

## **Secuencia de desarrollo de modelos para la enseñanza y el aprendizaje multinivel e interdisciplinario**

ALVARADO-MONROY, Angelina, OLVERA-MARTÍNEZ, Carmen, MATA-ROMERO, Armando y ESCOBEDO-BUSTAMANTE, Adriana

A. Alvarado, C. Olvera, A. Mata y A. Escobedo

Universidad Juárez del Estado de Durango

aalvarado@ujed.mx, carmen.olvera@ujed.mx, armandomr@ujed.mx, adriana.escobedo@ujed.mx

A. Alvarado, G. Carmona y A. Mata (Dir.) Una visión integradora. Tópicos Selectos de Educación en CITEM. ©ECORFAN- México, 2017.

## **Abstract**

The objective of this research has been to design and implement a Model Development Sequence to explore tasks and its potential through the perspective of models and modeling (Lesh et al., 2003). The proposed design aim promotes educational practices with an integrating view of two or more disciplines of Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM). The sequence was implemented with groups of students and groups of teachers of different educational levels. In this chapter, we document some of the results of the implementation, including productions from students as well as from teachers, in an attempt to show different cycles of refinement that exhibit the participants during the production of models when they try to solve a situation that involves establishing fair rules for a game. Among the main findings about instructional design, we can notice that the main qualities of the design are: a valid and authentic situation that may occur in real life; the task involves the construction, explanation and prediction of a mathematical structure; the participants are able to recognize by themselves which are the ideas or ‘good answers’, both own and from others; through the letter is possible to access to participants’ reasoning, because they explain what they considered to establish the game’s fair rules. Since the Model Development Sequence does not require previous knowledge, it is accessible to a wider range of learners and encourages the emergence of models that are constantly revised and refined in order to transit from informal knowledge to scientific knowledge. Furthermore, the results of this research allow observing iterative cycles of expressing, proving, and checking the thought processes of researchers, teachers and students.

## **Models and Modeling, Design Model Development Sequence, STEM Education**

### **Introducción**

En la actualidad la interdisciplinariedad en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática juega un papel primordial, ya que involucrar, en este proceso, contextos donde se aborden contenidos y objetos matemáticos que se relacionan con otras disciplinas de ciencia, ingeniería, tecnología (CITeM) permite una concepción científica de la realidad del entorno. Desde esta visión integradora de CITeM para promover aprendizaje, es necesario plantear problemas o situaciones de la vida real, dado que para comprenderlas o resolverlas se requiere construir, refinar, explorar, extender y/o aplicar conocimiento de estas disciplinas. Esta aproximación es importante, puesto que, se logra un aprendizaje cuando el individuo reconoce la importancia del sistema conceptual construido y su funcionalidad para resolver determinadas situaciones.

Una de las áreas de la matemática que favorece la interdisciplinariedad es la probabilidad, ya que permite construir modelos, desarrollar procedimientos para calcular y estimar probabilidades y resolver problemas en situaciones donde está presente la incertidumbre o interviene el azar. La importancia de la probabilidad en otras ciencias como la física, la química y la biología ha sido creciente puesto que los modelos probabilísticos han permitido la comprensión de los fenómenos de la naturaleza.

Dentro de CITeM, la noción de probabilidad, el registro y análisis sistemático de datos son ideas fundamentales. En los niveles básicos se manejan ejemplos prototípicos que involucran experimentos aleatorios equiprobables (lanzamiento de dados, monedas, etc.), o bien, ejemplos de urnas que tienen ciertos objetos con diferentes colores y se cuestiona sobre la oportunidad de extraer un objeto de determinado color.

Con relación al manejo de datos, usualmente se trabaja con ejemplos en los cuales los datos son dados en el problema y no se da la oportunidad a la observación, a la obtención de los mismos y su registro sistemático para ser analizados. Como guías en el desarrollo profesional docente hemos observado que ambas ideas o nociones están descuidadas en el curriculum escolar y los profesores demandan estrategias para su enseñanza. Dichas estrategias deben concebirse articuladas con otros contenidos de la matemática y de otras disciplinas, dado que el conocimiento es de naturaleza interdisciplinaria y es así como es requerido en situaciones auténticas de resolución de problemas reales.

Sin embargo, cómo enseñar o qué estrategias utilizar para enseñar las nociones de probabilidad representa un reto para los profesores. Dentro de las tareas sustanciales de las comunidades de Campus Viviente de Educación en CITEM (Carmona et al., 2014; Vargas et al., 2014; Alvarado et al., 2014), está el diseño de ambientes de aprendizaje innovadores que son concebidos y probados a través de ciclos iterativos de investigación: concepción, implementación, evaluación, rediseño. Los ambientes de aprendizaje son una alternativa de enseñanza al método tradicional expositivo, en la cual se asume que el conocimiento debe ser construido por los estudiantes. Tales ambientes «proporcionan actividades interactivas y complementarias que permiten a los individuos abordar necesidades e intereses de aprendizaje únicos, estudiar múltiples niveles de complejidad y profundizar en la comprensión» (Hannafing & Land, 1997, p. 168; citados por Land, Hannafing & Oliver, 2012). Los ambientes de aprendizaje diseñados en las comunidades de Campus Viviente se caracterizan por abordar ideas fundamentales de CITEM aproximándose a la enseñanza, al aprendizaje y a la evaluación formativa a través de los modelos y la modelación en educación matemática, simulaciones participativas y el uso de tecnología de fácil acceso y bajo costo. En estos ambientes, al igual que la estructura matemática y científica, se valora y fomenta la construcción y el desarrollo del conocimiento dentro de un ambiente de estudio colaborativo y participativo.

Este trabajo de investigación se da en el contexto de un grupo de investigadores y docentes, que pertenecen a la comunidad Campus Viviente Durango de Educación en CITEM (Alvarado et al., 2014), interesados en el diseño instruccional que asumen como hipótesis que: dada la naturaleza ubicua de la matemática, la tecnología, la ciencia y la ingeniería en este siglo, es posible diseñar ambientes de aprendizaje con requerimientos mínimos de conocimiento matemático y científico previo, en los cuales sea posible el surgimiento de ideas fundamentales de CITEM desde la interacción y el conocimiento informal de los participantes, para que sean utilizados en diferentes niveles educativos y en contextos interdisciplinarios. Aquí se presenta el caso de un ambiente de aprendizaje, estructurado como una secuencia de desarrollo de modelos dentro de la perspectiva de Lesh y Doerr (2003), en el cual se espera el surgimiento de diferentes contenidos de CITEM (noción de probabilidad frecuencial, cálculo de porcentajes, experimentación, observación, registro, análisis, presentación de datos y comunicación de resultados, tiro parabólico, etc.); se explora su potencial en contextos de talleres interdisciplinarios y multinivel de profesionalización docente, así como, de estudiantes de diferentes niveles educativos; y, se presentan algunos resultados obtenidos en talleres con profesores y con estudiantes de diferentes niveles educativos.

En este trabajo en la sección 2, se presentan las bases teórico conceptuales que fueron relevantes para el diseño y la implementación de un ambiente de aprendizaje: 1) la perspectiva de modelos y modelación para la enseñanza, el aprendizaje y la resolución de problemas y 2) el modelo de desarrollo profesional docente Campus Viviente de Educación en CITEM.

En la sección 3 se aborda la metodología seguida en el estudio experimental y se describen las fases a) diseño de la secuencia, b) experimentación con profesores como estudiantes, c) experimentación con estudiantes en el aula y d) análisis de las producciones.

En el apartado 4 se presentan los resultados generales observados con la secuencia de desarrollo de modelos propuesta y descrita en la sección 3. También se presentan los resultados, producciones y modelos generados en la implementación de la secuencia con profesores como estudiantes en contextos multinivel e interdisciplinarios dentro del marco del modelo de desarrollo profesional docente Campus Viviente de Educación en CITeM, descrito en la sección 2. Finalmente, se da un panorama general de los resultados y modelos obtenidos al implementar la secuencia con estudiantes en el aula.

## Marco conceptual

En esta investigación es relevante la perspectiva de modelos y modelación (Lesh & Doerr, 2000; 2003). En ella, un modelo es considerado como un sistema conceptual que consta de elementos, relaciones, operaciones y reglas que rigen las interacciones. Dichos sistemas son expresados utilizando sistemas de notación externa, y se utilizan para construir, describir, explicar, predecir, manipular o controlar el comportamiento de otros sistemas. Los significados asociados a un sistema conceptual tienden a distribuirse a través de una amplia variedad de medios de representación: ecuaciones, tablas, gráficas, símbolos escritos, lenguaje hablado, metáforas basadas en experiencias, modelos concretos, diagramas, etc.

Dentro de esta perspectiva, el aprendizaje es concebido como un proceso de desarrollo de modelos o sistemas conceptuales. Así, en una situación de resolución de problemas más que la solución, el proceso es el fin. Como problemas a resolver se plantean situaciones de la vida real en las que se puedan elucidar modelos que sean visibles y que dichas situaciones estén provistas de herramientas que ayuden a identificar los elementos relevantes del sistema conceptual construido y distinguirlos de información irrelevante para la resolución del problema en cuestión. El conocimiento generado desde esta aproximación surge a través de una serie de ciclos iterativos en los que los participantes tienen múltiples oportunidades de expresar, probar y refinar su conocimiento.

Una secuencia de desarrollo de modelos es un módulo instruccional basado en la perspectiva de modelos y modelación. Se compone principalmente de tres tipos de actividades (Lesh et al., 2003):

- a) *Actividad Reveladora del Pensamiento o Actividad para Elucidar Modelos (MEA por sus siglas en inglés)*. Son actividades de resolución de problemas en las cuales el producto de los participantes no es una respuesta numérica corta a una situación que ya ha sido matematizada por otros. La respuesta es más bien una descripción que expresa las formas de pensar de los participantes acerca de la situación planteada y, a menudo, es comunicada en una carta a un “cliente” que demandó ayuda para resolverla.
- b) *Actividad de exploración de modelos (MXA, por sus siglas en inglés)*. El propósito es desarrollar poderosos sistemas de representación y lenguaje para dotar de significado el sistema conceptual o modelo construido en la MEA. En estas actividades se utiliza material concreto, gráficas dinámicas, simulaciones, etc.

- c) *Actividad de Adaptación de Modelos (MAA, por sus siglas en inglés)*. Son actividades para aplicar o extender los modelos construidos. A diferencia de la MEA pueden ser resueltas de manera individual.

Doerr (2016) expone el potencial para la enseñanza aprendizaje de las secuencias de desarrollo de modelos compuesta con estos tres tipos de actividades y cómo, en cada una de ellas, el participante se ve envuelto en ciclos iterativos de observaciones, descripciones, interpretaciones, conjeturas, explicaciones y justificaciones que constantemente son revisadas y refinadas mientras trabajan con otros estudiantes y con el profesor o guía.

El tipo de actividades propuestas en estas secuencias requieren de cambios profundos y de una transformación de la práctica docente para lograr facilitar el aprendizaje de los estudiantes en situaciones auténticas de la vida real que ameritan más que una solución corta. Para ello, es necesario que sean exploradas por los docentes como estudiantes en talleres de desarrollo profesional y posteriormente dichos profesores sean acompañados para implementar las actividades con sus propios estudiantes. Lo anterior es considerado en el Modelo de Desarrollo Profesional Docente para Educación en CITeM (Carmona & Alvarado, 2011; Carmona et al., 2014), el cual está caracterizado por ser multinivel, interdisciplinario y diseñado para incrementar la autonomía y la agencia del profesor. Para garantizar tal incremento se sugieren cinco etapas: *diseño experto, maestros como estudiantes, práctica impromptu, implementación en el aula y formación de comunidades de práctica*. Dicho modelo surge en el proyecto Campus Viviente ([campusviviente.org](http://campusviviente.org)), mismo que apoya una visión integradora de CITeM.

## Metodología

Se ha realizado un estudio experimental a partir de una secuencia didáctica de desarrollo de modelos considerando las fases siguientes: a) diseño de la secuencia, b) experimentación con profesores como estudiantes, c) experimentación con estudiantes en el aula y d) análisis de las producciones.

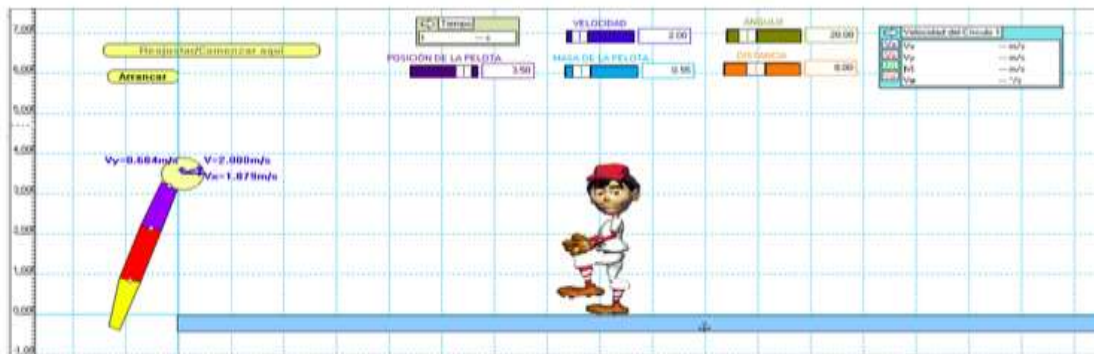
### a) Diseño propuesto

La secuencia de desarrollo de modelos aquí propuesta esta considerada para tres módulos de una hora cada uno. Simula un problema de la vida real y está diseñada para incluir un amplio rango de participantes con características diversas. Sigue los principios propuestos por Lesh et al. (2000) para el diseño de una MEA o Actividad Reveladora del Pensamiento. En la MEA, *Reglas justas para el Juego* (Figura 3.1), los participantes organizados en equipos interactúan en un juego en el cual se debe atrapar una pelota que tiene una tira de tela tricolor (PTT) y deben establecer el conjunto de reglas que hagan justa la distribución de puntos con base en la dificultad de ser atrapada de la pelota o de alguna de las partes de la tira y finalmente, informar a los fabricantes, “su cliente”, las reglas justas para el juego, las cuales serán discutidas, revisadas, refinadas y convenidas con sus compañeros.



Finalmente, se aplica una actividad de adaptación de modelos que propicia la adaptación o aplicación de los modelos antes construidos en otros contextos. En esta MAA interactúan con una simulación realizada en Interactive Physics (Figura 3.3) donde pueden realizar cambios que les permiten hacer adaptaciones a su modelo, así como extender y refinar el lenguaje para describir y explicar el fenómeno. Dichos cambios son por ejemplo: poder modificar la distancia entre quien lanza y quien atrapa, la masa de la pelota, el ángulo de tiro, etc. También, es posible visualizar de manera pausada la trayectoria seguida por la pelota de tira tricolor para verificar la parte de la cual fue atrapada. Los cambios que ensayan los participantes los conducen a situaciones de comparación y adaptación de modelos. Por ejemplo, al modificar la masa de la pelota los lleva a cuestionarse: si la pelota es más pesada (pelota de beisbol) o más ligera (unicel, esponja), ¿funcionarán las mismas reglas del juego antes propuestas?

**Figura 3.3** Simulación en Interactive Physics de *Reglas Justas para el Juego*



Fuente: Elaboración propia.

### b) Experimentación con profesores en el papel de estudiantes

La secuencia de desarrollo de modelos, de manera parcial o completa, ha sido explorada en diferentes contextos con profesores como estudiantes dentro de talleres de desarrollo profesional docente. En este trabajo tomaremos en cuenta, la experiencia que se llevó a cabo dentro del Diplomado en Enseñanza Significativa de las Ciencias con Tecnología, DESCT (Mata, 2012). En dicho diplomado, participaron 65 profesores (distribuidos en tres grupos) de las asignaturas de ciencias, computación y matemáticas, de los niveles primaria y secundaria.

### c) Experimentación con estudiantes en el aula

Para explorar la secuencia con estudiantes, en el caso de primaria y secundaria se han tomado en cuenta las implementaciones realizadas por los profesores participantes del DESCT mencionado en el inciso anterior. Ellos, en sus escuelas, han incorporado a los profesores de educación física y español, al considerar pertinente que éstos organicen los juegos, trabajen con los alumnos en la importancia de las reglas y en la redacción coherente y cuidada de la carta o informe de las reglas del juego sugeridas al “cliente”.

Además, la secuencia propuesta se ha explorado con estudiantes de niveles educativos superiores. En la sección de resultados se muestran, resultados generales con la experiencia en los diferentes contextos, algunos patrones de respuesta y comportamientos encontrados tanto en los profesores como en los estudiantes.

#### **d) Análisis de las producciones**

Los datos recolectados durante la investigación se han compuesto de: grabaciones de audio y video, fotografías, producciones escritas o cartas de los participantes, correos electrónicos refinando sus modelos y notas de los investigadores. Para su análisis se han clasificado en modelos o producciones iniciales, producciones intermedias y modelos finales que dan muestra de los ciclos de desarrollo de modelos que documentan el aprendizaje. Continuamente los modelos construidos por los participantes son objeto de discusiones orquestadas por el guía o profesor que dan lugar a modificaciones de sus producciones, fragmentos de tales discusiones han sido transcritas para su análisis.

### **Resultados**

Los resultados están organizados en observaciones generales y en tres momentos de producción de modelos de la MEA: producciones desde la intuición, producciones desde cuestionamientos, prueba y comparación con pares de los primeros modelos generados, y modelos refinados del conocimiento emergente de CITeM. Posteriormente se presentan resultados de la exploración y adaptación de los modelos anteriores.

#### **a) Observaciones generales**

Particularmente en el contexto del DESCT (Mata, 2012), el tener participantes de diferentes niveles propició una interacción interesante, dado que los profesores de menor nivel educativo planteaban dinámicas distintas de organizar el trabajo colaborativo y daban una importancia mayor al juego y a las cuestiones didácticas, pero también cuestionaban para tratar de entender y eso propiciaba que se expresaran y refinaran cada vez más las ideas. Por su parte, los profesores de mayor nivel educativo aportaban conocimiento disciplinar para soportar sus modelos y ayudar a contestar preguntas que en la mayoría de los casos eran planteadas por los profesores de niveles educativos tempranos. Al final, se involucraron tanto que reconocieron el aprendizaje logrado y valoraron la aportación de cada uno de sus compañeros.

En las experiencias en general con esta secuencia, se observa que los estudiantes de primaria y los profesores de preescolar y primaria, una vez que conocen la situación planteada, de inmediato comienzan a jugar con sus compañeros para experimentar, explorar y posteriormente, identificar el comportamiento de la PTT a través de jugar con sus compañeros. Mientras que estudiantes y profesores de los otros niveles, intentan resolver la situación, de manera inicial y sólo algunos toman la iniciativa de jugar con la PTT para contrastar sus ideas iniciales, por lo que se les tiene que sugerir nuevamente al resto de los participantes que interactúen con la PTT para que puedan probar sus intuiciones. Al jugar, observar y registrar los resultados obtenidos, sus modelos iniciales cambian notablemente como se muestra en los ciclos que se describen en los siguientes incisos.

#### **b) Primer ciclo: Modelos o producciones generados desde la intuición**

En esta primera etapa, los participantes organizados en equipos de 3 o 4 se aproximan a la MEA *Reglas Justas para el Juego* (Figura 3.1) desde su intuición y conocimiento informal. En este apartado se mostrará la producción de un grupo de profesores de secundaria como representantes, dado que un comportamiento similar ocurre en grupos con estudiantes de diferentes niveles educativos. En los cinco equipos que se conformaron en este grupo, los primeros modelos generados se presentan en las figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5.

Figura 4.1 Modelo inicial equipo 1

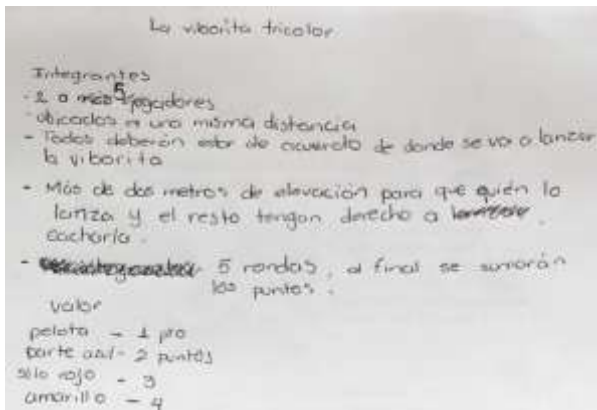
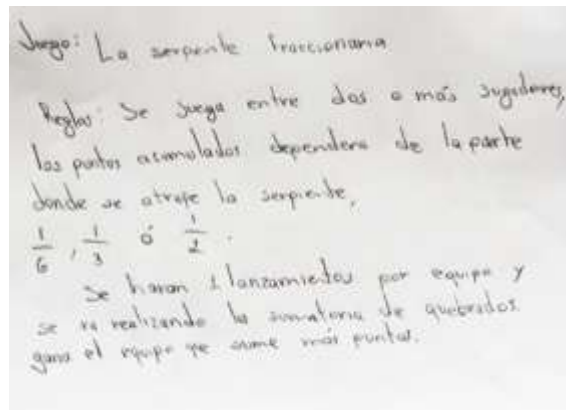


Figura 4.2 Modelo inicial equipo 2



Fuente: Producciones de los estudiantes

Para elaborar las reglas del juego que les demanda la situación observan la PTT, realizan unos cuantos tiros que no son suficientes para observar la dificultad de atrapada en cada región. Más aún, son insuficientes para determinar en cuántas regiones es posible atraparla. Cuatro de estos equipos consideran como regiones para atrapar, a la pelota y a las tres franjas de color azul, roja y amarilla, sólo el equipo 3 considera la posibilidad de atraparla en intersecciones de dos regiones. Esto último sorprende a los equipos en la discusión de la actividad, cuando exponen su producción (Figura 4.3).

Figura 4.3 Modelo inicial equipo 3

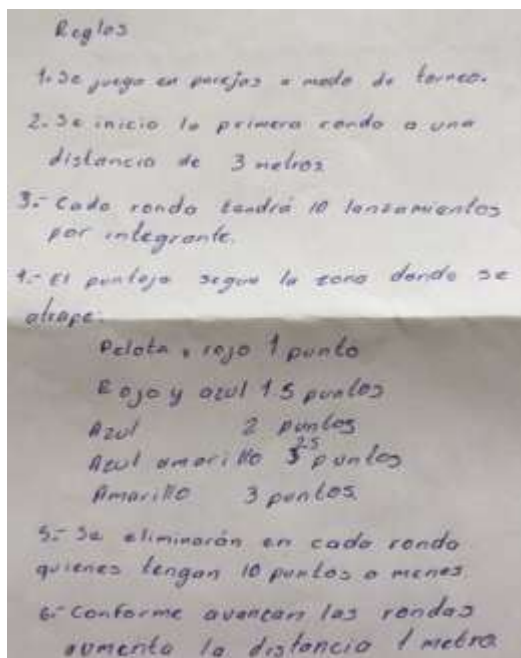
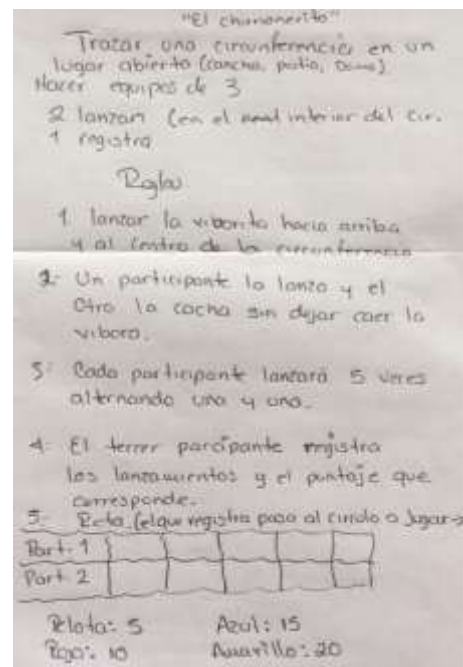


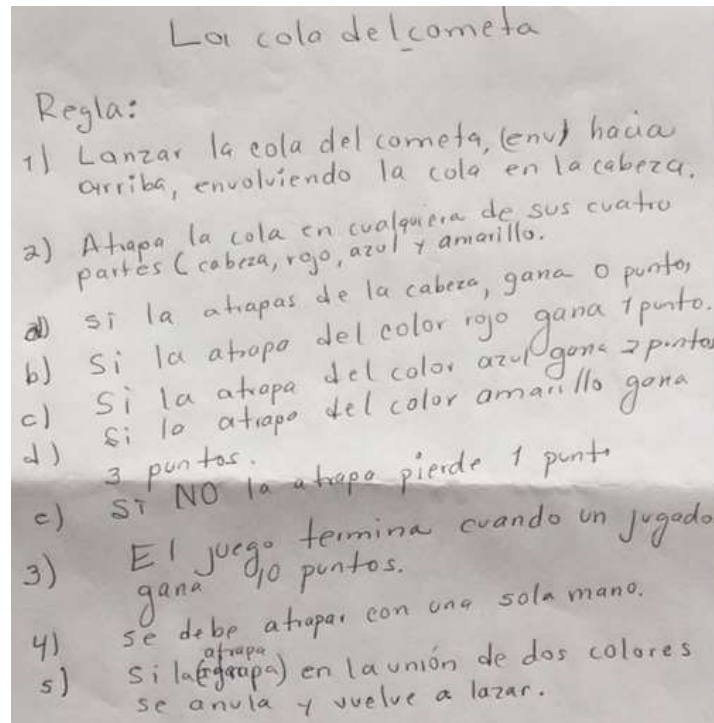
Figura 4.4 Modelo inicial equipo 4



Fuente: Producciones de los estudiantes

En todas las producciones el sustento es que la pelota es la parte más fácil de atrapar dado su peso, así asignan el menor puntaje a esta región (1 punto en el equipo 1, Figura 4.1; 0 en el equipo 3 y en el 5, Figura 4.3 y 4.5;  $\frac{1}{6}$  equipo 2, Figura 4.2 y 5 en el equipo 4, Figura 4.4) y desde esta observación, deducen falsamente que la dificultad debe ser consecutiva con un incremento fijo (en el equipo 3 de 0.5, en el equipo 5 de 5, en el equipo 2 de  $\frac{1}{6}$  y en el resto de 1). En las siguientes secciones veremos cómo el comportamiento de la situación va contra esta intuición de los participantes.

**Figura 4.5** Modelo Inicial del equipo 5



Fuente: Producciones de los participantes

Cuando se les cuestiona sobre el número de tiros y atrapadas en las que han apoyado su deducción, los participantes muestran sorpresa, dado que, no les ha parecido relevante hacer un registro. No obstante, ahora dudan de sus modelos y consideran importante realizar un experimento controlado en el cual puedan revisarlos y refinarlos, a partir de un registro sistemático de los datos. Esta primera parte es relevante para que surja la necesidad de utilizar un registro matemático que dé soporte a sus producciones.

Hasta ahora al cuestionarlos sobre cómo se puede hacer uso de la matemática, empiezan a elucidar modelos relacionados con la probabilidad frecuencial, con el uso de porcentajes y gráficas. Incluso algunos también, ya se cuestionan sobre el tipo de lanzamientos y su dificultad asociada (tiro recto, tiro parabólico).

En esta primera aproximación, se ha observado en diferentes grupos y contextos, que el hecho de que la matemática y la ciencia estén omnipresentes, contribuye a que en principio sean invisibles al iniciar la resolución de un problema no convencional.

### c) Segundo ciclo: Modelos desde cuestionamiento, prueba y comparación

En una segunda aproximación a la situación, desde las discusiones en equipo o durante el espacio para el juego, en su gran mayoría los participantes tratan de resolver cuestiones, como las mencionadas enseguida, desde una amplia variedad de respuestas.

a) *¿De cuántas formas puede atraparse la pelota con cola tricolor?*

Como se ha visto en el apartado anterior, la respuesta inicial de la mayoría es que se tiene la posibilidad de atraparla en cuatro regiones: pelota, franja azul, franja roja y franja amarilla. Esto se va modificando en sus modelos luego de interactuar en el juego y/o haber observado producciones de otros equipos. En sus nuevas producciones ya reconocen la posibilidad de atraparla en la frontera de dos o más regiones.

b) *¿De qué región es más fácil atraparla? y de ¿cuál es más difícil?*

La intuición inicial, como se discutió en los primeros modelos generados, es que es más fácil atrapar la pelota, considerando su peso, y después de la franja que sigue de la pelota y ordenado así sucesivamente. Esto es algo que sustancialmente va cambiando al jugar, registrar el número de atrapadas por franja y finalmente analizar la información. Para los participantes más jóvenes a mayor número de registros mayor confiabilidad para decidir desde la región más fácil hasta la más difícil o tal vez mientras más juegan es mejor, sus conclusiones las extraen de más de 100 lanzamientos y algunos ensayan exactamente a 100 por la facilidad para cálculo de porcentajes. Por otro lado, en gran parte de los estudiantes mayores sus conclusiones se basan en un número menor de atrapadas (entre 15 y 50).

c) *¿Cómo diseñar el experimento?*

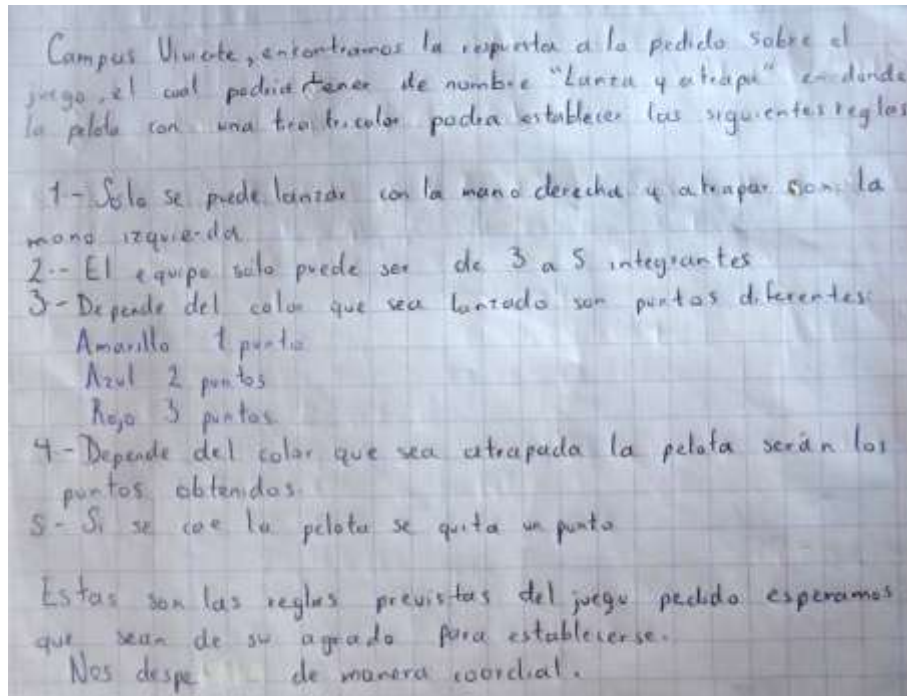
La mayoría en cada lanzamiento observa la región en la que es atrapada la PTT y realiza el registro en las diferentes regiones, que pueden ir cambiando de 4 a 6 o más regiones de acuerdo a los resultados de la experiencia. Los datos los organizan de diferente manera, con conjuntos de palitos de 5 en 5, con puntos, con canicas en recipientes, cubos ensamblables etc., después realizan el conteo y organizan en tablas expresando sus resultados en porcentaje, fracción o verbal (15 atrapadas de 95). Con estudiantes de primer ciclo de primaria o tercero de preescolar sólo se trabaja en el conteo.

En casos especiales, el diseño del experimento tiene variaciones interesantes:

- 1) Establecen un número fijo de lanzamientos (por ejemplo, 60 en el modelo de la Figura 4.7) y se plantean como objetivo que todos los participantes del equipo se concentren en atrapar la PTT en una región fija y registran el número de veces en que fue atrapada. Luego, con el mismo número de lanzamientos, repiten este mismo procedimiento variando la región fija.
- 2) Distinguen dos tipos de lanzamiento: *parabólico* y *recto*. Con esta nueva variable, registran las atrapadas por región y por tipo de lanzamiento.
- 3) Al darse cuenta, por intuición y primeros lanzamientos, que la pelota es la más fácil de atrapar. Deciden centrarse en las otras regiones y evitar atraparla en la pelota, así en sus registros no aparece la pelota y el punto asignado para ella es 0.

4) Descartan la pelota, al identificar que es la más fácil de atrapar, y las regiones “frontera” (unión de dos franjas). En la Figura 4.6 se puede ver un ejemplo de este tipo de solución. Aquí las participantes realizan el experimento con 82 lanzamientos y reconocen a la región amarilla como la más fácil, después de la pelota, y le asignan un punto, seguida en dificultad por la región azul y finalmente la roja.

**Figura 4.6** Carta de respuesta a la MEA





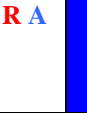



Fuente: Producción de estudiantes de 13 años de edad.

c) *¿Cómo decidir la distribución de puntos?*

Independientemente del diseño del experimento, distribuyen los puntos de menor a mayor de acuerdo a la dificultad observada. En el caso de la distinción de tiro parabólico o lineal, dan el doble de puntos para el tiro lineal. En algunos casos los equipos deciden asignar -1 para cuando no es atrapada. Para la puntuación en las fronteras (especialmente a quienes realizan un diseño de experimento tipo 4) toman en cuenta los puntos de las franjas unidas, los promedian y asignan tal puntuación.

En la Tabla 4.1 se muestran algunos patrones de respuesta para el caso más común en el que se consideran seis regiones de atrapada y en los equipos deciden que es “casi imposible” atraparla entre las regiones pelota y franja azul así que la descartan. En el patrón 1 los equipos siguen su intuición y al hacer un mínimo de lanzamientos, los registros son irrelevantes. En los patrones del 2 al 8 se observa mayor variabilidad y en los del 9 al 13 los resultados asignados son más cercanos. Hay más modelos que de inmediato se modifican, como aquellos en los que se asignan puntos mayores a 10.

**Tabla 4.1** Patrones de respuestas de estudiantes de secundaria para seis regiones de atrapada

Tipo Respuestas	Número de lanzamientos						
Patrón 1	0 – 20	0	1	2	3	4	5
P-2	20-99	0	5	4	1	3	2
P-3		0	4	3	5	2	1
P-4		1	4	2	3	2	3
P-5		1	3	2.5	2	3	4
P-7		1	6	5	4	3	2
P-8		0	1	2	1	2	1
P-9	100-300	0	5	4	3	2	1
P-10		1	6	5	4	3	2
P-11		1	4	3.5	3	2.5	2
P-12		0	3	2.5	2	1.5	1
P-13		0	25	20	15	10	5
P-14		1	6	3	4	5	2

Fuente: Elaboración propia

En el transcurso de la actividad continuamente expresan sus modelos, los discuten en el equipo, los comparan con otros equipos, los evalúan y modifican sus formas de pensar acerca de ellos. También, el profesor que conduce la actividad al cuestionarlos propicia que los expresen y en la discusión con todo el grupo se generan cambios importantes. Muchas de las respuestas en esta secuencia tienen que ver con el sentido de justicia (Tabla 4.2). Tal vez atribuible al nombre de la actividad y a la constante insistencia del profesor de no perder de vista la situación y poner énfasis en la comprensión lectora.

**Tabla 4.2** Discusión de profesor con estudiantes de 9 a 12 años para generar un modelo compartido o grupal

<p><i>Profesor:</i> Algunos dicen que a la pelota le asignamos 0 y otros 1, ¿qué puntuación dejamos?</p> <p><i>Alumno:</i> El 1 es mejor... porque el juego se trata de atrapar la pelota en cualquiera de sus partes. Si le damos 0 puntos sería como no atraparla. [...]</p> <p><i>Profesor:</i> Y la frontera de la pelota con la franja roja muchos de ustedes no la han contemplado ¿qué podemos hacer?, ¿la dejamos?, ¿la quitamos?</p> <p><i>Alumno:</i> Es que tenemos unidas la parte más fácil de atrapar (la pelota) y la parte más difícil (parte roja) si sacamos promedio y lo asignamos no sería justo. Mejor quitarla. [...]</p>	<p><i>Alumno:</i> Es mejor quitarla, ... es casi imposible atraparla de ahí porque la parte que “más pesa” es la pelota, si no lo atrapas de la pelota, por su peso pasa demasiado rápido y no da tiempo casi de atrapar la franja roja, por eso es la más difícil.</p> <p><i>Alumno:</i> Además ... cuando atrapas la pelota “a fuerzas” alcanzas a tocar la parte roja. [...]</p> <p><i>Profesor:</i> ¿Qué opinan de los puntos negativos cuando no se atrapa? [algunos estudiantes proponen puntuación negativa para las no atrapadas]</p> <p><i>Alumno:</i> No es justo, ya es suficiente con no ganar puntos y pasar turno. [...]</p> <p><i>Profesor:</i> Además de los puntos, hay quién ha escrito otras reglas ...</p> <p><i>Alumno:</i> Los equipos deben estar equilibrados con niñas y niños para poder sacar mejores reglas, más justas para todos.</p> <p><i>Alumno:</i> La pelota se debe lanzar, con intención de que el otro la pueda atrapar.</p>
--	--

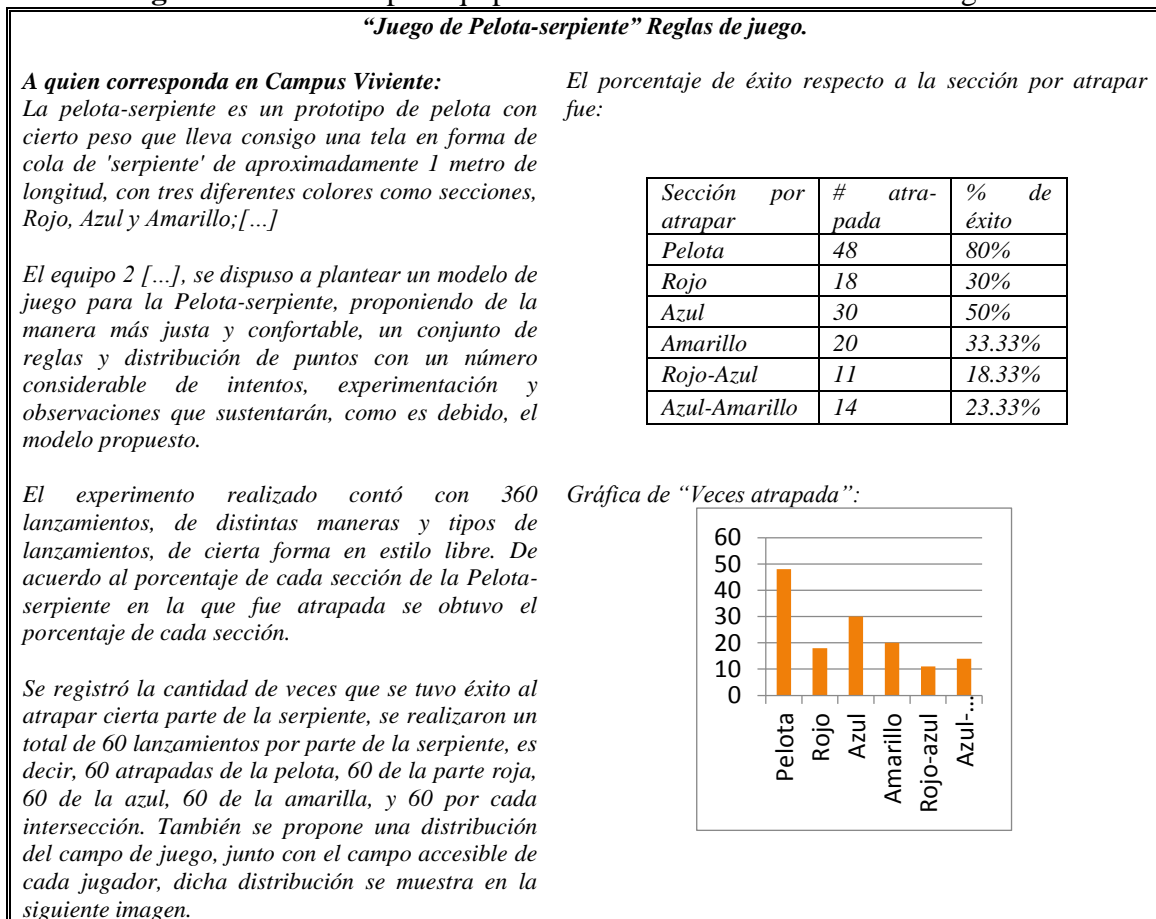
Fuente: Elaboración propia de la transcripción.

### d) Tercer ciclo: Modelos refinados después el conocimiento emergente de CITeM

En este último ciclo de la actividad para producir reglas justas para el juego, tomaremos en cuenta dos modelos generados por estudiantes de 18 años aproximadamente (Figuras 4.7 y 4.8). La elección de las producciones fue tomando en cuenta el mayor y el menor número de registros ocurridos en el grupo. Las producciones fueron enviadas por correo electrónico, luego de que en la clase se realizó el experimento, se discutieron los resultados en equipos y se hizo un borrador de la carta requerida. Se presentan tal como los estudiantes las redactaron y el único cambio realizado ha sido el de quitar los nombres de los estudiantes.

Como se puede observar en la Figura 4.7, el equipo ha hecho un diseño de experimento controlado tomando como objetivo de atrapada una región y luego de 60 lanzamientos registrar los casos de éxito. Luego repiten el experimento con las otras cinco regiones. La distribución de puntos y las reglas del juego se sustentan en observaciones, registro sistemático y análisis de los datos. Además, son cuidadosos en la forma de comunicar sus resultados, esta parte de comunicar los resultados en una carta ha causado sorpresa en la mayoría de los grupos, tanto de estudiantes como profesores, dado que en clases de matemáticas y ciencias habitualmente no se ofrecen espacios para escribir texto, se reservan los espacios para conjuntos de procedimientos numéricos para encontrar una respuesta corta. En esta parte se nota un avance sustancial entre la primera aproximación que este equipo tuvo con el modelo pulido que al final han presentado. Incluso en él han aportado un diseño del juego con reglas que van más allá de la asignación de puntos y que incluye características de la cancha y atributos cualitativos.

**Figura 4.7** Modelo por equipo de 4 estudiantes basado en 360 registros



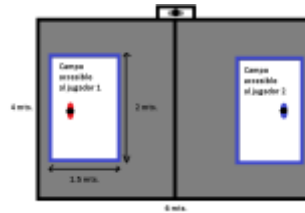
Se sugiere que sea a campo semi-abierto y apropiado para la actividad, [...] Los factores que hacen variar la experiencia de juego, como el viento, y las demás condiciones que se presenten pueden ser solo meros objetos para aumentar la experiencia y habilidad de juego.

Se considera que las dimensiones de la Pelota-serpiente serán aproximadamente iguales por cada ejemplar que se produzca, por lo que no puede haber problema [...]

La dinámica contará con dos jugadores. El 'partido' será limitado por 6 sets o rondas de juegos, donde en cada set se lanzará la Serpiente 10 veces de ida y vuelta [...] Habrá dos modos de juego posibles para seleccionar en un partido, con el mismo número de sets ambos.

Se acordó, tomando en cuenta los datos, la distribución de los puntos:

Parte de la serpiente	Puntos
Pelota	1
Rojo	4
Azul	2
Amarillo	3
Intersecciones	5



**Primer modo de juego:** se plantea para cada set una sección a atrapar a la Pelota-serpiente, y las veces que se atrapa en la sección correcta se multiplica por el número de puntos asignado a la sección.

**Segundo modo de juego:** la puntuación en cada set es libre, es decir, se le asignará al jugador el número de punto de la sección en la que atrape la Pelota-serpiente.

Se permitirán tipos de lanzamientos libres, directos, en parábola, etc., únicamente se requiere que la pelota vaya en dirección a un campo accesible al jugador contrario (que se muestra en la distribución del campo de juego); de no ser así y la pelota quede fuera del alcance del jugador contrario, a este mismo se le darán 3 puntos automáticamente y al lanzamiento de vuelta si el jugador que tiro de forma equivocada obtiene más de 3 puntos, solo se le asignaran 3 puntos a dicho jugador que la pudo capturar.

El ganador del partido es el que obtenga más puntos, [...]

Fuente: Producciones de los estudiantes

Otra producción que presentamos en este apartado es del mismo grupo, con cuatro estudiantes y a diferencia del otro ellos sustentan sus resultados en 45 registros. En este equipo se observa también un crecimiento, dado que, su modelo inicial fue muy similar al presentado en la Figura 4.1, como parte de los generados desde la intuición por otro grupo (Figura 4.8). Ahora, han realizado el experimento registrando cada atrapada y con base en sus registros han ordenado por dificultad de atrapada las regiones y han asignado los puntos. Otra variable que introducen, además de las regiones es si la atrapada, es con una o dos manos. Aunque ya vemos un registro sistemático de datos y la presencia de contenidos matemáticos para sustentar sus resultados. Para ellos no parece relevante la idea de que a mayor número de lanzamientos se incrementa el nivel de confianza de los resultados. Otra variante con respecto al modelo del otro equipo (Figura 4.7), es que ellos toman en cuenta siete regiones de atrapada, incluyen la intersección de pelota y tramo rojo. En varios equipos de diferentes grupos de estudiantes y profesores descartan esta región por considerar que es “casi imposible” distinguir esta atrapada de la pelota (Tablas 4.1 y 4.2).

**Figura 4.8** Modelo producido por equipo de 4 participantes basado en 45 registros

<b>Atrapa la serpiente por puntos</b>		
El juego consiste en lanzar la serpiente y al atraparla se consiguen puntos dependiendo del lugar que sea agarrada.		
Reglas del juego		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pueden participar 2 o más personas.</li> <li>• La distancia entre los jugadores debe ser mayor a 7 serpientes.</li> <li>• Al atraparla el jugador no tiene permitido mover un pie.</li> <li>• La puntuación será mayor si la serpiente se atrapa con una sola mano.</li> <li>• Cada vez que la serpiente no sea atrapada se anulará un punto.</li> </ul>		
<b>Puntaje</b>		
	<i>Una mano</i>	<i>Dos manos</i>
<i>Pelota</i>	2	1
<i>Azul</i>	4	2
<i>Rojo</i>	6	3
<i>Amarillo</i>	8	4
<i>Rojo y pelota</i>	10	5
<i>Azul y rojo</i>	14	7
<i>Amarillo y azul</i>	20	10
<i>Pelota</i>		15
<i>Azul</i>		19
<i>Rojo</i>		5
<i>Amarillo</i>		2
<i>Rojo y azul</i>		1
<i>Azul y amarillo</i>		2
<i>Amarillo y rojo</i>		1
<i>Total</i>		45

Fuente: Producciones de los participantes

### e) Exploración y adaptación de modelos

Cuando se trabaja con la MXA (Figura 3.2), comparten los registros realizados al jugar con la pelota y de acuerdo al diseño de su experimento, para poder hacer un análisis con un mayor número de datos (los datos obtenidos de todos los equipos). Con base en ello, los participantes (tanto profesores en el caso de talleres de desarrollo profesional como estudiantes) deciden la distribución justa de puntos. Esto permite que los participantes vean reflejado el modelo logrado dentro de su equipo y el modelo grupal generado y acordado. En esta parte, generalmente en la discusión descartan los registros de “no atrapadas” en el espacio común (Figura 3.2), por considerar que es una variable que no influye en el modelo y también en muchos casos descartan los registros de la frontera “pelota/franja roja” por considerar que es casi imposible una atrapada en dicha región. Desde la interacción con la MAA (Figura 3.3) adaptan su modelo a otras situaciones realizando cambios en las características de la pelota y los tipos de tiro.

Finalmente, la secuencia de desarrollo de modelos ha permitido el surgimiento y exploración de los siguientes contenidos fundamentales de CITEM: probabilidad frecuencial, probabilidad matemática, eventos no equiprobables, tiro parabólico, velocidad, ángulo de lanzamiento, uso de hoja electrónica de cálculo, uso del software Interactive Physics, obtención de datos desde la observación y experimentación con el juego de la PTT, organización sistemática de datos, así como, su análisis y presentación para derivar principios o reglas que expliquen lo observado y comunicar en una “carta colaborativa” tanto a sus compañeros y profesor como al cliente ficticio de la situación.

### Agradecimiento

Los autores de esta investigación agradecen:

Al Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Durango por su financiamiento a través del proyecto *Reunión Nacional de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas* del Programa de Apoyos Institucionales y Financiamiento a Proyectos de Investigación 2017.

A la Universidad Juárez del Estado de Durango y a la Facultad de Ciencias Exactas por su financiamiento a través del Programa de Fortalecimiento a la Calidad Educativa P/PFCE-2016-10MSU0010C-06 de la DES de Ciencias Básicas.

A la Secretaría de Educación del Estado de Durango por las múltiples oportunidades de participar en sus esquemas de formación y actualización de docentes en servicio.

A campusviviente.org, por su financiamiento a través del proyecto *Campus Viviente en Educación en CITeM*.

A los estudiantes colaboradores: Karla del Rocío Campos Martínez; José Crispín Alvarado Calderón.

## **Conclusiones**

Cada vez con mayor fuerza se reconoce el potencial de la perspectiva de modelos y modelación como un vehículo para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática integrada con otras disciplinas (Hirsch & Roth, 2016). Con relación al diseño instruccional aquí expuesto, se ha podido evaluar que cumple con los principios propuestos por Lesh et al. (2000) para este tipo de actividades, dado que se propone una situación auténtica que puede ocurrir en la vida real; es posible elucidar un modelo, ya que la tarea involucra la construcción, descripción, explicación, manipulación, predicción o control de una estructura matemática; se dan oportunidades para la autoevaluación, cuando los participantes por sí mismos se dan cuenta de las ideas o respuestas buenas, tanto las propias como las de otros; los participantes revelan explícitamente su pensamiento en la carta donde ofrecen la explicación de las reglas justas para el juego en la carta; y, por último, el producto es un prototipo útil para interpretar una amplia gama de situaciones similares.

Actividades como las que aquí se plantean, pueden abordarse desde el conocimiento informal de los participantes ya que no tiene requisitos de conocimiento previo. Lo anterior, hace que sean accesibles a un mayor número de personas y que puedan aplicarse en distintos niveles educativos. De esta manera, se propicia el surgimiento de modelos que constantemente son revisados y refinados para transitar del conocimiento informal al conocimiento científico. Además, esta investigación ha brindado la posibilidad de observar ciclos iterativos para expresar, probar y revisar, tanto el pensamiento de los investigadores, como el de los profesores y estudiantes.

Con base en los resultados obtenidos, se puede considerar factible adoptar modelos de desarrollo profesional docente concebidos para Educación en CITeM (Carmona & Alvarado, 2013), dado que este enfoque coincide y modela la diversidad de estudiantes en un aula convencional. No obstante, se requiere de una sensibilización de las autoridades educativas que toman decisiones sobre la formación y actualización de profesores, dado que no siempre consideran adecuado que los grupos de docentes sean interdisciplinarios y/o multinivel, aun cuando se insiste en los planes y programas de estudio acerca de la importancia de la transversalidad en el curriculum y de la continuidad desde preescolar hasta bachillerato. Otra variante es que no es posible garantizar una adecuada planeación de los tiempos y tomar en cuenta al profesor como aprendiz en edad adulta. Esto dificulta la implementación en el aula en condiciones ideales (como se establece en el modelo mencionado).

Por otra parte, el docente está habituado a prácticas en las que se estudia sólo un contenido y algo que constantemente le causa sorpresa, es la diversidad de contenidos y conceptos que surgen en las actividades de una secuencia de desarrollo de modelos. Más aún, cada vez que implementan la secuencia encuentran nuevos conceptos, contenidos, formas de representación y relaciones. Esto en principio, hace que el profesor se sienta temeroso de no poder encauzar todas las ideas que surgen al momento de la discusión.

Para apoyar la transición hacia las prácticas de modelos y modelación en el aula, es necesario mejorar el acompañamiento al maestro y apoyar su preparación en talleres docentes que incluyan un mayor número de actividades para profundizar y que ellos puedan *anticipar* los modelos que sus estudiantes pueden construir, *monitorear* adecuadamente los trabajos en los equipos, *seleccionar* y *secuenciar* los modelos y las ideas para *conectar* los diferentes medios de representación, como lo proponen Stein et al. (2008) y lograr la formalización de los diferentes sistemas conceptuales.

En cuanto a los estudiantes, se observó que las situaciones que no demandan una respuesta numérica corta representan para ellos un conflicto, dado que aunque en las discusiones logran ponerse de acuerdo y reconocen las “buenas respuestas” con sustento en las explicaciones y argumentaciones, de todas maneras demandan la opinión del profesor en relación a ¿cuál es la respuesta que a él le convence? No obstante, se genera un conocimiento compartido, en virtud de que todos aportan a la discusión para revisar y refinar sus modelos en la actividad de exploración posterior a la MEA.

Finalmente, para que los diseños sean sustentables es necesario que las herramientas utilizadas para facilitar la elucidación del modelo, su exploración y adaptación, sean de bajo costo y de fácil acceso. En este sentido, una mejora para esta secuencia es sustituir el software de Interactive Physics por un software libre que permita realizar la simulación de la actividad de adaptación del modelo (Figura 3.3).

## Referencias

- Alvarado, A., Mata, A., López, A., Carmona, G., & Vargas, V. (2014). Formación de Comunidades de Práctica: Campus Viviente Durango. En M. Ramos & V. Aguilera (Eds.). Ciencias Naturales y Exactas (pp. 156-64). V. de Santiago, Gto: ©ECORFAN.
- Carmona, G., Reyes, J., Vargas, V., Cristóbal, C., Alvarado, A., López, A., & Mata, A. (2014) Comunidad de Comunidades Campus Viviente en Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (CITeM): Una Experiencia de Colaboración Internacional hacia la Formación de una Red Temática. En M. Ramos & V. Aguilera (Eds.). Ciencias Multidisciplinarias, vol. 1, 1 (1), (pp. 109-125). Valle de Santiago, Gto: ©ECORFAN.
- Carmona, G. & Alvarado, A. (2013) Modelo Campus Viviente en Educación de CITeM para Desarrollo Profesional de Docentes. Ponencia en Primer Simposio Internacional Campus Viviente en Educación de CITeM. (13-16 Octubre). New Braunfels, Texas. EUA.
- Doerr, H. (2016). Designing Sequences of Model Development Tasks. En C. Hirsch & A. Roth, (Eds.), Annual perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics (pp. 197-206). Reston, VA: NCTM.

Hirsch, C. & Roth, A. (2016). Annual perspectives in Mathematics Education 2016. Mathematical Modeling and Modeling Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Land, S., Hannafing, M., & Oliver, K. (2012). Students-centered learning environments. Foundations, assumptions and design. En D. Johassen & S. Land (Eds.) Theoretical Foundations of learning environments (pp. 3-21). New York: Routledge.

Lesh, R., Hoover, M., Bonnie, H., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for Developing Thought Revealing Activities for Students and Teachers. En A. Kelly & R. Lesh (Eds.). Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education (pp. 591-645). Routledge

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H., Post, T., & Zawojewski, J. (2003). Model Development Sequences. En R. Lesh & H. Doerr (Eds.) Beyond constructivism: A models and modeling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Beyond constructivism: A models and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Mata, A. (2012) Diplomado en Enseñanza Significativa de las Ciencias con Tecnología, UJED. En Catálogo Nacional SEP para la formación Continua y Superación Profesional para Maestros de Educación Básica en Servicio.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10 (4), 313-340.

Vargas, V., Cristóbal, C., Carmona, G., Reyes, J., & Alvarado, A. (2014). Campus Viviente Quintana Roo. En M. Ramos & V. Aguilera (Eds.) Ciencias Naturales y Exactas (pp. 22-30). Valle de Santiago, Guanajuato: ©ECORFAN.