

Experiencias de formación docente en educación en CITEM

VARGAS, Verónica & CRISTÓBAL, César

V. Vargas, C. Cristóbal

Universidad de Guadalajara, Universidad de Quintana Roo
veronica.vargas@academicos.udg.mx cescrist@uqroo.edu.mx

A. Alvarado, G. Carmona y A. Mata (Dirs.) Una visión integradora. Tópicos Selectos de Educación en CITEM.
©ECORFAN- México, 2017.

Abstract

In this article, we describe a multi-tiered design experience for teacher training oriented towards STEM education (Science, Technology, Engineering and Mathematics Education). The proposal involved students, professors and researchers. It was created to foster the development of ways of thinking about the teaching and learning process. The theoretical framework was the perspective of Models and Modeling. It gave us guidelines to analyze, plan, implement and evaluate the experience. The professors who took part in this study were graduate students in a mathematics teaching Program. Some of them taught mathematics for future engineers. The findings show us that teachers' traditional ways of thinking about mathematics teaching and learning process were modified, expanded and refined. The last teachers' ways of thinking involved ideas about the need to promote an education not reduced to a single discipline, but interdisciplinary that includes other scientific areas. The teachers validated the creation, modification and refinement of reusable models; the collaborative work environments with technology support; an education with a vision of democratization; that is to say, learning and teaching process to include all the students. The use of technology, interdisciplinarity, and collaborative work environments were considered important to encourage STEM education.

STEM education, refining ways of thinking, teacher training, models and modeling

Introducción

El contexto actual se caracteriza por el rápido crecimiento del conocimiento y de la tecnología, y por su integración en los diferentes ámbitos de la sociedad. Esta situación demanda cambios sustanciales en los sistemas educativos, en particular, en lo referente a los conocimientos, habilidades, valores, y competencias que deben desarrollar los estudiantes. Los sistemas educativos deben atender una formación integral en todos los ciudadanos, sin exclusión, que propicie el desarrollo de capacidades cognitivas y habilidades para aprender a aprender. Se requiere que los individuos aprendan a analizar fenómenos naturales y sociales, adquieran habilidades para enfrentar las necesidades de su entorno y lo desconocido e inesperado en el futuro, comprendan el mundo, influyan en él y participen con eficacia en su vida social, profesional y política. La formación que deben recibir los individuos dista mucho de una basada sólo en el aprendizaje de las disciplinas aisladas entre sí. Por ello se concibe a la educación en Ciencias, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (CITeM) como eje fundamental para el desarrollo, crecimiento científico y tecnológico de las naciones. La formación docente es relevante para impulsar una educación de calidad en CITeM. ¿Cómo impulsar que los profesores cambien una perspectiva tradicional de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la relacionen con educación en CITeM?

¿Qué formación requieren los profesores? ¿Qué tipo de conocimientos deben desarrollar? De acuerdo con Doerr y Lesh (2003) la formación del docente va más allá de propiciar cursos centrados en la observación e interpretación de las prácticas de enseñanza. No es suficiente mostrar al profesor una lista de conocimientos y habilidades que un buen profesor debe desarrollar; tampoco que lean sobre estrategias exitosas en el salón de clases ante situaciones particulares. Se requiere promover la participación del docente, involucrarlos en procesos donde se promueva la experimentación, prueba y comunicación con colegas e investigadores.

La esencia del aprendizaje de los profesores y transformación de su práctica docente está en el desarrollo y refinamiento continuo de sus formas de pensamiento sobre el conocimiento, los procesos de aprendizaje de los estudiantes, la forma de construir o seleccionar actividades, materiales e instrumentos de evaluación (Lesh, 2010; Doerr y Lesh, 2003).

Las experiencias previas y los conocimientos que poseen los profesores influyen en su práctica docente.

Enseñar bien: “es una tarea compleja y no existen recetas fáciles para ayudar a aprender a todos los alumnos, ni para que todo el profesorado llegue a ser eficiente” (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000, p. 17).

¿Qué procesos de formación docente orientados hacia una educación interdisciplinaria se deben diseñar? ¿En qué conocimientos, habilidades y actitudes se necesita enfatizar? ¿Se requiere promover cambios en la forma de pensar sobre la disciplina y los procesos de enseñanza-aprendizaje? ¿En qué dirección? ¿Cómo promoverlos? Estas preguntas son guía de la reflexión que se presenta en este documento en el cual se describe una experiencia de diseño multiseriado que involucra a estudiantes, profesores e investigadores. Se muestran cambios en la *forma de pensamiento* de los docentes de matemáticas ocasionados por su participación en las actividades de formación docente. Las secciones de este artículo son Introducción, Marco teórico, Metodología, Resultados y discusión, Conclusiones y Referencias. En el marco teórico se describe la perspectiva de Modelos y Modelación (PMM) y la importancia del uso de tecnología. La población de estudio, el tipo de datos que se discuten en este artículo y la actividad utilizada se describen en la sección de metodología. Aunque la actividad que aquí se describe y utiliza para la reflexión es el problema del Hotel (Aliprantis y Carmona, 2003), es importante mencionar que se han usado, en el marco de esta misma propuesta, otros problemas, por ejemplo: medicamentos y crecimiento poblacional. Los resultados obtenidos durante el proceso de formación docente se presentan en la sección de Reflexiones y Discusión. Finalmente, se incluyen las conclusiones y el listado de referencias.

Marco Teórico

La formación de profesores implica desarrollar conocimiento sobre diversos factores y actores del proceso educativo. En varias investigaciones se señala que los docentes deben aprender acerca del contenido de la disciplina, la didáctica del contenido a enseñar, el currículo, entre otros (NCTM, 2000; Shulman, 1987; Llinares, Vals y Roig, 2008). ¿En qué contenido se debe especializar un docente para educar en CITEM? ¿Qué enfoque didáctico debe utilizar en su labor docente? ¿Cómo debe concebir el aprendizaje de la disciplina en la cual se formó para educar en CITEM? Perspectivas como Modelos y Modelación (Doerr y Lesh, 2003) otorgan herramientas al docente para apoyar el desarrollo de conocimiento mediante el uso de situaciones en el aula que propicien en el alumno la utilización no sólo de conocimiento matemático, sino también de otras disciplinas científicas.

La PMM recomienda el uso de un diseño multiseriado para apoyar el crecimiento del conocimiento de los profesores a lo largo de múltiples dimensiones al variar acomodos y contextos. Este diseño incluye a estudiantes, profesores e investigadores. Implica un trabajo colaborativo en el cual los profesores trabajen con sus alumnos, los profesores discutan y analicen de manera colectiva sus experiencias, y los investigadores trabajen con los profesores. En este sentido, los investigadores construyen, revisan y refinan modelos para describir el comportamiento de los profesores (Figura 1); y estos a su vez construyen, revisan y refinan modelos de los estudiantes para describir situaciones. Los investigadores le dan seguimiento al trabajo de los profesores con sus estudiantes, observan los diferentes estratos en que se utilizan y analizan actividades; en este caso los procesos que siguen los alumnos al atender un problema desde diferentes perspectivas, y el aprendizaje que desarrollan sobre los conceptos involucrados (Clark y Lesh, 2003).

Figura 1 Los investigadores aprenden de los docentes, quienes aprenden de sus alumnos



La perspectiva de Modelos y Modelación propone principios para comprender la naturaleza y apoyar el desarrollo del conocimiento de los estudiantes. Sugiere que estos principios pueden ser el fundamento para comprender la naturaleza y apoyar el desarrollo del conocimiento de los profesores (Doerr y Lesh, 2003).

Lograr que los profesores se interesaran en la forma de concebir el aprendizaje de las matemáticas por la PMM, modificaran, ampliaran y refinaran sus formas de pensar sobre la práctica docente fue tarea de los investigadores al diseñar, desarrollar e implementar la propuesta de trabajo descrita en este documento fundamentada en el diseño multiseriado. En los siguientes párrafos describiremos algunas ideas centrales de la PMM en cuanto a lo que significa aprender matemáticas.

El aprendizaje es visto como un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales o modelos que se modifican continuamente durante la interacción entre el estudiante, sus compañeros y una situación problemática (Lesh, 2010), la cual puede requerir conocimiento de otras disciplinas.

Los modelos son sistemas conceptuales (que consisten de elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal manera que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente. (Lesh y Doerr, 2003: p. 10)

Los modelos son personales porque reflejan la experiencia del estudiante o individuo al resolver situaciones; incluyen aspectos asociados con las creencias, valores, actitudes, identidad y comportamientos de grupos o de individuos respecto a una situación específica; por lo tanto, pueden ser únicos.

Matematizar es la acción de desarrollar un modelo matemático, proceso cuyo propósito es construir un sistema conceptual basado en las características estructurales de la situación, mediante la realización de actividades como cuantificar información sobre características del sistema, dimensionar el espacio, ubicar eventos en marcos de referencia, organizar y analizar datos, realizar cálculos numéricos, establecer relaciones y funciones matemáticas, resolver ecuaciones o aplicar procedimientos (Lesh y Doerr, 2003).

El conocimiento, no es inerte, sino parecido a un organismo vivo, a un sistema complejo, dinámico, que está en continua adaptación, se autorregula, y cuya existencia es parcialmente el resultado de construcciones humanas (Lesh y Yoon, 2004).

El proceso de aprendizaje es un proceso social; se realiza en el interior de las prácticas de las comunidades. La producción de conocimiento y modos de pensamiento matemáticos dependen de los contextos culturales y sociales en los que son desarrollados (Lesh, Lester y Hjalmarson, 2003). La comunicación es importante. El proceso de aprendizaje es un proceso que implica desarrollar una serie de ciclos de entendimiento o modelos sobre una situación o conjunto de situaciones. Los primeros ciclos de modelación generalmente muestran aproximaciones iniciales burdas, dispersas, poco o nada estructuradas, las cuales evolucionan hacia formas más integradas en la medida en que el estudiante analiza, discute, comunica sus diferentes aproximaciones sobre la situación con sus compañeros y con el profesor (Lesh y Doerr, 2003).

La PMM propone que los estudiantes resuelvan situaciones cercanas a la vida cotidiana, para propiciar que realicen procesos como cuantificar información, dimensionar espacios, ubicar eventos en marcos de referencia, organizar y analizar datos, realizar cálculos, establecer relaciones y funciones matemáticas, resolver ecuaciones y aplicar procedimientos, desarrollar criterios. Entre las situaciones que promueve, están las actividades provocadoras de modelos (MEA, Model Eliciting Activities, por sus siglas en inglés), que son situaciones de resolución de problemas diseñadas en contextos cercanos al mundo real.

El proceso de solución de estas situaciones debe requerir de algo más que procesar la información al construir un modelo invariante y único, debe fomentar la transformación del modelo, su ampliación o refinamiento. Las características o principios que deben cumplir las MEA pueden revisarse en Doerr (2016) y en Lesh, Hoover, Hole, Kelly, y Post (2000). El proceso que permite diseñar las secuencias de actividades de desarrollo de modelos, puede revisarse en Lesh, Doerr, Cramer, Post, y Zawojewski (2002).

La realización de actividades en el aula, diseñadas con cierta cercanía a situaciones de la vida real (relacionadas por ejemplo con física, ecología, medicina e ingeniería), implica que los estudiantes dediquen tiempo para reflexionar sobre conceptos que no necesariamente son matemáticos antes y durante el proceso de matematización (Lesh y Yoon, 2004). Ello es parte del aprendizaje de las matemáticas en la PMM, pues aprender es desarrollar sistemas conceptuales que requieren el uso y manejo de conceptos no sólo matemáticos sino también de Ciencia e Ingeniería.

El uso de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas es ineludible; posibilita la construcción y externalización de distintas representaciones de una situación, importante para la aprehensión conceptual de los objetos; permite la ejecución rápida de diferentes tareas: calcular, operar, hacer tablas y gráficas etc. El potencial dinámico de la tecnología, además, apoya que los estudiantes puedan realizar exploraciones, visualizar relaciones, establecer y verificar conjeturas, así como analizar y describir los fenómenos de cambio y variación en su entorno (Kaput, 1999). Por lo tanto, la tecnología es vista como un instrumento para democratizar el conocimiento, ya que permite el acceso a éste de cada vez más estudiantes.

La forma de pensar de los docentes sobre el aprendizaje de las matemáticas varía. Doerr y Lesh (2003) señalan que los maestros tienen distintas habilidades, percepciones e interpretaciones previas, construidas a lo largo de su experiencia docente, proveniente de distintos contextos de enseñanza y aprendizaje. No todos siguen la misma trayectoria de aprendizaje para interpretar y analizar la complejidad de la práctica docente. Sin embargo, en este estudio se partió de identificar las ideas comunes de los profesores participantes sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje e interesó proveer de oportunidades para apoyar la modificación, extensión y refinamiento de ellas.

Metodología

La investigación de donde provienen los datos fue de tipo cualitativa porque interesaba conocer las *formas de pensamiento* de los profesores y el proceso de modificación, extensión y refinamiento. Más que cuantificar, se pretendía identificar, interpretar y describir.

Se siguió el esquema multiseriado (Doerr y Lesh, 2003) para el diseño de la propuesta. Esto es, el investigador desarrolló un proceso de formación docente, lo implementó y a su vez observó las *formas de pensamiento* de los profesores (estudiantes de posgrado [EP]), mientras estos diseñaban y experimentaban actividades para desarrollar conocimientos y habilidades con los estudiantes (Figura 1).

Enseguida se describen los participantes en el proceso de formación docente y el proceso mismo. Las evidencias analizadas fueron reportes de los profesores [EP] y notas de bitácora del investigador.

1 Participantes

Los participantes en el proceso de formación docente fueron seis estudiantes de posgrado (o profesores en formación [EP]). Tres tenían experiencia docente en los niveles de bachillerato y básico universitario; su formación profesional era en economía, matemáticas e ingeniería. Tres no tenían experiencia docente y su formación profesional era en ingeniería. Los seis docentes se estaban preparando para continuar sus labores o iniciarlas en el nivel universitario, con estudiantes de ingeniería.

El contexto en el cual se realizó la investigación fue un curso optativo denominado Resolución de problemas y modelación. El estudio se llevó a cabo durante cuatro sesiones, semanales. Cada una de tres horas.

2 Propuesta de formación docente

La propuesta consistió en las siguientes fases.

1. Análisis de la PMM
2. Realización de una actividad provocadora de modelos en el aula, discusión grupal
3. Planeación de la replicación de la experiencia
4. Replicación de la experiencia y
5. Evaluación

En total se realizaron cuatro sesiones, cada una de tres horas.

S1 y S2: Discusión y análisis de la Perspectiva de Modelos y Modelación.

S3: Realización en parejas de una Actividad provocadora de modelos, presentación de su solución al grupo y discusión. Planeación de la replicación de la experiencia. Implementación en el aula.

S4: Presentación de reporte con resultados, discusión y análisis.

Durante la primera y segunda sesión S1 y S2 los EP leyeron y discutieron artículos de investigación sobre la Perspectiva de Modelos y Modelación. Una de las lecturas incluía la actividad provocadora de modelos *pie grande*, el tipo de representaciones que estudiantes de educación básica construyeron para resolverla y la evolución de pensamiento a que dio lugar.

Durante la tercera sesión S3, el investigador entregó a los EP una actividad provocadora de modelos (El problema del Hotel) y les pidió que la realizaran en parejas. Promovió un ambiente de trabajo colaborativo, apoyado con herramientas tecnológicas, donde el uso de estas no se redujera a hacer operaciones, sino que fueran utilizadas para construir los modelos. Pidió a los EP que presentaran las cartas elaboradas, las cuales debía incluir la descripción de los modelos. Generó una discusión grupal sobre las distintas representaciones que surgieron en el grupo, para propiciar el análisis de los modelos construidos; es decir, los EP debían compartirlos, manipularlos y modificarlos, en caso de ser necesario. Debían evaluar los modelos para determinar si eran reutilizables para describir, interpretar, construir, manipular y predecir esa situación u otras similares.

A partir de la discusión grupal, los EP refinaron ideas y ello permitió al grupo identificar directrices generales del proceso que seguirían para la sesión de clase que dirigirían con su grupo de alumnos.

Durante la cuarta sesión S4 los EP presentaron un reporte con los resultados obtenidos a partir de la implementación de la actividad provocadora de modelos en cada una de sus aulas.

El papel del investigador durante todo el proceso consistió en propiciar un ambiente de reflexión y discusión. Por ejemplo, durante la tercera sesión alentó a las parejas de EP a explorar, formular, comunicar y validar hipótesis relacionadas con la actividad provocadora de modelos, expresar y discutir ideas, así como evaluar sus procesos de solución.

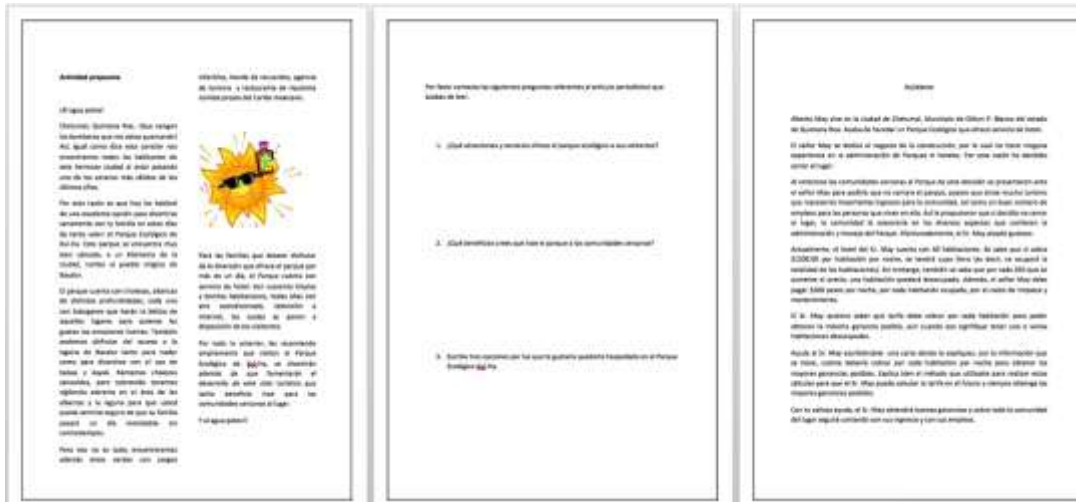
Su participación siempre fue para apoyar la transformación de la práctica docente de los profesores [EP] a través del análisis de la puesta en práctica de actividades en el aula, enmarcadas en una perspectiva relacionada con una formación integral e interdisciplinaria; acorde con una educación en CITeM. A su vez, el investigador observó y analizó cómo los profesores [EP] modificaron su *forma de pensamiento* y su práctica docente tradicional, para involucrar ideas relacionadas con la necesidad de promover en el aula la realización de actividades que involucraran el desarrollo de conocimiento no fragmentado, no departamentalizado, sino interconectado entre sí e interdisciplinario, que incluyera otras áreas de la ciencia, así como la tecnología.

3 La Actividad provocadora de modelos

Una de las actividades provocadoras de modelos utilizadas fue el Problema del *Hotel*. El cual fue adaptado de Carmona (2017) y es de solución única (Figura 2). Consiste en tres hojas tamaño carta. Las dos primeras hojas contienen un artículo de periódico y preguntas de comprensión hacia la lectura, la tercera tiene el problema.

El objetivo del artículo de periódico es la familiarización de los estudiantes con el contexto del problema, así como el fomento de interés, debido a lo cual fue necesario redactarlo con información de alguna localidad cercana.

Figura 2 Estructura de la actividad provocadora de modelos: El Hotel



Problema *El Hotel* (hoja 3, Figura 2)

Alberto May vive en la ciudad X del estado de Y. Acaba de heredar un Parque Ecológico que ofrece servicio de hotel.

Actualmente, el hotel del Sr. May cuenta con 40 habitaciones. Se sabe que si cobra \$1200.00 por habitación por noche, se tendrá cupo lleno (es decir, se ocupará la totalidad de las habitaciones). Sin embargo, también se sabe que por cada \$50 que se aumente al precio, una habitación quedará desocupada. Además, el Sr. May debe pagar \$200 por noche, por cada habitación ocupada, por el costo de limpieza y mantenimiento.

El Sr. May quisiera saber qué tarifa debe cobrar por cada habitación para poder obtener la máxima ganancia posible, aún cuando esto signifique tener una o varias habitaciones desocupadas.

Ayuda al Sr. May escribiéndole una carta donde le expliques, con la información que se tiene, cuánto debería cobrar por cada habitación por noche para obtener las mayores ganancias posibles. Explica bien el método que utilizaste para realizar estos cálculos para que el Sr. May pueda calcular la tarifa en el futuro y siempre obtenga las mayores ganancias posibles.

Los conceptos centrales que subyacen a esta actividad son conceptos de ingreso, egreso, ganancia, ecuación cuadrática, tasa de cambio y máximo.

4 Criterios de análisis

Las *formas de pensamiento* exhibidas, a las que se les dio seguimiento en cuanto a modificación, ampliación y refinamiento por los profesores son el trabajo en equipo y la comunicación, el aprendizaje de las matemáticas y el uso de la tecnología. Estas *FP* fueron elegidas porque el investigador las detectó como puntos centrales de discusión que emergieron durante las primeras sesiones y le interesó que se reflexionara alrededor de ellas y se transformaran.

Resultados y Discusión

Se describen las *formas de pensamiento* [FP] de los EP exhibidas durante la implementación de la propuesta de formación docente.

La presentación de ellas se divide en tres secciones:

- *FP* durante S1 y S2,
- *FP* durante S3 y
- *FP* durante S4.

La descripción permite revisar las observaciones del investigador en cuanto a la modificación, ampliación y refinamiento de FP de los EP, mientras diseñaban y experimentaban una actividad para propiciar conocimiento en los estudiantes (Figura1).

1 *FP* durante S1 y S2

Durante el análisis de los artículos relacionados con la Perspectiva de Modelos y Modelación surgieron conocimientos previos que caracterizaron las siguientes *formas de pensamiento*. Todas fueron discutidas de manera grupal por los EP y el investigador.

1.1 *FP* relacionadas con la comunicación y el trabajo en equipo

El trabajo en equipo y grupal, al enseñar matemáticas, fue evaluado por los EP como una pérdida de tiempo. Los comentarios siguientes así lo revelan:

- «No todos los alumnos trabajan en los equipos»
- «Algunos aprovechan para platicar en lugar de colaborar»
- «Los alumnos son muy individualistas, no les gusta trabajar en equipo»
- «No hay tiempo en el programa para el trabajo en equipo».
- «Los ambientes colaborativos no apoyan el aprendizaje de conceptos matemáticos»

Lo señalado por Lesh y Doerr (2003) en relación a que la comunicación durante el trabajo en equipo y grupo podía apoyar el incremento de comprensión de conceptos matemáticos no fue claro para los EP.

1.2 *FP* relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas

Los EP no relacionaron aprender matemáticas con aprender otras disciplinas (CITeM), Discutir el significado de otros conceptos como velocidad, aceleración, ganancia e ingresos era considerado pérdida de tiempo. Aprender matemáticas tampoco estaba vinculado con la modelación o el acto de matematizar situaciones cercanas a la vida real, uso de argumentación, construcción de hipótesis, discusión y escritura de procedimientos. La forma de pensar de los EP era tradicional, relacionada con la memorización de conceptos, el manejo de algoritmos sin errores y con fluidez, y la obtención de resultados exactos. Los procedimientos tabulares o gráficos no se consideraban válidos, los algebraicos sí.

1.3 FP relacionadas con la tecnología

La tecnología era considerada como obstáculo para el aprendizaje de las matemáticas, y considerada sólo útil para realizar operaciones rápidas. No se validaba su uso a menos que el estudiante supiera hacer los cálculos previamente con lápiz y papel. Además, la tecnología no era necesaria durante los procesos de solución porque lo importante eran los procedimientos algebraicos, no los tabulares, ni gráficos.

Estas tres *formas de pensamiento* (4.1.1, 4.1.2 y 4.1.3) repercutieron en la comprensión de la PMM y dificultaron el entendimiento de las actividades provocadoras de modelos. Por lo tanto, aunque las FP de los EP fueron discutidas en la sesión grupal de revisión de literatura, no se modificaron. Esto se observó durante S3; se describe a continuación.

2 FP durante S3

La realización en parejas de la Actividad provocadora de modelos, presentación de las cartas ante el grupo y discusión grupal, dieron lugar al surgimiento de las siguientes *formas de pensamiento*.

2.1 FP relacionadas con los modelos

Al resolver el problema del Hotel surgieron los siguientes modelos. Es importante mencionar que los EP siempre estuvieron tratando de construir modelos algebraicos. Consideraban que era el modelo más apropiado. Cualquier otro modelo era sólo un paso previo al de formalización.

- Dos parejas de EP (EP_1 y EP_2, EP_3 y EP_4) resolvieron el problema de manera algebraica, sin tablas y sin gráfica.
 - Una de ellas inició con conocimientos adquiridos de manera memorística como economista, pero posteriormente utilizó conocimientos de cálculo.
- Una pareja (EP_5, EP_6) resolvió el problema mediante el uso de tablas y gráficas en lápiz y papel (lineales y cuadráticas), sin utilizar registros algebraicos.

2.2 FP relacionadas con la comunicación y el trabajo en equipo

Al compartir en el aula los modelos construidos, durante la discusión grupal, los EP manifestaron sorpresa. La discusión de cada modelo les permitió analizar la situación desde otro punto de vista, resaltando y precisando aspectos que no eran enfatizados con el uso de un solo tipo de representaciones. Incluso los modelos burdos fueron de ayuda para la comprensión de conceptos involucrados. Esto les condujo a validar la comunicación y discusión grupal como parte del proceso de aprender matemáticas.

Reconocieron que la interacción con sus compañeros y el profesor ayudó a la construcción, modificación, extensión y refinamiento de modelos y que debido a estas interacciones los sistemas conceptuales iniciales de cada pareja se refinaron (Anexo, modelo de la pareja EP_5 Y EP_6 construido posterior a la discusión grupal).

Admitieron que la comunicación permitió resaltar información, relaciones y conceptos no considerados o razonados de manera inadecuada.

2.3 FP relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas

El significado de aprender matemáticas se extendió y se relacionó con modelar o matematizar situaciones cercanas a la vida real, uso de argumentación, construcción de hipótesis, discusión y escritura de procedimientos. Los EP aceptaron la importancia de incidir en el desarrollo de estas habilidades con sus alumnos, además de considerar que el problema daba lugar al desarrollo de conocimiento de otras disciplinas, lo cual les parecía interesante y motivador.

2.4 FP relacionadas con la tecnología

Debido a que el investigador les compartió un modelo construido con Excel, construido por alumnos universitarios. Los EP encontraron que era un modelo reutilizable y generalizable. Detectaron que podía dar lugar a una familia de problemas (el mismo problema pero con condiciones iniciales distintas) y, propiciar la creación de un nuevo modelo con nuevas variables, «aunque estuviera construido en Excel y no con símbolos algebraicos». Así lo expresaron los EP, quienes no validaban la construcción de otro procedimiento que no fuera el algebraico (esto se observó de nuevo en S4). Sin embargo, le dieron valor al uso de la tecnología por su potencial para hacer más comprensible la situación y accesible el conocimiento para todos los alumnos (democratización del conocimiento, en términos de Lesh y Doerr, 2003).

Estas *formas de pensamiento* (4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.4) influyeron en la planeación de la replicación de la experiencia e implementación en el aula. Algunos objetivos incluidos en la planeación se observan en las figuras 6 y 8 y se describen en la siguiente sección 4.3.

3 FP durante S4

Las *FP* que se detectaron durante la presentación de los resultados, discusión y análisis de la replicación de la experiencia con estudiantes de nivel licenciatura, fueron las siguientes.

3.1 FP relacionadas con la comunicación y el trabajo en equipo

Los EP manifestaron lo siguiente durante la presentación de los reportes.

- «Fue sorprendente ver el trabajo colaborativo en cada equipo», «todos sin excepción estaban tratando de resolver el problema»
- «Fue desesperante no poder explicarle cómo se resolvía el problema a cada equipo»
- «No encontré las preguntas apropiadas para apoyarlos sin darles la solución»
- «La escritura de la carta fue nueva para los alumnos, así como lo fue para nosotros»

En sus reportes agregaron comentarios similares. Por ejemplo, en el siguiente se señala la novedad de la escritura de la carta y el uso de gráficas (Figura 3).

Figura 3 Extracto del reporte del desempeño del grupo del EP_1

La tercera fase fue muy peculiar, los alumnos ya se habían puesto de acuerdo en la respuesta a nivel cuantitativo y tendieron a realizar gráficas, pero aún no se habían percatado que tenían que realizar la carta, por lo que en la mayoría de los casos, se les tuvo que recordar.

3.2 FP relacionadas con Aprendizaje de las matemáticas y los modelos

Los EP describieron en sus reportes el tipo de modelos construidos por sus alumnos.

- «Los modelos de mis alumnos fueron similares a los que construimos nosotros»
- «Elaboraron tablas y gráficas»
- «Para la discusión grupal elegí a los equipos con distintas representaciones para que presentaran los resultados»

Comentaron cuántos y cuáles de sus alumnos habían construido la representación algebraica de la función cuadrática, como parte de su modelo (Figura 4).

Figura 4 Extracto del reporte del desempeño del equipo 2 del grupo del EP_5

Informe: Actividad-Hotel 6

El equipo 2 realizó mediante tabulación las ganancias máximas pero no logró pasar de esa representación a una ecuación cuando se los pidió a pesar que los oriente la relación que tenía esa tabla y los datos que les estaba dando no pudieron hacer esa transferencia y redactaron la carta explicándole al Sr. May que tenía hecha una tabla donde podía encontrar los precios de acuerdo a las habitaciones desocupadas y así obtener la ganancia, aun así teniendo los datos el resultado que pusieron en la carta fue el incorrecto.

En la Figura 4 podemos observar la preocupación del EP_5: «pero no logró pasar de esa representación a una ecuación» relacionada con la necesidad de que los estudiantes construyeran modelos algebraicos y no sólo tablas y gráficas. El EP_5 no validaba como producto final la construcción de tablas y gráficas, no aceptaba que el proceso de modelación fuera el producto del aprendizaje (Lesh y Doerr, 2003). Esto se observa de nuevo en la Figura 5. El EP_5 consideraba que la tabulación debía ser un procedimiento intermedio antes de construir la representación algebraica: «seguidamente buscaron la solución para que puedan [sic] generalizarlo en una ecuación».

Los EP mencionaron que olvidaron retomar en la discusión del aula con sus alumnos los conocimientos matemáticos que emergieron durante la resolución del problema; es decir, no incluyeron en el cierre de la sesión la discusión sobre el sistema conceptual (función cuadrática, variación, relaciones lineales y máximos) subyacente al problema del hotel. El EP_1 (figuras 6 y 7) identificó e hizo énfasis en su planeación sólo en los conceptos que como economista consideraba importante que los alumnos desarrollaran, pero no integró los conceptos matemáticos: «relacionará los temas referentes a la utilidad marginal decreciente, tipo de costos y las características de la oferta y la demanda». Promovió durante la sesión la identificación y relación de ciertos conceptos subyacentes al problema del Hotel: «relacionaron los temas de la demanda, oferta, utilidad marginal, costos y precio»

Figura 5 Extracto del reporte del desempeño del equipo 3 del grupo del EP_5

Equipo 3

Este equipo fue uno de los primeros al igual que el equipo 1 en obtener la ganancia máxima y cuanto debería cobrar por cada habitación por noche mediante la tabulación, seguidamente buscaron la solución para que puedan generalizarlo en una ecuación y así poder redactar la carta explicando el método que utilizaron.

La comunicación de reportes le permitió a los EP reflexionar acerca de que el desarrollo de conocimiento y comprensión de un concepto no se da en forma aislada, sino que está íntimamente ligada con el desarrollo y comprensión del conjunto de conceptos, hechos y procedimientos en razón de los cuales tienen su significado.

Figura 6 Extracto de la planeación de la implementación de la actividad provocadora de modelos desarrollada por el EP_1

Objetivo de aprendizaje

El alumno analizará la lógica de la formulación teórica de los conceptos básicos de los costos y determinación de precio, asimismo, relacionará los temas referentes a la utilidad marginal decreciente, tipos de costos y las características de la demanda y la oferta.

Figura 7 Extracto del reporte del desempeño del grupo del EP_1

Ellos mencionaron no sólo como redactaron, la carta y encontraron el precio sino que también relacionaron los temas de la demanda, oferta, utilidad marginal, costos y precio.

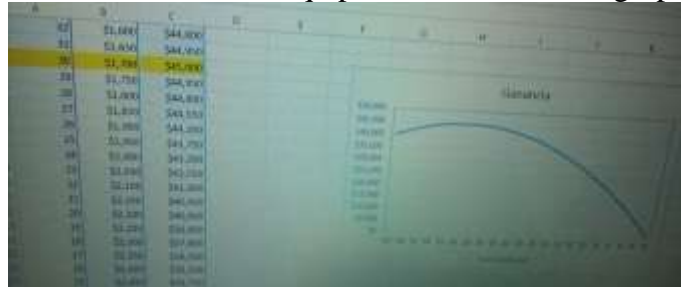
3.3 FP relacionadas con la tecnología

Los EP planearon el uso de tecnología (Figura 8) para resolver el problema, pero no les fue sencillo, dado que no todos sus alumnos llevaban laptops al aula. El EP_3 y el EP_4 (Figura 9) lograron que algunos de sus estudiantes pudieran utilizarlas.

Figura 8 Extracto de la planeación de la implementación de la actividad provocadora de modelos desarrollada por el EP_3.

Objetivo de Aprendizaje

Los alumnos le darán sentido a un problema desde diferentes contextos y darán solución a la actividad desde diferentes representaciones. Igualmente esta actividad aportará para que el alumno tenga una mejor comprensión de conceptos de ecuaciones, máximos, mínimos, costos, graficación, tabulación, así como el uso de tecnología para solución de problemas.

Figura 9 Procedimiento de un equipo de estudiantes del grupo del EP_4

En estas *FP* (4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3) se observaron modificaciones, con respecto a las inicialmente exhibidas (4.1.1, 4.1.2 y 4.1.3), relacionadas con la manera de concebir el uso de tecnología, el trabajo colaborativo y la comunicación como medios para desarrollar conocimiento. Modificaron, también, su *forma de pensamiento* relacionada con el aprendizaje de las matemáticas.

Anexo

Carta elaborada por la pareja EP_5 y EP_6 después de la discusión grupal. En ella se describen las indicaciones al Sr. May para resolver el problema; se muestra cómo los estudiantes utilizaron símbolos algebraicos para explicar el modelo e identificaron la reutilización del modelo para describir y predecir el comportamiento de la situación.

Figura 10 Carta elaborada por la pareja EP_5 y EP_6

Estimado señor Alberto May

Presente

En respuesta al compromiso de asesorarle en cuanto a la administración de su hotel, a continuación le explicamos el procedimiento.

Anexo a la presente encontrará una tabla que consta de cinco columnas; la primera indica el número de habitación(es) ocupada(s) representada por la letra n ; la segunda representa el costo por habitación (es) ocupada(s) representada por la letra C ; la tercer señala el ingreso por habitación(es) representada con la letra I ; la cuarta indica el gasto por habitación (limpieza y mantenimiento) representada por la letra M ; por último la columna cinco representa la ganancia por habitación, a continuación se describe la forma en que se analizó este problema:

$n =$ número de habitaciones ocupadas (columna 1) --- (A)

Columna 2 --- (B)

$$C = \left(\left(\begin{matrix} \text{"condición"} \\ \text{monto aumentado} \\ \text{por cada habitación} \\ \text{vacía en el hotel} \\ (350) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \text{Total de} \\ \text{habitaciones} \\ \text{del hotel} \\ (40) \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} \text{tarifa de} \\ \text{habitación} \\ \text{por cupo lleno} \\ (51\ 200) \end{matrix} \right) \right) - \left(\left(\begin{matrix} \text{"condición"} \\ (350) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \text{Cantidad de} \\ \text{habitaciones} \\ \text{remitidas (n)} \end{matrix} \right) \right)$$

$I = (n)(C)$ columna tres -----(C)

$M = (200)(n)$ columna cuatro -----(D)

$G = (I) - (M)$ columna cinco -----(E)

Figura 11 Gráfica incluida en la carta elaborada por la pareja EP_5 y EP_6 (continuación Figura 10)

Le comento que al sustituir los valores indicados, las ganancias quedan de la siguiente manera

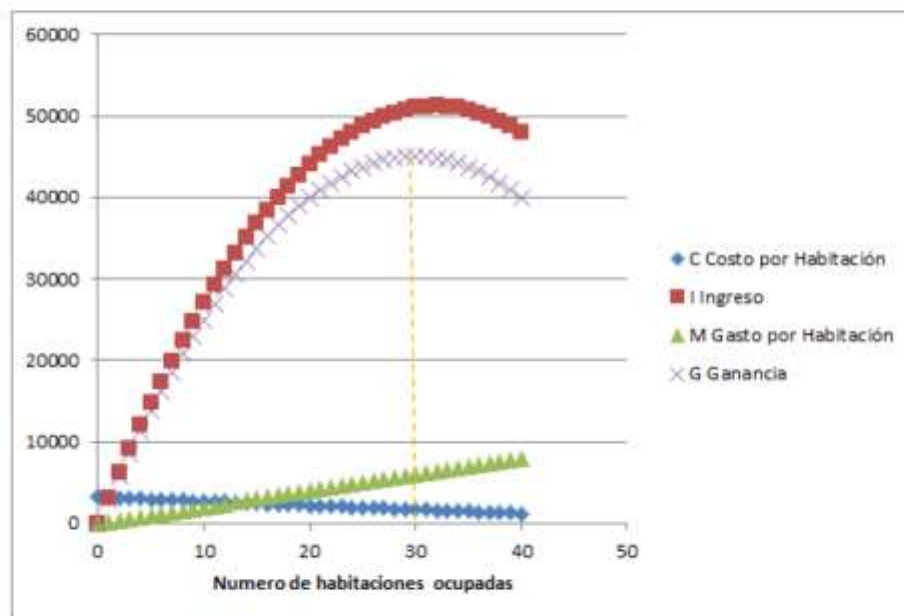
$$G = (n)(3200 - (50)(n)) - (200)(n)$$

Simplificando tendremos

$$G = 3200n - 50n^2 - 200n$$

$$G = -50n^2 + 3000n$$

Si usted observa las gráficas que a continuación se presenta:



Se muestra que la curva de color azul representa las ganancias y ésta se presenta cuando hay una ocupación de 30 habitaciones.

La gráfica anterior resulta de hacer la diferencia entre los ingresos (color rojo) y los gastos (color verde).

A continuación se presenta la tabla de los cálculos de costos, ingresos, gasto y ganancias por habitación ocupada.

Figura 12 Tabla de datos incluida en la carta elaborada por la pareja EP_5 y EP_6 (continuación Figura 11)

Habitaciones	Dec	Costo por Habi	Ingre	Gasto por Habi	Ganancia
0		3200	0	0	0
1		3150	2950	280	2950
2		3100	5200	460	5900
3		3050	7450	630	8950
4		3000	9700	800	11000
5		2950	11950	970	13750
6		2900	14200	1140	16200
7		2850	16450	1310	18950
8		2800	18700	1480	21900
9		2750	20950	1650	24950
10		2700	23200	1820	28000
11		2650	25450	1990	31050
12		2600	27700	2160	34100
13		2550	29950	2330	37150
14		2500	32200	2500	40200
15		2450	34450	2670	43250
16		2400	36700	2840	46300
17		2350	38950	3010	49350
18		2300	41200	3180	52400
19		2250	43450	3350	55450
20		2200	45700	3520	58500
21		2150	47950	3690	61550
22		2100	50200	3860	64600
23		2050	52450	4030	67650
24		2000	54700	4200	70700
25		1950	56950	4370	73750
26		1900	59200	4540	76800
27		1850	61450	4710	79850
28		1800	63700	4880	82900
29		1750	65950	5050	85950
30		1700	68200	5220	89000
31		1650	70450	5390	92050
32		1600	72700	5560	95100
33		1550	74950	5730	98150
34		1500	77200	5900	101200
35		1450	79450	6070	104250
36		1400	81700	6240	107300
37		1350	83950	6410	110350
38		1300	86200	6580	113400
39		1250	88450	6750	116450
40		1200	90700	6920	119500

Se observa que la ganancia máxima es cuando se han ocupado 30 habitaciones (se indica en color amarillo).

En un futuro si Usted desea cambiar (tarifas, costos, habitaciones y condiciones), las descripciones de las opresiones indican los datos a modificar, también le envío el cálculo en el programa Excel, donde tendrá que modificar la fórmula de acuerdo a los cambios realizados, esta modificación serán en las ecuaciones B y D (los datos señalados en color rojo).]

Atentamente

Conclusiones

La inmersión en un ambiente colaborativo como estudiantes fue relevante para los EP porque les permitió confrontar sus ideas tradicionales y les brindó elementos para replicar la experiencia con sus alumnos. Les permitió conocer nuevos métodos para trabajar en el aula cuyo propósito fuera el desarrollo de conocimiento mediante la generación de un ambiente de aprendizaje basado en la comunicación, el trabajo colaborativo, la discusión grupal y el uso de tecnología. La experiencia de trabajo con sus propios alumnos fue fundamental para validar este nuevo conocimiento.

El trabajo con el investigador permitió a los profesores discutir sus *formas de pensamiento*, las cuales se modificaron en la medida que leyeron, implementaron y discutieron las actividades llevadas a cabo en el aula.

Los EP consideraron que el aprendizaje de las matemáticas podía estar relacionado con el desarrollo de conocimiento en otras disciplinas científicas. En particular, como profesores de futuros ingenieros, entendieron la pertinencia del uso de estas actividades en el aula para propiciar aprendizaje significativo en los alumnos. Le dieron sentido a relacionar la ciencia, ingeniería, tecnología y matemáticas en el aula.

El investigador identificó que una sola experiencia en el aula no fue suficiente para lograr una transformación docente, pero permitió motivar la reflexión sobre la labor educativa y alentar a los EP para buscar la mejora de su práctica.

Los EP consideraron que estaban en condiciones de pensar de forma distinta la educación matemática, pues la interdisciplinariedad era importante, así como el uso de tecnología para apoyar mejor comprensión de los significados. Estos aspectos fueron identificados como importantes por el investigador para impulsar una educación en CITEM desde cualquier curso de matemáticas. La experiencia de formación docente permitió que el investigador, los profesores y los estudiantes extendieran, modificaran y refinaran conocimiento. Hubo cambios en sus *formas de pensamiento*.

Durante esta experiencia el investigador aprendió la importancia de no pensar la formación docente como un proceso lineal, sino un proceso donde existe variación en cuanto a habilidades, percepciones, interpretaciones y, por lo tanto, en el crecimiento de los docentes. Igual que los profesores identificaron esa variación en el crecimiento de sus alumnos.

Referencias

Aliprantis, C. D. & Carmona, G. (2003). Introduction to an economic problem: A models and modeling perspective. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 255-264). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Carmona, G. (2017) El problema del Hotel (Actividad provocadora de modelos). Recuperado de: <https://plus.google.com/u/0/communities/109854270757370860580>.

Clark, K. K. & Lesh, R. (2003). A modeling approach to describe teacher knowledge. En R. Lesh & H. M.

Doerr (Eds). (2003). *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 159-174). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Doerr, H. M. & Lesh, R. (2003). A modeling perspective on teacher development. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds). (2003). *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 125-140). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates,

Doerr, H. M. & Tripp, J. S. (1999). Understanding how students develop mathematical models. *Mathematical thinking and learning*, V.1(3), pp. 231- 254.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms That Promote Understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. & Clarke, D. (2000). Formulating operational definitions of desired outcomes of instruction in mathematics and science education. En E. A. Kelly & R. Lesh (eds.) (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and modeling perspective on Mathematics teaching, learning, and problema solving. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models & modelling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Lester, F. K. & Hjalmarson, M. (2003). A models and modeling perspective on metacognitive functioning everyday situations where problema solvers develop mathematical constructs. En R. Lesh & H.M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models & modelling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching* (pp. 383–404). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(2), pp. 16-48.

Lesh, R., & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind:in which development involves several interacting simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning* (pp. 205-226.). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., Doerr, H., Cramer, K., Post, T., & Zawojewski, J. (2002). Model Development Sequences. En R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (págs. 35-58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought revealing activities for students and teacher. En A. E. Kelly, & R. A. Lesh, *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591-650). Routledge.

Llinares, S., Valls, J., y Roig, A. I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, 20(3), 59-82.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1-22.