decisiones autónomas en los estudiantes al comprender conceptos y resolver problemas.

Con el uso de las tecnologías digitales, los estudiantes pueden consultar recursos en línea como libros de texto, wikis, buscador de respuestas (WolframAlpha) y vídeos que les ayuden a complementar, ampliar o contrastar las actividades vistas en clase. No obstante, el acceso a diferentes recursos en línea no garantiza que los estudiantes puedan seleccionarlos y utilizarlos eficientemente para su aprendizaje (Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2014).

Por este motivo, el problema de investigación que se presenta se centra en analizar y documentar cómo el uso sistemático y coordinado de las tecnologías digitales permiten a los estudiantes representar y explorar los problemas matemáticos y, cómo pueden aprovecharse para extender las discusiones de sus ideas y acercamientos a los problemas más allá del salón de clases. Según Santos-Trigo y Reyes-Martínez (2014) el uso coordinado de estas tecnologías puede ofrecer distintas oportunidades a los estudiantes para desarrollar el pensamiento matemático.

Por lo tanto, la pregunta que guio este estudio fue: ¿Qué acercamientos y formas de resolver los problemas muestran los estudiantes cuando usan sistemáticamente YouTube, Padlet y un Sistema de Geometría Dinámica?

Marco conceptual

El marco conceptual de esta investigación está estructurado de acuerdo con las ideas establecidas en el problema de investigación. Por una parte, la resolución de problemas es importante considerarlo cuando se desea caracterizar el desarrollo del pensamiento matemático antes, durante y después de resolver un problema; porque permite analizar los recursos y las estrategias cognitivas o métodos heurísticos, que exponen los participantes a lo largo del problema (Santos-Trigo, 2014). Por otra parte, debido a que las actividades involucraron el uso de tecnologías digitales, se retomó el marco propuesto por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009) cuya característica esencial es que incorporan dichas tecnologías como un elemento central en el proceso de resolución de problemas.

1 Resolución de problemas

En 1945 se publicó el libro *How to solve it*, escrito por Polya, quien identificó cuatro fases en la resolución de problemas que debían considerarse para enseñar y aprender matemáticas, éstas son: 1) comprensión del problema; 2) concepción de un plan; 3) ejecución de un plan; 4) visión retrospectiva. Sin embargo, Schoenfeld (1985) en su libro *Mathematical Problem Solving*, comenta que este proceso involucra más elementos, que deben tomarse en cuenta para entender cómo los estudiantes resuelven problemas o qué tipo de acercamientos muestran y, a partir de ellos, reflexionar qué actividades se pueden formular para ayudarlos. Así, Schoenfeld (1985) propone un marco que permite analizar el proceso para resolver problemas que desarrolla un individuo, el cual se compone de cuatro dimensiones: recursos, heurísticas, estrategias meta-cognitivas y creencias. En este estudio nos interesa identificar y analizar los recursos y las heurísticas que exhiben los estudiantes de bachillerato cuando resuelven problemas. Según Schoenfeld (1985), los *recursos* son los conocimientos que el individuo tiene a su disposición y las formas en que se apropia de éstos. De los cuales, identifica cinco tipos de conocimientos:

1. Conocimiento informal o intuitivo acerca de la disciplina o problema a resolver: son las formas en que interpretan los estudiantes las matemáticas y cómo se aprenden, con base en las experiencias que tienen sobre los conceptos utilizados de la disciplina. Por esta razón, surgen algunas dificultades cuando intentan entender conceptos matemáticos.

2. Hechos y definiciones: son necesarios tanto para seleccionar alguna ruta de solución como para validar el proceso en la resolución del problema. El estudiante debe tener la capacidad de acceder a este conocimiento para utilizarlo cuando se enfrenta a un problema.

3. Procedimientos rutinarios: especifican cómo debe resolverse un problema sin ser explícitos con los posibles algoritmos que pueden utilizarse, por ejemplo, para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática primero deben identificarse los términos cuadrático, lineal e independiente, enseguida seleccionar los coeficientes a, b y c, cuando la ecuación está igualada a cero y por último, aplicar la fórmula general. Es decir, como no implican toma de decisiones entonces son considerados a nivel táctico y no estratégico.

4. Conocimiento acerca del discurso del dominio: es como el estudiante percibe conceptos o reglas para resolver un problema. Si entiende un aspecto particular de alguna regla, probablemente no pueda trasladarla a otro contexto.

5. Errores consistentes o recursos débiles: es el resultado, que obtiene un estudiante, de emplear un procedimiento sistemático imperfecto, el cual usa de modo consistente y con confianza, a un contexto diferente (Matz, 1980).

Las *heurísticas* son estrategias generales que pueden ser útiles para superar las dificultades que se presentan al momento de resolver un problema. Algunas heurísticas que identificó Polya (1945) son: explotar analogías, introducir elementos auxiliares en el problema, descomponer o combinar algunos elementos del problema, dibujar figuras, variar el problema o trabajar en casos específicos. Estas estrategias pueden ayudar a descubrir relaciones estructurales o conceptos matemáticos relacionados con el problema, ampliando las posibilidades de alcanzar una solución. Sin embargo, el estudiante debe involucrarse en experiencias que le permitan apropiarse de estas estrategias, es decir, de saber cómo y cuándo utilizarlas.

2 Uso de tecnologías digitales en la educación matemática

Es reconocido que la tecnología digital no sólo tiene un gran potencial para favorecer el aprendizaje de las matemáticas, también abre nuevas perspectivas que no eran posibles antes del desarrollo de las tecnologías digitales (Leung, 2013). Internet es una herramienta que, aunque no fue diseñada originalmente para propiciar conocimiento matemático, su uso ha generado cambios en las dinámicas de enseñanza. Borba, Clarkson y Gadanidis (2013) comentan que el hecho de que los estudiantes tengan acceso continuo a Internet refleja cambios como: 1) el conocimiento matemático en su totalidad ya no es sólo propiedad de los profesores y de los libros de texto, ni está limitado por la forma de comunicación en los libros tradicionales, el conocimiento también existe en sitios de información de acceso público como Wikipedia, WolframAlpha y otros que ofrecen contenido matemático textual, multimodal e interactivo; y, 2) la enseñanza de las matemáticas no está limitada a escenarios formales de aula ya que Internet se ha convertido en un amplio recurso de información, por ejemplo, un estudiante puede efectuar una búsqueda en YouTube o Khan Academy sobre funciones y encontrar numerosos videos que enseñan los contenido matemáticos relacionados con el tema.

En este sentido, incorporar las herramientas tecnológicas demanda que el profesor no sólo debe conocer y dominar los contenidos de la materia que imparte, sino buscar de qué manera puede incorporar la tecnología en sus prácticas con la finalidad de mejorar el aprendizaje en sus estudiantes (Mishra & Koehler, 2006). Santos-Trigo (2008) y Aguilar-Magallón y Poveda (2017) consideran que las tecnologías digitales son un elemento importante cuando se resuelven problemas, porque además de ayudar a identificar patrones, conjeturas o relaciones, también permite implementar estrategias y extender el repertorio de heurísticas. Es decir, el uso de las tecnologías digitales influye en la conceptualización y forma de interactuar con los problemas. Al respecto, Leung y Bolite-Frant (2015) también coinciden con la idea de que las formas de resolver un problema se pueden explicar a partir de las herramientas que usa el estudiante en el proceso de solución de los problemas. Por lo tanto, puede afirmarse que las tecnologías digitales juegan un papel importante en el desarrollo de las habilidades cognitivas.

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009) proponen un marco que, además de permitir analizar los procesos que siguen los estudiantes cuando resuelven problemas con el uso de las tecnologías digitales, da la posibilidad de transformar problemas rutinarios en un conjunto de actividades no rutinarias. En consecuencia, los profesores pueden planear sus lecciones y organizar actividades de aprendizaje que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. A continuación, se presenta el marco que consta de cinco fases, en cada una se plantean algunas preguntas directrices y se da una breve descripción:

1. Comprensión del problema: ¿qué conceptos matemáticos dominan los estudiantes y qué preguntas se plantean antes de iniciar con la resolución del problema? Identificar los conceptos que se relacionan con el problema y plantear algunas preguntas que orienten la actividad, por ejemplo: ¿qué es lo que se busca?, ¿cómo se construye el modelo dinámico?, etc.

2. Implementación de un plan de solución: ¿cómo representar el problema con el uso de un SGD o con otra herramienta que permita explorarlo para encontrar relaciones?, ¿qué estrategia es adecuada para utilizar? Valorar diferentes caminos para alcanzar la solución.

3. Búsqueda de patrones y una solución general: ¿qué relaciones o invariantes se exhiben y cómo pueden aprovecharse para obtener la solución? Analizar y discriminar los distintos resultados encontrados para proponer una solución argumentada.

4. Conexiones y extensiones: ¿con qué problemas similares puede conectarse el problema?, ¿qué cambia en el problema si se modifica algún elemento? Plantear nuevos problemas a partir de los resultados encontrados en el problema.

5. Visón retrospectiva y reflexiones: ¿cuáles fueron las ideas principales que se aportaron para la solución del problema?, ¿qué estrategias se utilizaron y cuáles fueron las más efectivas?, ¿qué preguntas se plantearon antes, durante y después de resolver el problema? Discutir en torno a las actividades y resultados obtenidos.

Bajo este enfoque, los modelos dinámicos se vuelven importantes para explorar comportamientos matemáticos de una familia de objetos a través del arrastre, la búsqueda de lugares geométricos y la cuantificación de atributos, favoreciendo la formulación de conjeturas. Además, proporciona información sobre invariantes, patrones de comportamiento, que permite identificar conexiones y relaciones de objetos matemáticos las cuales pueden ayudar a establecer argumentos que justifiquen las relaciones emergentes o las conjeturas.

Dick y Hollebrands (2011) enfatizan la importancia de que los estudiantes usen la tecnología digital como medio para fomentar hábitos de resolución de problemas y señalan que las fases del proceso de solución adquieren otro significado cuando se incorpora el uso sistemático de herramientas digitales. Estas fases involucran:

Analizar el problema: identificar cuáles herramientas tecnológicas son apropiadas para usarlas y cuando hacerlo.
Implementar una estrategia: hacer un uso útil de las herramientas tecnológicas y monitorear el progreso hacia lo solución.
Búsqueda y uso de conexiones: especialmente explorando a través de diferentes representaciones.

> Reflexionar sobre la solución del problema: considerar la racionalidad de los resultados obtenidos en las herramientas tecnológicas, reconocer las limitaciones de las mismas, conciliar los diferentes enfoques (con y sin tecnología) e interpretar los resultados en el contexto del problema. (p. xiii)

Usar la tecnología digital cuando se resuelven problemas matemáticos, implica saber cómo seleccionarla según sus características para que ayude a superar las dificultades que se les presentan a los estudiantes en este proceso (NCTM, 2011). En este sentido, Hegedus y Moreno-Armella (2010) mencionan que si se utiliza una herramienta para construir representaciones matemáticas deben considerarse los siguientes componentes:

- Navegación. Capacidad de seleccionar diferentes acciones desde la pantalla (trazar rectas, construir polígonos, etc.), mover figuras matemáticas, desplazarse y hacer zoom en un sistema de coordenadas.
- Interacción. Seleccionar, mantener, arrastrar o manipular objetos.
- Anotación. Añadir marcas, literales o números a partes de las figuras.
- Construcción. Figuras matemáticas que pueden ser construidas a través de las herramientas específicas.
- Simulación. Permitir que los objetos que forman parte de las figuras sean animados.
- Manipulación. Las figuras construidas pueden ser analizadas como familias que mantienen las propiedades esenciales de la construcción (figuras robustas).

Estas características son inherentes a GeoGebra. Por otro lado, Tzu-Bin, Chen, y Chai (2015) caracterizan las “nuevas” tecnologías diseñadas para la comunicación (conocidas como medios de comunicación) de la siguiente manera: digital, se crean en forma digital como periódicos, revistas y libros en línea; virtualidad, se propagan a través de Internet; hipertextualidad, la información está fragmentada en pequeños segmentos y se vincula con hipervínculos; interactividad, fácil creación de mensaje multimodal que promueve las interacciones y comunicaciones entre los participantes.
Estas ideas expuestas, sirvieron para seleccionar las tecnologías digitales, Padlet y YouTube, que los estudiantes utilizaron para obtener información que les ayudara a desarrollar las actividades y para compartir sus ideas con el resto del grupo, fuera de las sesiones de clases.

Metodología

A continuación se detallan los aspectos metodológicos de la investigación que aquí se reporta, como: los participantes, las sesiones de trabajo, las actividades y los instrumentos de recolección de datos.

1 Participantes de la investigación

El estudio se realizó con un grupo de estudiantes de primer semestre de bachillerato, los cuales cursaban la materia de Matemáticas I. El grupo estuvo conformado por 18 estudiantes con edades entre 15 y 17 años.

Es importante mencionar que todo el grupo estaba familiarizado con el uso GeoGebra, la mayoría utilizaba las herramientas básicas como punto, intersección, recta, segmento, recta perpendicular, recta paralela, rastro, lugar geométrico, polígono, polígono regular, circunferencia (centro, punto), distancia o longitud, área y algunos comandos en la barra de entrada.

2 Sesiones de trabajo

Se llevaron a cabo seis sesiones dirigidas por el investigador responsable del estudio, tres sesiones por semana: dos de 2 horas y una de 1 hora, haciendo un total de 10 horas de trabajo presencial bajo un ambiente de resolución de problemas. En cada sesión los estudiantes resolvían problemas geométricos mediante el uso de ecuaciones cuadráticas apoyados por el SGD. Las sesiones se llevaron a cabo en un aula de cómputo, donde cada estudiante disponía de una computadora con acceso a Internet y con GeoGebra (SGD) para desarrollar las actividades propuestas. El profesor contaba con una computadora, proyector y pintarrón.

Con el fin de que los estudiantes discutieran sus ideas y analizaran configuraciones dinámicas desde diferentes perspectivas, se les propuso formar binas. También, se les solicitó que expusieran los acercamientos o avances de las construcciones dinámicas con el uso del SGD para contrastar sus resultados con el resto del grupo. Al termino de cada sesión, el profesor pidió a los estudiantes enviar por correo electrónico un archivo de GeoGebra con las construcciones generadas, la descripción de lo que habían realizado hasta el momento y agregaran con el comando texto, comentarios y reflexiones con respecto al trabajo presentado por sus compañeros.

De manera complementaria, y tomando en cuenta las ideas de Aprendizaje Invertido (Green, 2012; Lawrence, 2014), se les solicitó a los estudiantes que buscaran información en Internet como, por ejemplo, videos tutoriales en YouTube, Khan Academy, wikis, entre otras, donde pudieran recordar o aprender fórmulas, algoritmos o conceptos relacionados con las actividades que se desarrollaron en las sesiones presenciales. Además, se implementó el uso de Padlet con la finalidad de que se generaran discusiones y compartieran información fuera de clases.

3 Actividades

El problema que se les propuso a los estudiantes fue construir el modelo dinámico de un cuadrado tal que uno de sus vértices estuviera en el origen y otro sobre el eje x, analizarlo y discutir los resultados. Para fines de la toma de datos en la investigación se dividió en tres actividades: 1) construcción del modelo dinámico; 2) análisis del área y perímetro de dicho modelo; 3) justificación algebraica de los resultados obtenidos. En la sección de análisis y discusión de resultados se detallan las actividades. Es importante mencionar que la manera en que se propusieron las actividades tuvo la finalidad de que los estudiantes desarrollaran las habilidades matemáticas y conocimientos necesarios para abordar la siguiente actividad. Por ejemplo, las relaciones y conexiones que los estudiantes identificaran y los resultados que obtuvieran en la primera actividad les servirían para la segunda.

La implementación de las actividades se hizo con base en los episodios propuestos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009), es decir, en cada actividad se enfatizaron dichos episodios.

4 Recolección y análisis de datos

A continuación, se mencionan y describen los instrumentos que se utilizaron para recolectar los datos en esta investigación.

Archivos de GeoGebra: estos archivos fueron entregados por los estudiantes al final de cada sesión por vía correo electrónico. Fueron de gran utilidad para observar y analizar los primeros acercamientos que tuvo cada estudiante con respecto a la construcción de cada problema solicitado. El análisis fue posible gracias a la opción *protocolo de construcción* que incluye el SGD, el cual permite generar cada construcción paso a paso, sin embargo, esta opción presenta una limitante al no guardar los objetos eliminados de cada construcción. Sin embargo, este aspecto fue cubierto con las notas de campo y con las videograbaciones que se hicieron a los diferentes equipos y a cada estudiante durante las exposiciones.

Videograbaciones: el objetivo de grabar las sesiones de clases fue contar con los acercamientos iniciales de cada construcción, con las discusiones y participaciones de los estudiantes en torno a los conceptos matemáticos, con los procedimientos algebraicos realizados en papel y lápiz, y las reflexiones sobre los distintos resultados obtenidos. Las grabaciones se centraron en los monitores cuando cada equipo describía su trabajo y en el pintarrón cuando pasaba algún estudiante a explicar sus avances o cuando se generaba una discusión grupal.

Muro digital Padlet: se utilizó como un medio de comunicación (foro) que sirviera de apoyo en las tareas, es decir, que los estudiantes expresaran sus dudas, compartieran información de páginas o videos relacionados con los temas, mostraran acercamientos de las posibles soluciones y que intercambiaran opiniones sobre estos acercamientos. El objetivo de usar este muro digital fue contar con la evidencia de las discusiones e interacciones que muestran los alumnos en torno a los problemas y conceptos matemáticos planteados en las tareas.

Archivos en Word: las tareas fueron entregadas en estos archivos con el propósito de tener todos los procedimientos de los problemas discutidos en Padlet de manera clara y organizada; además, de analizar las soluciones del resto de los problemas que no se presentaron en el muro.

Notas de campo: son las evidencias escritas de las observaciones del investigador, donde se distinguen situaciones fuera de lo común con relación a las actividades de los estudiantes cuando resuelven problemas con el uso del SGD. Las notas de campo sirvieron para complementar la información y el análisis de los datos.

En los datos obtenidos se analizaron los recursos y los métodos heurísticos que pusieron en juego los estudiantes durante el desarrollo de las actividades. La presentación de estos resultados está estructurada con base en los episodios propuestos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009).

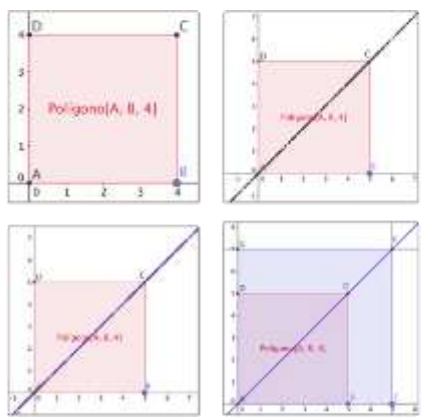
Presentación y discusión de los resultados

1 Primera actividad

La actividad inicial se centró en la construcción dinámica de una figura geométrica (cuadrado) y se propuso de la siguiente manera: *Construir un modelo dinámico, en GeoGebra, que represente a la familia de cuadrados con un vértice en el origen y otro sobre el eje x.*

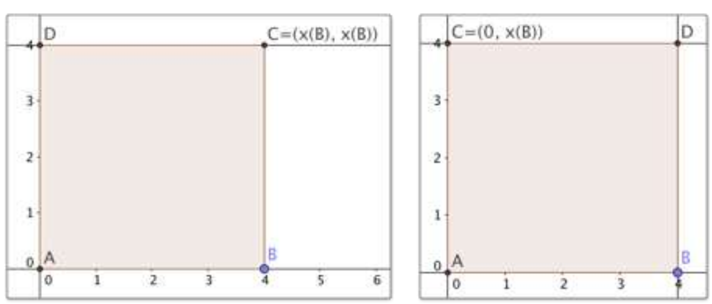
Los diferentes acercamientos y las formas de resolver el problema que mostraron los estudiantes permitieron identificar recursos, estrategias o heurísticas y conceptos utilizados en la construcción. Durante el episodio de *comprensión del problema* los estudiantes analizaron cuáles son los objetos geométricos relacionados con la construcción del modelo dinámico, por ejemplo, los ángulos de 90º los tradujeron como la intersección de rectas perpendiculares. En ese sentido, la *implementación de un plan de solución* fue explorar y determinar qué herramientas del SGD podían servir para la construcción de los objetos geométricos relacionados con el modelo dinámico. Una herramienta seleccionada fue *polígono regular* la cual permitió a los estudiantes construir el cuadrado dados dos vértices consecutivos. Este resultado favoreció al episodio de *búsqueda de patrones y una solución general*, ya que los estudiantes observaron el comportamiento del punto *C* (vértice del cuadrado) cuando se mueve el punto *B*, a través de la opción rastro, y concluyeron que *C* describía el lugar geométrico de la recta $y=x$ (Figura 4.1). Así que, una solución distinta, que se obtuvo gracias al uso de la heurística de analizar el lugar geométrico de un punto, u otra forma de construir el cuadrado cumpliendo con las condiciones establecidas en el problema, es a partir de la recta encontrada. En la Figura 4.2 se muestra una solución que se sustenta en la misma idea de la recta, solo que el punto es el que se define con dicha relación funcional.

Figura 4.1 Construcciones del cuadrado por medio del comando *polígono regular* y la recta $y = x$



Fuente: Producción de los estudiantes.

Figura 4.2 Construcciones del cuadrado, mostradas por los estudiantes, cuando se define el punto *C* en función del punto *B*



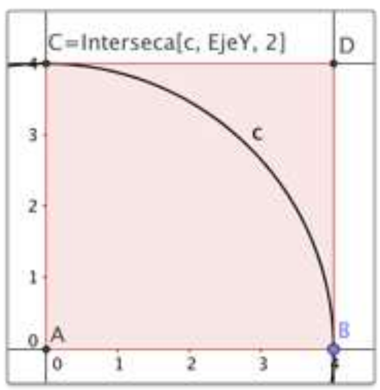
Fuente: Producción de los estudiantes.

Otro camino que siguieron los estudiantes para construir el cuadrado fue con el uso de la herramienta *circunferencia (centro, punto)* (Figura 4.3). Trazaron la circunferencia con centro en el vértice *A* (que está ubicado en el origen del plano cartesiano) con radio *AB* con el objetivo de trasladar la medida del lado del cuadrado al eje de las ordenadas, obteniendo las condiciones suficientes para construir el modelo dinámico solicitado en el problema.

En esta actividad se observó cómo la construcción del modelo dinámico del problema permitió que los estudiantes construyeran significados de objetos matemáticos. Es decir, representar el cuadrado en GeoGebra, implicó analizar las propiedades geométricas para seleccionar adecuadamente los objetos geométricos necesarios para su construcción (recursos) y, a pesar de modificar las dimensiones de sus lados, mantener dichas propiedades.

Las diferentes estrategias que usaron los estudiantes, en la construcción del modelo dinámico, evidenciaron cómo emplearon los comandos de GeoGebra o las propiedades de los objetos matemáticos que éste ofrece. Por ejemplo, usar la circunferencia para trasladar la medida de un segmento, trazar perpendiculares para construir ángulos rectos y activar rastro para identificar el lugar geométrico. Este último es considerado una heurística, porque puede usarse de forma general para encontrar nuevos elementos que ayuden a resolver un problema con el uso del SGD.

Figura 4.3 Construcción del cuadrado con el uso de la herramienta *circunferencia*



Fuente: Producción de los estudiantes.

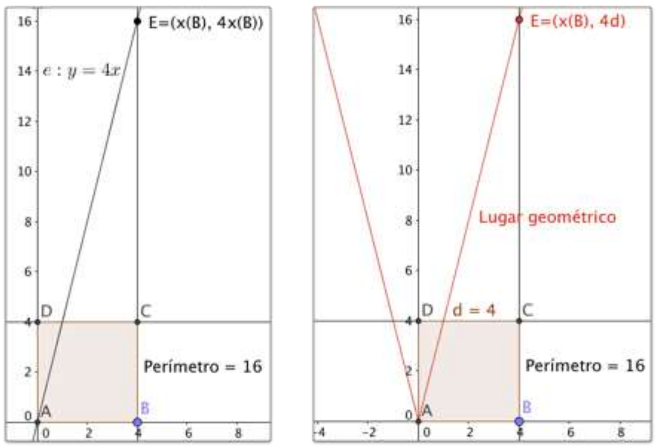
2 Segunda actividad

El objetivo de esta actividad fue que los estudiantes exploraran y analizaran atributos matemáticos derivados de la construcción dinámica del cuadrado. En este sentido, se les solicitó lo siguiente: *Representar gráficamente el comportamiento del perímetro y del área cuando la longitud de la base del cuadrado (segmento AB) cambia*. El episodio que se lleva a cabo en esta tarea es el de *conexiones y extensiones*, ya que los estudiantes se involucran en encontrar relaciones estructurales del modelo dinámico que les permitan comprender cómo varían sus atributos cuando se cambia la longitud del segmento *AB*. Los primeros acercamientos mostrados fueron relacionados con graficar el perímetro del cuadrado en función de la longitud de segmento AB (Figura 4.4). La idea que utilizaron los estudiantes para obtener la gráfica asociada al perímetro fue definir el punto *E* como la relación que existe entre la coordenada *x* del punto *B* y el perímetro del cuadrado, sin embargo, dependiendo de la manera en que se expresara el perímetro se visualizaban gráficas distintas (Figura 4.4).

Esto generó una discusión en torno a las preguntas: ¿por qué se obtuvieron resultados diferentes? y ¿cuál de estas gráficas tiene sentido según el contexto del problema? Es decir, el uso del SGD implicó que los estudiantes reflexionaran sobre el dominio del problema e interpretaran las gráficas obtenidas.

Para representar la gráfica del área asociada al cuadrado, los estudiantes siguieron la misma estrategia y, de la misma manera que el perímetro, se obtuvieron distintas gráficas dependiendo de la manera en la que la que se definió el área (Figura 4.5). Este resultado dio la posibilidad de que el grupo se centrara en analizar y discutir sus acercamientos nuevamente.

Figura 4.4 Gráficas asociadas al perímetro

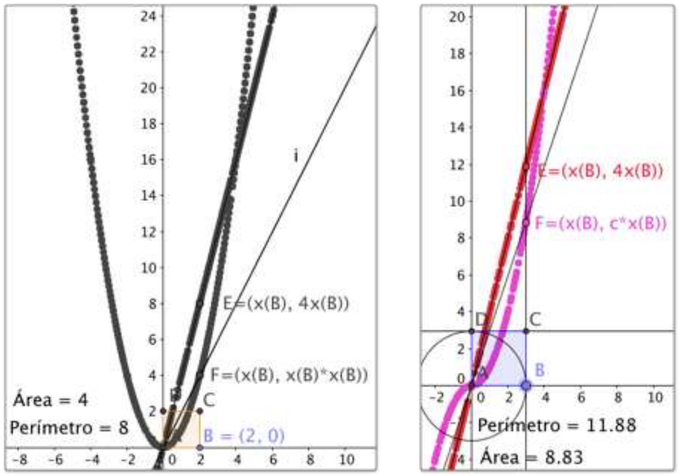


Fuente: producción de los estudiantes.

Después de que compartieran y argumentaran los distintos acercamientos, se les solicitó a los estudiantes concluir; es decir, involucrarse en el episodio de *visión retrospectiva y reflexiones*. Por ejemplo, el grupo logró determinar que solo debía analizarse el primer cuadrante del plano cartesiano, que es donde tiene sentido el problema, porque en los otros cuadrantes es necesario considerar lados con medidas negativas del cuadrado.

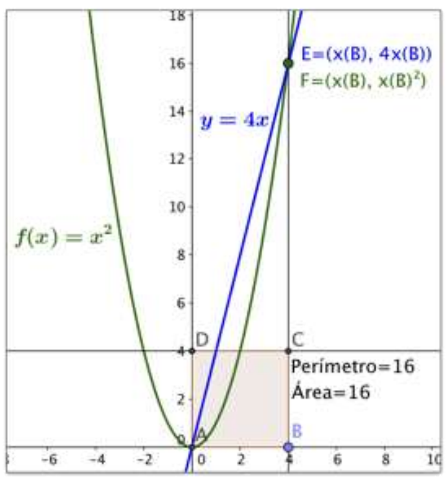
Además, los estudiantes observaron que existe un cuadrado que cumple que el valor asignado a su área es igual al valor asignado a su perímetro y se obtiene en el momento en que ambos lugares geométricos se intersecan. Por lo tanto, graficaron la recta $y = 4x$ y la parábola $y = x^2$ que son las funciones asociadas a los respectivos lugares geométricos, encontraron las coordenadas del punto de intersección e interpretaron que la coordenada de la abscisa determinaba la longitud de la base del cuadrado y la coordenada de la ordenada determinaba el valor asignado tanto al perímetro como al área (Figura 4.6).

Figura 4.5 Gráficas de perímetro y área obtenidas por distintos estudiantes



Fuente: producción de los estudiantes.

Figura 4.6 La intersección de la recta y la parábola muestra que para el cuadrado de lado 4 unidades, los valores del perímetro y área coinciden



Fuente: producción de los estudiantes.

En resumen, se observó que el uso de GeoGebra fue fundamental para explorar y analizar atributos matemáticos, como el área y el perímetro en este caso, y sus relaciones mediante la manipulación de un punto móvil (punto *B*) dentro la representación del problema.

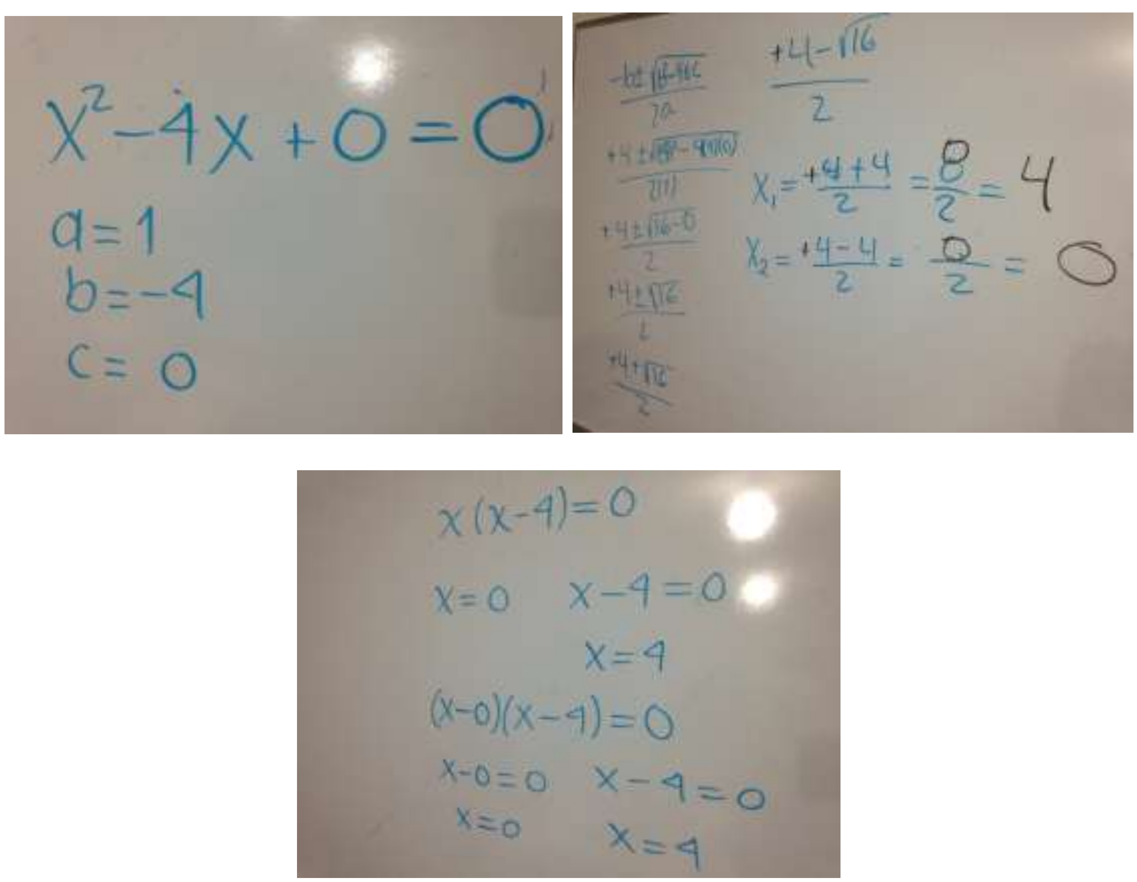
3 Tercera actividad

La finalidad de esta actividad fue que los estudiantes exhibieran los recursos obtenidos en las tareas que realizaron fuera de clases. Es importante resaltar que para desarrollar y resolver las tareas, ellos podían revisar videos tutoriales, wikis y compartir información en Padlet.

Por tal motivo se les solicitó lo siguiente: *Demostrar algebraicamente que los valores asignados al área y el perímetro del cuadrado coinciden cuando la longitud de uno de sus lados mide 4 unidades*.

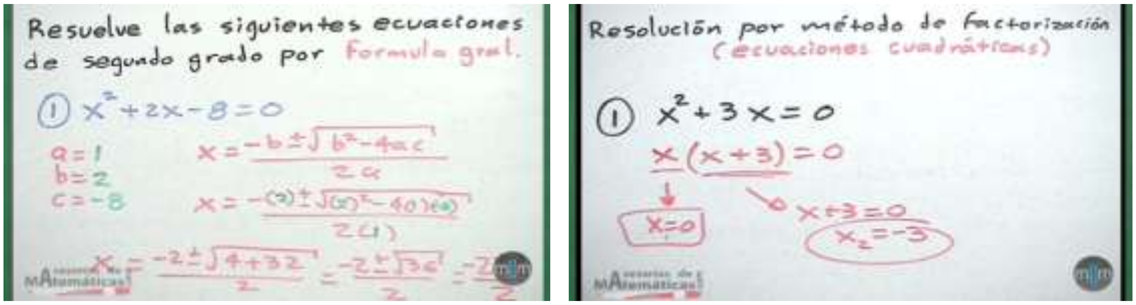
Resolver este problema llevó a que los estudiantes desarrollaran una serie de actividades matemáticas relacionadas con la ecuación cuadrática como parte de la *comprensión del problema*, por ejemplo, plantear una ecuación que involucrara igualar las expresiones del área y del perímetro, reconocer la ecuación como cuadrática, escribir la ecuación en su forma general, identificar los coeficientes. Una vez que los estudiantes habían identificado que se trataba de una ecuación cuadrática, debían escoger y utilizar algún método para su resolución, es decir, *implementar un plan de solución*. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes no recordaban cómo se resuelve una ecuación de segundo grado. Por lo tanto, tuvieron la necesidad de buscar esta información en diferentes fuentes de Internet, la más utilizada fueron los videos en YouTube. Dichos videos fueron compartidos entre los estudiantes a través de Padlet. Así, el uso coordinado de YouTube y Padlet ayudó a los estudiantes a aprender recursos o estrategias útiles para resolver el problema (Figura 4.7). De esta manera, los estudiantes se involucraron en la *búsqueda de patrones y una solución general*. Se observó que los procedimientos algebraicos utilizados, eran los mismos que se desarrollaban en los contenidos de los videos de YouTube (Figura 4.8). Estos videos que fueron seleccionados por los estudiantes implicaron una actividad de búsqueda y discriminación de material audiovisual de contenido educativo que explicara de manera clara, concisa y concreta, procedimientos algebraicos para resolver ecuaciones cuadráticas.

Figura 4.7 Procedimientos que siguieron los estudiantes para resolver la actividad planteada



Fuente: Producción de los estudiantes.

Figura 4.8 Videos compartidos en Padlet que muestran cómo resolver una ecuación cuadrática por fórmula general y factorización



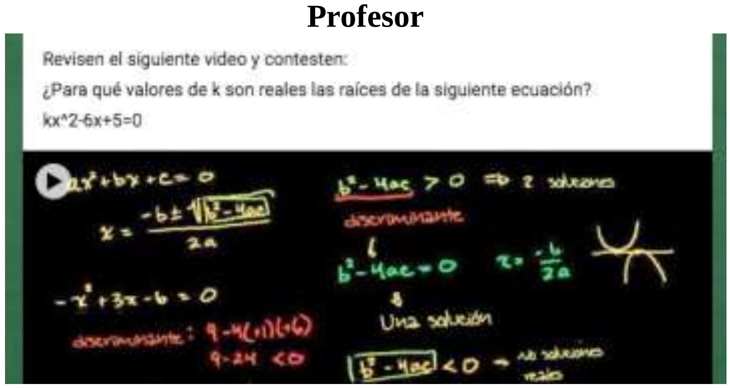
Fuente: Canal de videos YouTube.

Una parte importante cuando se resuelve problemas que involucran ecuaciones cuadráticas, es verificar las soluciones obtenidas e identificar si pueden ser consideradas como soluciones en el contexto del problema. Particularmente, la solución de $x = 0$ carece de sentido ya que x representa la longitud del cuadrado. El análisis de estas ideas involucra al estudiante en el episodio de *visión retrospectiva y soluciones.*

A lo largo de la sesión los estudiantes exhibieron recursos matemáticos obtenidos mediante el uso de YouTube y Padlet. Por ejemplo, YouTube permitió que replicaran procedimientos rutinarios, como el uso de la fórmula general para ecuaciones cuadráticas y el método de factorización. Asimismo, accedieron a conceptos matemáticos como: forma general, coeficientes, raíces y comprobación de una ecuación cuadrática. Por otro lado, la plataforma Padlet fue la que sirvió para que los estudiantes compartieran y accedieran a información y videos recopilados por ellos mismos. También, permitió que el profesor interactuara con los estudiantes fuera del horario de clases. Por ejemplo, en la Figura 4.9 se observa que el profesor planteó un problema en el muro digital y compartió un video cuyo contenido era clave para resolver dicho problema. Los estudiantes trataron de resolver la tarea, pero únicamente se recibe una respuesta formal por parte del Alumno 3, quien fue el que observó el video compartido por el profesor. En la Figura 4.9 se muestran las participaciones más significativas de una secuencia de los comentarios y discusiones que se suscitaron en Padlet.

Figura 4.9 Discusiones de los problemas en Padlet

Profesor



Alumno 1

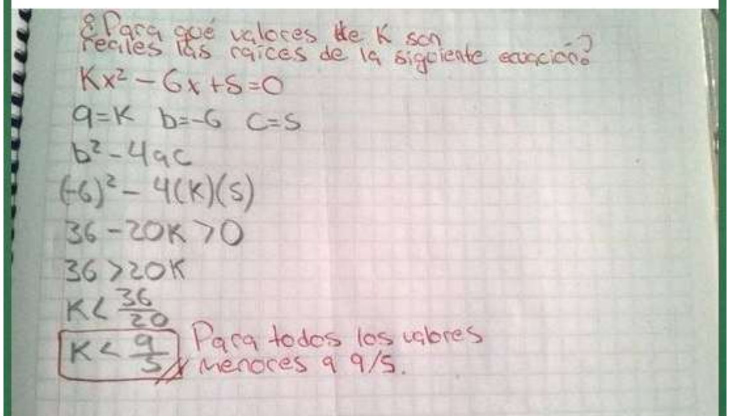
Los valores que necesita "k" en la ecuación presentada para poder tener raíces reales son valores distintos de 0, que "k" no valga 0 y que los valores de k sean valores con el signo negativo. Y solamente cuando "k" vale 1, este puede tener cualquier signo.

Alumno 2

Los valores necesarios para "K" en la expresión Kx^2-6x+5=0 y obtener sus raíces reales deben ser diferentes a cero y que este cuente con el signo negativo, así lograremos obtener 2 soluciones reales y con signo positivo.

Alumno 3

Con la ayuda del vídeo que nos puso en profe en la tarea, pude saber como sacar los valores de k.



4 Discusión de las actividades con el uso de tecnologías digitales

El uso de GeoGebra en el desarrollo de las actividades permitió extender el análisis y discusión de un problema, de tal manera que los estudiantes ya no se tuvieron que enfocar únicamente en el manejo de reglas algebraicas, sino también en cómo representar el problema de una forma distinta, es decir, en construir un modelo dinámico. Las diferentes construcciones dinámicas que mostraron los estudiantes posibilitaron que construyeran significados de objetos matemáticos. Por ejemplo, trazar el cuadrado en GeoGebra, requirió que se analizaran sus propiedades geométricas para seleccionar los objetos geométricos adecuados para construirlo y, sin importar que las longitudes de sus lados fueran modificadas, mantener dichas propiedades. Las estrategias que utilizaron en la construcción del modelo dinámico mostraron cómo razonaron las propiedades de los objetos matemáticos en función de los comandos de GeoGebra. Por ejemplo, trazar rectas perpendiculares para construir el ángulo recto que se forma entre los lados de un cuadrado y usar una circunferencia para trasladar la medida de su lado.

Obtener una representación distinta del problema permitió plantear nuevas preguntas que se relacionaron con los atributos del modelo dinámico, tales como: ¿cuál es la gráfica del perímetro que se asocia al modelo?, ¿cuál es la gráfica del área que se asocia al modelo?, ¿qué interpretación se le puede dar a la intersección de ambas gráficas? y ¿qué otros elementos pueden identificase? Responder estas preguntas implicó que los estudiantes desarrollaran conceptos y fórmulas vinculados con geometría analítica. Por ejemplo, definir un punto en función de una de las coordenadas de otro punto fue el resultado de construir una regla de correspondencia que se utilizó para analizar el lugar geométrico del área o del perímetro, identificar características importantes del lugar geométrico que traza dicho punto para asignarle la función o gráfica correspondiente y encontrar elementos básicos de las gráficas como sus vértices o intersecciones. Es importante destacar que el uso del lugar geométrico con el SGD fue una heurística esencial para obtener los acercamientos o resultados mencionados.

YouTube y Padlet proporcionaron espacios de discusión en línea y material audiovisual enfocados en brindar información que ayudara a resolver problemas y ejercicios de corte algebraico, dando la oportunidad de trabajar en un ambiente colaborativo. Los videos educativos de YouTube fueron de gran utilidad para que los estudiantes se apropiaran de fórmulas, algoritmos y procedimientos algebraicos, que servirían para resolver los ejercicios o problemas. Por ejemplo, la fórmula general, el método de factorización, el método de completar del trinomio cuadrado perfecto y uso del discriminante. En la Tabla 4.1 se muestra de manera resumida el impacto que tuvo el uso de las tecnologías digitales que se involucraron durante el desarrollo de las actividades.

Tabla 4.1 Impacto de las diferentes tecnologías digitales

Tecnología digital	Principal resultado obtenido
GeoGebra	La exploración de modelos dinámicos favoreció la identificación y reconocimiento de propiedades de los objetos matemáticos involucrados en la construcción, las relaciones y conexiones que se establecen entre ellos, la formulación de conjeturas y su posterior justificación.
Padlet	Los estudiantes compartieron información proveniente de diferentes fuentes de Internet, o bien, fotografías de las soluciones desarrolladas en sus libretas.
YouTube	Los estudiantes accedieron a información que les permitió recordar o aprender fórmulas, conceptos, métodos de solución, entre otros, lo que favoreció la comprensión de los problemas y el desarrollo de diferentes estrategias de la solución de los problemas.

Agradecimientos

A la Universidad de Costa Rica (UCR) por el apoyo brindado.

Conclusiones

¿Qué acercamientos y formas de resolver los problemas muestran los estudiantes cuando usan sistemáticamente YouTube, Padlet y un Sistema de Geometría Dinámica? En este sentido, se puede decir que el uso sistemático de YouTube, Padlet y GeoGebra, favorecieron los hábitos de razonamiento matemático. La construcción de modelos dinámicos permitió que los estudiantes construyeran e identificaran objetos matemáticos y conceptos, definieran variables, buscaran relaciones, analizaran casos más simples, hicieran deducciones e interpretaran las soluciones. El acceso a los videos educativos de YouTube ayudó a que los estudiantes aprendieran a organizar las soluciones mediante cálculos y manipulaciones algebraicas, así como a verificar y argumentar dichas soluciones. Las participaciones en Padlet promovieron la comunicación de resultados, lo que implicó el refinamiento de las soluciones. En otras palabras, estas tecnologías digitales en conjunto favorecen el análisis de un problema, la implementación de una estrategia, el uso de conexiones y la reflexión de la solución.

En el desarrollo de las actividades, el uso de GeoGebra permitió que los estudiantes examinaran y analizaran el tipo de herramientas con las que contaban y las propiedades geométricas de la figura a construir, con la finalidad de representar el problema como un modelo dinámico que, como consecuencia, podían explorar comportamientos matemáticos de una familia de objetos a través del arrastre, buscar el lugar geométrico, y expresar numéricamente los atributos o gráficas del modelo. Por ejemplo, en la construcción del cuadrado se observó que con el uso del comando polígono regular, construyeron el cuadrado de manera automática, esto le permitió analizar el lugar geométrico de uno de sus vértices y graficarlo, para posteriormente trazar el cuadrado sin ayuda del comando. Es decir, gracias al SGD el estudiante descubre una propiedad del cuadrado y genera un plan para trazarlo.

Otro caso fue utilizar el comando circunferencia para trasladar la medida del segmento dado a uno de los ejes y completar la construcción del cuadrado. Ambos resultados exhiben una forma distinta de pensar el problema en términos de los comandos.

El uso coordinado de las tecnologías digitales favoreció el desarrollo de diferentes métodos de solución, lo cual es un elemento importante en las tareas que se desarrollan en un ambiente de resolución de problemas (Santos-Trigo, 2014). Se propicia también el desarrollo de estrategias que difícilmente se pueden llevar a cabo en un ambiente de lápiz y papel. En particular, el uso de lugares geométricos permitió representar gráficamente el comportamiento de la variación conjunta de variables y la construcción de cónicas (parábola) como una herramienta para resolver el problema. De esta manera, se propició el desarrollo de formas de razonamiento que involucra el pensar el problema en términos de las herramientas con que se cuentan en las diferentes tecnologías digitales, y se promovió el análisis de los recursos, habilidades y heurísticas involucradas en cada uno de los acercamientos hacia la solución que exhibieron los estudiantes. En este sentido, el uso de tecnologías digitales permitió que los estudiantes integraran contenidos matemáticos, desarrollaran habilidades al resolver problemas y reorganizaran sus ideas al establecer relaciones y conexiones entre los conceptos y objetos matemáticos involucrados.

Referencias

Aguilar-Magallón, D. & Poveda, W. (2017). Problem Solving Opportunities with Digital Technology in Problem Solving Environments. En E. Galindo & J. Newton (Eds.), Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Alagic, G. & Alagic, M. (2013). Collaborative mathematics learning in online environments. En D. Martinovic, V. Freiman & Z. Karadag (Eds.), Visual Mathematics and Cyberlearning (pp. 23-48). Netherlands: Springer.

Borba, M. C., Clarkson, P., & Gadanidis, G. (2013). Learning with the use of the Internet. En M. A. (Ken) Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Eds.), Third International Handbook of Mathematics Education (pp. 691-720). New York: Springer International Handbooks of Education.

Dick, T. & Hollebrands, K. (2011). Focus in high school mathematics: Technology to support reasoning and sense making. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gómez-Arciga, A., Santos-Chávez, J., & Basaldú-Gutiérrez, Y. (2016). Tecnologías Digitales y la Resolución de Problemas: Discusiones matemáticas más allá del salón de clases. En M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil & J. A. Eli (Eds), Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Pyschology of Mathematics Education (pp. 1551-1552). Tucson, AZ: The University of Arizona.

Green, G. (2012). My View: Flipped classrooms give every student a chance to succeed. CNN. Recuperado el 18 de enero de 2012 de http://schoolsohought.blogs.
cnn.com/2012/01/18/my-view-flipped-classrooms-give-every-student-a-chance-to-succeed/

Hegedus, S. & Moreno-Armella, L. (2010). Accommodating the instrumental genesis framework within dynamic technological environments. For the Learning of Mathematics, 30 (1), 26-31.

Lawrence, W. (2014). From the Diary of a Flipped Classroom Newbie. EdSurge. Recuperado el 21 de mayo de 2014 de: https://www.edsurge.com/news/2014-05-21-from-the-diary-of-a-flipped-classroom-newbie

Leung, A. & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), Task design in mathematics education (pp. 191-225). New York: Springer.

Leung, F. K. S. (2013). Part III, Introduction to section C: Technology in the mathematics curriculum. En M. A. (Ken) Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), Third International Handbook of Mathematics Education (pp. 517-524). New York: Springer International Handbooks of Education

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. Journal of Mathematical Behavior, 3 (1), 93-166.

Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. Teacher College Record, 108 (6), 1017–1024.

National Council of Teacher of Mathematics (2011). Focus in High School Mathematics: Technology to Support Reasoning and Sense Making. VA, Reston: National Council of Teacher of Mathematics.

Polya, G. (1945). How to solve it? Princeton: University Press.

Poveda, W. & Aguilar-Magallón, D. (2017). A Massive Online Course: Mathematical Problem Solving and Digital Technologies. En E. Galindo & J. Newton (Eds.), Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Santos-Trigo, M. (2008). An inquiry approach to construct instructional trajectories based on the use of digital technology. EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 4 (4), 347-357.

Santos-Trigo, M. (2014). La Resolución De Problemas Matemáticos: Fundamentos Cognitivos. México: Trillas.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2009). Towards the construction of a framework to deal whit routine problems to foster mathematical inquiry. PRIMUS, ISSN:1051-1970, 19(3): 260- 279.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2016). Digital technologies and mathematical problem solving: redesigning resources, materials, and extending learning environments. En K. Newton (Ed.), Problem-Solving: strategies, challenges and outcomes (pp. 31-49). New York: Nova Science Publisher.

Santos-Trigo, M. & Reyes-Martínez, I. (2014). The coordinate use of digital technologies in learning enviroments. En L. Uden, J. Sinclair, Y. Tao & D. Liberona (Eds.), Learning Technology for Education in Cloud (pp. 61-71). Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Aguilar-Magallón, D. (2015). The use of digital technology in extending mathematical problem solving reasoning. En L. Uden, D. Liberona & T. Welzer (Eds.), Learning Technology for Education in Cloud (pp. 298-309). Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M. & Reyes-Rodríguez, A. (2011): Teachers' use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42 (3), pp. 313-336.

Santos-Trigo, M., Reyes-Rodríguez, A., & Espinosa-Pérez, H. (2007). Musing on the use of dynamic software and mathematics epistemology. Teaching Mathematics and Its Applications, 26 (4), 167-178.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Tzu-Bin, L., Chen, V., & Chai, C. (Eds.) (2015). Emerging practices and issues of new media and learning. New Media and Learning in the 21st Century: A Socio-Cultural Perspective (pp. 1-8). Singapur: Springer.