Actas

Tópicos Selectos de Educación en CITeM

T-I

ALVARADO-MONROY, Angelina
CARMONA-DOMÍNGUEZ, Guadalupe
MATA-ROMERO, Armando *Directores*

Red Internacional de Investigación Campus Viviente de Educación en Ciencias Ingeniería-Tecnología y Matemáticas

ECORFAN®

Volumen I

Para futuros volúmenes:
http://www.ecorfan.org/actas

ECORFAN Tópicos Selectos de Educación en CITeM

Las Actas ofrecerán los volúmenes de contribuciones seleccionadas de investigadores que contribuyan a la actividad de difusión científica de ECORFAN en su área de investigación en Educación en Ciencias, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas. Además de tener una evaluación total, en las manos de los editores de la Universidad Juárez del Estado de Durango que colaboraron con calidad y puntualidad en sus capítulos, cada contribución individual fue arbitrada a estándares internacionales (RENIECYT-LATINDEX-DIALNET-ResearchGateDULCINEA-CLASESudoc-HISPANA-SHERPA-UNIVERSIA-eREVISTAS-ScholarGoogleDOI-REBID-Mendeley), el Acta propone así a la comunidad académica, los informes recientes sobre los nuevos progresos en las áreas más interesantes y prometedoras de investigación en Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Alvarado-Monroy, Angelina · Carmona-Domínguez, Guadalupe · Mata-Romero, Armando

Directores

Tópicos Selectos de Educación en CITeM

Una visión integradora

T-I

Universidad Juárez del Estado de Durango. Diciembre, 2017.

ECORFAN®

Directores

Alvarado-Monroy, Angelina
Carmona-Domínguez, Guadalupe
Mata-Romero, Armando

Universidad Juárez del Estado de Durango
Universidad de Texas en San Antonio

ISBN: 978-607-8534-43-2
Sello Editorial ECORFAN: 607-8534
Número de Control ATSE: 2017-01
Clasificación ATSE (2017): 301217-0105

Prefacio

El Grupo Internacional de Investigación Campus Viviente de Educación en Ciencias, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (CITeM), es una red de investigación que dio inicio con una serie de conferencias y ponencias de trabajos de investigación durante el Primer Simposio Internacional Campus Viviente en Educación en CITeM en 2013, y ha sido formalizada a través de convenios firmados entre instituciones desde 2014. El objetivo de la red es propiciar una visión integradora en CITeM y lograr un impacto directo de los resultados de las investigaciones para lograr una práctica escolar de calidad para todos los estudiantes, preparación para la vida laboral y para estudios profesionales en CITeM, y el desarrollo de innovaciones tecnológicas y científicas. Las actividades sustanciales de esta comunidad de investigación y práctica, iniciadas desde el año 2010, son en tres ejes principales: diseño de ambientes innovadores de aprendizaje sustentados en la investigación y centrados en contenidos fundamentales de CITeM, desarrollo profesional docente vinculado a dichos contenidos y evaluación basada en el diseño (Carmona, Reyes, Vargas, Cristóbal, Alvarado, Mata y López, 2014). Información adicional está disponible en http://campusviviente.org.

El trabajo colaborativo de esta red, ha permitido realizar investigaciones para favorecer prácticas científicas en el aula que han tenido impacto en los diferentes niveles educativos a nivel local, regional, nacional e internacional. Derivado de estas actividades se han realizado publicaciones arbitradas e indizadas y formación de recursos humanos, tanto a nivel licenciatura como posgrado. También, se han organizado eventos académicos conjuntos tales como el Simposio Internacional Campus Viviente de Educación en CITeM, 2013, con sede en la Universidad de Texas en San Antonio, EUA; Panel de Discusión: Academic Collaborations in International Settings: Equity and Quality in Education through STEM Education en Global Latino Education Advocacy Days, 2015, celebrado en la Universidad de Texas en San Antonio, EUA; Primera y Segunda Reunión Nacional de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (Renace CITeM), 2015 y 2017 realizadas en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango, México.

Algunos de los trabajos de investigación presentados en la segunda Reunión Nacional en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas, realizada en septiembre de 2017, fueron organizados como artículos en extenso para conformar los ocho capítulos del primer tomo de Actas en Tópicos Selectos de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas.

En los Capítulos 1, 2, 3 y 4 la perspectiva de modelos y modelación se percibe como un vehículo para incorporar desde edades tempranas prácticas educativas auténticas, en el sentido de que es posible que los estudiantes se comporten como científicos, matemáticos, tecnólogos o ingenieros. Este tipo de prácticas promueven una integración de varias disciplinas de CITeM.

En el Capítulo 1 se puede leer la investigación, Utilizando Actividades Reveladoras de Pensamiento para Promover Prácticas Científicas en el Salón de Clase, conducida por Lima-González y Carmona-Domínguez con profesores en servicio del nivel medio superior. Las autoras exploran el uso de actividades reveladoras de pensamiento (ARP) para desarrollar el pensamiento científico y las prácticas de investigación científica de manera similar a la forma en que lo hacen los científicos. Es decir, desde una perspectiva holística que permite a los estudiantes múltiples oportunidades para explorar los conceptos científicos a través de indagaciones. En la actividad presentada, los participantes trabajaron en grupos para encontrar la inclinación de una rampa que permitiera a un carrito de juguete alcanzar la velocidad más alta posible. Ellos se involucraron en actividades relacionadas con la investigación científica, por ejemplo, el diseño de la investigación, selección de variables relevantes, recolección sistemática de datos, uso de diversas representaciones, la comunicación del diseño experimental y los resultados obtenidos. En su estudio, las autoras muestran que las ARP son actividades que potencialmente pueden apoyar de manera importante el desarrollo de prácticas y conocimiento científico significativo que atiende las demandas de la reforma educativa.

En el Capítulo 2, Secuencia de Desarrollo de Modelos para la Enseñanza y el Aprendizaje Multinivel e Interdisciplinario, Alvarado-Monroy, Olvera-Martínez, Mata-Romero y Escobedo-Bustamante, comunican los detalles del diseño y la evaluación de una secuencia de desarrollo de modelos que involucra a los participantes (maestros y estudiantes de diferentes niveles educativos) en el establecimiento de las reglas justas para un juego como resultado de un proceso científico y propicia el surgimiento de contenido matemático relacionado con las áreas de probabilidad y estadística. Los autores informan en su investigación cómo los participantes a través de los modelos construidos muestran evidencia de: su comprensión de la situación, diferentes formas de diseñar el experimento para la obtención y registro sistemático de los datos, al igual que diferentes formas de organizar, presentar, interpretar y comunicar sus resultados.

En esta misma dirección, en el Capítulo 3 desde una perspectiva de modelos y modelación, Vargas-Alejo y Cristóbal-Escalante presentan su investigación, Experiencias de Formación Docente en Educación en CITeM, en la cual describen una propuesta de formación docente orientada a la educación integradora de CITeM. Los resultados de la implementación de su propuesta nos muestran que las formas tradicionales de pensar de los docentes sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que surgieron al comienzo del proceso de formación, fueron modificadas, ampliadas y refinadas. Estos cambios de pensamiento involucraron ideas sobre la necesidad de fomentar la interdisciplinariedad, el uso de la tecnología y los entornos de trabajo colaborativo para promover la educación en CITeM desde una visión integradora.

Por su parte, Flores-Casas y López-Betancourt presentan en el Capítulo 4 la investigación conducida con estudiantes de bachillerato, Covariación a través de la Medición, con Sensor, de la Absorción de la Energía Radiante.

En su trabajo, las autoras presentan el diseño y evaluación de una actividad diseñada a partir de una situación cotidiana que involucra a los estudiantes en el registro y análisis de los cambios de temperatura durante un periodo de tiempo en piezas de papel de distintos colores. Para la actividad utilizaron sensores de temperatura que apoyaron el ambiente de aprendizaje. Entre los resultados que reportan se perciben dificultades en los estudiantes para vincular las representaciones gráficas y tabulares y esto impacta en las limitaciones mostradas para explicar con lenguaje matemático la covariación entre el tiempo y la temperatura.

En los capítulos 5, 6 y 7 se presentan estudios basados en la resolución de problemas y el uso sistemático y coordinado de tecnologías digitales para la construcción y desarrollo del conocimiento matemático. En este sentido, se muestran las formas de identificar, explorar, justificar y comunicar estrategias de solución que exhiben los participantes en el proceso de resolución de problemas en diferentes escenarios de aprendizaje.

Gómez-Arciga y Póveda-Fernández documentan en el Capítulo 5, El Uso de Tecnologías Digitales en Actividades que Extienden la Discusión Matemática de los Estudiantes, una investigación realizada con estudiantes de bachillerato que trabajan sobre la resolución de problemas que involucran el contenido de ecuaciones cuadráticas en ambientes apoyados con tecnología que permite establecer comunicación entre el grupo y, esto favorece discusiones productivas que trascienden y dan continuidad al trabajo realizado en el aula. En su trabajo presentan ejemplos que respaldan que el uso sistemático de tecnologías digitales tales como YouTube, Padlet y un Sistema de Geometría Dinámica, permitió que los estudiantes integraran contenidos matemáticos, desarrollaran habilidades al resolver problemas y reorganizaran sus ideas al establecer relaciones y conexiones entre los conceptos y objetos matemáticos involucrados.

En el Capítulo 6, también los autores Poveda-Fernández y Gómez Arciga, con su trabajo, MOOC Resolución de Problemas Matemáticos y Uso de Tecnologías Digitales: Su diseño e Implementación, exponen el diseño y evaluación de un conjunto de actividades interactivas disponibles a través de un curso en línea, abierto y masivo. Con ello, promueven escenarios centrados en el estudiante y en los cuales el profesor apoya el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas. En su reporte, los autores muestran evidencia del trabajo colaborativo de los participantes para resolver los problemas propuestos y la manera en que aprovechan la tecnología para validar y comunicar sus resultados, al igual que para transitar entre diferentes medios de representación.

Mata-Romero, Alvarado-Monroy y Olvera-Martínez, en el Capítulo 7 exponen su investigación, Experimento de Diseño para Transitar hacia una Definición Formalmente Operable de Polígono en Educación Secundaria. Los autores, a partir de un estudio exploratorio en educación secundaria, detectan que algunos procedimientos y resultados que involucran el concepto de polígono, atienden únicamente a los polígonos convexos. En atención a dicha problemática diseñan una secuencia didáctica con el propósito de construir y fortalecer una definición adecuada y funcional de polígono que permita la deducción de una expresión algebraica para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono (cóncavo o convexo). En su trabajo informan el efecto del diseño en la formación del concepto de polígono en los estudiantes, al igual que en el desarrollo de sus habilidades para utilizarlo en el cálculo de la suma de sus ángulos interiores.

Otro factor importante en el proceso educativo corresponde a la evaluación. En la educación en CITeM, este aspecto cobra mayor relevancia dado que la interdisciplinariedad, el acceso democrático a las ideas esenciales y las prácticas educativas de indagación en contexto, agregan complejidad a los ambientes de aprendizaje y, por lo tanto, nuevas variables a considerar en las pruebas estandarizadas en educación.

De esta manera, la producción finaliza con el trabajo de Barraza-Barraza que aparece en el Capítulo 8, Variables Sistémicas Relacionadas con Resultados en Pruebas Estandarizadas en Educación: Una Revisión de la Literatura. La autora recopila algunos estudios que han recalcado la influencia que tienen diferentes aspectos socioeconómicos, familiares y culturales en los resultados obtenidos en las pruebas estandarizadas en educación. En tales estudios se caracteriza al estudiante como un sistema abierto que responde ante estímulos y que intercambia información con otros sistemas con los que interactúa, argumentando así la necesidad de estudiar los resultados desde un enfoque sistémico, donde se considere la influencia que los aspectos encontrados en la literatura tienen en el desempeño de los alumnos en las mencionadas pruebas.

Los editores agradecemos a los revisores anónimos participantes del proceso de arbitraje por sus detallados revisiones y dictámenes, así como al comité editorial por contribuir enormemente para concretar esta publicación. También, deseamos expresar nuestra gratitud a la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango y al i2 STEM Education Research Center of The College of Education and Human Development at The University of Texas at San Antonio, por el proceso de preparar la edición de este volumen. Finalmente, agradecemos el financiamiento otorgado por el Programa de Fortalecimiento a la Calidad Educativa (PFCE 2016-2017) y al Programa de Apoyos Institucionales y Financiamiento a Proyectos de Investigación 2017 del Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Durango (COCYTED); Proyecto Campus Viviente in STEM Education financiado por el Colegio de Educación de la Universidad de Texas en San Antonio, Secretaría de Educación del Gobierno del Estado de Coahuila, AHMSA International, y Mexicans and Americans Thinking Together; Proyecto S5: Sustainable Support Systems for Student Success financiado por el Departamento de Educación de EUA a través de Academy for Teacher Excellence (UTSA); y el Proyecto UTSA Pathways Program: P-20 Pipeline Issues financiado por el Instituto de Ciencias Educativas de EUA a través del Child and Adolescent Policy Research Institute (UTSA).

Desde estas iniciativas para difundir los resultados de investigación, se pueden apoyar la puesta en marcha de acciones sistemáticas, transversales y articuladas encaminadas hacia favorecer el acceso democrático al conocimiento y a la generación en nuestro entorno, de cambios culturales profundos en educación para CITeM. Con este primer tomo de Actas Tópicos Selectos de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas, el Grupo Internacional de Investigación Campus Viviente de Educación en Ciencias, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (CITeM) espera fortalecerse para poder aportar conocimientos al sistema educativo.

Carmona-Domínguez, Guadalupe
Alvarado-Monroy, Angelina
Mata-Romero, Armando

Estado de Durango, México
Diciembre, 2017.

Contenido Pág.

Utilizando actividades reveladoras de pensamiento para promover prácticas científicas en el salón de clase

LIMA-GONZÁLEZ, Cynthia & CARMONA-DOMÍNGUEZ, Guadalupe

C. Lima & G. Carmona

University of Texas at San Antonio
Cynthia.Lima@utsa.edu

A. Alvarado, G. Carmona y A. Mata (Dirs.) Una visión integradora. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

In the last years, the implementation of a holistic view of teaching science in the classroom that considers the relevance of providing students multiple opportunities to explore the scientific concepts through inquiry has been encouraged as part of the education reform. Under this perspective, students develop concepts and scientific practices and construct, refine and extend scientific knowledge through inquiry (NRC, 2012). Thus, scientific practices have become a key component of the curriculum along with the development of core concepts or big scientific ideas.

In this study we explore the use of thought revealing activities (ARP by its name in Spanish) to develop authentic inquiry practices and scientific thinking (Chinn & Malhotra, 2002) using the ARP Carreritas. The ARP, *Carreritas* was implemented with 21 secondary level in-service teachers. Participants worked in groups to find the highest speed that a toy car could reach as it traveled down a ramp. Data collected was qualitatively analyzed to identify the scientific practices implemented while participants solved the ARP, and the concepts used to make sense of the phenomenon. We found that as part of the solving process, participants engaged in scientific practices including, inquiry design, variable selection, systematic data collection, use of multiple representations and communication of the experimental design and results. Some of these practices were authentically developed similarly to scientists. The results show that ARPs can potentially support the development of inquiry practices and scientific knowledge in a meaningful and authentic way, addressing the demands of the education reform.

Prácticas científicas, Actividades Reveladoras de Pensamiento

Introducción

Los enfoques de México y Estados Unidos sobre la enseñanza de la ciencia incluidos en el Modelo Educativo de 2017 y en los Estándares de Ciencia Nacionales (NGSS por sus siglas en inglés) de 2013 respectivamente, presentan algunos lineamientos paralelos que promueven la enseñanza de la ciencia a través de la indagación[1]. Bajo estos enfoques se considera que la enseñanza de las ciencias debe estar centrada en un conjunto de ideas clave cuyo aprendizaje facilite la estructuración del conocimiento científico, la interpretación de nuevos fenómenos; y, permitir múltiples oportunidades para construir, organizar y profundizar el conocimiento científico a través de indagaciones. La indagación se convierte en una parte fundamental del aprendizaje ya que es la manera en la que se genera el conocimiento científico; y las prácticas científicas toman nuevo significado al requerir que su desarrollo por parte de los estudiantes esté entrelazado con la construcción de los contenidos (NRC, 2012; SEP, 2017).

La demanda que establece tanto el Modelo Educativo y los Estándares de Ciencia Nacionales de la reforma educativa de integrar el aprendizaje de prácticas científicas con el desarrollo del conocimiento tiene diversas implicaciones. Una de ellas es el diseño y creación de ambientes de aprendizaje en los que las prácticas y los conocimientos científicos se desarrollen de manera significativa. Esto es, que las prácticas científicas sean auténticas, una forma de generar y modificar el conocimiento científico.

[1] Dada la convergencia de ambos enfoques educativos en la relevancia de la indagación para la enseñanza de la ciencia, se utiliza el término Reforma Educativa de manera incluyente haciendo referencia a las Reformas Educativas de México y Estados Unidos.

Investigar los alcances de los ambientes de aprendizaje en promover prácticas científicas auténticas nos permitirán mejorar el diseño e implementación de dichos ambientes en el aula para lograr que los estudiantes aprendan ciencia de manera significativa y se cumplan de manera exitosa los objetivos establecidos en el modelo educativo de México y Estados Unidos. En el siguiente apartado se hace una breve descripción de lo que consideraremos como prácticas científicas auténticas y de las actividades reveladoras de pensamiento.

1 Las prácticas científicas y la reforma educativa

La reforma educativa propone la enseñanza de prácticas científicas como una forma de generar conocimiento. De acuerdo con esta propuesta, el aprendizaje de la ciencia debe darse a través de la exploración y comprensión del mundo natural (NRC, 2007, 2012; SEP, 2017). Aprender ciencia no es solamente aprender contenido científico, sino también involucrarse en el proceso de cómo hacer ciencia; esto es, tener oportunidades múltiples de participar en las prácticas científicas que permitan a los estudiantes generar, transformar y profundizar su conocimiento de los fenómenos naturales.

Sin embargo, las indagaciones que tradicionalmente se llevan a cabo en el aula, son indagaciones sencillas en el sentido de Chinn y Malhotra (2002); en contraste con las indagaciones auténticas, las cuales son llevadas a cabo por los científicos. Las indagaciones sencillas se caracterizan principalmente por dar a los estudiantes una pregunta de investigación previamente identificada junto con una serie de pasos prescritos que deben llevarse a cabo para dar respuesta a dicha pregunta y si se aplican de manera correcta llevarán al resultado esperado (Chinn & Malhotra, 2002). Berland et al. (2015) argumentan que, si se pone énfasis en el aprendizaje de prácticas científicas como pasos a seguir, puede resultar en la memorización de procedimientos, en lugar de promover la involucración significativa con la construcción del contenido científico como se concibe en la reforma educativa.

En contraste, en las indagaciones auténticas, los científicos generan sus propias preguntas de investigación y la aproximación para darles respuesta generalmente no es lineal o sencilla. Antes bien, es necesario que los científicos realicen múltiples observaciones y mediciones, transformen los datos observados, analicen posibles fallas en la metodología y sitúen su investigación en un contexto más amplio, entre otras actividades.

Los estándares curriculares que buscan integrar las prácticas y contenidos científicos incluyen una serie de habilidades necesarias para realizar indagaciones científicas que se deben desarrollar durante la escuela primaria y secundaria. Entre estas habilidades se encuentra la identificación de preguntas y conceptos que guían las investigaciones científicas, el diseño e implementación de investigaciones, formular y revisar explicaciones científicas usando lógica y evidencia, usar matemáticas y desarrollar argumentación científica (NRC, 2007, 2012). La inclusión de estas habilidades en el diseño de actividades para el aula ayudaría a los estudiantes a desarrollar una forma de pensar más crítica y profunda en contraste con el pensamiento que desarrollarían al seguir instrucciones prescritas para la conducción de un experimento.

Dado el énfasis en la investigación científica y el desarrollo de prácticas científicas auténticas, es importante contar con actividades o ambientes de aprendizaje que generen oportunidades para desarrollar las habilidades de manera no-prescriptiva. Esto es, que las múltiples observaciones, el uso de matemáticas, tecnología, el refinamiento de teorías, surja de manera natural como parte del proceso científico de generación del conocimiento. Para este propósito utilizamos las Actividades Reveladoras de pensamiento (ARP).

Un tipo de actividades no-prescriptivas que abren un espacio para que los estudiantes desarrollen un conocimiento profundo y significativo de ideas centrales relacionadas con la Ciencia, Matemáticas, Tecnología e Ingeniería (CITeM). En la siguiente sección se describe este tipo de actividades.

2 Actividades reveladoras de pensamiento

Considerando la visión sobre la enseñanza de la ciencia a través de la indagación, han surgido una diversidad de aproximaciones al desarrollo de actividades, ambientes y problemas de indagación que algunas veces no reflejan los atributos reales de la indagación científica (Chinn & Malhotra, 2002), o cuya implementación es inconmensurable con la visión teórica a partir de la cual fue originada (Abd-El-Khalick et al., 2004).

Dentro de las actividades que promueven la indagación científica a través de la modelación se encuentran las ARP. Las ARP están basadas en la perspectiva de Modelos y Modelación de Matemáticas en las que los estudiantes producen modelos matemáticos como respuesta a un problema abierto. Los modelos que generan los estudiantes serán utilizados por un cliente. Esto requiere que los modelos deban ser descritos de manera detallada para que sean reusables, modificables y manipulables (Lesh & Doerr, 2003). Los problemas se presentan a los estudiantes en forma de un artículo de revista o periódico que presenta el contexto de la vida real en el que se situará el problema. Una vez que se ha permitido que los estudiantes se familiaricen con el contexto, se introduce el problema en la forma de una solicitud de un cliente.

La forma en que se plantean estos problemas permite a los estudiantes resolverlos teniendo el objetivo en mente. Solucionar este tipo de problemas, requiere que los estudiantes desarrollen un entendimiento profundo del fenómeno utilizando una diversidad de herramientas conceptuales y físicas que capturan la forma en que se desarrollan sus ideas durante el proceso de solución.

Es importante notar que el diseño de ARP sigue principios establecidos que aseguran que la actividad esté situada en un contexto real, genere la construcción de modelos, permita que los estudiantes se auto-evalúen, documenten sus soluciones, y que los modelos generados sean reusables, se puedan compartir y que sean sencillos pero que contengan conceptos matemáticos significativos (para una descripción detallada de los principios de construcción de las ARP, ver Lesh, Hoover, Hole, Kelly & Post, 2000).

Las investigaciones realizadas alrededor del uso de ARP en la enseñanza de CITeM coinciden en que son una herramienta poderosa para la enseñanza, que permite a los estudiantes desarrollar y transformar ideas poderosas de CITeM (ej. Carmona & Greenstein, 2013; Self et al., 2008).

Hasta ahora el enfoque en el análisis del alcance que tienen las ARP en apoyar el aprendizaje, se ha centrado en las grandes ideas que los estudiantes desarrollan. Dado el enfoque actual de indagación impulsado por la Reforma Educativa, es importante investigar el alcance que tienen estas actividades en desarrollar las prácticas científicas de manera auténtica, es decir, de una forma más similar a la forma en la que se desarrollan a través de las indagaciones científicas.

En estas páginas se presentan los resultados de un estudio realizado para identificar el alcance que tiene la actividad reveladora de pensamiento *Carreritas* en desarrollar las prácticas científicas de manera auténtica.

Método

1 Contexto y Participantes

El contexto de la ARP *Carreritas* (Lima y Carmona, 2015) es una competencia de descenso con autos de juguete. En esta carrera, los carros de juguetes se deslizan por rampas de un metro. Cada equipo debe determinar la inclinación de su rampa, la distancia de la base de la rampa a la meta de tal forma que el carrito cruce la meta a la mayor velocidad posible. Estos datos deben darse con precisión a un juez, quien replicará las condiciones determinadas por cada equipo para identificar la precisión de las mediciones y al ganador. El problema se ilustra en la Figura 1.1.

Figura 1.1 Actividad Reveladora de Pensamiento: *Carreritas* (Lima y Carmona, 2015)

Carreritas: El problema

Daniel y Mariana están entusiasmados por su participación en la carrera el próximo año. Ellos ya tienen una rampa y diferentes carros de juguete.

¡Ayuda a Daniel y Mariana a prepararse para la carrera! El juez pedirá:

La combinación de distancia entre la base de la rampa y la meta, el ángulo de inclinación de la rampa y la velocidad a la que el carro cruzará la meta. Considera que la velocidad a la que el auto cruce la meta tendrá que ser mayor a la de los demás competidores para poder ganar.

Escribe una carta a Daniel y Mariana en la que les expliques el método para encontrar la combinación perfecta de la meta, inclinación de la rampa y velocidad del carro para poder ganar.

Los participantes fueron 21 maestros en servicio de nivel medio superior, quienes trabajaron en grupos pequeños para resolver la ARP ilustrada en la Figura 1.1 durante una sesión de 2 horas. Para la resolución del problema los participantes tenían a su alcance una diversidad de materiales, incluyendo, rampas, carros de juguete, sensores de movimiento, cronómetros, etc. Cada equipo eligió las herramientas con las que trabajaría para construir su modelo.

2 Recolección y análisis de datos

El propósito de este estudio fue el de investigar las prácticas científicas y los conceptos que emergen durante la solución de la ARP *Carreritas*, e identificar si las prácticas científicas emergentes son auténticas. Para ello, se recolectaron audio, video y observaciones de los diferentes equipos conforme resolvían la actividad. La respuesta de los equipos a la actividad queda plasmada de manera concreta en la carta en la que describen los datos requeridos por el juez. Las cartas desarrolladas por los distintos grupos también fueron recolectadas.

Para identificar y describir los conceptos y prácticas científicas desarrolladas por los participantes al resolver la actividad Carreritas, los datos recolectados se transcribieron y codificaron siguiendo dos aproximaciones (Lemke, 2012; Marshall & Rossman, 2011).

Las *ideas científicas* fueron codificadas de manera emergente usando un código descriptivo (Miles, Huberman & Saldaña, 2014). Se identificaron conjuntos coherentes que expresaran relaciones entre variables que permitieran explicar o predecir el comportamiento del carrito al deslizarse por la rampa. Estas ideas científicas son relaciones entre variables que establecieron los participantes para determinar la inclinación de la rampa, el punto de la trayectoria del carrito donde su velocidad sería máxima, y la velocidad que alcanzaría en ese punto. El enfoque del análisis son los sistemas coherentes de ideas que establecen las relaciones entre variables.

Las *prácticas científicas* fueron analizadas utilizando un código deductivo (Miles, Huberman & Saldaña, 2014). Esto es, un código basado en las prácticas científicas identificadas como distintivas de la indagación científica (NRC, 2012, p. 49):

1. *Hacer preguntas*
2. *Desarrollar y usar modelos*
3. *Planear e implementar investigaciones*
4. *Analizar e interpretar datos*
5. *Usar matemáticas y pensamiento computacional*
6. *Construir explicaciones*
7. *Participar en argumentación basada en evidencia*
8. *Obtener, evaluar, y comunicar información*

Este código fue la guía para identificar las prácticas científicas que contribuyeron a la resolución del problema.

Resultados y discusión

1. Conocimiento científico

La búsqueda central de los distintos equipos durante la resolución del problema fue identificar el punto de la trayectoria en la que el carrito alcanzaría su velocidad máxima al deslizarse por una rampa. Durante la resolución de la ARP, los participantes utilizaron un pequeño conjunto de variables y relaciones para construir sus modelos, incluyendo velocidad, aceleración, fricción, y el ángulo de la rampa.

Las respuestas mostraron tres modelos coherentes, en los que se relacionan conceptos y variables de distintas maneras. Es de notar que cada uno de los modelos incluye diferentes variables y número de relaciones. A continuación, se discuten los tres modelos desarrollados que describen el movimiento del carro de juguete a lo largo de la rampa:

Modelo 1. La velocidad final del carrito depende del ángulo de inclinación de la rampa. En este modelo se establece una relación proporcional entre la inclinación de la rampa y la velocidad final de carrito. De acuerdo con esta relación, a mayor inclinación de la rampa, el carrito alcanzará una velocidad mayor cuando deje la rampa. Esta relación fue central para la generación del modelo.

Modelo 2. El carrito alcanza una aceleración constante si la inclinación de la rampa es pequeña (menor a 25°). A menor aceleración disminuye la fricción. La fricción disminuye la velocidad del carro. Esta relación entre la aceleración del carrito al bajar la rampa y la inclinación del carrito indica que la inclinación de la rampa determina la fricción entre el carro y la superficie.

En este modelo se utilizan tres relaciones diferentes. La primera relación es entre la inclinación de la rampa y el tipo de aceleración del carrito, en este caso el equipo identifica la aceleración del carro como constante cuando el ángulo de inclinación de la rampa no es grande o es menor a 25°. La segunda idea se refiere a una relación entre la fricción y la aceleración del carrito. La aceleración del carrito se identifica como un factor que aumenta o disminuye la fricción entre la rampa y el carrito, a mayor aceleración, mayor fricción. Por último, se relacionan la fricción y la velocidad, a mayor fricción se reduce la velocidad.

Modelo 3. Un aumento en el ángulo de inclinación de la rampa no implica aumento en la velocidad del carrito. De acuerdo con este modelo, los ángulos de inclinación preferidos para la rampa serían de 45°.

Los modelos descritos en respuesta a la ARP Carreritas reflejan el alcance de esta actividad de desarrollar el pensamiento científico de los participantes en el contexto de una indagación científica. Las ideas desarrolladas durante la actividad incluyen principalmente relaciones de proporcionalidad que describen el sistema y permiten predecir el comportamiento del carrito en el caso de realizarse algún cambio. Por ejemplo, a mayor inclinación de la rampa, mayor la velocidad final del carrito.

A diferencia de los modelos 1 y 3, el modelo 2 presenta una serie de ideas entrelazadas que expresan relaciones entre distintas variables que intervienen en el movimiento del carrito. Por ejemplo, inclinación de la rampa, aceleración del carrito y fricción. De esta forma, se observa el uso de ideas que los participantes posiblemente han construido con anterioridad, por ejemplo, la relación entre fricción y movimiento. Estas relaciones constituyen un modelo explicativo del movimiento del carrito con base en las fuerzas que afectan su movimiento a lo largo de la rampa.

En el modelo 3 se observa que uno de los aspectos que influyeron en su construcción, fue la funcionalidad de la rampa. En particular el hecho de que, si la rampa se inclina demasiado, el carro se desliza en lugar de rodar y se impacta contra el piso al llegar a la parte inferior de la rampa. Aunque teóricamente se podría asumir que a mayor inclinación de la rampa la velocidad que alcanza el carrito al llegar a la parte inferior es mayor, el modelo 3 incluye un límite en la inclinación de la rampa, lo que muestra la inclusión de aspectos que se han desarrollado a partir del modelo, y que de otra forma no serían observables. Las limitaciones en el ángulo son resultado directo de la experimentación con el modelo concreto. Estos aspectos influyeron en la selección de ángulos menores a 45° en los que el carrito pudiera rodar por la rampa en lugar de deslizarse, y que su trayectoria fuera continua una vez que salía de la rampa y empezaba a rodar por el piso. Este fue uno de los factores que pudo influir de manera importante en el ángulo de la rampa.

Identificar los factores limitantes de la rampa es parte importante de la generación de un modelo para explicar un fenómeno lo cual es una característica de la indagación auténtica.

2 Prácticas científicas

Durante la resolución de la ARP Carreritas, los participantes construyeron un modelo concreto de la rampa, utilizaron carritos de juguete y sensores de movimiento para tomar medidas sobre la velocidad de los carritos en diferentes condiciones. Las prácticas científicas que surgieron para resolver la actividad se describen en los siguientes párrafos.

(1) *Desarrollar y usar modelos*. Las ARP piden de manera explícita el desarrollo de un modelo que permita explicar un fenómeno. Los modelos que se presentaron en el apartado anterior muestran que generar un modelo es responder a la ARP. En este caso, los modelos generados expresan relaciones de proporcionalidad entre distintas variables, por ejemplo, a mayor inclinación mayor fricción entre la rampa y el carro. Aunque las relaciones no se expresaron de manera explícita los participantes lo hicieron de manera conceptual. Estos modelos permitían predecir lo que pasaría si se cumplían las condiciones de inclinación identificadas, pero en algunos casos se hicieron relaciones más generales que predecían lo que sucedería con el carrito si se aumentaba o disminuía la inclinación de la rampa.

De acuerdo con el Consejo Nacional de Investigación (NRC, 2012), la Ingeniería utiliza los modelos para identificar posibles fallas que puedan desarrollarse o soluciones a problemas. En este caso, se identificaron posibles retos en el uso de la rampa. Uno de ellos incluía que si la rampa estaba muy inclinada el carro se deslizaría en lugar de rodar y al salir de la rampa podría impactarse contra el piso.

(2) *Planear y llevar a cabo investigaciones*. Durante la resolución de la ARP, los participantes identificaron las variables que querían medir y una manera consistente para hacerlo. Entre las variables seleccionadas estuvieron la velocidad del carrito, el tiempo que le llevaba llegar a la parte superior de la rampa, y el ángulo de inclinación de la rampa. Al inicio de la actividad los equipos hicieron pruebas “informales”. Esto es, hicieron pruebas para identificar el mejor diseño de la rampa, la forma en que debían armar el modelo concreto para tomar los datos, las inclinaciones que mejor funcionaban para que el carrito bajara sin deslizarse y sin impactarse contra el piso.

Una parte importante de la labor científica es la identificación de variables que soporten el diseño experimental. Además de su identificación es importante determinar su variación, los instrumentos para su medición y cuáles variables se van a controlar. Los participantes hicieron sentido de las mediciones que debían hacer, incluyendo la velocidad del carro y el ángulo de la rampa.

(3) *Analizar e interpretar datos*. El uso del sensor de movimiento fue clave en el diseño, debido a que éste les permitía tener en tiempo real datos sobre la velocidad del carrito y el tiempo que le toma recorrer la rampa completa. Así, el uso de la herramienta permitió que los participantes se preguntaran sobre si el tiempo y la velocidad del carrito medidos con el sensor de movimiento eran los correctos, haciendo sentido de las mediciones con base en las observaciones. Por ejemplo, después de medir el tiempo que le toma al carrito deslizarse, uno de los equipos preguntó: “¿0.04 segundos es muy poquito no?” Este cuestionamiento denota que los participantes hicieron sentido de los datos obtenidos y verificaron sus mediciones.

Una vez que los equipos encontraron la inclinación que consideraron les podría dar la máxima velocidad del carrito al cruzar, realizaron una recolección de datos para asegurar que los datos generados fueran consistentes. “Nos tienen que salir lo mismo” expresó un equipo indicando que una vez que la inclinación de la rampa permaneciera constante, debían obtener las mismas medidas de velocidad para el carrito.

(4) *Obtener, evaluar y comunicar información*. En el caso de las ARP, los participantes deben escribir una carta para comunicar sus resultados que podrán ser utilizados por “el cliente”, en este caso reproducidos por el juez para determinar al ganador. Así, comunicar información está implícito en la solución de la actividad. Sin embargo, los participantes deben identificar qué información deben comunicar. Las cartas escritas por los equipos incluyeron: (1) recomendaciones sobre el diseño de la rampa, (2) instrumentación y (3) relaciones entre variables.

La necesidad de que los resultados fueran replicables, que es una de las características de la investigación científica, permitió que los participantes generaran una descripción más detallada de la forma en la que se llevó a cabo la experimentación, incluyendo información que soporte los resultados obtenidos como la forma de medir y el modelo concreto utilizado para la experimentación.

Las recomendaciones sobre el diseño de la rampa incluyeron estabilidad, y el ángulo de inclinación a la que se debía colocar. La estabilidad se refiere a que la rampa esté fija al momento de realizar la competencia.

Los participantes notaron que la posición del sensor de movimiento podía influir en la medida que estaban tomando. Por ejemplo, uno de los equipos notó que, si el sensor se coloca a nivel del piso, estarían midiendo la velocidad del carrito en su trayectoria horizontal una vez que deja la rampa. En contraste, si se coloca a nivel de la rampa, estarían midiendo la velocidad del carrito durante su trayectoria sobre la rampa.

Por último, las relaciones entre las variables son parte del modelo explicativo del fenómeno y al mismo tiempo les permite predecir las variaciones que puede sufrir si se cambian algunas de las medidas dadas como el ángulo de inclinación de la rampa.

En los párrafos anteriores se describen los modelos conceptuales y las prácticas científicas que los participantes desarrollaron durante la solución de la ARP Carreritas. Al inicio de estas páginas se discutieron las diferencias establecidas por Chinn y Malhotra (2002) entre las indagaciones sencillas u auténticas, considerando que las indagaciones auténticas pueden apoyar el desarrollo de las prácticas científicas a la manera en la que lo hacen los científicos, en lugar de desarrollarlas de manera memorística al seguir pasos prescritos.

Los resultados obtenidos en este estudio muestran que algunas de las prácticas científicas que emergieron durante la actividad pueden ser caracterizadas como prácticas de indagaciones auténticas. Las prácticas científicas que emergieron como parte de la resolución de la ARP que pueden ser caracterizadas como auténticas son: el uso de modelos concretos, selección y medición de variables, e instrumentación.

Chinn y Malhotra (2002) identifican el uso de modelos concretos como una característica distintiva de las indagaciones auténticas. Los modelos concretos desarrollados en respuesta a la ARP fueron similares a los descritos en el contexto de la actividad. Durante su construcción los participantes tuvieron que hacer sentido de la información incluida en el contexto. En particular dónde tendrían que colocar la meta. Esta es una característica de las indagaciones auténticas. Los modelos conceptuales identificados, que describen el movimiento del carrito por la rampa, pueden ser reutilizados y aplicados a otros sistemas de plano inclinado. Esto es un requisito de los modelos que se puedan generar a través de ARP (Lesh et al., 2000), por lo que el conocimiento generado a través de esta actividad es reusable.

Las investigaciones auténticas conectan diferentes fenómenos que siguen patrones similares, por lo que, generar un modelo que pueda explicar y predecir fenómenos similares puede ser considerado una característica de las investigaciones auténticas.

En cuanto al desarrollo y planeación de experimentos, la mayoría de las variables se mantienen constantes, por ejemplo, la superficie de las rampas, el tipo de carritos utilizados, etc. Los participantes eligieron medir distintas variables del carrito, como su aceleración y su velocidad. Algunos de los modelos también incluyen variables que pueden ser medibles pero que en ese momento no se midieron como la fricción. En particular, el modelo 2 relaciona más de cuatro variables con las que se provee una red más amplia de relaciones que dan explicación al fenómeno observado. Dada la libertad para identificar las variables que mejor respondan al requerimiento del cliente, así como para la planeación en la medición y la forma en la que las variables dependientes cambiarán a lo largo del experimento, se puede argumentar que la actividad se asemeja más en este aspecto a una indagación auténtica que a una indagación sencilla.

Los conceptos que emergen no son necesariamente alineados científicamente. Como se ha mostrado, al resolver ARP relacionadas con ciencia, pueden surgir diversas concepciones previas que no necesariamente son las aceptadas científicamente (ej. Self et al., 2008). Las implicaciones de esto en relación con las prácticas científicas, es que muestran una actividad que difiere de la tradicional actividad práctica la cual al seguir paso por paso nos permite llegar a una conclusión previamente establecida y científicamente aceptada. En el caso de esta ARP, la experiencia hace que los participantes expresen ideas que aún necesitan refinamiento e integración a un marco teórico más amplio para la formalización científica de los conceptos que emergieron durante el proceso de solución de la ARP.

Conclusiones

Los conceptos y prácticas científicas que emergieron durante la implementación de la ARP *Carreritas* son evidencia de su alcance en apoyar el desarrollo de prácticas científicas auténticas que se consideran importantes para la construcción del conocimiento científico. El hecho de que algunas de las prácticas científicas que promueve la resolución de la actividad presentada en estas páginas sean auténticas, permite a los participantes involucrarse en el proceso de investigación de manera más profunda, al tomar decisiones sobre las variables, las mediciones que son importantes y la precisión de los resultados. De igual forma, ofrecen oportunidades para que quienes participan en la solución de esta actividad, construyan un modelo sobre el mundo natural que puede ser utilizado para interpretar otros fenómenos similares y profundizar en ideas de energía, fuerza y movimiento, las cuales se ha encontrado pueden representar un reto para los estudiantes debido a las concepciones previas con las que llegan al aula (Halloun & Hestenes, 1985).

El proceso de indagación que generó la resolución de la ARP reportada en estas páginas nos muestra la forma en la que el hacer ciencia se convierte en una forma de desarrollar el conocimiento científico por medio de la participación en prácticas científicas, tales como recolectar datos y diseñar experimentos. Sin embargo, el refinamiento de algunas de estas estas prácticas necesita ser apoyado por el profesor. Es necesario realizar más investigaciones alrededor de las formas en las que el maestro puede apoyar a los participantes durante las actividades a desarrollar algunas de las prácticas científicas como el registro de datos o el diseño experimental, cuidando de no crear procedimientos rutinarios.

Agradecimiento

Esta investigación fue realizada con el apoyo del proyecto Campus Viviente in STEM Education en la Universidad de Texas en San Antonio.

Referencias

Abd-El-Khalick, F., Boujaoude, S., Duschl, R., Lederman, N. G., Mamlok-Naaman, R., Hofstein, A., Niaz, M., Treagust, D., & Tuan, H. l. (2004). Inquiry in science education: International perspectives [Indagación en la Ciencia educativa: Perspectivas internacionales]. *Science Education, 88*(3), 397-419.

Berland, L. K., Schwarz, C. V., Krist, C., Kenyon, L., Lo, A. S., & Reiser, B. J. (2016). Epistemologies in practice: Making scientific practices meaningful for students [Epistemologías en práctica: Haciendo significativas las practicas científicas para los estudiantes]. *Journal of Research in Science Teaching, 53*(7), 1082-1112.

Carmona, G., & Greenstein, S. (2013). Investigating the relationship between the problem and the solver: who decides what math gets used? [Investigando la relación entre el problema y el que lo resuelve: ¿quién decide qué matemáticas se usan?] En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 245-254). Dordrecht: Springer.

Chinn, C. A., & Malhotra, B. A. (2002). Epistemologically authentic inquiry in schools: A theoretical framework for evaluating inquiry tasks [Indagaciones epistemológicamente auténticas en las escuelas: Un marco teórico para evaluar los problemas de indagación]. *Science Education*, *86*(2), 175-218.

Halloun, I., & Hestenes, D. (1985). Common sense conceptions about motion [Concepciones sobre movimiento basadas en el sentido común]. *American Journal of Physics, 53*(11), 1056 - 1065.

Lima, C. & Carmona, G. (2015) *Carreritas* [Actividad Reveladora de Pensamiento].

Lemke, J. L. (2012). Analyzing verbal data: Principles, methods, and problems [Analizando datos verbales: Principios, métodos y problemas]. En B. Fraser, K. Tobin, & C. McRobbie, *Second international handbook of science education* (pp. 1471-1484). Dordrecht: Springer.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics, teaching, learning, and problem solving [Fundamentos de una perspectiva de modelos y modelación en Matemáticas, Enseñanza, aprendizaje y resolución de problemas]. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Earlbaum.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers [Principios para diseñar actividades reveladoras de pensamiento para estudiantes y maestros]. En A. Kelly. & R. Lesh (Eds.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-646*). New Jersey*: Lawrence Earlbaum.

Marshall, C., & Rossman, G. B. (2011). *Designing qualitative research* [Diseñando investigación cualitativa]. Thousand Oaks, CA: Sage.

Miles, M., Huberman, A., & Saldaña, J. (2014). *Qualitative data analysis: A Methods Sourcebook* [Análisis de datos cualitativos: Un libro de métodos]. Thousand Oaks, CA: Sage.

NRC. (2007). *Taking science to school: Learning and teaching science in grades K-8* [Llevando la ciencia a la escuela: Aprendiendo y enseñando ciencia en los grados K-8]. Washington, DC: The National Academies Press.

NRC. (2012). *A Framework for K-12 Science Education: Practices, Crosscutting concepts, and Core ideas* [Un marco para la ciencia educativa en K-12: Prácticas, Conceptos transversales e ideas fundamentales]. Washington, DC: The National Academies Press.

Self, B. P., Miller, R. L., Kean, A., Moore, T. J., Ogletree, T., & Schreiber, F. (2008). *Important student misconceptions in mechanics and thermal science: Identification using model-eliciting activities* [Ideas previas importantes de los alumnos en mecánica y ciencias térmicas: Identificación usando actividades reveladoras de pensamiento]. Paper presented at the Frontiers in Education Conference, 2008. FIE 2008. 38th Annual.

SEP. (2017). *Modelo educativo para la educación obligatoria*. México.

Secuencia de desarrollo de modelos para la enseñanza y el aprendizaje multinivel e interdisciplinario

ALVARADO-MONROY, Angelina, OLVERA-MARTÍNEZ, Carmen, MATA-ROMERO, Armando y ESCOBEDO-BUSTAMANTE, Adriana

A. Alvarado, C. Olvera, A. Mata y A. Escobedo

Universidad Juárez del Estado de Durango
aalvarado@ujed.mx, carmen.olvera@ujed.mx, armandomr@ujed.mx, adriana.escobedo@ujed.mx

A. Alvarado, G. Carmona y A. Mata (Dirs.) Una visión integradora. Tópicos Selectos de Educación en CITeM. ©ECORFAN- México, 2017.

Abstract

The objective of this research has been to design and implement a Model Development Sequence to explore tasks and its potential through the perspective of models and modeling (Lesh et al., 2003). The proposed design aim promotes educational practices with an integrating view of two or more disciplines of Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM). The sequence was implemented with groups of students and groups of teachers of different educational levels. In this chapter, we document some of the results of the implementation, including productions from students as well as from teachers, in an attempt to show different cycles of refinement that exhibit the participants during the production of models when they try to solve a situation that involves establishing fair rules for a game. Among the main findings about instructional design, we can notice that the main qualities of the design are: a valid and authentic situation that may occur in real life; the task involves the construction, explanation and prediction of a mathematical structure; the participants are able to recognize by themselves wich are the ideas or 'good answers', both own and from others; through the letter is possible to access to participants' reasoning, because they explain what they considered to establish the game's fair rules. Since the Model Development Sequence does not require previous knowledge, it is accessible to a wider range of learners and encourages the emergence of models that are constantly revised and refined in order to transit from informal knowledge to scientific knowledge. Furthermore, the results of this research allow observing iterative cycles of expressing, proving, and checking the thought processes of researchers, teachers and students.

Models and Modeling, Design Model Development Sequence, STEM Education

Introducción

En la actualidad la interdisciplinariedad en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática juega un papel primordial, ya que involucrar, en este proceso, contextos donde se aborden contenidos y objetos matemáticos que se relacionan con otras disciplinas de ciencia, ingeniería, tecnología (CITeM) permite una concepción científica de la realidad del entorno. Desde esta visión integradora de CITeM para promover aprendizaje, es necesario plantear problemas o situaciones de la vida real, dado que para comprenderlas o resolverlas se requiere construir, refinar, explorar, extender y/o aplicar conocimiento de estas disciplinas. Esta aproximación es importante, puesto que, se logra un aprendizaje cuando el individuo reconoce la importancia del sistema conceptual construido y su funcionalidad para resolver determinadas situaciones.

Una de las áreas de la matemática que favorece la interdisciplinariedad es la probabilidad, ya que permite construir modelos, desarrollar procedimientos para calcular y estimar probabilidades y resolver problemas en situaciones donde está presente la incertidumbre o interviene el azar. La importancia de la probabilidad en otras ciencias como la física, la química y la biología ha sido creciente puesto que los modelos probabilísticos han permitido la comprensión de los fenómenos de la naturaleza.

Dentro de CITeM, la noción de probabilidad, el registro y análisis sistemático de datos son ideas fundamentales. En los niveles básicos se manejan ejemplos prototípicos que involucran experimentos aleatorios equiprobables (lanzamiento de dados, monedas, etc.), o bien, ejemplos de urnas que tienen ciertos objetos con diferentes colores y se cuestiona sobre la oportunidad de extraer un objeto de determinado color.

Con relación al manejo de datos, usualmente se trabaja con ejemplos en los cuales los datos son dados en el problema y no se da la oportunidad a la observación, a la obtención de los mismos y su registro sistemático para ser analizados. Como guías en el desarrollo profesional docente hemos observado que ambas ideas o nociones están descuidadas en el curriculum escolar y los profesores demandan estrategias para su enseñanza. Dichas estrategias deben concebirse articuladas con otros contenidos de la matemática y de otras disciplinas, dado que el conocimiento es de naturaleza interdisciplinaria y es así como es requerido en situaciones auténticas de resolución de problemas reales.

Sin embargo, cómo enseñar o qué estrategias utilizar para enseñar las nociones de probabilidad representa un reto para los profesores. Dentro de las tareas sustanciales de las comunidades de Campus Viviente de Educación en CITeM (Carmona et al., 2014; Vargas et al., 2014; Alvarado et al., 2014), está el diseño de ambientes de aprendizaje innovadores que son concebidos y probados a través de ciclos iterativos de investigación: concepción, implementación, evaluación, rediseño. Los ambientes de aprendizaje son una alternativa de enseñanza al método tradicional expositivo, en la cual se asume que el conocimiento debe ser construido por los estudiantes. Tales ambientes «proporcionan actividades interactivas y complementarias que permiten a los individuos abordar necesidades e intereses de aprendizaje únicos, estudiar múltiples niveles de complejidad y profundizar en la comprensión» (Hannafing & Land, 1997, p. 168; citados por Land, Hannafing & Oliver, 2012). Los ambientes de aprendizaje diseñados en las comunidades de Campus Viviente se caracterizan por abordar ideas fundamentales de CITeM aproximándose a la enseñanza, al aprendizaje y a la evaluación formativa a través de los modelos y la modelación en educación matemática, simulaciones participativas y el uso de tecnología de fácil acceso y bajo costo. En estos ambientes, al igual que la estructura matemática y científica, se valora y fomenta la construcción y el desarrollo del conocimiento dentro de un ambiente de estudio colaborativo y participativo.

Este trabajo de investigación se da en el contexto de un grupo de investigadores y docentes, que pertenecen a la comunidad Campus Viviente Durango de Educación en CITeM (Alvarado et al., 2014), interesados en el diseño instruccional que asumen como hipótesis que: dada la naturaleza ubicua de la matemática, la tecnología, la ciencia y la ingeniería en este siglo, es posible diseñar ambientes de aprendizaje con requerimientos mínimos de conocimiento matemático y científico previo, en los cuales sea posible el surgimiento de ideas fundamentales de CITeM desde la interacción y el conocimiento informal de los participantes, para que sean utilizados en diferentes niveles educativos y en contextos interdisciplinarios. Aquí se presenta el caso de un ambiente de aprendizaje, estructurado como una secuencia de desarrollo de modelos dentro de la perspectiva de Lesh y Doerr (2003), en el cual se espera el surgimiento de diferentes contenidos de CITeM (noción de probabilidad frecuencial, cálculo de porcentajes, experimentación, observación, registro, análisis, presentación de datos y comunicación de resultados, tiro parabólico, etc.); se explora su potencial en contextos de talleres interdisciplinarios y multinivel de profesionalización docente, así como, de estudiantes de diferentes niveles educativos; y, se presentan algunos resultados obtenidos en talleres con profesores y con estudiantes de diferentes niveles educativos.

En este trabajo en la sección 2, se presentan las bases teórico conceptuales que fueron relevantes para el diseño y la implementación de un ambiente de aprendizaje: 1) la perspectiva de modelos y modelación para la enseñanza, el aprendizaje y la resolución de problemas y 2) el modelo de desarrollo profesional docente Campus Viviente de Educación en CITeM.

En la sección 3 se aborda la metodología seguida en el estudio experimental y se describen las fases a) diseño de la secuencia, b) experimentación con profesores como estudiantes, c) experimentación con estudiantes en el aula y d) análisis de las producciones.

En el apartado 4 se presentan los resultados generales observados con la secuencia de desarrollo de modelos propuesta y descrita en la sección 3. También se presentan los resultados, producciones y modelos generados en la implementación de la secuencia con profesores como estudiantes en contextos multinivel e interdisciplinarios dentro del marco del modelo de desarrollo profesional docente Campus Viviente de Educación en CITeM, descrito en la sección 2. Finalmente, se da un panorama general de los resultados y modelos obtenidos al implementar la secuencia con estudiantes en el aula.

Marco conceptual

En esta investigación es relevante la perspectiva de modelos y modelación (Lesh & Doerr, 2000; 2003). En ella, un modelo es considerado como un sistema conceptual que consta de elementos, relaciones, operaciones y reglas que rigen las interacciones. Dichos sistemas son expresados utilizando sistemas de notación externa, y se utilizan para construir, describir, explicar, predecir, manipular o controlar el comportamiento de otros sistemas. Los significados asociados a un sistema conceptual tienden a distribuirse a través de una amplia variedad de medios de representación: ecuaciones, tablas, gráficas, símbolos escritos, lenguaje hablado, metáforas basadas en experiencias, modelos concretos, diagramas, etc.

Dentro de esta perspectiva, el aprendizaje es concebido como un proceso de desarrollo de modelos o sistemas conceptuales. Así, en una situación de resolución de problemas más que la solución, el proceso es el fin. Como problemas a resolver se plantean situaciones de la vida real en las que se puedan elucidar modelos que sean visibles y que dichas situaciones estén provistas de herramientas que ayuden a identificar los elementos relevantes del sistema conceptual construido y distinguirlos de información irrelevante para la resolución del problema en cuestión. El conocimiento generado desde esta aproximación surge a través de una serie de ciclos iterativos en los que los participantes tienen múltiples oportunidades de expresar, probar y refinar su conocimiento.

Una secuencia de desarrollo de modelos es un módulo instruccional basado en la perspectiva de modelos y modelación. Se compone principalmente de tres tipos de actividades (Lesh et al., 2003):

a) *Actividad Reveladora del Pensamiento o Actividad para Elucidar Modelos (MEA por sus siglas en inglés).* Son actividades de resolución de problemas en las cuales el producto de los participantes no es una respuesta numérica corta a una situación que ya ha sido matematizada por otros. La respuesta es más bien una descripción que expresa las formas de pensar de los participantes acerca de la situación planteada y, a menudo, es comunicada en una carta a un "cliente" que demandó ayuda para resolverla.

b) *Actividad de exploración de modelos (MXA, por sus siglas en inglés).* El propósito es desarrollar poderosos sistemas de representación y lenguaje para dotar de significado el sistema conceptual o modelo construido en la MEA. En estas actividades se utiliza material concreto, gráficas dinámicas, simulaciones, etc.

c) *Actividad de Adaptación de Modelos (MAA, por sus siglas en inglés)*. Son actividades para aplicar o extender los modelos construidos. A diferencia de la MEA pueden ser resueltas de manera individual.

Doerr (2016) expone el potencial para la enseñanza aprendizaje de las secuencias de desarrollo de modelos compuesta con estos tres tipos de actividades y cómo, en cada una de ellas, el participante se ve envuelto en ciclos iterativos de observaciones, descripciones, interpretaciones, conjeturas, explicaciones y justificaciones que constantemente son revisadas y refinadas mientras trabajan con otros estudiantes y con el profesor o guía.

El tipo de actividades propuestas en estas secuencias requieren de cambios profundos y de una transformación de la práctica docente para lograr facilitar el aprendizaje de los estudiantes en situaciones auténticas de la vida real que ameritan más que una solución corta. Para ello, es necesario que sean exploradas por los docentes como estudiantes en talleres de desarrollo profesional y posteriormente dichos profesores sean acompañados para implementar las actividades con sus propios estudiantes. Lo anterior es considerado en el Modelo de Desarrollo Profesional Docente para Educación en CITeM (Carmona & Alvarado, 2011; Carmona et al., 2014), el cual está caracterizado por ser multinivel, interdisciplinario y diseñado para incrementar la autonomía y la agencia del profesor. Para garantizar tal incremento se sugieren cinco etapas: *diseño experto, maestros como estudiantes, práctica impromptu, implementación en el aula y formación de comunidades de práctica*. Dicho modelo surge en el proyecto Campus Viviente (campusviviente.org), mismo que apoya una visión integradora de CITeM.

Metodología

Se ha realizado un estudio experimental a partir de una secuencia didáctica de desarrollo de modelos considerando las fases siguientes: a) diseño de la secuencia, b) experimentación con profesores como estudiantes, c) experimentación con estudiantes en el aula y d) análisis de las producciones.

a) Diseño propuesto

La secuencia de desarrollo de modelos aquí propuesta esta considerada para tres módulos de una hora cada uno. Simula un problema de la vida real y está diseñada para incluir un amplio rango de participantes con características diversas. Sigue los principios propuestos por Lesh et al. (2000) para el diseño de una MEA o Actividad Reveladora del Pensamiento. En la MEA, *Reglas justas para el Juego* (Figura 3.1), los participantes organizados en equipos interactúan en un juego en el cual se debe atrapar una pelota que tiene una tira de tela tricolor (PTT) y deben establecer el conjunto de reglas que hagan justa la distribución de puntos con base en la dificultad de ser atrapada de la pelota o de alguna de las partes de la tira y finalmente, informar a los fabricantes, “su cliente”, las reglas justas para el juego, las cuales serán discutidas, revisadas, refinadas y convenidas con sus compañeros.

Figura 3.1 Actividad reveladora del pensamiento *Reglas Justas para el Juego*

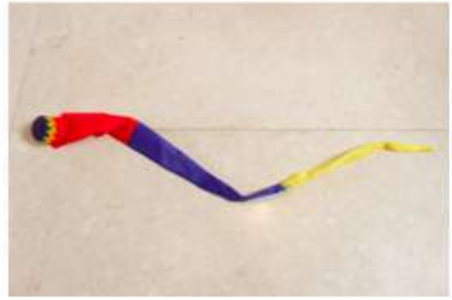
¿Cómo podemos construir reglas de un juego buscando que sean justas para el mayor número de personas?

Los fabricantes de juegos deportivos *Campus Viviente,* pretenden lanzar al mercado una pelota con una tira de tela tricolor que sirva para el juego "atrapa la serpiente por puntos". En este juego se lanza la pelota con cola tricolor, o serpiente, y al atraparla se ganan cierto número de puntos dependiendo del sitio donde se atrapa la pelota.

En *Campus Viviente* se han empeñado en que el juego sea lo más justo posible. Para ello, deben ser cuidadosos en la asignación de puntos en correspondencia con la dificultad de la "atrapada".

Por esta razón, han decidido pedir a un buen número de personas que establezcan las reglas en la asignación de puntos y con base en los resultados de esta exploración, conformar las reglas finales más justas para asignar los puntos y que realmente gane quién se esfuerce más y acumule la mayor puntuación.

Para ello, los invitan a **jugar**, **registrar** el número de veces que es "atrapada la serpiente" por sus compañeros en cada una de sus partes y **sugerir**, de acuerdo con el grado de dificultad, la asignación de puntos a cada una de las regiones de la serpiente.



¡Ayuda a construir las reglas para un juego justo!

¿Cómo se llama el juego? ¿Quién pide apoyo para construir reglas justas?

¿Cómo podemos ayudar?

¡Informa tus resultados!

Los datos registrados, así como la sugerencia de asignación de puntos, deben escribirse en una **carta** y **explicar** por qué tu asignación de puntos hace el juego más justo.

Fuente: Elaboración propia.

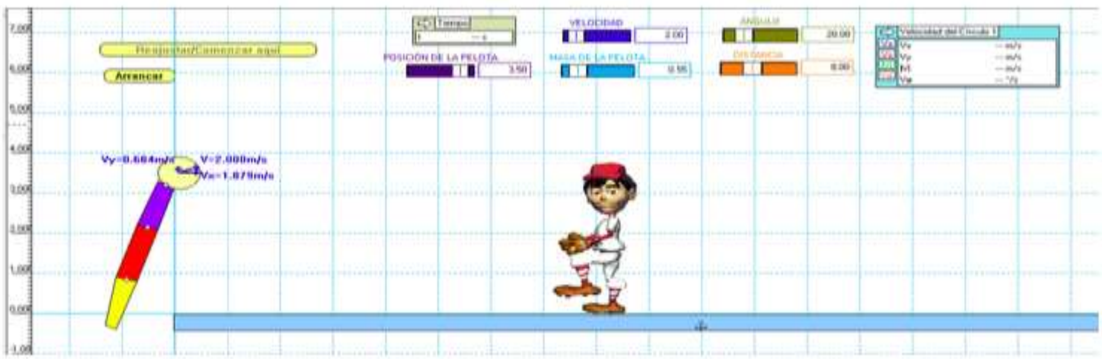
Posteriormente, los participantes se involucran en una actividad de exploración de modelos (MXA) que los lleva a pensar sobre el modelo que ellos han construido, a compararlo con los modelos construidos por otros y a delinear la estructura matemática subyacente. En esta actividad se tiene un espacio común en el cual todos los equipos concentran los datos registrados. Este espacio cobra relevancia dado que en la MEA antes realizada, desde las interacciones, surge la importancia de tener la mayor cantidad de datos para ganar confiabilidad en los resultados y para proponer una asignación justa de puntos en relación con la parte atrapada de la PTT. Este espacio común, luego de varios ciclos iterativos de diseño, se realiza compartiendo la hoja electrónica de cálculo (Figura 3.2) en Google Drive para poder actualizar en tiempo real los datos y que puedan visualizarse por todos los participantes de la experiencia. De acuerdo a los modelos generados, luego de algunas iteraciones, la tabla de la Figura 3.2 es ajustada para poder responder al pensamiento de los estudiantes. En ocasiones es necesario tener dos o más tablas adaptadas para concentrar respuestas similares.

Figura 3.2 Espacio común para compartir resultados y visualizar patrones.

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, se aplica una actividad de adaptación de modelos que propicia la adaptación o aplicación de los modelos antes construidos en otros contextos. En esta MAA interactúan con una simulación realizada en Interactive Physics (Figura 3.3) donde pueden realizar cambios que les permiten hacer adaptaciones a su modelo, así como extender y refinar el lenguaje para describir y explicar el fenómeno. Dichos cambios son por ejemplo: poder modificar la distancia entre quien lanza y quien atrapa, la masa de la pelota, el ángulo de tiro, etc. También, es posible visualizar de manera pausada la trayectoria seguida por la pelota de tira tricolor para verificar la parte de la cual fue atrapada. Los cambios que ensayan los participantes los conducen a situaciones de comparación y adaptación de modelos. Por ejemplo, al modificar la masa de la pelota los lleva a cuestionarse: si la pelota es más pesada (pelota de beisbol) o más ligera (unicel, esponja), ¿funcionarán las mismas reglas del juego antes propuestas?

Figura 3.3 Simulación en Interactive Physics de *Reglas Justas para el Juego*



Fuente: Elaboración propia.

b) Experimentación con profesores en el papel de estudiantes

La secuencia de desarrollo de modelos, de manera parcial o completa, ha sido explorada en diferentes contextos con profesores como estudiantes dentro de talleres de desarrollo profesional docente. En este trabajo tomaremos en cuenta, la experiencia que se llevó a cabo dentro del Diplomado en Enseñanza Significativa de las Ciencias con Tecnología, DESCT (Mata, 2012). En dicho diplomado, participaron 65 profesores (distribuidos en tres grupos) de las asignaturas de ciencias, computación y matemáticas, de los niveles primaria y secundaria.

c) Experimentación con estudiantes en el aula

Para explorar la secuencia con estudiantes, en el caso de primaria y secundaria se han tomado en cuenta las implementaciones realizadas por los profesores participantes del DESCT mencionado en el inciso anterior. Ellos, en sus escuelas, han incorporado a los profesores de educación física y español, al considerar pertinente que éstos organicen los juegos, trabajen con los alumnos en la importancia de las reglas y en la redacción coherente y cuidada de la carta o informe de las reglas del juego sugeridas al "cliente".

Además, la secuencia propuesta se ha explorado con estudiantes de niveles educativos superiores. En la sección de resultados se muestran, resultados generales con la experiencia en los diferentes contextos, algunos patrones de respuesta y comportamientos encontrados tanto en los profesores como en los estudiantes.

d) Análisis de las producciones

Los datos recolectados durante la investigación se han compuesto de: grabaciones de audio y video, fotografías, producciones escritas o cartas de los participantes, correos electrónicos refinando sus modelos y notas de los investigadores. Para su análisis se han clasificado en modelos o producciones iniciales, producciones intermedias y modelos finales que dan muestra de los ciclos de desarrollo de modelos que documentan el aprendizaje. Continuamente los modelos construidos por los participantes son objeto de discusiones orquestadas por el guía o profesor que dan lugar a modificaciones de sus producciones, fragmentos de tales discusiones han sido transcritas para su análisis.

Resultados

Los resultados están organizados en observaciones generales y en tres momentos de producción de modelos de la MEA: producciones desde la intuición, producciones desde cuestionamientos, prueba y comparación con pares de los primeros modelos generados, y modelos refinados del conocimiento emergente de CITeM. Posteriormente se presentan resultados de la exploración y adaptación de los modelos anteriores.

a) Observaciones generales

Particularmente en el contexto del DESCT (Mata, 2012), el tener participantes de diferentes niveles propició una interacción interesante, dado que los profesores de menor nivel educativo planteaban dinámicas distintas de organizar el trabajo colaborativo y daban una importancia mayor al juego y a las cuestiones didácticas, pero también cuestionaban para tratar de entender y eso propiciaba que se expresaran y refinaran cada vez más las ideas. Por su parte, los profesores de mayor nivel educativo aportaban conocimiento disciplinar para soportar sus modelos y ayudar a contestar preguntas que en la mayoría de los casos eran planteadas por los profesores de niveles educativos tempranos. Al final, se involucraron tanto que reconocieron el aprendizaje logrado y valoraron la aportación de cada uno de sus compañeros.

En las experiencias en general con esta secuencia, se observa que los estudiantes de primaria y los profesores de preescolar y primaria, una vez que conocen la situación planteada, de inmediato comienzan a jugar con sus compañeros para experimentar, explorar y posteriormente, identificar el comportamiento de la PTT a través de jugar con sus compañeros. Mientras que estudiantes y profesores de los otros niveles, intentan resolver la situación, de manera inicial y sólo algunos toman la iniciativa de jugar con la PTT para contrastar sus ideas iniciales, por lo que se les tiene que sugerir nuevamente al resto de los participantes que interactúen con la PTT para que puedan probar sus intuiciones. Al jugar, observar y registrar los resultados obtenidos, sus modelos iniciales cambian notablemente como se muestra en los ciclos que se describen en los siguientes incisos.

b) Primer ciclo: Modelos o producciones generados desde la intuición

En esta primera etapa, los participantes organizados en equipos de 3 o 4 se aproximan a la MEA *Reglas Justas para el Juego* (Figura 3.1) desde su intuición y conocimiento informal. En este apartado se mostrará la producción de un grupo de profesores de secundaria como representantes, dado que un comportamiento similar ocurre en grupos con estudiantes de diferentes niveles educativos. En los cinco equipos que se conformaron en este grupo, los primeros modelos generados se presentan en las figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5.

Figura 4.1 Modelo inicial equipo 1

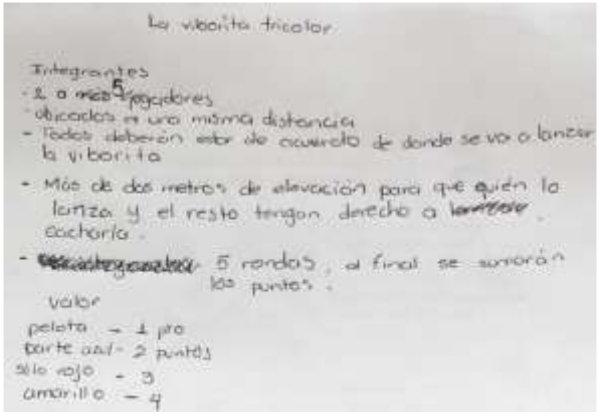
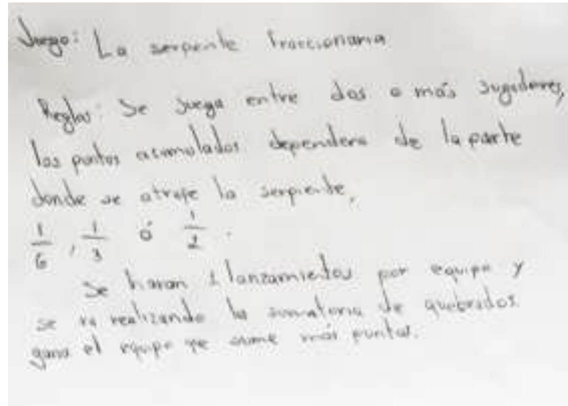


Figura 4.2 Modelo inicial equipo 2



Fuente: Producciones de los estudiantes

Para elaborar las reglas del juego que les demanda la situación observan la PTT, realizan unos cuantos tiros que no son suficientes para observar la dificultad de atrapada en cada región. Más aún, son insuficientes para determinar en cuántas regiones es posible atraparla. Cuatro de estos equipos consideran como regiones para atrapar, a la pelota y a las tres franjas de color azul, roja y amarilla, sólo el equipo 3 considera la posibilidad de atraparla en intersecciones de dos regiones. Esto último sorprende a los equipos en la discusión de la actividad, cuando exponen su producción (Figura 4.3).

Figura 4.3 Modelo inicial equipo 3

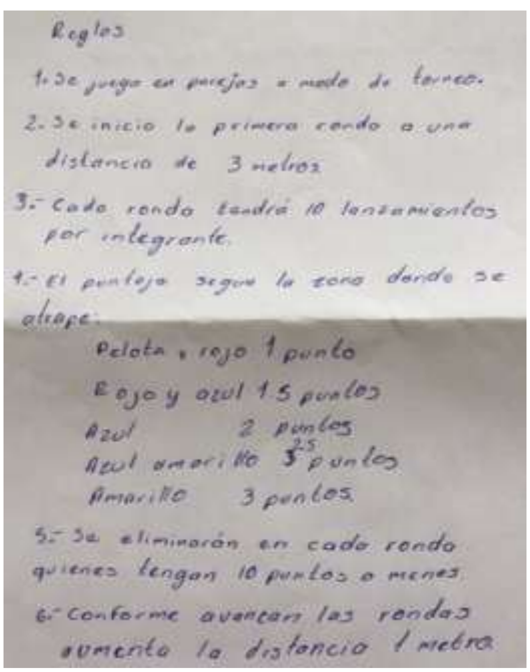
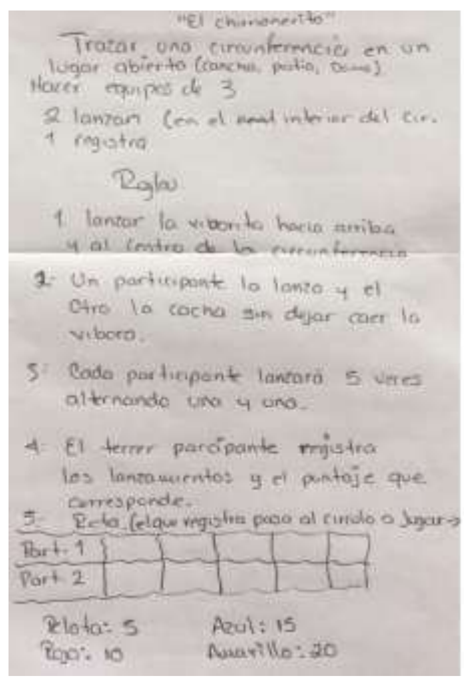


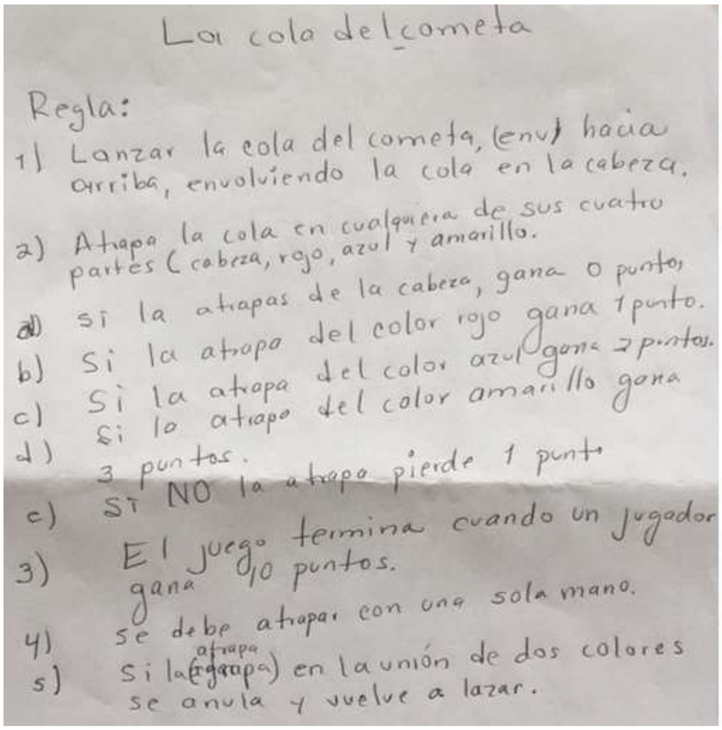
Figura 4.4 Modelo inicial equipo 4



Fuente: Producciones de los estudiantes

En todas las producciones el sustento es que la pelota es la parte más fácil de atrapar dado su peso, así asignan el menor puntaje a esta región (1 punto en el equipo 1, Figura 4.1; 0 en el equipo 3 y en el 5, Figura 4.3 y 4.5; $\frac{1}{6}$ equipo 2, Figura 4.2 y 5 en el equipo 4, Figura 4.4) y desde esta observación, deducen falsamente que la dificultad debe ser consecutiva con un incremento fijo (en el equipo 3 de 0.5, en el equipo 5 de 5, en el equipo 2 de $\frac{1}{6}$ y en el resto de 1). En las siguientes secciones veremos cómo el comportamiento de la situación va contra esta intuición de los participantes.

Figura 4.5 Modelo Inicial del equipo 5


La cola del cometa

Regla:

1) Lanzar la cola del cometa, (env) hacia arriba, envolviendo la cola en la cabeza.

2) Atrapa la cola en cualquiera de sus cuatro partes (cabeza, rojo, azul y amarillo.

a) si la atrapas de la cabeza, gana 0 puntos,

b) Si la atrapa del color rojo gana 1 punto.

c) Si la atrapa del color azul gana 2 puntos.

d) Si la atrapa del color amarillo gana 3 puntos.

e) Si NO la atrapa pierde 1 punto

3) El juego termina cuando un jugador gana 10 puntos.

4) se debe atrapar con una sola mano.

5) Si la (agarra) atrapa en la unión de dos colores se anula y vuelve a lazar.

Fuente: Producciones de los participantes

Cuando se les cuestiona sobre el número de tiros y atrapadas en las que han apoyado su deducción, los participantes muestran sorpresa, dado que, no les ha parecido relevante hacer un registro. No obstante, ahora dudan de sus modelos y consideran importante realizar un experimento controlado en el cual puedan revisarlos y refinarlos, a partir de un registro sistemático de los datos. Esta primera parte es relevante para que surja la necesidad de utilizar un registro matemático que dé soporte a sus producciones.

Hasta ahora al cuestionarlos sobre cómo se puede hacer uso de la matemática, empiezan a elucidar modelos relacionados con la probabilidad frecuencial, con el uso de porcentajes y gráficas. Incluso algunos también, ya se cuestionan sobre el tipo de lanzamientos y su dificultad asociada (tiro recto, tiro parabólico).

En esta primera aproximación, se ha observado en diferentes grupos y contextos, que el hecho de que la matemática y la ciencia estén omnipresentes, contribuye a que en principio sean invisibles al iniciar la resolución de un problema no convencional.

c) Segundo ciclo: Modelos desde cuestionamiento, prueba y comparación

En una segunda aproximación a la situación, desde las discusiones en equipo o durante el espacio para el juego, en su gran la mayoría los participantes tratan de resolver cuestiones, como las mencionadas enseguida, desde una amplia variedad de respuestas.

a) ¿De cuántas formas puede atraparse la pelota con cola tricolor?

Como se ha visto en el apartado anterior, la respuesta inicial de la mayoría es que se tiene la posibilidad de atraparla en cuatro regiones: pelota, franja azul, franja roja y franja amarilla. Esto se va modificando en sus modelos luego de interactuar en el juego y/o haber observado producciones de otros equipos. En sus nuevas producciones ya reconocen la posibilidad de atraparla en la frontera de dos o más regiones.

b) ¿De qué región es más fácil atraparla? y de ¿cuál es más difícil?

La intuición inicial, como se discutió en los primeros modelos generados, es que es más fácil atrapar la pelota, considerando su peso, y después de la franja que sigue de la pelota y ordenado así sucesivamente. Esto es algo que sustancialmente va cambiando al jugar, registrar el número de atrapadas por franja y finalmente analizar la información. Para los participantes más jóvenes a mayor número de registros mayor confiabilidad para decidir desde la región más fácil hasta la más difícil o tal vez mientras más juegan es mejor, sus conclusiones las extraen de más de 100 lanzamientos y algunos ensayan exactamente a 100 por la facilidad para cálculo de porcentajes. Por otro lado, en gran parte de los estudiantes mayores sus conclusiones se basan en un número menor de atrapadas (entre 15 y 50).

c) ¿Cómo diseñar el experimento?

La mayoría en cada lanzamiento observa la región en la que es atrapada la PTT y realiza el registro en las diferentes regiones, que pueden ir cambiando de 4 a 6 o más regiones de acuerdo a los resultados de la experiencia. Los datos los organizan de diferente manera, con conjuntos de palitos de 5 en 5, con puntos, con canicas en recipientes, cubos ensamblables etc., después realizan el conteo y organizan en tablas expresando sus resultados en porcentaje, fracción o verbal (15 atrapadas de 95). Con estudiantes de primer ciclo de primaria o tercero de preescolar sólo se trabaja en el conteo.

En casos especiales, el diseño del experimento tiene variaciones interesantes:

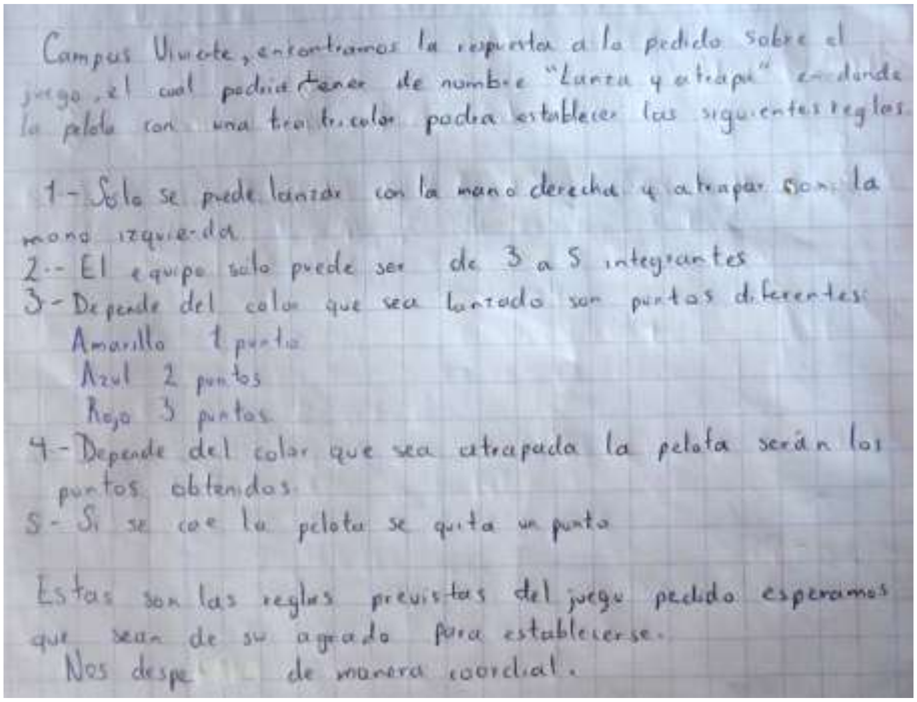
1) Establecen un número fijo de lanzamientos (por ejemplo, 60 en el modelo de la Figura 4.7) y se plantean como objetivo que todos los participantes del equipo se concentren en atrapar la PTT en una región fija y registran el número de veces en que fue atrapada. Luego, con el mismo número de lanzamientos, repiten este mismo procedimiento variando la región fija.

2) Distinguen dos tipos de lanzamiento: *parabólico* y *recto*. Con esta nueva variable, registran las atrapadas por región y por tipo de lanzamiento.

3) Al darse cuenta, por intuición y primeros lanzamientos, que la pelota es la más fácil de atrapar. Deciden centrarse en las otras regiones y evitar atraparla en la pelota, así en sus registros no aparece la pelota y el punto asignado para ella es 0.

4) Descartan la pelota, al identificar que es la más fácil de atrapar, y las regiones “frontera” (unión de dos franjas). En la Figura 4.6 se puede ver un ejemplo de este tipo de solución. Aquí las participantes realizan el experimento con 82 lanzamientos y reconocen a la región amarilla como la más fácil, después de la pelota, y le asignan un punto, seguida en dificultad por la región azul y finalmente la roja.

Figura 4.6 Carta de respuesta a la MEA



Campus Viveto, encontramos la respuesta a lo pedido sobre el juego, el cual podria tener de nombre "Lanza y atrapa" en donde la pelota con una tira tricolor podria establecer las siguientes reglas.

1.- Solo se puede lanzar con la mano derecha y atrapar con la mano izquierda.
2.- El equipo solo puede ser de 3 a 5 integrantes
3.- Depende del color que sea lanzado son puntos diferentes:
Amarillo 1 punto
Azul 2 puntos
Rojo 3 puntos
4.- Depende del color que sea atrapada la pelota serán los puntos obtenidos.
5.- Si se cae la pelota se quita un punto

Estas son las reglas previstas del juego pedido esperamos que sean de su agrado para establecerse.
Nos despe [illegible] de manera coordial.

Fuente: Producción de estudiantes de 13 años de edad.

c) *¿Cómo decidir la distribución de puntos?*

Independientemente del diseño del experimento, distribuyen los puntos de menor a mayor de acuerdo a la dificultad observada. En el caso de la distinción de tiro parabólico o lineal, dan el doble de puntos para el tiro lineal. En algunos casos los equipos deciden asignar -1 para cuando no es atrapada. Para la puntuación en las fronteras (especialmente a quienes realizan un diseño de experimento tipo 4) toman en cuenta los puntos de las franjas unidas, los promedian y asignan tal puntuación.

En la Tabla 4.1 se muestran algunos patrones de respuesta para el caso más común en el que se consideran seis regiones de atrapada y en los equipos deciden que es “casi imposible” atraparla entre las regiones pelota y franja azul así que la descartan. En el patrón 1 los equipos siguen su intuición y al hacer un mínimo de lanzamientos, los registros son irrelevantes. En los patrones del 2 al 8 se observa mayor variabilidad y en los del 9 al 13 los resultados asignados son más cercanos. Hay más modelos que de inmediato se modifican, como aquellos en los que se asignan puntos mayores a 10.

Tabla 4.1 Patrones de respuestas de estudiantes de secundaria para seis regiones de atrapada

Tipo Respuestas	Número de lanzamientos			R A		A A	
Patrón 1	0 – 20	0	1	2	3	4	5
P-2	20-99	0	5	4	1	3	2
P-3		0	4	3	5	2	1
P-4		1	4	2	3	2	3
P-5		1	3	2.5	2	3	4
P-7		1	6	5	4	3	2
P-8		0	1	2	1	2	1
P-9	100-300	0	5	4	3	2	1
P-10		1	6	5	4	3	2
P-11		1	4	3.5	3	2.5	2
P-12		0	3	2.5	2	1.5	1
P-13		0	25	20	15	10	5
P-14		1	6	3	4	5	2

Fuente: Elaboración propia

En el transcurso de la actividad continuamente expresan sus modelos, los discuten en el equipo, los comparan con otros equipos, los evalúan y modifican sus formas de pensar acerca de ellos. También, el profesor que conduce la actividad al cuestionarlos propicia que los expresen y en la discusión con todo el grupo se generan cambios importantes. Muchas de las respuestas en esta secuencia tienen que ver con el sentido de justicia (Tabla 4.2). Tal vez atribuible al nombre de la actividad y a la constante insistencia del profesor de no perder de vista la situación y poner énfasis en la comprensión lectora.

Tabla 4.2 Discusión de profesor con estudiantes de 9 a 12 años para generar un modelo compartido o grupal

Profesor: Algunos dicen que a la pelota le asignamos 0 y otros 1, ¿qué puntuación dejamos? *Alumno*: El 1 es mejor… porque el juego se trata de atrapar la pelota en cualquiera de sus partes. Si le damos 0 puntos sería como no atraparla. […] *Profesor*: Y la frontera de la pelota con la franja roja muchos de ustedes no la han contemplado ¿qué podemos hacer?, ¿la dejamos?, ¿la quitamos? *Alumno*: Es que tenemos unidas la parte más fácil de atrapar (la pelota) y la parte más difícil (parte roja) si sacamos promedio y lo asignamos no sería justo. Mejor quitarla. […]	*Alumno*: Es mejor quitarla, … es casi imposible atraparla de ahí porque la parte que "más pesa" es la pelota, si no lo atrapas de la pelota, por su peso pasa demasiado rápido y no da tiempo casi de atrapar la franja roja, por eso es la más difícil. *Alumno*: Además … cuando atrapas la pelota "a fuerzas" alcanzas a tocar la parte roja. […] *Profesor*: ¿Qué opinan de los puntos negativos cuando no se atrapa? [algunos estudiantes proponen puntuación negativa para las no atrapadas] *Alumno*: No es justo, ya es suficiente con no ganar puntos y pasar turno. […] *Profesor*: Además de los puntos, hay quién ha escrito otras reglas … *Alumno*: Los equipos deben estar equilibrados con niñas y niños para poder sacar mejores reglas, más justas para todos. *Alumno*: La pelota se debe lanzar, con intención de que el otro la pueda atrapar.

Fuente: Elaboración propia de la transcripción.

d) Tercer ciclo: Modelos refinados después el conocimiento emergente de CITeM

En este último ciclo de la actividad para producir reglas justas para el juego, tomaremos en cuenta dos modelos generados por estudiantes de 18 años aproximadamente (Figuras 4.7 y 4.8). La elección de las producciones fue tomando en cuenta el mayor y el menor número de registros ocurridos en el grupo. Las producciones fueron enviadas por correo electrónico, luego de que en la clase se realizó el experimento, se discutieron los resultados en equipos y se hizo un borrador de la carta requerida. Se presentan tal como los estudiantes las redactaron y el único cambio realizado ha sido el de quitar los nombres de los estudiantes.

Como se puede observar en la Figura 4.7, el equipo ha hecho un diseño de experimento controlado tomando como objetivo de atrapada una región y luego de 60 lanzamientos registrar los casos de éxito. Luego repiten el experimento con las otras cinco regiones. La distribución de puntos y las reglas del juego se sustentan en observaciones, registro sistemático y análisis de los datos. Además, son cuidadosos en la forma de comunicar sus resultados, esta parte de comunicar los resultados en una carta ha causado sorpresa en la mayoría de los grupos, tanto de estudiantes como profesores, dado que en clases de matemáticas y ciencias habitualmente no se ofrecen espacios para escribir texto, se reservan los espacios para conjuntos de procedimientos numéricos para encontrar una respuesta corta. En esta parte se nota un avance sustancial entre la primera aproximación que este equipo tuvo con el modelo pulido que al final han presentado. Incluso en él han aportado un diseño del juego con reglas que van más allá de la asignación de puntos y que incluye características de la cancha y atributos cualitativos.

Figura 4.7 Modelo por equipo de 4 estudiantes basado en 360 registros

"Juego de Pelota-serpiente" Reglas de juego.

A quien corresponda en Campus Viviente:
La pelota-serpiente es un prototipo de pelota con cierto peso que lleva consigo una tela en forma de cola de 'serpiente' de aproximadamente 1 metro de longitud, con tres diferentes colores como secciones, Rojo, Azul y Amarillo;[…]

El equipo 2 […], se dispuso a plantear un modelo de juego para la Pelota-serpiente, proponiendo de la manera más justa y confortable, un conjunto de reglas y distribución de puntos con un número considerable de intentos, experimentación y observaciones que sustentarán, como es debido, el modelo propuesto.

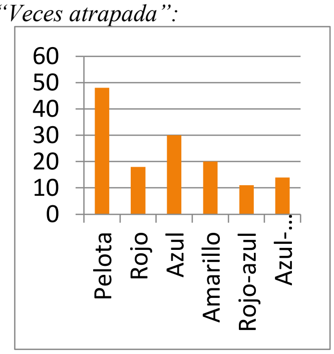
El experimento realizado contó con 360 lanzamientos, de distintas maneras y tipos de lanzamientos, de cierta forma en estilo libre. De acuerdo al porcentaje de cada sección de la Pelota-serpiente en la que fue atrapada se obtuvo el porcentaje de cada sección.

Se registró la cantidad de veces que se tuvo éxito al atrapar cierta parte de la serpiente, se realizaron un total de 60 lanzamientos por parte de la serpiente, es decir, 60 atrapadas de la pelota, 60 de la parte roja, 60 de la azul, 60 de la amarilla, y 60 por cada intersección. También se propone una distribución del campo de juego, junto con el campo accesible de cada jugador, dicha distribución se muestra en la siguiente imagen.

El porcentaje de éxito respecto a la sección por atrapar fue:

Sección por atrapar	*# atra-pada*	*% de éxito*
Pelota	*48*	*80%*
Rojo	*18*	*30%*
Azul	*30*	*50%*
Amarillo	*20*	*33.33%*
Rojo-Azul	*11*	*18.33%*
Azul-Amarillo	*14*	*23.33%*

Gráfica de "Veces atrapada":



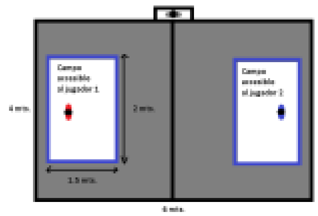
Se sugiere que sea a campo semi-abierto y apropiado para la actividad, [...]Los factores que hacen variar la experiencia de juego, como el viento, y las demás condiciones que se presenten pueden ser solo meros objetos para aumentar la experiencia y habilidad de juego.

Se considera que las dimensiones de la Pelota-serpiente serán aproximadamente iguales por cada ejemplar que se produzca, por lo que no puede haber problema [...]

La dinámica contará con dos jugadores. El 'partido' será limitado por 6 sets o rondas de juegos, donde en cada set se lanzará la Serpiente 10 veces de ida y vuelta [...]Habrá dos modos de juego posibles para seleccionar en un partido, con el mismo número de sets ambos.

Se acordó, tomando en cuenta los datos, la distribución de los puntos:

Parte de la serpiente	*Puntos*
Pelota	*1*
Rojo	*4*
Azul	*2*
Amarillo	*3*
Intersecciones	*5*



Primer modo de juego: *se plantea para cada set una sección a atrapar de la Pelota-serpiente, y las veces que se atrapa en la sección correcta se multiplica por el número de puntos asignado a la sección.*

Segundo modo de juego: *la puntuación en cada set es libre, es decir, se le asignará al jugado el número de punto de la sección en la que atrape la Pelota-serpiente.*

Se permitirán tipos de lanzamientos libres, directos, en parábola, etc., únicamente se requiere que la pelota vaya en dirección a un campo accesible al jugador contrario (que se muestra en la distribución del campo de juego); de no ser así y la pelota quede fuera del alcance del jugador contrario, a este mismo se le darán 3 puntos automáticamente y al lanzamiento de vuelta si el jugador que tiro de forma equivoca obtiene más de 3 puntos, solo se le asignaran 3 puntos a dicho jugador que la pudo capturar.

El ganador del partido es el que obtenga más puntos, [...]

Fuente: Producciones de los estudiantes

Otra producción que presentamos en este apartado es del mismo grupo, con cuatro estudiantes y a diferencia del otro ellos sustentan sus resultados en 45 registros. En este equipo se observa también un crecimiento, dado que, su modelo inicial fue muy similar al presentado en la Figura 4.1, como parte de los generados desde la intuición por otro grupo (Figura 4.8). Ahora, han realizado el experimento registrando cada atrapada y con base en sus registros han ordenado por dificultad de atrapada las regiones y han asignado los puntos. Otra variable que introducen, además de las regiones es si la atrapada, es con una o dos manos. Aunque ya vemos un registro sistemático de datos y la presencia de contenidos matemáticos para sustentar sus resultados. Para ellos no parece relevante la idea de que a mayor número de lanzamientos se incrementa el nivel de confianza de los resultados. Otra variante con respecto al modelo del otro equipo (Figura 4.7), es que ellos toman en cuenta siete regiones de atrapada, incluyen la intersección de pelota y tramo rojo. En varios equipos de diferentes grupos de estudiantes y profesores descartan esta región por considerar que es "casi imposible" distinguir esta atrapada de la pelota (Tablas 4.1 y 4.2).

Figura 4.8 Modelo producido por equipo de 4 participantes basado en 45 registros

Atrapa la serpiente por puntos

El juego consiste en lanzar la serpiente y al atraparla se consiguen puntos dependiendo del lugar que sea agarrada.

Reglas del juego

- *Pueden participar 2 o más personas.*
- *La distancia entre los jugadores debe ser mayor a 7 serpientes.*
- *Al atraparla el jugador no tiene permitido mover un pie.*
- *La puntuación será mayor si la serpiente se atrapa con una sola mano.*
- *Cada vez que la serpiente no sea atrapada se anulará un punto.*

Puntaje		
	Una mano	*Dos manos*
Pelota	*2*	*1*
Azul	*4*	*2*
Rojo	*6*	*3*
Amarillo	*8*	*4*
Rojo y pelota	*10*	*5*
Azul y rojo	*14*	*7*
Amarillo y azul	*20*	*10*

Pelota	*15*
Azul	*19*
Rojo	*5*
Amarillo	*2*
Rojo y azul	*1*
Azul y amarillo	*2*
Amarillo y rojo	*1*
Total	*45*

Fuente: Producciones de los participantes

e) Exploración y adaptación de modelos

Cuando se trabaja con la MXA (Figura 3.2), comparten los registros realizados al jugar con la pelota y de acuerdo al diseño de su experimento, para poder hacer un análisis con un mayor número de datos (los datos obtenidos de todos los equipos). Con base en ello, los participantes (tanto profesores en el caso de talleres de desarrollo profesional como estudiantes) deciden la distribución justa de puntos. Esto permite que los participantes vean reflejado el modelo logrado dentro de su equipo y el modelo grupal generado y acordado. En esta parte, generalmente en la discusión descartan los registros de "*no atrapadas*" en el espacio común (Figura 3.2), por considerar que es una variable que no influye en el modelo y también en muchos casos descartan los registros de la frontera "*pelota/franja roja"* por considerar que es casi imposible una atrapada en dicha región. Desde la interacción con la MAA (Figura 3.3) adaptan su modelo a otras situaciones realizando cambios en las características de la pelota y los tipos de tiro.

Finalmente, la secuencia de desarrollo de modelos ha permitido el surgimiento y exploración de los siguientes contenidos fundamentales de CITeM: probabilidad frecuencial, probabilidad matemática, eventos no equiprobables, tiro parabólico, velocidad, ángulo de lanzamiento, uso de hoja electrónica de cálculo, uso del software Interactive Physics, obtención de datos desde la observación y experimentación con el juego de la PTT, organización sistemática de datos, así como, su análisis y presentación para derivar principios o reglas que expliquen lo observado y comunicar en una "carta colaborativa" tanto a sus compañeros y profesor como al cliente ficticio de la situación.

Agradecimiento

Los autores de esta investigación agradecen:

Al Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Durango por su financiamiento a través del proyecto *Reunión Nacional de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas* del Programa de Apoyos Institucionales y Financiamiento a Proyectos de Investigación 2017.

A la Universidad Juárez del Estado de Durango y a la Facultad de Ciencias Exactas por su financiamiento a través del Programa de Fortalecimiento a la Calidad Educativa P/PFCE-2016-10MSU0010C-06 de la DES de Ciencias Básicas.

A la Secretaría de Educación del Estado de Durango por las múltiples oportunidades de participar en sus esquemas de formación y actualización de docentes en servicio.

A campusviviente.org, por su financiamiento a través del proyecto *Campus Viviente en Educación en CITeM*.

A los estudiantes colaboradores: Karla del Rocío Campos Martínez; José Crispín Alvarado Calderón.

Conclusiones

Cada vez con mayor fuerza se reconoce el potencial de la perspectiva de modelos y modelación como un vehículo para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática integrada con otras disciplinas (Hirsch & Roth, 2016). Con relación al diseño instruccional aquí expuesto, se ha podido evaluar que cumple con los principios propuestos por Lesh et al. (2000) para este tipo de actividades, dado que se propone una situación auténtica que puede ocurrir en la vida real; es posible elucidar un modelo, ya que la tarea involucra la construcción, descripción, explicación, manipulación, predicción o control de una estructura matemática; se dan oportunidades para la autoevaluación, cuando los participantes por sí mismos se dan cuenta de las ideas o respuestas buenas, tanto las propias como las de otros; los participantes revelan explícitamente su pensamiento en la carta donde ofrecen la explicación de las reglas justas para el juego en la carta; y, por último, el producto es un prototipo útil para interpretar una amplia gama de situaciones similares.

Actividades como las que aquí se plantean, pueden abordarse desde el conocimiento informal de los participantes ya que no tiene requisitos de conocimiento previo. Lo anterior, hace que sean accesibles a un mayor número de personas y que puedan aplicarse en distintos niveles educativos. De esta manera, se propicia el surgimiento de modelos que constantemente son revisados y refinados para transitar del conocimiento informal al conocimiento científico. Además, esta investigación ha brindado la posibilidad de observar ciclos iterativos para expresar, probar y revisar, tanto el pensamiento de los investigadores, como el de los profesores y estudiantes.

Con base en los resultados obtenidos, se puede considerar factible adoptar modelos de desarrollo profesional docente concebidos para Educación en CITeM (Carmona & Alvarado, 2013), dado que este enfoque coincide y modela la diversidad de estudiantes en un aula convencional. No obstante, se requiere de una sensibilización de las autoridades educativas que toman decisiones sobre la formación y actualización de profesores, dado que no siempre consideran adecuado que los grupos de docentes sean interdisciplinarios y/o multinivel, aun cuando se insiste en los planes y programas de estudio acerca de la importancia de la transversalidad en el curriculum y de la continuidad desde preescolar hasta bachillerato. Otra variante es que no es posible garantizar una adecuada planeación de los tiempos y tomar en cuenta al profesor como aprendiz en edad adulta. Esto dificulta la implementación en el aula en condiciones ideales (como se establece en el modelo mencionado).

Por otra parte, el docente está habituado a prácticas en las que se estudia sólo un contenido y algo que constantemente le causa sorpresa, es la diversidad de contenidos y conceptos que surgen en las actividades de una secuencia de desarrollo de modelos. Más aún, cada vez que implementan la secuencia encuentran nuevos conceptos, contenidos, formas de representación y relaciones. Esto en principio, hace que el profesor se sienta temeroso de no poder encauzar todas las ideas que surgen al momento de la discusión.

Para apoyar la transición hacia las prácticas de modelos y modelación en el aula, es necesario mejorar el acompañamiento al maestro y apoyar su preparación en talleres docentes que incluyan un mayor número de actividades para profundizar y que ellos puedan *anticipar* los modelos que sus estudiantes pueden construir, *monitorear* adecuadamente los trabajos en los equipos, *seleccionar* y *secuenciar* los modelos y las ideas para *conectar* los diferentes medios de representación, como lo proponen Stein et al. (2008) y lograr la formalización de los diferentes sistemas conceptuales.

En cuanto a los estudiantes, se observó que las situaciones que no demandan una respuesta numérica corta representan para ellos un conflicto, dado que aunque en las discusiones logran ponerse de acuerdo y reconocen las “buenas respuestas” con sustento en las explicaciones y argumentaciones, de todas maneras demandan la opinión del profesor en relación a ¿cuál es la respuesta que a él le convence? No obstante, se genera un conocimiento compartido, en virtud de que todos aportan a la discusión para revisar y refinar sus modelos en la actividad de exploración posterior a la MEA.

Finalmente, para que los diseños sean sustentables es necesario que las herramientas utilizadas para facilitar la elucidación del modelo, su exploración y adaptación, sean de bajo costo y de fácil acceso. En este sentido, una mejora para esta secuencia es sustituir el software de Interactive Physics por un software libre que permita realizar la simulación de la actividad de adaptación del modelo (Figura 3.3).

Referencias

Alvarado, A., Mata, A., López, A., Carmona, G., & Vargas, V. (2014). Formación de Comunidades de Práctica: Campus Viviente Durango. En M. Ramos & V. Aguilera (Eds.). Ciencias Naturales y Exactas (pp. 156-64). V. de Santiago, Gto: ©ECORFAN.

Carmona, G., Reyes, J., Vargas, V., Cristóbal, C., Alvarado, A., López, A., & Mata, A. (2014) Comunidad de Comunidades Campus Viviente en Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (CITeM): Una Experiencia de Colaboración Internacional hacia la Formación de una Red Temática. En M. Ramos & V. Aguilera (Eds.). Ciencias Multidisciplinarias, vol. 1, 1 (1), (pp. 109-125). Valle de Santiago, Gto: ©ECORFAN.

Carmona, G. & Alvarado, A. (2013) Modelo Campus Viviente en Educación de CITeM para Desarrollo Profesional de Docentes. Ponencia en Primer Simposio Internacional Campus Viviente en Educación de CITeM. (13-16 Octubre). New Braunfels, Texas. EUA.

Doerr, H. (2016). Designing Sequences of Model Development Tasks. En C. Hirsch & A. Roth, (Eds.), Annual perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics (pp. 197-206). Reston, VA: NCTM.

Hirsch, C. & Roth, A. (2016). Annual perspectives in Mathematics Education 2016. Mathematical Modeling and Modeling Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Land, S., Hannafing, M., & Oliver, K. (2012). Students-centered learning environments. Foundations, assumptions and design. En D. Johassen & S. Land (Eds.) Theoretical Foundations of learning environments (pp. 3-21). New York: Routledge.

Lesh, R., Hoover, M., Bonnie, H., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for Developing Thought Revealing Activities for Students and Teachers. En A. Kelly & R. Lesh (Eds.). Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education (pp. 591-645). Routledge

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H., Post, T., & Zawojewski, J. (2003). Model Development Sequences. En R. Lesh & H. Doerr (Eds.) Beyond constructivism: A models and modeling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Beyond constructivism: A models and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Mata, A. (2012) Diplomado en Enseñanza Significativa de las Ciencias con Tecnología, UJED. En Catálogo Nacional SEP para la formación Continua y Superación Profesional para Maestros de Educación Básica en Servicio.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. Mathematical Thinking and Learning, 10 (4), 313-340.

Vargas, V., Cristóbal, C., Carmona, G., Reyes, J., & Alvarado, A. (2014). Campus Viviente Quintana Roo. En M. Ramos & V. Aguilera (Eds.) Ciencias Naturales y Exactas (pp. 22-30). Valle de Santiago, Guanajuato: ©ECORFAN.

Experiencias de formación docente en educación en CITeM

VARGAS, Verónica & CRISTÓBAL, César

V. Vargas, C. Cristóbal

Universidad de Guadalajara, Universidad de Quintana Roo
veronica.vargas@academicos.udg.mx cescrist@uqroo.edu.mx

A. Alvarado, G. Carmona y A. Mata (Dirs.) Una visión integradora. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

In this article, we describe a multi-tiered design experience for teacher training oriented towards STEM education (Science, Technology, Engineering and Mathematics Education). The proposal involved students, professors and researchers. It was created to foster the development of ways of thinking about the teaching and learning process. The theoretical framework was the perspective of Models and Modeling. It gave us guidelines to analyze, plan, implement and evaluate the experience. The professors who took part in this study were graduate students in a mathematics teaching Program. Some of them taught mathematics for future engineers. The findings show us that teachers' traditional ways of thinking about mathematics teaching and learning process were modified, expanded and refined. The last teachers' ways of thinking involved ideas about the need to promote an education not reduced to a single discipline, but interdisciplinary that includes other scientific areas. The teachers validated the creation, modification and refinement of reusable models; the collaborative work environments with technology support; an education with a vision of democratization; that is to say, learning and teaching process to include all the students. The use of technology, interdisciplinarity, and collaborative work environments were considered important to encourage STEM education.

STEM education, refining ways of thinking, teacher training, models and modeling

Introducción

El contexto actual se caracteriza por el rápido crecimiento del conocimiento y de la tecnología, y por su integración en los diferentes ámbitos de la sociedad. Esta situación demanda cambios sustanciales en los sistemas educativos, en particular, en lo referente a los conocimientos, habilidades, valores, y competencias que deben desarrollar los estudiantes. Los sistemas educativos deben atender una formación integral en todos los ciudadanos, sin exclusión, que propicie el desarrollo de capacidades cognitivas y habilidades para aprender a aprender. Se requiere que los individuos aprendan a analizar fenómenos naturales y sociales, adquieran habilidades para enfrentar las necesidades de su entorno y lo desconocido e inesperado en el futuro, comprendan el mundo, influyan en él y participen con eficacia en su vida social, profesional y política. La formación que deben recibir los individuos dista mucho de una basada sólo en el aprendizaje de las disciplinas aisladas entre sí. Por ello se concibe a la educación en Ciencias, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (CITeM) como eje fundamental para el desarrollo, crecimiento científico y tecnológico de las naciones. La formación docente es relevante para impulsar una educación de calidad en CITeM. ¿Cómo impulsar que los profesores cambien una perspectiva tradicional de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la relacionen con educación en CITeM?

¿Qué formación requieren los profesores? ¿Qué tipo de conocimientos deben desarrollar? De acuerdo con Doerr y Lesh (2003) la formación del docente va más allá de propiciar cursos centrados en la observación e interpretación de las prácticas de enseñanza. No es suficiente mostrar al profesor una lista de conocimientos y habilidades que un buen profesor debe desarrollar; tampoco que lean sobre estrategias exitosas en el salón de clases ante situaciones particulares. Se requiere promover la participación del docente, involucrarlos en procesos donde se promueva la experimentación, prueba y comunicación con colegas e investigadores.

La esencia del aprendizaje de los profesores y transformación de su práctica docente está en el desarrollo y refinamiento continuo de sus formas de pensamiento sobre el conocimiento, los procesos de aprendizaje de los estudiantes, la forma de construir o seleccionar actividades, materiales e instrumentos de evaluación (Lesh, 2010; Doerr y Lesh, 2003).

Las experiencias previas y los conocimientos que poseen los profesores influyen en su práctica docente.

Enseñar bien: “es una tarea compleja y no existen recetas fáciles para ayudar a aprender a todos los alumnos, ni para que todo el profesorado llegue a ser eficiente” (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000, p. 17).

¿Qué procesos de formación docente orientados hacia una educación interdisciplinaria se deben diseñar? ¿En qué conocimientos, habilidades y actitudes se necesita enfatizar? ¿Se requiere promover cambios en la forma de pensar sobre la disciplina y los procesos de enseñanza-aprendizaje? ¿En qué dirección? ¿Cómo promoverlos? Estas preguntas son guía de la reflexión que se presenta en este documento en el cual se describe una experiencia de diseño multiseriado que involucra a estudiantes, profesores e investigadores. Se muestran cambios en la *forma de pensamiento* de los docentes de matemáticas ocasionados por su participación en las actividades de formación docente. Las secciones de este artículo son Introducción, Marco teórico, Metodología, Resultados y discusión, Conclusiones y Referencias. En el marco teórico se describe la perspectiva de Modelos y Modelación (PMM) y la importancia del uso de tecnología. La población de estudio, el tipo de datos que se discuten en este artículo y la actividad utilizada se describen en la sección de metodología. Aunque la actividad que aquí se describe y utiliza para la reflexión es el problema del Hotel (Aliprantis y Carmona, 2003), es importante mencionar que se han usado, en el marco de esta misma propuesta, otros problemas, por ejemplo: medicamentos y crecimiento poblacional. Los resultados obtenidos durante el proceso de formación docente se presentan en la sección de Reflexiones y Discusión. Finalmente, se incluyen las conclusiones y el listado de referencias.

Marco Teórico

La formación de profesores implica desarrollar conocimiento sobre diversos factores y actores del proceso educativo. En varias investigaciones se señala que los docentes deben aprender acerca del contenido de la disciplina, la didáctica del contenido a enseñar, el currículo, entre otros (NCTM, 2000; Shulman, 1987; Llinares, Vals y Roig, 2008). ¿En qué contenido se debe especializar un docente para educar en CITeM? ¿Qué enfoque didáctico debe utilizar en su labor docente? ¿Cómo debe concebir el aprendizaje de la disciplina en la cual se formó para educar en CITeM? Perspectivas como Modelos y Modelación (Doerr y Lesh, 2003) otorgan herramientas al docente para apoyar el desarrollo de conocimiento mediante el uso de situaciones en el aula que propicien en el alumno la utilización no sólo de conocimiento matemático, sino también de otras disciplinas científicas.

La PMM recomienda el uso de un diseño multiseriado para apoyar el crecimiento del conocimiento de los profesores a lo largo de múltiples dimensiones al variar acomodos y contextos. Este diseño incluye a estudiantes, profesores e investigadores. Implica un trabajo colaborativo en el cual los profesores trabajen con sus alumnos, los profesores discutan y analicen de manera colectiva sus experiencias, y los investigadores trabajen con los profesores. En este sentido, los investigadores construyen, revisan y refinan modelos para describir el comportamiento de los profesores (Figura 1); y estos a su vez construyen, revisan y refinan modelos de los estudiantes para describir situaciones. Los investigadores le dan seguimiento al trabajo de los profesores con sus estudiantes, observan los diferentes estratos en que se utilizan y analizan actividades; en este caso los procesos que siguen los alumnos al atender un problema desde diferentes perspectivas, y el aprendizaje que desarrollan sobre los conceptos involucrados (Clark y Lesh, 2003).

Figura 1 Los investigadores aprenden de los docentes, quienes aprenden de sus alumnos

La perspectiva de Modelos y Modelación propone principios para comprender la naturaleza y apoyar el desarrollo del conocimiento de los estudiantes. Sugiere que estos principios pueden ser el fundamento para comprender la naturaleza y apoyar el desarrollo del conocimiento de los profesores (Doerr y Lesh, 2003).

Lograr que los profesores se interesaran en la forma de concebir el aprendizaje de las matemáticas por la PMM, modificaran, ampliaran y refinaran sus formas de pensar sobre la práctica docente fue tarea de los investigadores al diseñar, desarrollar e implementar la propuesta de trabajo descrita en este documento fundamentada en el diseño multiseriado. En los siguientes párrafos describiremos algunas ideas centrales de la PMM en cuanto a lo que significa aprender matemáticas.

El aprendizaje es visto como un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales o modelos que se modifican continuamente durante la interacción entre el estudiante, sus compañeros y una situación problemática (Lesh, 2010), la cual puede requerir conocimiento de otras disciplinas.

> Los modelos son sistemas conceptuales (que consisten de elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal manera que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente. (Lesh y Doerr, 2003: p. 10)

Los modelos son personales porque reflejan la experiencia del estudiante o individuo al resolver situaciones; incluyen aspectos asociados con las creencias, valores, actitudes, identidad y comportamientos de grupos o de individuos respecto a una situación específica; por lo tanto, pueden ser únicos.

Matematizar es la acción de desarrollar un modelo matemático, proceso cuyo propósito es construir un sistema conceptual basado en las características estructurales de la situación, mediante la realización de actividades como cuantificar información sobre características del sistema, dimensionar el espacio, ubicar eventos en marcos de referencia, organizar y analizar datos, realizar cálculos numéricos, establecer relaciones y funciones matemáticas, resolver ecuaciones o aplicar procedimientos (Lesh y Doerr, 2003).

El conocimiento, no es inerte, sino parecido a un organismo vivo, a un sistema complejo, dinámico, que está en continua adaptación, se autorregula, y cuya existencia es parcialmente el resultado de construcciones humanas (Lesh y Yoon, 2004).

El proceso de aprendizaje es un proceso social; se realiza en el interior de las prácticas de las comunidades. La producción de conocimiento y modos de pensamiento matemáticos dependen de los contextos culturales y sociales en los que son desarrollados (Lesh, Lester y Hjalmarson, 2003). La comunicación es importante. El proceso de aprendizaje es un proceso que implica desarrollar una serie de ciclos de entendimiento o modelos sobre una situación o conjunto de situaciones. Los primeros ciclos de modelación generalmente muestran aproximaciones iniciales burdas, dispersas, poco o nada estructuradas, las cuales evolucionan hacia formas más integradas en la medida en que el estudiante analiza, discute, comunica sus diferentes aproximaciones sobre la situación con sus compañeros y con el profesor (Lesh y Doerr, 2003).

La PMM propone que los estudiantes resuelvan situaciones cercanas a la vida cotidiana, para propiciar que realicen procesos como cuantificar información, dimensionar espacios, ubicar eventos en marcos de referencia, organizar y analizar datos, realizar cálculos, establecer relaciones y funciones matemáticas, resolver ecuaciones y aplicar procedimientos, desarrollar criterios. Entre las situaciones que promueve, están las actividades provocadoras de modelos (MEA, Model Eliciting Activities, por sus siglas en inglés), que son situaciones de resolución de problemas diseñadas en contextos cercanos al mundo real.

El proceso de solución de estas situaciones debe requerir de algo más que procesar la información al construir un modelo invariante y único, debe fomentar la transformación del modelo, su ampliación o refinamiento. Las características o principios que deben cumplir las MEA pueden revisarse en Doerr (2016) y en Lesh, Hoover, Hole, Kelly, y Post (2000). El proceso que permite diseñar las secuencias de actividades de desarrollo de modelos, puede revisarse en Lesh, Doerr, Cramer, Post, y Zawojewski (2002).

La realización de actividades en el aula, diseñadas con cierta cercanía a situaciones de la vida real (relacionadas por ejemplo con física, ecología, medicina e ingeniería), implica que los estudiantes dediquen tiempo para reflexionar sobre conceptos que no necesariamente son matemáticos antes y durante el proceso de matematización (Lesh y Yoon, 2004). Ello es parte del aprendizaje de las matemáticas en la PMM, pues aprender es desarrollar sistemas conceptuales que requieren el uso y manejo de conceptos no sólo matemáticos sino también de Ciencia e Ingeniería.

El uso de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas es ineludible; posibilita la construcción y externalización de distintas representaciones de una situación, importante para la aprehensión conceptual de los objetos; permite la ejecución rápida de diferentes tareas: calcular, operar, hacer tablas y gráficas etc. El potencial dinámico de la tecnología, además, apoya que los estudiantes puedan realizar exploraciones, visualizar relaciones, establecer y verificar conjeturas, así como analizar y describir los fenómenos de cambio y variación en su entorno (Kaput, 1999). Por lo tanto, la tecnología es vista como un instrumento para democratizar el conocimiento, ya que permite el acceso a éste de cada vez más estudiantes.

La forma de pensar de los docentes sobre el aprendizaje de las matemáticas varía. Doerr y Lesh (2003) señalan que los maestros tienen distintas habilidades, percepciones e interpretaciones previas, construidas a lo largo de su experiencia docente, proveniente de distintos contextos de enseñanza y aprendizaje. No todos siguen la misma trayectoria de aprendizaje para interpretar y analizar la complejidad de la práctica docente. Sin embargo, en este estudio se partió de identificar las ideas comunes de los profesores participantes sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje e interesó proveer de oportunidades para apoyar la modificación, extensión y refinamiento de ellas.

Metodología

La investigación de donde provienen los datos fue de tipo cualitativa porque interesaba conocer las *formas de pensamiento* de los profesores y el proceso de modificación, extensión y refinamiento. Más que cuantificar, se pretendía identificar, interpretar y describir.

Se siguió el esquema multiseriado (Doerr y Lesh, 2003) para el diseño de la propuesta. Esto es, el investigador desarrolló un proceso de formación docente, lo implementó y a su vez observó las *formas de pensamiento* de los profesores (estudiantes de posgrado [EP]), mientras estos diseñaban y experimentaban actividades para desarrollar conocimientos y habilidades con los estudiantes (Figura 1).

Enseguida se describen los participantes en el proceso de formación docente y el proceso mismo. Las evidencias analizadas fueron reportes de los profesores [EP] y notas de bitácora del investigador.

1 Participantes

Los participantes en el proceso de formación docente fueron seis estudiantes de posgrado (o profesores en formación [EP]). Tres tenían experiencia docente en los niveles de bachillerato y básico universitario; su formación profesional era en economía, matemáticas e ingeniería. Tres no tenían experiencia docente y su formación profesional era en ingeniería. Los seis docentes se estaban preparando para continuar sus labores o iniciarlas en el nivel universitario, con estudiantes de ingeniería.

El contexto en el cual se realizó la investigación fue un curso optativo denominado Resolución de problemas y modelación. El estudio se llevó a cabo durante cuatro sesiones, semanales. Cada una de tres horas.

2 Propuesta de formación docente

La propuesta consistió en las siguientes fases.

1. Análisis de la PMM
2. Realización de una actividad provocadora de modelos en el aula, discusión grupal
3. Planeación de la replicación de la experiencia
4. Replicación de la experiencia y
5. Evaluación

En total se realizaron cuatro sesiones, cada una de tres horas.

S1 y S2: Discusión y análisis de la Perspectiva de Modelos y Modelación.

S3: Realización en parejas de una Actividad provocadora de modelos, presentación de su solución al grupo y discusión. Planeación de la replicación de la experiencia. Implementación en el aula.

S4: Presentación de reporte con resultados, discusión y análisis.

Durante la primera y segunda sesión S1 y S2 los EP leyeron y discutieron artículos de investigación sobre la Perspectiva de Modelos y Modelación. Una de las lecturas incluía la actividad provocadora de modelos *pie grande*, el tipo de representaciones que estudiantes de educación básica construyeron para resolverla y la evolución de pensamiento a que dio lugar.

Durante la tercera sesión S3, el investigador entregó a los EP una actividad provocadora de modelos (El problema del Hotel) y les pidió que la realizaran en parejas. Promovió un ambiente de trabajo colaborativo, apoyado con herramientas tecnológicas, donde el uso de estas no se redujera a hacer operaciones, sino que fueran utilizadas para construir los modelos. Pidió a los EP que presentaran las cartas elaboradas, las cuales debía incluir la descripción de los modelos. Generó una discusión grupal sobre las distintas representaciones que surgieron en el grupo, para propiciar el análisis de los modelos construidos; es decir, los EP debían compartirlos, manipularlos y modificarlos, en caso de ser necesario. Debían evaluar los modelos para determinar si eran reutilizables para describir, interpretar, construir, manipular y predecir esa situación u otras similares.

A partir de la discusión grupal, los EP refinaron ideas y ello permitió al grupo identificar directrices generales del proceso que seguirían para la sesión de clase que dirigirían con su grupo de alumnos.

Durante la cuarta sesión S4 los EP presentaron un reporte con los resultados obtenidos a partir de la implementación de la actividad provocadora de modelos en cada una de sus aulas.

El papel del investigador durante todo el proceso consistió en propiciar un ambiente de reflexión y discusión. Por ejemplo, durante la tercera sesión alentó a las parejas de EP a explorar, formular, comunicar y validar hipótesis relacionadas con la actividad provocadora de modelos, expresar y discutir ideas, así como evaluar sus procesos de solución.

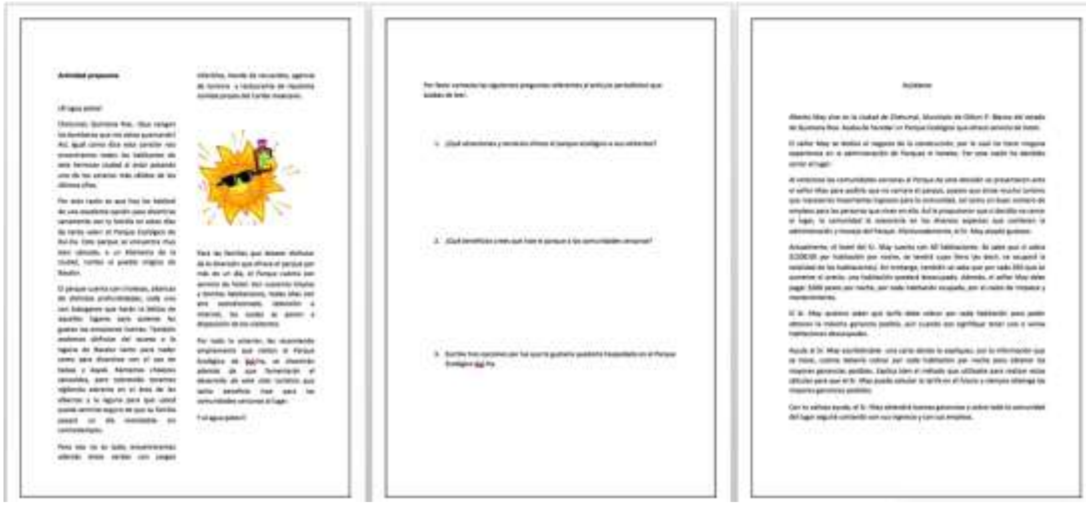
Su participación siempre fue para apoyar la transformación de la práctica docente de los profesores [EP]a través del análisis de la puesta en práctica de actividades en el aula, enmarcadas en una perspectiva relacionada con una formación integral e interdisciplinaria; acorde con una educación en CITeM. A su vez, el investigador observó y analizó cómo los profesores [EP] modificaron su *forma de pensamiento* y su práctica docente tradicional, para involucrar ideas relacionadas con la necesidad de promover en el aula la realización de actividades que involucraran el desarrollo de conocimiento no fragmentado, no departamentalizado, sino interconectado entre sí e interdisciplinario, que incluyera otras áreas de la ciencia, así como la tecnología.

3 La Actividad provocadora de modelos

Una de las actividades provocadoras de modelos utilizadas fue el Problema del *Hotel*. El cual fue adaptado de Carmona (2017) y es de solución única (Figura 2). Consiste en tres hojas tamaño carta. Las dos primeras hojas contienen un artículo de periódico y preguntas de comprensión hacia la lectura, la tercera tiene el problema.

El objetivo del artículo de periódico es la familiarización de los estudiantes con el contexto del problema, así como el fomento de interés, debido a lo cual fue necesario redactarlo con información de alguna localidad cercana.

Figura 2 Estructura de la actividad provocadora de modelos: El Hotel



Problema *El Hotel* (hoja 3, Figura 2)

Alberto May vive en la ciudad X del estado de Y. Acaba de heredar un Parque Ecológico que ofrece servicio de hotel.

Actualmente, el hotel del Sr. May cuenta con 40 habitaciones. Se sabe que si cobra $1200.00 por habitación por noche, se tendrá cupo lleno (es decir, se ocupará la totalidad de las habitaciones). Sin embargo, también se sabe que por cada $50 que se aumente al precio, una habitación quedará desocupada. Además, el Sr. May debe pagar $200 por noche, por cada habitación ocupada, por el costo de limpieza y mantenimiento.

El Sr. May quisiera saber qué tarifa debe cobrar por cada habitación para poder obtener la máxima ganancia posible, aún cuando esto signifique tener una o varias habitaciones desocupadas.

Ayuda al Sr. May escribiéndole una carta donde le expliques, con la información que se tiene, cuánto debería cobrar por cada habitación por noche para obtener las mayores ganancias posibles. Explica bien el método que utilizaste para realizar estos cálculos para que el Sr. May pueda calcular la tarifa en el futuro y siempre obtenga las mayores ganancias posibles.

Los conceptos centrales que subyacen a esta actividad son conceptos de ingreso, egreso, ganancia, ecuación cuadrática, tasa de cambio y máximo.

4 Criterios de análisis

Las *formas de pensamiento* exhibidas, a las que se les dio seguimiento en cuanto a modificación, ampliación y refinamiento por los profesores son el trabajo en equipo y la comunicación, el aprendizaje de las matemáticas y el uso de la tecnología. Estas *FP* fueron elegidas porque el investigador las detectó como puntos centrales de discusión que emergieron durante las primeras sesiones y le interesó que se reflexionara alrededor de ellas y se transformaran.

Resultados y Discusión

Se describen las *formas de pensamiento* [FP] de los EP exhibidas durante la implementación de la propuesta de formación docente.

La presentación de ellas se divide en tres secciones:

- *FP* durante S1 y S2,
- *FP* durante S3 y
- *FP* durante S4.

La descripción permite revisar las observaciones del investigador en cuanto a la modificación, ampliación y refinamiento de FP de los EP, mientras diseñaban y experimentaban una actividad para propiciar conocimiento en los estudiantes (Figura1).

1 FP durante S1 y S2

Durante el análisis de los artículos relacionados con la Perspectiva de Modelos y Modelación surgieron conocimientos previos que caracterizaron las siguientes *formas de pensamiento*. Todas fueron discutidas de manera grupal por los EP y el investigador.

1.1 FP relacionadas con la comunicación y el trabajo en equipo

El trabajo en equipo y grupal, al enseñar matemáticas, fue evaluado por los EP como una pérdida de tiempo. Los comentarios siguientes así lo revelan:

«No todos los alumnos trabajan en los equipos»
«Algunos aprovechan para platicar en lugar de colaborar»
«Los alumnos son muy individualistas, no les gusta trabajar en equipo»
«No hay tiempo en el programa para el trabajo en equipo».
«Los ambientes colaborativos no apoyan el aprendizaje de conceptos matemáticos»

Lo señalado por Lesh y Doerr (2003) en relación a que la comunicación durante el trabajo en equipo y grupo podía apoyar el incremento de comprensión de conceptos matemáticos no fue claro para los EP.

1.2 FP relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas

Los EP no relacionaron aprender matemáticas con aprender otras disciplinas (CITeM), Discutir el significado de otros conceptos como velocidad, aceleración, ganancia e ingresos era considerado pérdida de tiempo. Aprender matemáticas tampoco estaba vinculado con la modelación o el acto de matematizar situaciones cercanas a la vida real, uso de argumentación, construcción de hipótesis, discusión y escritura de procedimientos. La forma de pensar de los EP era tradicional, relacionada con la memorización de conceptos, el manejo de algoritmos sin errores y con fluidez, y la obtención de resultados exactos. Los procedimientos tabulares o gráficos no se consideraban válidos, los algebraicos sí.

1.3 FP relacionadas con la tecnología

La tecnología era considerada como obstáculo para el aprendizaje de las matemáticas, y considerada sólo útil para realizar operaciones rápidas. No se validaba su uso a menos que el estudiante supiera hacer los cálculos previamente con lápiz y papel. Además, la tecnología no era necesaria durante los procesos de solución porque lo importante eran los procedimientos algebraicos, no los tabulares, ni gráficos.

Estas tres *formas de pensamiento* (4.1.1, 4.1.2 y 4.1.3) repercutieron en la comprensión de la PMM y dificultaron el entendimiento de las actividades provocadoras de modelos. Por lo tanto, aunque las *FP* de los EP fueron discutidas en la sesión grupal de revisión de literatura, no se modificaron. Esto se observó durante S3; se describe a continuación.

2 FP durante S3

La realización en parejas de la Actividad provocadora de modelos, presentación de las cartas ante el grupo y discusión grupal, dieron lugar al surgimiento de las siguientes *formas de pensamiento*.

2.1 FP relacionadas con los modelos

Al resolver el problema del Hotel surgieron los siguientes modelos. Es importante mencionar que los EP siempre estuvieron tratando de construir modelos algebraicos. Consideraban que era el modelo más apropiado. Cualquier otro modelo era sólo un paso previo al de formalización.

- Dos parejas de EP (EP_1 y EP_2, EP_3 y EP_4) resolvieron el problema de manera algebraica, sin tablas y sin gráfica.
    - Una de ellas inició con conocimientos adquiridos de manera memorística como economista, pero posteriormente utilizó conocimientos de cálculo.
- Una pareja (EP_5, EP_6) resolvió el problema mediante el uso de tablas y gráficas en lápiz y papel (lineales y cuadráticas), sin utilizar registros algebraicos.

2.2 FP relacionadas con la comunicación y el trabajo en equipo

Al compartir en el aula los modelos construidos, durante la discusión grupal, los EP manifestaron sorpresa. La discusión de cada modelo les permitió analizar la situación desde otro punto de vista, resaltando y precisando aspectos que no eran enfatizados con el uso de un solo tipo de representaciones. Incluso los modelos burdos fueron de ayuda para la comprensión de conceptos involucrados. Esto les condujo a validar la comunicación y discusión grupal como parte del proceso de aprender matemáticas.

Reconocieron que la interacción con sus compañeros y el profesor ayudó a la construcción, modificación, extensión y refinamiento de modelos y que debido a estas interacciones los sistemas conceptuales iniciales de cada pareja se refinaron (Anexo, modelo de la pareja EP_5 Y EP_6 construido posterior a la discusión grupal).

Admitieron que la comunicación permitió resaltar información, relaciones y conceptos no considerados o razonados de manera inadecuada.

2.3 FP relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas

El significado de aprender matemáticas se extendió y se relacionó con modelar o matematizar situaciones cercanas a la vida real, uso de argumentación, construcción de hipótesis, discusión y escritura de procedimientos. Los EP aceptaron la importancia de incidir en el desarrollo de estas habilidades con sus alumnos, además de considerar que el problema daba lugar al desarrollo de conocimiento de otras disciplinas, lo cual les parecía interesante y motivador.

2.4 FP relacionadas con la tecnología

Debido a que el investigador les compartió un modelo construido con Excel, construido por alumnos universitarios. Los EP encontraron que era un modelo reutilizable y generalizable. Detectaron que podía dar lugar a una familia de problemas (el mismo problema pero con condiciones iniciales distintas) y, propiciar la creación de un nuevo modelo con nuevas variables, «aunque estuviera construido en Excel y no con símbolos algebraicos». Así lo expresaron los EP, quienes no validaban la construcción de otro procedimiento que no fuera el algebraico (esto se observó de nuevo en S4). Sin embargo, le dieron valor al uso de la tecnología por su potencial para hacer más comprensible la situación y accesible el conocimiento para todos los alumnos (democratización del conocimiento, en términos de Lesh y Doerr, 2003).

Estas *formas de pensamiento* (4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.4) influyeron en la planeación de la replicación de la experiencia e implementación en el aula. Algunos objetivos incluidos en la planeación se observan en las figuras 6 y 8 y se describen en la siguiente sección 4.3.

3 FP durante S4

Las *FP* que se detectaron durante la presentación de los resultados, discusión y análisis de la replicación de la experiencia con estudiantes de nivel licenciatura, fueron las siguientes.

3.1 FP relacionadas con la comunicación y el trabajo en equipo

Los EP manifestaron lo siguiente durante la presentación de los reportes.

- «Fue sorprendente ver el trabajo colaborativo en cada equipo», «todos sin excepción estaban tratando de resolver el problema»
- «Fue desesperante no poder explicarle cómo se resolvía el problema a cada equipo»
- «No encontré las preguntas apropiadas para apoyarlos sin darles la solución»
- «La escritura de la carta fue nueva para los alumnos, así como lo fue para nosotros»

En sus reportes agregaron comentarios similares. Por ejemplo, en el siguiente se señala la novedad de la escritura de la carta y el uso de gráficas (Figura 3).

Figura 3 Extracto del reporte del desempeño del grupo del EP_1

La **tercera fase** fue muy peculiar, los alumnos ya se habían puesto de acuerdo en la respuesta a nivel cuantitativo y tendieron a realizar gráficas, pero aún no se habían percatado que tenian que realizar la carta, por lo que en la mayoría de los casos, se les tuvo que recordar.

3.2 FP relacionadas con Aprendizaje de las matemáticas y los modelos

Los EP describieron en sus reportes el tipo de modelos construidos por sus alumnos.

- «Los modelos de mis alumnos fueron similares a los que construimos nosotros»
- «Elaboraron tablas y gráficas»
- «Para la discusión grupal elegí a los equipos con distintas representaciones para que presentaran los resultados»

Comentaron cuántos y cuáles de sus alumnos habían construido la representación algebraica de la función cuadrática, como parte de su modelo (Figura 4).

Figura 4 Extracto del reporte del desempeño del equipo 2 del grupo del EP_5

Informe: Actividad-Hotel 6

El equipo 2 realizo mediante tabulación las ganancias máximas pero no logro pasar de esa representación a una ecuación cuando se los pedí a pesar que los oriente la relación que tenia esa tabla y los datos que les estaba dando no pudieron hacer esa transferencia y redactaron la carta explicándole al Sr. May que tenia hecha una tabla donde podía encontrar los precios de acuerdo a las habitaciones desocupadas y así obtener la ganancia, aun asi teniendo los datos el resultado que pusieron en la carta fue el incorrecto.

En la Figura 4 podemos observar la preocupación del EP_5: «pero no logró pasar de esa representación a una ecuación» relacionada con la necesidad de que los estudiantes construyeran modelos algebraicos y no sólo tablas y gráficas. El EP_5 no validaba como producto final la construcción de tablas y gráficas, no aceptaba que el proceso de modelación fuera el producto del aprendizaje (Lesh y Doerr, 2003). Esto se observa de nuevo en la Figura 5. El EP_5 consideraba que la tabulación debía ser un procedimiento intermedio antes de construir la representación algebraica: «seguidamente buscaron la solución para que puedan [sic] generalizarlo en una ecuación».

Los EP mencionaron que olvidaron retomar en la discusión del aula con sus alumnos los conocimientos matemáticos que emergieron durante la resolución del problema; es decir, no incluyeron en el cierre de la sesión la discusión sobre el sistema conceptual (función cuadrática, variación, relaciones lineales y máximos) subyacente al problema del hotel. El EP_1 (figuras 6 y 7) identificó e hizo énfasis en su planeación sólo en los conceptos que como economista consideraba importante que los alumnos desarrollaran, pero no integró los conceptos matemáticos: «relacionará los temas referentes a la utilidad marginal decreciente, tipo de costos y las características de la oferta y la demanda». Promovió durante la sesión la identificación y relación de ciertos conceptos subyacentes al problema del Hotel: «relacionaron los temas de la demanda, oferta, utilidad marginal, costos y precio»

Figura 5 Extracto del reporte del desempeño del equipo 3 del grupo del EP_5

Equipo 3

Este equipo fue uno de los primeros al igual que el equipo 1 en obtener la ganancia máxima y cuanto debería cobrar por cada habitación por noche mediante la tabulación, seguidamente buscaron la solución para que puedan generalizarlo en una ecuación y así poder redactar la carta explicando el método que utilizaron.

La comunicación de reportes le permitió a los EP reflexionar acerca de que el desarrollo de conocimiento y comprensión de un concepto no se da en forma aislada, sino que está íntimamente ligada con el desarrollo y comprensión del conjunto de conceptos, hechos y procedimientos en razón de los cuales tienen su significado.

Figura 6 Extracto de la planeación de la implementación de la actividad provocadora de modelos desarrollada por el EP_1

Objetivo de aprendizaje

El alumno analizará la lógica de la formulación teórica de los conceptos básicos de los costos y determinación de precio, asimismo, relacionará los temas referentes a la utilidad marginal decreciente, tipos de costos y las características de la demanda y la oferta.

Figura 7 Extracto del reporte del desempeño del grupo del EP_1

Ellos mencionaron no sólo como redactaron, la carta y encontraron el precio sino que también relacionaron los temas de la demanda, oferta, utilidad marginal, costos y precio.

3.3 FP relacionadas con la tecnología

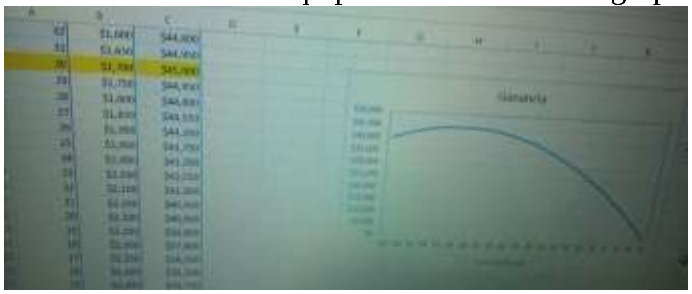
Los EP planearon el uso de tecnología (Figura 8) para resolver el problema, pero no les fue sencillo, dado que no todos sus alumnos llevaban laptops al aula. El EP_3 y el EP_4 (Figura 9) lograron que algunos de sus estudiantes pudieran utilizarlas.

Figura 8 Extracto de la planeación de la implementación de la actividad provocadora de modelos desarrollada por el EP_3.

Objetivo de Aprendizaje

Los alumnos le darán sentido a un problema desde diferentes contextos y darán solución a la actividad desde diferentes representaciones. Igualmente esta actividad aportara para que el alumno tenga una mejor comprensión de conceptos de ecuaciones, máximos, mínimos, costos, graficación, tabulación, así como el uso de tecnología para solución de problemas.

Figura 9 Procedimiento de un equipo de estudiantes del grupo del EP_4



En estas *FP* (4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3) se observaron modificaciones, con respecto a las inicialmente exhibidas (4.1.1, 4.1.2 y 4.1.3), relacionadas con la manera de concebir el uso de tecnología, el trabajo colaborativo y la comunicación como medios para desarrollar conocimiento. Modificaron, también, su *forma de pensamiento* relacionada con el aprendizaje de las matemáticas.

Anexo

Carta elaborada por la pareja EP_5 y EP_6 después de la discusión grupal. En ella se describen las indicaciones al Sr. May para resolver el problema; se muestra cómo los estudiantes utilizaron símbolos algebraicos para explicar el modelo e identificaron la reutilización del modelo para describir y predecir el comportamiento de la situación.

Figura 10 Carta elaborada por la pareja EP_5 y EP_6

Estimado señor Alberto May

Presente

En respuesta al compromiso de asesorarle en cuanto a la administración de su hotel, a continuación le explicamos el procedimiento.

Anexo a la presente encontrará una tabla que consta de cinco columnas; la primera indica el número de habitación(es) ocupada(s) representada por la letra n; la segunda representa el costo por habitación (es) ocupada(s) representada por la letra C; la tercer señala el ingreso por habitación(es) representada con la letra I; la cuarta indica el gasto por habitación (limpieza y mantenimiento) representada por la letra M; por último la columna cinco representa la ganancia por habitación, a continuación se describe la forma en que se analizó este problema:

$n = \textit{número de habitaciones ocupadas} \quad (\textit{columna } 1) - - - (A)$

$\boxed{\text{Columna 2 ----- (B)}}$

$$C = \left\{ \left[\begin{pmatrix} \text{“condición”} \\ \textit{monto aumentado} \\ \textit{por cada habitación} \\ \textit{vacía en el hotel} \\ (\$50) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textit{Total de} \\ \textit{habitaciones} \\ \textit{del hotel} \\ (40) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \textit{tarifa de} \\ \textit{habitación} \\ \textit{por cupo lleno} \\ (\$1\,200) \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} \text{“condición”} \\ (\$50) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textit{Cantidad de} \\ \textit{habitaciones} \\ \textit{rentadas } (n) \end{pmatrix} \right] \right\}$$

$I = (n)(C) \quad \textit{columna tres} \quad - - - -(C)$

$M = (200)(n) \quad \textit{columna cuatro} \quad - - - - - -(D)$

$G = (I) - (M) \; \textit{columna cinco} \quad - - - - - - - -(E)$

Figura 11 Gráfica incluida en la carta elaborada por la pareja EP_5 y EP_6 (continuación Figura 10)

Le comento que al sustituir los valores indicados, las ganancias quedan de la siguiente manera

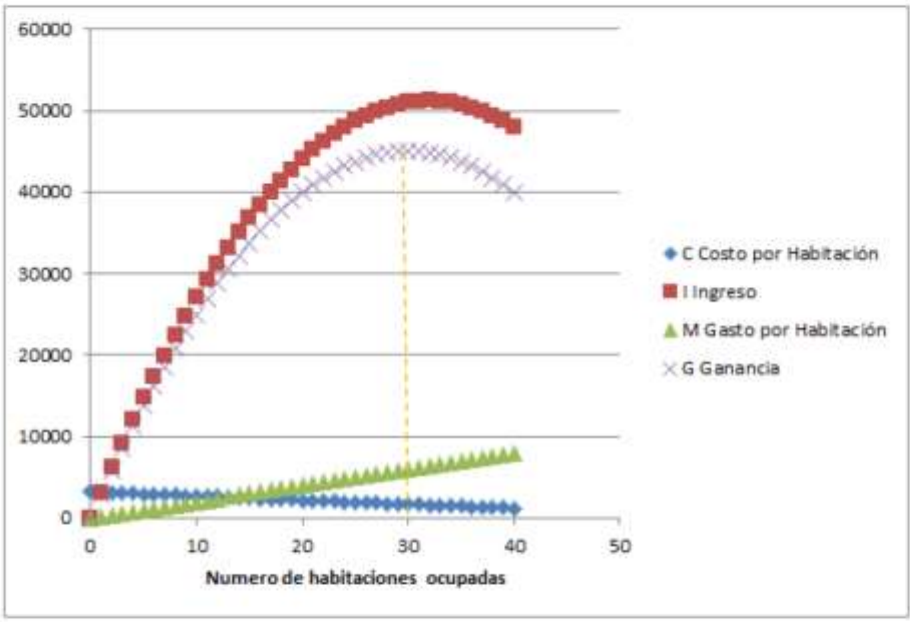
$G = (n)(3200 - (50)(n)) - (200)(n)$

Simplificando tendremos

$G = 3200\,n - 50n^2 - 200n$

$G = -50n^2 + 3000n$

Si usted observa las gráficas que a continuación se presenta:



Se muestra que la curva de color azul representa las ganancias y ésta se presenta cuando hay una ocupación de 30 habitaciones.

La gráfica anterior resulta de hacer la diferencia entre los ingresos (color rojo) y los gastos (color verde).

A continuación se presenta la tabla de los cálculos de costos, ingresos, gasto y ganancias por habitación ocupada.

Figura 12 Tabla de datos incluida en la carta elaborada por la pareja EP_5 y EP_6 (continuación Figura 11)

Habitaciones Oc	Costo por Habi	Ingre	Gasto por Habi	Ganancia
0	3200	0	0	0
1	3150	3150	200	2950
2	3100	6200	400	5800
3	3050	9150	600	8550
4	3000	12000	800	11200
5	2950	14750	1000	13750
6	2900	17400	1200	16200
7	2850	19950	1400	18550
8	2800	22400	1600	20800
9	2750	24750	1800	22950
10	2700	27000	2000	25000
11	2650	29150	2200	26950
12	2600	31200	2400	28800
13	2550	33150	2600	30550
14	2500	35000	2800	32200
15	2450	36750	3000	33750
16	2400	38400	3200	35200
17	2350	39950	3400	36550
18	2300	41400	3600	37800
19	2250	42750	3800	38950
20	2200	44000	4000	40000
21	2150	45150	4200	40950
22	2100	46200	4400	41800
23	2050	47150	4600	42550
24	2000	48000	4800	43200
25	1950	48750	5000	43750
26	1900	49400	5200	44200
27	1850	49950	5400	44550
28	1800	50400	5600	44800
29	1750	50750	5800	44950
30	1700	51000	6000	45000
31	1650	51150	6200	44950
32	1600	51200	6400	44800
33	1550	51150	6600	44550
34	1500	51000	6800	44200
35	1450	50750	7000	43750
36	1400	50400	7200	43200
37	1350	49950	7400	42550
38	1300	49400	7600	41800
39	1250	48750	7800	40950
40	1200	48000	8000	40000

Se observa que la ganancia máxima es cuando se han ocupado 30 habitaciones (se indica en color amarillo).

En un futuro si Usted desea cambiar (tarifas, costos, habitaciones y condiciones), las descripciones de las opresiones indican los datos a modificar, también le envío el cálculo en el programa Excel, donde tendrá que modificar la fórmula de acuerdo a los cambios realizados, esta modificación serán en las ecuaciones B y D (los datos señalados en color rojo).

Atentamente

Conclusiones

La inmersión en un ambiente colaborativo como estudiantes fue relevante para los EP porque les posibilitó confrontar sus ideas tradicionales y les brindó elementos para replicar la experiencia con sus alumnos. Les permitió conocer nuevos métodos para trabajar en el aula cuyo propósito fuera el desarrollo de conocimiento mediante la generación de un ambiente de aprendizaje basado en la comunicación, el trabajo colaborativo, la discusión grupal y el uso de tecnología. La experiencia de trabajo con sus propios alumnos fue fundamental para validar este nuevo conocimiento.

El trabajo con el investigador permitió a los profesores discutir sus *formas de pensamiento*, las cuales se modificaron en la medida que leyeron, implementaron y discutieron las actividades llevadas a cabo en el aula.

Los EP consideraron que el aprendizaje de las matemáticas podía estar relacionado con el desarrollo de conocimiento en otras disciplinas científicas. En particular, como profesores de futuros ingenieros, entendieron la pertinencia del uso de estas actividades en el aula para propiciar aprendizaje significativo en los alumnos. Le dieron sentido a relacionar la ciencia, ingeniería, tecnología y matemáticas en el aula.

El investigador identificó que una sola experiencia en el aula no fue suficiente para lograr una transformación docente, pero permitió motivar la reflexión sobre la labor educativa y alentar a los EP para buscar la mejora de su práctica.

Los EP consideraron que estaban en condiciones de pensar de forma distinta la educación matemática, pues la interdisciplinariedad era importante, así como el uso de tecnología para apoyar mejor comprensión de los significados. Estos aspectos fueron identificados como importantes por el investigador para impulsar una educación en CITeM desde cualquier curso de matemáticas. La experiencia de formación docente permitió que el investigador, los profesores y los estudiantes extendieran, modificaran y refinaran conocimiento. Hubo cambios en sus *formas de pensamiento*.

Durante esta experiencia el investigador aprendió la importancia de no pensar la formación docente como un proceso lineal, sino un proceso donde existe variación en cuanto a habilidades, percepciones, interpretaciones y, por lo tanto, en el crecimiento de los docentes. Igual que los profesores identificaron esa variación en el crecimiento de sus alumnos.

Referencias

Aliprantis, C. D. & Carmona, G. (2003). Introduction to an economic problem: A models and modeling perspective. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching (pp. 255-264). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Carmona, G. (2017) El problema del Hotel (Actividad provocadora de modelos). Recuperado de: https://plus.google.com/u/0/communities/109854270757370860580.

Clark, K. K. & Lesh, R. (2003). A modeling approach to describe teacher knowledge. En R. Lesh & H. M.

Doerr (Eds). (2003). Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching (pp. 159-174). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Doerr, H. M. & Lesh, R. (2003). A modeling perspective on teacher development. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds). (2003). Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching (pp. 125-140). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates,

Doerr, H. M. & Tripp, J. S. (1999). Understanding how students develop mathematical models. Mathematical thinking and learning, V.1(3), pp. 231- 254.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), Mathematics Classrooms That Promote Understanding (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. & Clarke, D. (2000). Formulating operational definitions of desired outcomes of instruction in mathematics and science education. En E. A. Kelly & R. Lesh (eds.) (2000). Handbook of research design in mathematics and science education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and modeling perspective on Mathematics teaching, learning, and problema solving. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism: A models & modelling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Lester, F. K. & Hjalmarson, M. (2003). A models and modeling perspective on metacognitive functioning everaday situations where problema solvers develop mathematical constructs. En R. Lesh & H.M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism: A models & modelling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching (pp. 383–404). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. Journal of Mathematical Modeling and Application, 1(2), pp. 16-48.

Lesh, R., & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind:in which development involves several interacting simultaneously developing strands. Mathematical Thinking and Learning (pp. 205-226.). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., Doerr, H., Cramer, K., Post, T., & Zawojewski, J. (2002). Model Development Sequences. En R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching (págs. 35-58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought revealing activities for students and teacher. En A. E. Kelly, & R. A. Lesh, Handbook of research design in mathematics and science education (pp. 591-650). Routledge.

Llinares, S., Valls, J., y Roig, A. I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. Educación Matemática, 20(3), 59-82.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. Harvard Educational Review, 57 (1), 1-22.

Covariación a través de la medición, con sensor, de la absorción de la energía radiante

FLORES-CASAS, Valeria & LÓPEZ-BETANCOURT, Alicia

V. Flores & A. López

Universidad Juárez del Estado de Durango
havae_e@hotmail.com, ablopez@ujed.mx

A. Alvarado, G. Carmona y A. Mata (Dirs.) Una visión integradora. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

This paper reports the results obtained during the implementation of the didactic experience: *Obscure or clear?* This experience was designed to analyze changes in temperature over a period of time on papers pieces of different colors. The measurements were made with the Vernier's temperature sensor. The didactic experience was focused on the problem of proposing a daily situation so that the students could analyze the relationships between the variables of time and temperature, in such a way that they could transfer their results to the mathematical language. We worked with students of the last semester of High School. The sensor promoted motivation in the students and this generated an active learning environment. The sensor also showed the students the tabular data and the temperature graphs of each pair of colors, however when the students answered the didactic sequence they showed low analysis, reading and interpretation of the graphic representation. In addition, a deficient relationship between tabular and graphic representation. This limited the students to explain the covariation between the variables involved in the mathematical language.

Covariation, Representations, Temperature Sensor

Introducción

La matemática educativa ha desarrollado estrategias para incorporar otras materias científicas y su relación con la matemática en un ambiente con tecnología. Particularmente en México, en esta dirección se pueden mencionan algunos proyectos que centran sus procesos de enseñanza y aprendizaje en la incorporación de la tecnología y a su vez centrados en problemas reales: tal es el de Mochón (2002) menciona los proyectos de Emat (Enseñanza de las matemáticas con tecnologías) y Efit (Enseñanza de la física con tecnologías).

En la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango, desde hace cinco años se ha trabajado en determinar cómo es que los estudiantes manejan los diferentes registros de representaciones semióticas al utilizar recursos tecnológicos para buscar solución a problemas reales. Dentro de estas investigaciones, López-Betancourt, García-Rodríguez y Reyes-Nava (2016) expresan que "los estudiantes tienen dificultades en: el manejo de los signos de un número (positivo + o negativo -), entender el lenguaje algebraico (para representar un punto en el plano cartesiano) tales como $P(x_1,y_1)$, falta de conexión entre las representaciones tabulares y gráficas y para identificar la variable independiente y dependiente" (p.149). También en la tesis de Moreno-Castro (2013) se exploran las representaciones semióticas del concepto de función en ambiente Excel, mencionando que: "El ambiente de la hoja de cálculo permitió interactuar con las distintas representaciones semióticas pero por sí sola no precisamente garantiza la comprensión del concepto, hay que planear actividades que promuevan explorar, identificar y argumentar características dentro de estas representaciones" (p. 85).

Con base en las investigaciones mencionadas se ha permitido comprobar la importancia de involucrar a los estudiantes en la tarea de la toma e interpretación de datos con el apoyo del recurso tecnológico de sensores y software (e.g. Logger Lite) para representar los registros tabulares y gráficos, además de escalar el conocimiento en este caso para estudiantes en nivel bachillerato (López-Betancourt, García-Rodríguez, y Benítez-Pérez, 2016). Es decir, mostrar a los estudiantes situaciones reales que permitan determinar las variables involucradas en el fenómeno, así como la reflexión en los cuestionamientos de ¿cómo se relacionan estas variables?, ¿si existe alguna dependencia de una variable a la otra?, ¿qué sucede con la movilidad de una de las variables?

De tal manera que después de analizar y reflexionar en torno a las variables involucradas en el fenómeno presentado, se esté en condiciones de documentar un progreso en el aprendizaje de las matemáticas a través de transitar del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático.

Las investigaciones mencionadas en los párrafos anteriores son congruentes al discurso educativo a nivel local, nacional e internacional, para impulsar una enseñanza activa de las Matemáticas a través de problemas cotidianos y del uso de recursos tecnológicos que promuevan la motivación de los estudiantes. Con la intención de alinear la investigación con los fines del Sistema Educativo, se toman en cuenta las propuestas de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (Secretaria de Educación Pública, 2011), para desarrollar diferentes competencias en matemáticas, tales como: emplear los modelos matemáticos para representar adecuadamente situaciones y problemas, así como transferir conceptos matemáticos para interpretar fenómenos y situaciones en el contexto de otras disciplinas como son las situaciones de la vida real. Por lo anterior, la presente investigación propone un problema en contexto, con el propósito de responder: ¿cómo los estudiantes acceden al concepto de covariación, a través de la medición de la temperatura, con un sensor, para analizar la absorción de la energía radiante en piezas de papel de diferentes colores? Para ello, se toma la postura de Hitt-Espinoza (2007; 2013) para incorporar la tecnología en las aulas, conscientes de que no es una tarea sencilla y con el uso reflexivo de la misma. Estas líneas de investigación se han explorado también en el nivel secundaria en Durango, México (Alvarado-Monroy et al., 2014).

Fundamentación teórica

Cuando un profesor dice: “Dado un triángulo”, la representación mental del estudiante de ese objeto matemático (triángulo) puede diferir de la representación mental que el profesor tiene, en ese momento que le pedimos al estudiante que trace un triángulo en el pizarrón, esta sería la producción institucional de la representación mental del estudiante. El profesor puede verificar si la representación mental del estudiante del objeto matemático es la correcta. En este sentido la Teoría de representaciones semióticas de Duval permite establecer un puente entre las representaciones mentales del estudiante y el objeto matemático. Estas representaciones semióticas del objeto matemático pueden ser una gráfica una expresión algebraica y una tabla de datos.

El presente trabajo toma como soporte teórico la teoría de las representaciones semióticas de Duval (1993). Estas representaciones semióticas son fundamentales en la actividad matemática para la comprensión de conceptos. Un objeto matemático a través de sus representaciones semióticas y la interacción de cada una de ellas pueden permitir la comprensión del objeto matemático.

El desarrollo de la tecnología ha permitido la construcción de diferentes representaciones de los objetos matemáticos en ambientes interactivos, dinámicos y accesibles para los alumnos. Sin embargo, a pesar de que se pueden encontrar fácilmente representaciones en la Web o construirlas en diferente software esto no ha solucionado el problema de la comprensión de conceptos matemáticos.

Además, Duval (1993) indica que:

> En la actividad matemática es esencial ya sea poder movilizar varios registros de representaciones semióticas (figuras, gráficas, escritura simbólica, etc.) en el transcurso de una misma gestión o poder escoger un registro en lugar de otro. (p.176).

Independientemente de las diferentes representaciones del objeto matemático, lo más importante sigue siendo el objeto matemático representado. Resulta importante no confundir la representación con el objeto matemático.

“La distinción entre un objeto y su representación es pues, un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas […] no obstante, las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias”. (Duval, 1998, p. 174)

Esto está relacionado con lo que este mismo autor plantea lo que llama la paradoja cognitiva del pensamiento matemático:

“Por un lado la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual, y por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos”. (Duval, 1998, p.174)

En otras profesiones, tales como los médicos o veterinarios, se tiene al objeto y los pueden ver o tocar. Sin embargo, los aprendices de matemáticas deben realizar transformaciones entre las diferentes representaciones para acceder al objeto matemático, es decir, se accede a él a través de sus representaciones semióticas. El fenómeno de la representación se refiere y abarca a la comunicación, al funcionamiento cognitivo del pensamiento y a la comprensión. Las representaciones semióticas muestran y utilizan diferentes registros. En su trabajo Duval (1993) define semiósis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica y noesis a la aprehensión conceptual de un objeto, agrega que la noesis es inseparable de la semiósis.

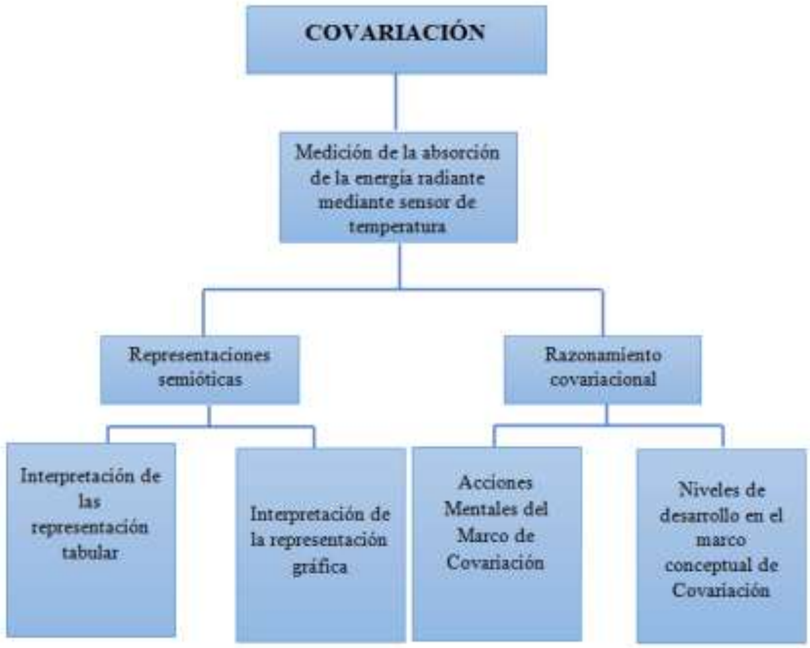
En la vida cotidiana se encuentran diferentes fenómenos físicos en los cuales intervienen variables en interacción constante. Por lo anterior, es necesario proponer nuevas estrategias de enseñanza para que los estudiantes puedan acceder a y dotar de significado conceptos matemáticos como la covariación. Este concepto está presente en nuestra vida, por ejemplo: ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que el tinaco de agua se vacié?, ¿Cuánto tiempo tarde en crecer el pasto en un jardín?, entender cómo se relacionan estas variables permite conocer e interpretar el mundo que nos rodea.

En este sentido se debe mostrar a los estudiantes situaciones reales que les permitan determinar las variables involucradas en el fenómeno; así como reflexionar en ¿cómo se relacionan estas variables? y ¿si existe alguna dependencia de una variable con la otra? Los estudiantes al analizar y reflexionar en torno a las variables involucradas en el fenómeno, se espera que ellos transiten de un aprendizaje algorítmico de las matemáticas a un aprendizaje significativo, apoyándose en las diferentes representaciones del concepto de covariación y poder relacionarlo con el problema real. Además de transitar de un conocimiento empírico a un conocimiento científico apoyado en el concepto de covariación.

Esta investigación se centra en documentar los resultados del aprendizaje de los estudiantes al trabajar la absorción de la energía radiante, en un ambiente con tecnologías y trabajo colaborativo. El referente teórico para el concepto de Covariación es el de Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu (2002) quienes definen el razonamiento covariacional como las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos variables, mientras se van atendiendo las formas en que su relación cambia una con la otra.

Carlson et al. (2002) se basan en la propuesta de Piaget (1970) para definir niveles de forma ordenada para determinar la aprehensión del concepto de covariación. Bajo estos dos referentes teóricos se propone el modelo para el análisis de los resultados arrojados en esta investigación (Figura 2.1).

Figura 2.1 Relación de los objetos de aprendizaje y las producciones institucionales



Método

La presente investigación es de corte cualitativo y toma como soporte la metodología del Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Auto-reflexión (ACODESA) de Hitt y Cortés (2007). Esta metodología relaciona: la investigación en didáctica de las matemáticas, el acercamiento individual en la construcción del conocimiento y el acercamiento social en la construcción del conocimiento. Las cinco fases principales de ACODESA son: 1) El trabajo individual que implica comprender la tarea; 2) El trabajo en equipo sobre la misma tarea en la cual están los procesos de discusión y validación; 3) Debate caracterizado por procesos de discusión y validación; 4) Regreso a la situación centrado en el trabajo individual, lo cual implica reconstrucción y auto-reflexión y 5) Institucionalización del conocimiento. Implica la exposición de las representaciones institucionales por parte del profesor. Las primeras tres fases se caracterizan por un papel del profesor como guía y se espera que los estudiantes argumenten y validen sus producciones y es hasta la fase de institucionalización que el profesor resalta las diferentes representaciones.

Recurso Tecnológico

Software Logger Lite y dos sensores de temperatura.

Experimento de la Absorción de la Energía Radiante

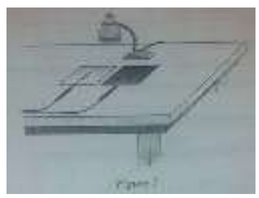
Materiales:

- Computadora.
- Pedazo de papel blanco, amarillo, azul cielo y rosa claro.
- Interfaz de la computadora Vernier.
- Pedazo de papel negro, morado, azul marino y café.
- 2 sensores de temperatura.
- Cinta.
- Lámpara y cuatro focos de 75 watts.

Procedimiento

1. Colocar cinta en dos sensores de temperatura en la superficie de la mesa en la disposición mostrada en la Figura 1.

Figura 1 Toma de temperatura con los dos sensores



2. Colocar una hoja de papel blanco sobre el sensor 1 y una hoja de papel negro sobre el sensor 2, como se muestra en la Figura 1.

3. Conectar los sensores de temperatura. Iniciar el programa Logger Lite en la compu-Aula con la carpeta de Vernier.

4. Colocar un foco directamente sobre el límite entre las dos hojas de papel y unos 10 cm por encima de los pedazos de papel. El bulbo debe ser la misma distancia de las dos puntas de los sensores aproximadamente a unos 20 cm.

5. La exposición a la temperatura será por 10 minutos. Para esto de clic en Experimentos-Toma de datos, en la casilla de duración tecleamos 10 y minutos y después clic en Aplicar.

6. Haga clic  para iniciar la recopilación de datos.

El procedimiento se repite para cada par de colores (amarillo y morado, azul cielo y azul rey, y rosa y café).

Secuencia didáctica

Se diseñó la secuencia didáctica titulada: *¿Obscuro o claro?* usando como recurso tecnológico el software Logger Lite y el sensor de temperatura de Vernier. Dicha secuencia, inicia con una narración de tres estudiantes que fueron a visitar la zona arqueológica de Teotihuacán en un día muy caluroso. Uno de ellos siente malestar y días después piensa si el color de su ropa pudo influir en el malestar que sintió. Se tomó como referente para el diseño, el experimento: Absortion of Radiant Energy (Volz y Sapatka, 2007). La secuencia didáctica se diseñó para resolver el problema de la absorción de la energía radiante asociada al color de ropa, relacionando esto con el concepto de covariación.

A continuación se presentan algunos extractos de las actividades en la secuencia didáctica *¿Obscuro o claro?*

En la Figura 3.1 se muestra el planteamiento del problema a partir del cual se desarrolla la secuencia.

Figura 3.1 Planteamiento del problema.

¿Obscuro o claro?

Juan y Laura decidieron visitar Teotihuacán el fin de semana pasado, ambos se prepararon con suficiente agua para no deshidratarse por el fuerte sol que hacía ese día.

Durante su recorrido en la zona arqueológica, Laura empezó a sentir que la temperatura de su cuerpo era cada vez más alta por lo cual empezó a sentirse mal físicamente, Juan decidió que deberían tomar un descanso en lo que Laura se recuperaba.

Laura al sentirse mejor empezó a preguntarse cuál había sido la causa de su malestar ya que se había alimentado y bebió a suficiente de agua para evitar una deshidratación al igual que Juan pero no encontró nada que la llevara a contestar su pregunta.

Al regresar a casa decidió investigar cual era la causa de su malestar, pero no encontró nada certero, entonces se pregunto que si la ropa que llevaba ese día era un factor importante para su malestar, decidió llamar a Juan para preguntarle que ropa llevaba ese día, Juan le dijo que llevaba una playera azul cielo y una pantalón de mezclilla, lo cual era ropa clara y recordó que ella llevaba puesto una blusa morada y un pantalón negro es decir ropa oscura.

Laura entonces se hizo la siguiente pregunta: ¿El color de la ropa influyó para el malestar que sintió al estar algunas horas bajo el sol, en su paseo en Teotihuacán?

¿Le podrías ayudar a Laura a responder su pregunta?

Para iniciar deberás realizar el siguiente experimento.

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 3.2 se muestra la parte de la secuencia didáctica donde los alumnos hacen sus registros de las diferentes representaciones y la preguntas para cada par de colores.

Figura 3.2 Tabla, gráfica y preguntas para el par de colores.


EQUIPO 2:

1.2 Tiempo y temperatura para Amarillo y Morado

Tiempo transcurrido	Temperatura en el tiempo (t) color amarillo	Temperatura en el tiempo (t) color morado
0		
2		
4		
6		
8		
10		

Realiza la gráfica para los colores amarillo y morado

P1. ¿Cuál fue la variación máxima de temperatura? ____

¿Cómo obtuviste esta variación? ____

P2. ¿En qué tiempo se dio? ____

P3. Localiza los puntos en la gráfica para la variación máxima ____

P4. ¿Cuál fue la variación mínima de temperatura? ____

¿Cómo obtuviste esta variación? ____

P5. ¿En qué tiempo se dio? ____

P6. Localiza los puntos en la gráfica para la variación mínima ____

Para determinar si los alumnos son capaces de obtener la razón de cambio promedio de las temperaturas se plantea la actividad que se muestra en la Figura 3.3.

Figura 3.3 Actividad de razón de cambio.

Operatividad para la exploración de la secuencia didáctica

Se realizó una entrevista con una profesora del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Juárez del Estado de Durango para la gestión de uno de sus grupos. En esta entrevista se le explicó a la profesora el tema a tratar y el tiempo llevaría la exploración. Ella estuvo de acuerdo y se precisaron las fechas para trabajar.

Población

La población fue un grupo de sexto semestre de la especialidad de ciencias de la salud de educación media superior conformado por 24 estudiantes y se trabajó con ellos durante tres días. Se trabajó con ellos en tres sesiones dos con una duración de dos horas y una sesión de una hora.

Resultados

Enseguida, se presenta los resultados de acuerdo a las etapas de la metodología ACODESA, para el grupo de bachillerato, en la medición de la temperatura para piezas de papel de diferentes colores.

Fase 1. Comprensión de la tarea. La sesión inició con la lectura de la situación problema (Hitt y Cortés, 2009) de ¿Obscuro o claro? En la cual Juan y Laura visitan Teotihuacán en un día caluroso. Con la situación de que Laura se siente mal físicamente. A partir de esta situación cotidiana de Juan y Laura, ella se cuestiona ¿por qué presentó síntomas de insolación y su compañero no?, ¿si el color de la ropa pudo haber influido? y ¿cómo podría comprobar esto?

Los estudiantes estuvieron atentos a la situación problema. De manera empírica comentaron “si la ropa es negra si se siente más calor”. Posteriormente se les preguntó que variables estarían involucradas en este fenómeno. Algunas respuestas fueron: calor, temperatura, días y tiempo. Asimismo se les preguntó ¿cuáles serían las variables que estarían interviniendo en el problema? Esto les llevo un poco de tiempo. En esta parte se cuestionó ¿Qué variable se tenía que medir? y ¿cómo se mediría?

Después se les explicó que se simularía a través de trozo de papel el color de la ropa y se mediría la temperatura a través de un sensor. Se les explicó el funcionamiento del sensor y el procedimiento para realizar el experimento.

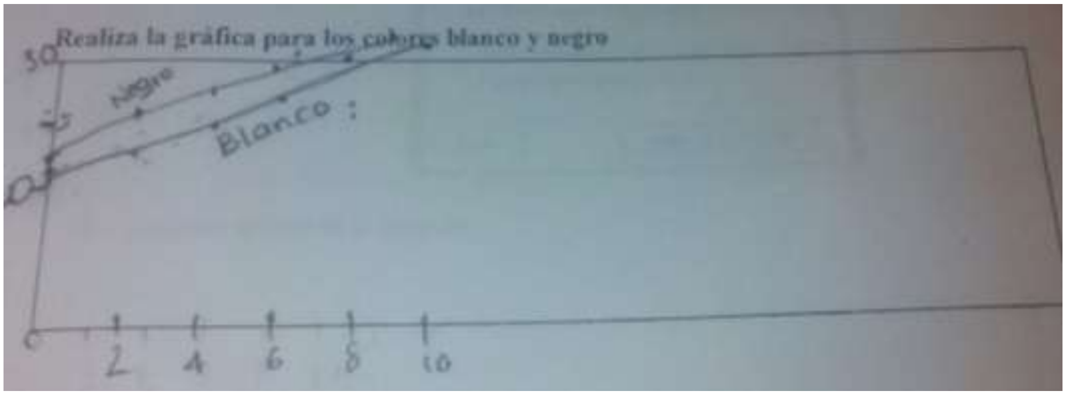
Se procedió a formar los equipos correspondientes y explicar el experimento con el sensor. Cada equipo escogía a dos representantes y pasaban al frente a realizar la práctica. (Se realizó de esta manera debido a que sólo se contaba con un par de sensores de temperatura). El grupo mostró atención cuando sus compañeros realizaban la práctica.

El software Logger Lite registró los datos de tiempo (minutos) y la temperatura (grados Celsius) en forma tabular, al mismo tiempo, generó las gráficas correspondientes de tiempo y temperatura para los dos colores en un solo visor. El resto de los compañeros del equipo registraron los datos de temperatura de la tabla para posteriormente responder su hoja de trabajo a papel y lápiz.

Se observó que los estudiantes mostraron motivación e interés durante la realización del experimento con el sensor. También manifestaron soltura y familiaridad con la tecnología y se notó que inmediatamente captaron el manejo del sensor. Consideramos que al hacerlos partícipes del experimento para la recolección de datos de la temperatura, se fue gestando un compromiso de ellos hacia la tarea, lo cual favoreció el ambiente de aprendizaje con la motivación y la disposición de los estudiantes.

Al revisar y analizar las hojas de trabajo de los estudiantes se pudieron precisar diversidad en las respuestas, por ejemplo la presentada en la figura 4.1.

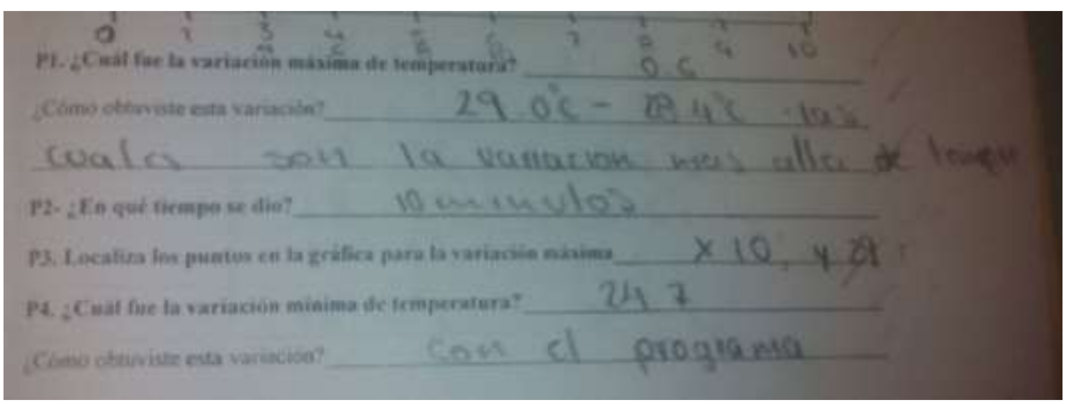
Figura 4.1 Gráfica para colores blanco y negro realizada por integrante del Equipo 2



El estudiante realiza su gráfica escribiendo un cero en el cruce de los ejes y otro cero sobre el eje Y. Esto indica que el estudiante no logra ubicar un origen y por lo tanto los pares ordenados de las gráficas no se relacionan con los valores de la tabla de datos.

También se pudo observar en las respuestas de los estudiantes, en su mayoría, no logran explicar la variación máxima y mínima de la temperatura. Lo cual indica que los estudiantes por un lado no relacionaron los datos tabulares con la representación gráfica de los mismos y a su vez, acorde con Carlson et al. (2002), la comprensión del concepto de covariación está en una etapa casi nula, como se muestra en la Figura 4.2 donde se presentan las respuestas a la preguntas planteadas. En una sección de la secuencia, el estudiante no es capaz de describir de manera general cómo se obtiene la variación máxima y la variación mínima.

Figura 4.2 Respuesta de un estudiante respecto a las variaciones de temperatura



Fase 2. El trabajo en equipo sobre la misma tarea. Con base en los resultados se construyeron las Tablas 4.1 y 4.2 donde se muestran los porcentajes por equipo que acertaron en cada una de los incisos de las dos tablas. Se caracterizó la representación gráfica y tabular en: a) construye la tabla de datos con las mediciones de temperatura realizadas, b) construye la gráfica correspondiente a la tabla de datos y c) la gráfica presenta los elementos de: identificación de las variables en los ejes, escala de los ejes e identificación de las curvas por cada color. Para contabilizar los aciertos se realizó un conteo de todas las preguntas relacionadas con la caracterización realizada del experimento.

De ahí se contaron las respuestas correctas y se calculó el porcentaje. (Ver Tabla 4.1) Este mismo procedimiento se realizó para la tabla 4.2.

Para el inciso a) el equipo 4 el 29% de sus respuestas para la representación tabular fueron incorrectas. El software mostraba los datos y los estudiantes presentaron errores al tomar nota de los datos. Para el inciso b) dos de los equipos lo realizan correctamente, por su parte el 38% (equipo 1) y 29% (equipo 4) de las respuestas de los estudiantes presentan nula relación entre los datos tabulares y lo representado en la gráfica. Finalmente el 83% de las respuestas de los estudiantes para el inciso c) fueron incorrectas; es decir no identificaron las variables de tiempo y temperatura en los ejes, escala, identificación de curvas y de pares ordenados en las gráficas.

Tabla 4.1 Caracterización de la representación tabular y gráfica

Tipos de respuestas	Equipo 1	Equipo2	Equipo 3	Equipo 4
a) Construye tabla de datos con la información obtenida	100%	100%	100%	71%
b) Construye la gráfica correspondiente a la tabla de datos	62%	100%	100%	71%
c) Construye gráfica indicando todos sus elementos	17%	17%	17%	17%

Tabla 4.2 Caracterización de la representación gráfica

Tipos de respuestas	Equipo 1	Equipo2	Equipo 3	Equipo 4
a) Interpreta correctamente los puntos en las gráficas	38%	46%	38%	59%
b) Localización de máximos y mínimos	96%	67%	100%	100%
c) Interpreta la variación máxima y mínima de las variables	38%	29%	25%	17%

Ahora bien, al contrastar las respuestas de los estudiantes con la adaptación de las Acciones Mentales propuestas por Carlson et al. (2002) (Tabla 4.3), esta jerarquización permite precisar las acciones mentales que los estudiantes realizan y con ello acercarse al proceso de construcción del concepto de covariación y definir el nivel de la habilidad de razonamiento covariacional que ha alcanzado un estudiante. Un nivel dado de desarrollo se presenta cuando sustenta las acciones mentales asociadas con ese nivel y las acciones asociadas con todos los niveles que están por debajo.

Tabla 4.3 Adaptación de las acciones mentales propuestas por Carlson

La acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
Acción Mental 1 (AMI)	La coordinación del valor de una variable con cambios en el otro.	• El etiquetado de los ejes Eje *x* = variable tiempo Eje *y* = variable temperatura
Acción Mental 2 (AM2)	La coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en las otras variables.	• Verbalizar un conocimiento de la dirección creciente
Acción Mental 3 (AM3)	La coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en las otras variables	• Verbalizar una conciencia de la cantidad de cambio la temperatura teniendo en cuenta los cambios en tiempo
Acción Mental 4 (AM4)	Coordinar el cambio de velocidad de la media de la función con incrementos uniformes de cambio en la variable de entrada.	• Verbalizar un conocimiento de la tasa de cambio de la temperatura (con respecto al tiempo), teniendo en cuenta incrementos uniformes del tiempo

Hasta aquí hemos mostrado los resultados de las respuestas de los estudiantes en sus hojas de trabajo para analizar el concepto de covariación a través de la secuencia didáctica ¿Obscuro o claro? bajo el sustento de representaciones de Duval y jerarquización de las acciones mentales de Carlson et al. En esta segunda fase de la metodología ACODESA, se pudo precisar cómo se interactuaba al interior de cada equipo, los argumentos que los estudiantes proporcionaban para dar respuesta en la hoja de trabajo. Al retomar el porcentaje respuestas incorrectas nos lleva a la reflexión que al interior de los equipos presentaban similitud en la comprensión de las representaciones tabulares y gráficas; de igual manera para las representaciones mentales de Carlson.

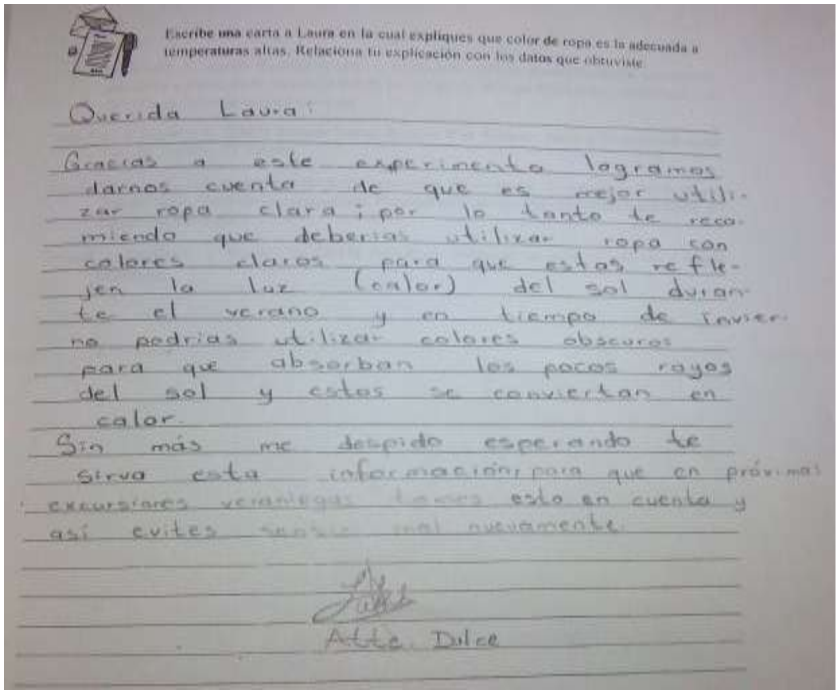
3) Debate caracterizado por procesos de discusión y validación.

La fase dos y tres se presentaron de forma simultánea. Los estudiantes interactuaban al interior de su equipo y comentaban acerca del aumento o disminución de la temperatura, respecto a cada uno de los colores. Asimismo se presentó discusión entre los equipos al expresar sus predicciones. Los alumnos en conjunto hicieron su predicción de que la temperatura de los colores aumentaría al estar expuestos a la luz de la lámpara, lo cual fue comprobado en el momento que el software presentaba las gráficas. Lo mismo ocurrió, para la predicción de que el color obscuro tendría una temperatura más alta que el color claro.

La fase 4 *"regreso sobre la situación de nuevo centrado en el trabajo individual, implica reconstrucción y auto-reflexión"*, esta fase se implementó a través de la carta que los estudiantes escribían a Juan y Laura para explicar ¿si su malestar se debía al color de ropa que llevaban ese día? , es aquí donde los estudiantes hicieron una autorreflexión de los conocimientos adquiridos a lo largo de la secuencia didáctica para poder realizar esta carta.

En las cartas obtenidas (Figuras 4.3) se observa una falta de matematizacion, es decir, en las cartas se dice que los colores claros son mejores para verano, pero no presentan un argumento matemático que justifique su propuesta, a pesar de que fueron las relaciones que identificaron para poder dar respuesta a las preguntas planteadas en la secuencia didáctica.

Figura 4.3 Carta de un estudiante 1


Escribe una carta a Laura en la cual expliques que color de ropa es la adecuada a temperaturas altas. Relaciona tu explicación con los datos que obtuviste.

Querida Laura:

Gracias a este experimento logramos darnos cuenta de que es mejor utilizar ropa clara; por lo tanto te recomiendo que deberias utilizar ropa con colores claros para que estos reflejen la luz (calor) del sol durante el verano y en tiempo de invierno podrias utilizar colores obscuros para que absorban los pocos rayos del sol y estos se conviertan en calor.

Sin más me despido esperando te sirva esta información, para que en próximas excursiones veraniegas tomes esto en cuenta y así evites sentir mal nuevamente.

Atte. Dulce

Las cartas presentan su justificación sólo por el color de la ropa. Mencionan el experimento, sin embargo no retoman los datos cómo se les pedía. En ninguna carta expresan la comparación de las temperaturas por los colores, alguna gráfica o tabla. En ninguna carta mencionan la variación entre las variables. Por lo tanto los estudiantes en sus cartas manifiestan su explicación a un nivel de conocimiento empírico.

Finalmente para la fase 5) La institucionalización del conocimiento se llevó a cabo en la última sesión, (consideramos se realizó de manera precipitada debido al tiempo) en la cual las expositoras retomaron los resultados tabulares y gráficos para cada par de color, se explicó que si hay un fundamento matemático y se mostró las variaciones por cada color para seleccionar una ropa de color obscuro o claro, así como el soporte teórico de que es lo que pasaba con las dos variables involucradas en la práctica (tiempo y temperatura).

Conclusiones

Esta sección se presenta en tres aspectos: 1. El sensor como recurso tecnológico para apoyar la tarea; 2. El problema en contexto y su conexión al contenido matemático; 3. El contraste de los resultados con el referente teórico de Duval (1998), Carlson et al. (2002) y la propuesta metodológica de ACODESA.
Para el punto uno, el uso del sensor para la medición de la temperatura en los diferentes pares de papeles de colores provoca un ambiente motivador y favorece la atención y compromiso de los estudiantes.

Esto ayudó para que los estudiantes estuvieran atentos durante el proceso de la toma de datos y la gráfica resultante. Sin embargo, cuando se les pide en la secuencia didáctica que repliquen la gráfica, la mayoría no logra hacer una representación gráfica con todos sus elementos, identificación de la variable independiente, dependiente, el origen y las escalas de los ejes.

Esto puede indicar por un lado descuido al realizar su gráfica o que los estudiantes no le dieron importancia a la lectura de los datos, lo cual implicó que los estudiantes no pudieran relacionar los datos con las preguntas relacionadas al concepto de covariación en la secuencia didáctica.

Se comprobó que el uso de diferentes representaciones por parte de los estudiantes es escaso, además que no relacionan los pares ordenados en la representación tabular con la gráfica para ayudar a precisar la variación. Los profesores debemos enfatizar en la medida de lo posible la visualización de las representaciones gráficas y encauzar constantemente a los estudiantes para que retomen la representación tabular para su conexión a la gráfica, porque en general, pareciera que los estudiantes lo utilizan de forma independiente.

En lo que respecta al punto de contrastar los resultados con los referentes teóricos de Carlson et al. (2002) los estudiantes en general no logran la coordinación del valor de una variable con cambios en la otra. Es importante señalar que los estudiantes estaban ya por egresar del bachillerato en la especialidad de ciencias de la salud, esto nos indica que en general, los estudiantes no fueron capaces de realizar, leer, comprender, analizar e interpretar toda la información contenida en una representación gráfica. La lectura e interpretación de una representación gráfica es parte de la alfabetización matemática de cualquier individuo en la sociedad. Se determinó que la mitad de los estudiantes alcanzaron un nivel 4 de razonamiento covariacional, ya que sustentaron los comportamientos de las acciones mentales de la uno a la cuatro. Además, los resultados de los estudiantes en esta exploración son acordes con los resultados correspondiente en matemáticas (Planea, 2017): el 66.2 % de los estudiantes se ubica en el nivel I lo que indica que tienen dificultades para establecer y analizar relaciones entre dos variables.

Recomendaciones

Es necesario el diseño de materiales y libros de texto que incorporen la tecnología de forma reflexiva y con la planificación de actividades con problemas reales. Esto permitirá a los estudiantes tomar datos, descubrir relaciones, precisar variables y conjeturar respecto a la covariación.

La exploración proporcionó elementos para mejorar la secuencia didáctica *¿Obscuro o claro?*, de tal manera que se presenten actividades para sustentar los comportamientos de la Acción mental 5 referente a la coordinación de la tasa de cambio instantánea de la función con continuos cambios en la variable independiente para todo el dominio de la función. En cuanto a la metodología ACODESA es necesario incluir actividades en la secuencia didáctica para que emerjan las representaciones funcionales para una mejor comprensión de la tarea (Fase 1 y 2). Asimismo relacionar la secuencia didáctica con *Geogebra* o algún otro software, para que los estudiantes visualicen las representaciones, les apoye para activar sus representaciones mentales y puedan mejorar la movilización en los diferentes registros de representación.

Referencias

Alvarado-Monroy, A., Carmona, G., López-Betancourt, A. y Mata-Romero, A. (2014). Construyendo el significado de quilataje con Netlogo. Uso de Tecnologías en Matemática Educativa. Investigaciones y Propuestas, Recuperado el 15 mayo del 2015 de: http://www.amiutem.edu.mx.

Carlson M., Jacobs S., Coe E., Larsen S. y Hsu E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. Journal Research in Mathematics Education, 33, 5, p. 352-378.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo de pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa II. (pp. 188-231). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 173-201). México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. Grupo Editorial Iberoamericana.

Hitt-Espinoza F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage conception et usages, regards croisés (pp. 65-88). Éditorial Hermes.

Planea. (2017). Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes. Recuperado el tres de mayo del 2017 de: http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/ResultadosNacionalesPlaneaMS2017.PDF

Hitt-Espinoza F. (2013). ¿Qué tecnología utilizar en el aula de matemáticas y por qué? AMIUTEM. 1(1), 1-18.

Hitt-Espinoza F., y Cortés-Zavala J. C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadoras con posibilidades gráficas. Educación e Internet. 10(1), 1-30.

López-Betancourt A., García-Rodríguez M.L. y Reyes-Nava. E. (2016). Acercamiento al concepto de variación a través de la medición del Ph del suelo. AMIUTEM. Vol IV(1). ISSN: 2395-955X. http://revista.amiutem.edu.mx

López-Betancourt A., García-Rodríguez M.L. Benítez-Pérez A.A. (2016). Medición del Ph del suelo con sensor: una experiencia escalonada en dos niveles. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol 29 (29). págs. 739-745. ISSN:2448-6469. http://www.clame.org.mx/acta.htm

Mochón, S. (2002), Enseñanza de las ciencias a través de modelos matemáticos. México: Secretaría de Educación Pública.

Moreno-Castro C.A. (2013). Exploración de las representaciones semióticas del concepto de función en ambiente Excel, en el contexto de la Facultad de Ciencias Forestales. Tesis s/p. Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Juárez del Estado de Durango.

SEP (2011) Documento Base del Bachillerato General. DGB/DCA.

Volz, D.L. y Sapatka, S. (2007) Middle School Science With Vernier. Science Experiments using Vernier sensors, Ed Vernier.

El uso de tecnologías digitales en actividades que extienden la discusión matemática de los estudiantes

GÓMEZ-ARCIGA, Adrián & POVEDA-FERNÁNDEZ, William

A. Gómez & W. Poveda

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – IPN
agomeza@cinvestav.mx, wpoveda@cinvestav.mx

A. Alvarado, G. Carmona y A. Mata (Dirs.) Una visión integradora. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

The purpose of this study was to analyze the extent to which the systematic and coordinated use of digital technologies (GeoGebra, YouTube and Padlet) allows the students to represent and explore mathematical problems and, ways in which they can engage in mathematical discussion beyond the classroom. 18 high school students participated in problem solving activities that involved the concept of quadratic equation, they were studying the first mathematical course. The participants were familiar with the use of dynamic geometry system (GeoGebra), they were efficient in using basic tools such as: point, intersection, line, segment, perpendicular line, parallel line, trace, locus, polygon, regular polygon, circumference, distance or length, area and some input bar commands to represent geometric objects dynamically. The participants used GeoGebra to build dynamic models of the given problems and, often, constructed loci generated from the variation of parameters' values involved in the models using sliders. They also relied on the use of YouTube to remember or learn how to use formulas, and to carry out algebraic procedures. Similarly, they used Padlet to share and discuss information related to the topic in study. In general terms, there is evidence that the use of several digital technologies became important for students to understand and discuss mathematical ideas and to solve problems.

Resolución de Problemas, Tecnologías Digitales, Nivel Medio Superior

Introducción

La resolución de problemas y el uso de las tecnologías digitales ofrecen la oportunidad para que los estudiantes se involucren en actividades propias del quehacer y pensamiento matemático. ¿Cómo utilizar las tecnologías digitales cuando se desarrollan actividades matemáticas bajo el enfoque de la resolución de problemas? En respuesta a esta pregunta, hay que reconocer y discutir que existen varios tipos de tecnologías con potenciales distintos, lo que obliga a identificar las ventajas que ofrece una tecnología en particular cuando los estudiantes las usan sistemáticamente en la resolución de problemas (Santos-Trigo, Reyes-Martínez, & Aguilar-Magallón, 2015).

Las investigaciones que existen en torno al uso de las tecnologías digitales en ambientes que promueven la resolución de problemas presentan distintos enfoques y formas de incorporarlas en las actividades de aprendizaje. Esto es, buscan responder preguntas como: ¿qué acercamientos y soluciones muestran los estudiantes cuando usan alguna tecnología digital en particular para resolver un problema?, ¿cómo selecciona el profesor las tecnologías para explorar y solucionar un problema?, ¿cuáles son las características que debe tener la tecnología para que tanto profesores como estudiantes puedan aprovecharlas para construir conocimiento matemático?, ¿cuáles son las dificultades que aparecen al utilizar las tecnologías digitales en la resolución de problemas?

Algunas investigaciones reportan cómo el uso de la tecnología en la resolución de problemas influye y modifica la forma en que los profesores se enfrentan a problemas. Santos-Trigo, Reyes-Rodríguez, y Espinosa-Pérez (2007), reportan que el uso del SGD (Sistema de Geometría Dinámica, en este caso GeoGebra) ayuda a los profesores a monitorear sus procesos en la solución de un problema, permitiéndoles argumentar, validar y extender las actividades. Santos-Trigo y Reyes-Rodríguez (2011), observaron que para resolver un problema que implica modelación con el uso de un SGD, los profesores se involucraron en actividades y tareas como representar, identificar relaciones matemáticas, formar conjeturas y buscar argumentos a partir de mover de manera ordenada objetos dentro del modelo dinámico del problema.

Santos-Trigo, Moreno-Armella y Camacho-Machín (2016), resaltan la importancia del uso de las tecnologías digitales y sugieren que extienden los elementos que caracterizan un Espacio de Trabajo Matemático, pues observaron que los modelos dinámicos de los problemas abren la posibilidad de representar y explorar las tareas de distintas formas, promoviendo la participación activa de los profesores y estudiantes. Es decir, las tecnologías digitales facilitan a los estudiantes el compartir ideas e involucrarse en discusiones colectivas orientadas a la construcción y comprensión del conocimiento matemático.

Gómez-Arciga, Santos-Chávez y Basaldú-Gutiérrez (2016), en un estudio realizado con un grupo de estudiantes de nivel bachillerato, reportan que el uso sistemático de las tecnologías digitales favorece los hábitos de razonamiento matemático, pues construir modelos dinámicos permite que los estudiantes construyan e identifiquen objetos matemáticos y conceptos, definan variables, busquen relaciones, analicen casos más simples, hagan deducciones e interpreten soluciones. Debe destacarse que se implementaron muros digitales donde los estudiantes podían interactuar y discutir los problemas fuera del horario de clases.

Las investigaciones expuestas hasta el momento coinciden con trabajos recientes, por ejemplo: Alagic y Alagic (2013) y Poveda y Aguilar-Magallón (2017) afirman que los entornos de enseñanza tienen que contemplar el trabajo colaborativo, pues la interacción entre los participantes permite apropiarse de nuevos recursos y refinar sus estrategias.

Existe una propuesta sobre el uso de las tecnologías digitales en el ámbito educativo que se basa en un modelo denominado Aprendizaje Invertido. Consiste en asignarles materiales o recursos a los estudiantes para que los revisen fuera de clases y después, en un ambiente interactivo guiado por el profesor, apliquen los conceptos aprendidos para resolver los problemas planteados en clases (Green, 2012; Lawrence, 2014). Con base en estas ideas, durante la implementación de las actividades diseñadas para esta investigación, se propuso a los estudiantes consultar diversas fuentes de Internet donde pudieran recuperar información, fuera de clase, que les fuera útil para la resolución de los problemas planteados.

El uso coordinado de las tecnologías digitales amplía las posibilidades de alcanzar los objetivos deseados en la enseñanza matemática que, según Schoenfeld (1992), son: dar sentido a la disciplina, comprender conceptos relevantes, explorar problemas y situaciones problemáticas, desarrollar un punto de vista matemático, desarrollar un lenguaje formal y promover decisiones autónomas en los estudiantes al comprender conceptos y resolver problemas.

Con el uso de las tecnologías digitales, los estudiantes pueden consultar recursos en línea como libros de texto, wikis, buscador de respuestas (WolframAlpha) y vídeos que les ayuden a complementar, ampliar o contrastar las actividades vistas en clase. No obstante, el acceso a diferentes recursos en línea no garantiza que los estudiantes puedan seleccionarlos y utilizarlos eficientemente para su aprendizaje (Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2014).

Por este motivo, el problema de investigación que se presenta se centra en analizar y documentar cómo el uso sistemático y coordinado de las tecnologías digitales permiten a los estudiantes representar y explorar los problemas matemáticos y, cómo pueden aprovecharse para extender las discusiones de sus ideas y acercamientos a los problemas más allá del salón de clases. Según Santos-Trigo y Reyes-Martínez (2014) el uso coordinado de estas tecnologías puede ofrecer distintas oportunidades a los estudiantes para desarrollar el pensamiento matemático.

Por lo tanto, la pregunta que guio este estudio fue: ¿Qué acercamientos y formas de resolver los problemas muestran los estudiantes cuando usan sistemáticamente YouTube, Padlet y un Sistema de Geometría Dinámica?

Marco conceptual

El marco conceptual de esta investigación está estructurado de acuerdo con las ideas establecidas en el problema de investigación. Por una parte, la resolución de problemas es importante considerarlo cuando se desea caracterizar el desarrollo del pensamiento matemático antes, durante y después de resolver un problema; porque permite analizar los recursos y las estrategias cognitivas o métodos heurísticos, que exponen los participantes a lo largo del problema (Santos-Trigo, 2014). Por otra parte, debido a que las actividades involucraron el uso de tecnologías digitales, se retomó el marco propuesto por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009) cuya característica esencial es que incorporan dichas tecnologías como un elemento central en el proceso de resolución de problemas.

1 Resolución de problemas

En 1945 se publicó el libro *How to solve it*, escrito por Polya, quien identificó cuatro fases en la resolución de problemas que debían considerarse para enseñar y aprender matemáticas, éstas son: 1) comprensión del problema; 2) concepción de un plan; 3) ejecución de un plan; 4) visión retrospectiva. Sin embargo, Schoenfeld (1985) en su libro *Mathematical Problem Solving*, comenta que este proceso involucra más elementos, que deben tomarse en cuenta para entender cómo los estudiantes resuelven problemas o qué tipo de acercamientos muestran y, a partir de ellos, reflexionar qué actividades se pueden formular para ayudarlos. Así, Schoenfeld (1985) propone un marco que permite analizar el proceso para resolver problemas que desarrolla un individuo, el cual se compone de cuatro dimensiones: recursos, heurísticas, estrategias meta-cognitivas y creencias. En este estudio nos interesa identificar y analizar los recursos y las heurísticas que exhiben los estudiantes de bachillerato cuando resuelven problemas. Según Schoenfeld (1985), los *recursos* son los conocimientos que el individuo tiene a su disposición y las formas en que se apropia de éstos. De los cuales, identifica cinco tipos de conocimientos:

1. Conocimiento informal o intuitivo acerca de la disciplina o problema a resolver: son las formas en que interpretan los estudiantes las matemáticas y cómo se aprenden, con base en las experiencias que tienen sobre los conceptos utilizados de la disciplina. Por esta razón, surgen algunas dificultades cuando intentan entender conceptos matemáticos.

2. Hechos y definiciones: son necesarios tanto para seleccionar alguna ruta de solución como para validar el proceso en la resolución del problema. El estudiante debe tener la capacidad de acceder a este conocimiento para utilizarlo cuando se enfrenta a un problema.

3. Procedimientos rutinarios: especifican cómo debe resolverse un problema sin ser explícitos con los posibles algoritmos que pueden utilizarse, por ejemplo, para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática primero deben identificarse los términos cuadrático, lineal e independiente, enseguida seleccionar los coeficientes a, b y c, cuando la ecuación está igualada a cero y por último, aplicar la fórmula general. Es decir, como no implican toma de decisiones entonces son considerados a nivel táctico y no estratégico.

4. Conocimiento acerca del discurso del dominio: es como el estudiante percibe conceptos o reglas para resolver un problema. Si entiende un aspecto particular de alguna regla, probablemente no pueda trasladarla a otro contexto.

5. Errores consistentes o recursos débiles: es el resultado, que obtiene un estudiante, de emplear un procedimiento sistemático imperfecto, el cual usa de modo consistente y con confianza, a un contexto diferente (Matz, 1980).

Las *heurísticas* son estrategias generales que pueden ser útiles para superar las dificultades que se presentan al momento de resolver un problema. Algunas heurísticas que identificó Polya (1945) son: explotar analogías, introducir elementos auxiliares en el problema, descomponer o combinar algunos elementos del problema, dibujar figuras, variar el problema o trabajar en casos específicos. Estas estrategias pueden ayudar a descubrir relaciones estructurales o conceptos matemáticos relacionados con el problema, ampliando las posibilidades de alcanzar una solución. Sin embargo, el estudiante debe involucrarse en experiencias que le permitan apropiarse de estas estrategias, es decir, de saber cómo y cuándo utilizarlas.

2 Uso de tecnologías digitales en la educación matemática

Es reconocido que la tecnología digital no sólo tiene un gran potencial para favorecer el aprendizaje de las matemáticas, también abre nuevas perspectivas que no eran posibles antes del desarrollo de las tecnologías digitales (Leung, 2013). Internet es una herramienta que, aunque no fue diseñada originalmente para propiciar conocimiento matemático, su uso ha generado cambios en las dinámicas de enseñanza. Borba, Clarkson y Gadanidis (2013) comentan que el hecho de que los estudiantes tengan acceso continuo a Internet refleja cambios como: 1) el conocimiento matemático en su totalidad ya no es sólo propiedad de los profesores y de los libros de texto, ni está limitado por la forma de comunicación en los libros tradicionales, el conocimiento también existe en sitios de información de acceso público como Wikipedia, WolframAlpha y otros que ofrecen contenido matemático textual, multimodal e interactivo; y, 2) la enseñanza de las matemáticas no está limitada a escenarios formales de aula ya que Internet se ha convertido en un amplio recurso de información, por ejemplo, un estudiante puede efectuar una búsqueda en YouTube o Khan Academy sobre funciones y encontrar numerosos videos que enseñan los contenido matemáticos relacionados con el tema.

En este sentido, incorporar las herramientas tecnológicas demanda que el profesor no sólo debe conocer y dominar los contenidos de la materia que imparte, sino buscar de qué manera puede incorporar la tecnología en sus prácticas con la finalidad de mejorar el aprendizaje en sus estudiantes (Mishra & Koehler, 2006). Santos-Trigo (2008) y Aguilar-Magallón y Poveda (2017) consideran que las tecnologías digitales son un elemento importante cuando se resuelven problemas, porque además de ayudar a identificar patrones, conjeturas o relaciones, también permite implementar estrategias y extender el repertorio de heurísticas. Es decir, el uso de las tecnologías digitales influye en la conceptualización y forma de interactuar con los problemas. Al respecto, Leung y Bolite-Frant (2015) también coinciden con la idea de que las formas de resolver un problema se pueden explicar a partir de las herramientas que usa el estudiante en el proceso de solución de los problemas. Por lo tanto, puede afirmarse que las tecnologías digitales juegan un papel importante en el desarrollo de las habilidades cognitivas.

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009) proponen un marco que, además de permitir analizar los procesos que siguen los estudiantes cuando resuelven problemas con el uso de las tecnologías digitales, da la posibilidad de transformar problemas rutinarios en un conjunto de actividades no rutinarias. En consecuencia, los profesores pueden planear sus lecciones y organizar actividades de aprendizaje que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. A continuación, se presenta el marco que consta de cinco fases, en cada una se plantean algunas preguntas directrices y se da una breve descripción:

1. Comprensión del problema: ¿qué conceptos matemáticos dominan los estudiantes y qué preguntas se plantean antes de iniciar con la resolución del problema? Identificar los conceptos que se relacionan con el problema y plantear algunas preguntas que orienten la actividad, por ejemplo: ¿qué es lo que se busca?, ¿cómo se construye el modelo dinámico?, etc.

2. Implementación de un plan de solución: ¿cómo representar el problema con el uso de un SGD o con otra herramienta que permita explorarlo para encontrar relaciones?, ¿qué estrategia es adecuada para utilizar? Valorar diferentes caminos para alcanzar la solución.

3. Búsqueda de patrones y una solución general: ¿qué relaciones o invariantes se exhiben y cómo pueden aprovecharse para obtener la solución? Analizar y discriminar los distintos resultados encontrados para proponer una solución argumentada.

4. Conexiones y extensiones: ¿con qué problemas similares puede conectarse el problema?, ¿qué cambia en el problema si se modifica algún elemento? Plantear nuevos problemas a partir de los resultados encontrados en el problema.

5. Visón retrospectiva y reflexiones: ¿cuáles fueron las ideas principales que se aportaron para la solución del problema?, ¿qué estrategias se utilizaron y cuáles fueron las más efectivas?, ¿qué preguntas se plantearon antes, durante y después de resolver el problema? Discutir en torno a las actividades y resultados obtenidos.

Bajo este enfoque, los modelos dinámicos se vuelven importantes para explorar comportamientos matemáticos de una familia de objetos a través del arrastre, la búsqueda de lugares geométricos y la cuantificación de atributos, favoreciendo la formulación de conjeturas. Además, proporciona información sobre invariantes, patrones de comportamiento, que permite identificar conexiones y relaciones de objetos matemáticos las cuales pueden ayudar a establecer argumentos que justifiquen las relaciones emergentes o las conjeturas.

Dick y Hollebrands (2011) enfatizan la importancia de que los estudiantes usen la tecnología digital como medio para fomentar hábitos de resolución de problemas y señalan que las fases del proceso de solución adquieren otro significado cuando se incorpora el uso sistemático de herramientas digitales. Estas fases involucran:

Analizar el problema: identificar cuáles herramientas tecnológicas son apropiadas para usarlas y cuando hacerlo.
Implementar una estrategia: hacer un uso útil de las herramientas tecnológicas y monitorear el progreso hacia lo solución.
Búsqueda y uso de conexiones: especialmente explorando a través de diferentes representaciones.

> Reflexionar sobre la solución del problema: considerar la racionalidad de los resultados obtenidos en las herramientas tecnológicas, reconocer las limitaciones de las mismas, conciliar los diferentes enfoques (con y sin tecnología) e interpretar los resultados en el contexto del problema. (p. xiii)

Usar la tecnología digital cuando se resuelven problemas matemáticos, implica saber cómo seleccionarla según sus características para que ayude a superar las dificultades que se les presentan a los estudiantes en este proceso (NCTM, 2011). En este sentido, Hegedus y Moreno-Armella (2010) mencionan que si se utiliza una herramienta para construir representaciones matemáticas deben considerarse los siguientes componentes:

- Navegación. Capacidad de seleccionar diferentes acciones desde la pantalla (trazar rectas, construir polígonos, etc.), mover figuras matemáticas, desplazarse y hacer zoom en un sistema de coordenadas.
- Interacción. Seleccionar, mantener, arrastrar o manipular objetos.
- Anotación. Añadir marcas, literales o números a partes de las figuras.
- Construcción. Figuras matemáticas que pueden ser construidas a través de las herramientas específicas.
- Simulación. Permitir que los objetos que forman parte de las figuras sean animados.
- Manipulación. Las figuras construidas pueden ser analizadas como familias que mantienen las propiedades esenciales de la construcción (figuras robustas).

Estas características son inherentes a GeoGebra. Por otro lado, Tzu-Bin, Chen, y Chai (2015) caracterizan las “nuevas” tecnologías diseñadas para la comunicación (conocidas como medios de comunicación) de la siguiente manera: digital, se crean en forma digital como periódicos, revistas y libros en línea; virtualidad, se propagan a través de Internet; hipertextualidad, la información está fragmentada en pequeños segmentos y se vincula con hipervínculos; interactividad, fácil creación de mensaje multimodal que promueve las interacciones y comunicaciones entre los participantes.
Estas ideas expuestas, sirvieron para seleccionar las tecnologías digitales, Padlet y YouTube, que los estudiantes utilizaron para obtener información que les ayudara a desarrollar las actividades y para compartir sus ideas con el resto del grupo, fuera de las sesiones de clases.

Metodología

A continuación se detallan los aspectos metodológicos de la investigación que aquí se reporta, como: los participantes, las sesiones de trabajo, las actividades y los instrumentos de recolección de datos.

1 Participantes de la investigación

El estudio se realizó con un grupo de estudiantes de primer semestre de bachillerato, los cuales cursaban la materia de Matemáticas I. El grupo estuvo conformado por 18 estudiantes con edades entre 15 y 17 años.

Es importante mencionar que todo el grupo estaba familiarizado con el uso GeoGebra, la mayoría utilizaba las herramientas básicas como punto, intersección, recta, segmento, recta perpendicular, recta paralela, rastro, lugar geométrico, polígono, polígono regular, circunferencia (centro, punto), distancia o longitud, área y algunos comandos en la barra de entrada.

2 Sesiones de trabajo

Se llevaron a cabo seis sesiones dirigidas por el investigador responsable del estudio, tres sesiones por semana: dos de 2 horas y una de 1 hora, haciendo un total de 10 horas de trabajo presencial bajo un ambiente de resolución de problemas. En cada sesión los estudiantes resolvían problemas geométricos mediante el uso de ecuaciones cuadráticas apoyados por el SGD. Las sesiones se llevaron a cabo en un aula de cómputo, donde cada estudiante disponía de una computadora con acceso a Internet y con GeoGebra (SGD) para desarrollar las actividades propuestas. El profesor contaba con una computadora, proyector y pintarrón.

Con el fin de que los estudiantes discutieran sus ideas y analizaran configuraciones dinámicas desde diferentes perspectivas, se les propuso formar binas. También, se les solicitó que expusieran los acercamientos o avances de las construcciones dinámicas con el uso del SGD para contrastar sus resultados con el resto del grupo. Al termino de cada sesión, el profesor pidió a los estudiantes enviar por correo electrónico un archivo de GeoGebra con las construcciones generadas, la descripción de lo que habían realizado hasta el momento y agregaran con el comando texto, comentarios y reflexiones con respecto al trabajo presentado por sus compañeros.

De manera complementaria, y tomando en cuenta las ideas de Aprendizaje Invertido (Green, 2012; Lawrence, 2014), se les solicitó a los estudiantes que buscaran información en Internet como, por ejemplo, videos tutoriales en YouTube, Khan Academy, wikis, entre otras, donde pudieran recordar o aprender fórmulas, algoritmos o conceptos relacionados con las actividades que se desarrollaron en las sesiones presenciales. Además, se implementó el uso de Padlet con la finalidad de que se generaran discusiones y compartieran información fuera de clases.

3 Actividades

El problema que se les propuso a los estudiantes fue construir el modelo dinámico de un cuadrado tal que uno de sus vértices estuviera en el origen y otro sobre el eje x, analizarlo y discutir los resultados. Para fines de la toma de datos en la investigación se dividió en tres actividades: 1) construcción del modelo dinámico; 2) análisis del área y perímetro de dicho modelo; 3) justificación algebraica de los resultados obtenidos. En la sección de análisis y discusión de resultados se detallan las actividades. Es importante mencionar que la manera en que se propusieron las actividades tuvo la finalidad de que los estudiantes desarrollaran las habilidades matemáticas y conocimientos necesarios para abordar la siguiente actividad. Por ejemplo, las relaciones y conexiones que los estudiantes identificaran y los resultados que obtuvieran en la primera actividad les servirían para la segunda.

La implementación de las actividades se hizo con base en los episodios propuestos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009), es decir, en cada actividad se enfatizaron dichos episodios.

4 Recolección y análisis de datos

A continuación, se mencionan y describen los instrumentos que se utilizaron para recolectar los datos en esta investigación.

Archivos de GeoGebra: estos archivos fueron entregados por los estudiantes al final de cada sesión por vía correo electrónico. Fueron de gran utilidad para observar y analizar los primeros acercamientos que tuvo cada estudiante con respecto a la construcción de cada problema solicitado. El análisis fue posible gracias a la opción *protocolo de construcción* que incluye el SGD, el cual permite generar cada construcción paso a paso, sin embargo, esta opción presenta una limitante al no guardar los objetos eliminados de cada construcción. Sin embargo, este aspecto fue cubierto con las notas de campo y con las videograbaciones que se hicieron a los diferentes equipos y a cada estudiante durante las exposiciones.

Videograbaciones: el objetivo de grabar las sesiones de clases fue contar con los acercamientos iniciales de cada construcción, con las discusiones y participaciones de los estudiantes en torno a los conceptos matemáticos, con los procedimientos algebraicos realizados en papel y lápiz, y las reflexiones sobre los distintos resultados obtenidos. Las grabaciones se centraron en los monitores cuando cada equipo describía su trabajo y en el pintarrón cuando pasaba algún estudiante a explicar sus avances o cuando se generaba una discusión grupal.

Muro digital Padlet: se utilizó como un medio de comunicación (foro) que sirviera de apoyo en las tareas, es decir, que los estudiantes expresaran sus dudas, compartieran información de páginas o videos relacionados con los temas, mostraran acercamientos de las posibles soluciones y que intercambiaran opiniones sobre estos acercamientos. El objetivo de usar este muro digital fue contar con la evidencia de las discusiones e interacciones que muestran los alumnos en torno a los problemas y conceptos matemáticos planteados en las tareas.

Archivos en Word: las tareas fueron entregadas en estos archivos con el propósito de tener todos los procedimientos de los problemas discutidos en Padlet de manera clara y organizada; además, de analizar las soluciones del resto de los problemas que no se presentaron en el muro.

Notas de campo: son las evidencias escritas de las observaciones del investigador, donde se distinguen situaciones fuera de lo común con relación a las actividades de los estudiantes cuando resuelven problemas con el uso del SGD. Las notas de campo sirvieron para complementar la información y el análisis de los datos.

En los datos obtenidos se analizaron los recursos y los métodos heurísticos que pusieron en juego los estudiantes durante el desarrollo de las actividades. La presentación de estos resultados está estructurada con base en los episodios propuestos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009).

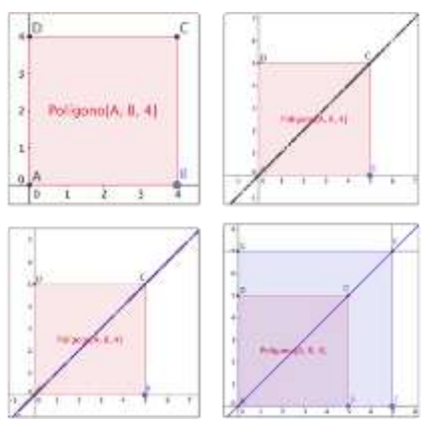
Presentación y discusión de los resultados

1 Primera actividad

La actividad inicial se centró en la construcción dinámica de una figura geométrica (cuadrado) y se propuso de la siguiente manera: *Construir un modelo dinámico, en GeoGebra, que represente a la familia de cuadrados con un vértice en el origen y otro sobre el eje x.*

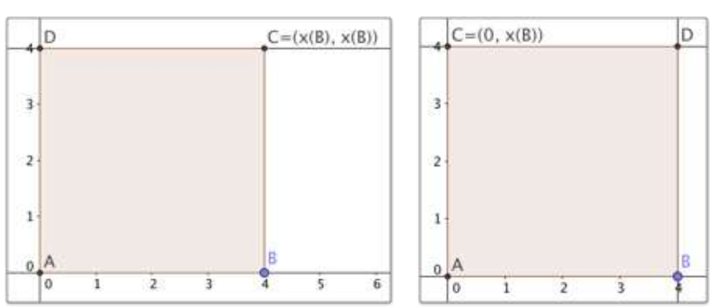
Los diferentes acercamientos y las formas de resolver el problema que mostraron los estudiantes permitieron identificar recursos, estrategias o heurísticas y conceptos utilizados en la construcción. Durante el episodio de *comprensión del problema* los estudiantes analizaron cuáles son los objetos geométricos relacionados con la construcción del modelo dinámico, por ejemplo, los ángulos de 90º los tradujeron como la intersección de rectas perpendiculares. En ese sentido, la *implementación de un plan de solución* fue explorar y determinar qué herramientas del SGD podían servir para la construcción de los objetos geométricos relacionados con el modelo dinámico. Una herramienta seleccionada fue *polígono regular* la cual permitió a los estudiantes construir el cuadrado dados dos vértices consecutivos. Este resultado favoreció al episodio de *búsqueda de patrones y una solución general*, ya que los estudiantes observaron el comportamiento del punto *C* (vértice del cuadrado) cuando se mueve el punto *B*, a través de la opción rastro, y concluyeron que *C* describía el lugar geométrico de la recta $y=x$ (Figura 4.1). Así que, una solución distinta, que se obtuvo gracias al uso de la heurística de analizar el lugar geométrico de un punto, u otra forma de construir el cuadrado cumpliendo con las condiciones establecidas en el problema, es a partir de la recta encontrada. En la Figura 4.2 se muestra una solución que se sustenta en la misma idea de la recta, solo que el punto es el que se define con dicha relación funcional.

Figura 4.1 Construcciones del cuadrado por medio del comando *polígono regular* y la recta $y = x$



Fuente: Producción de los estudiantes.

Figura 4.2 Construcciones del cuadrado, mostradas por los estudiantes, cuando se define el punto *C* en función del punto *B*



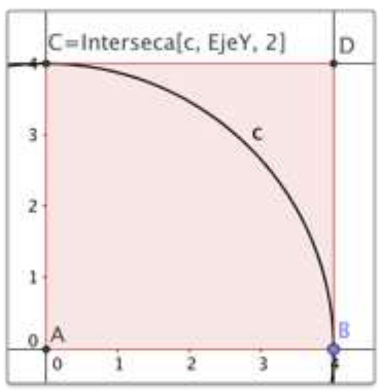
Fuente: Producción de los estudiantes.

Otro camino que siguieron los estudiantes para construir el cuadrado fue con el uso de la herramienta *circunferencia (centro, punto)* (Figura 4.3). Trazaron la circunferencia con centro en el vértice *A* (que está ubicado en el origen del plano cartesiano) con radio *AB* con el objetivo de trasladar la medida del lado del cuadrado al eje de las ordenadas, obteniendo las condiciones suficientes para construir el modelo dinámico solicitado en el problema.

En esta actividad se observó cómo la construcción del modelo dinámico del problema permitió que los estudiantes construyeran significados de objetos matemáticos. Es decir, representar el cuadrado en GeoGebra, implicó analizar las propiedades geométricas para seleccionar adecuadamente los objetos geométricos necesarios para su construcción (recursos) y, a pesar de modificar las dimensiones de sus lados, mantener dichas propiedades.

Las diferentes estrategias que usaron los estudiantes, en la construcción del modelo dinámico, evidenciaron cómo emplearon los comandos de GeoGebra o las propiedades de los objetos matemáticos que éste ofrece. Por ejemplo, usar la circunferencia para trasladar la medida de un segmento, trazar perpendiculares para construir ángulos rectos y activar rastro para identificar el lugar geométrico. Este último es considerado una heurística, porque puede usarse de forma general para encontrar nuevos elementos que ayuden a resolver un problema con el uso del SGD.

Figura 4.3 Construcción del cuadrado con el uso de la herramienta *circunferencia*



Fuente: Producción de los estudiantes.

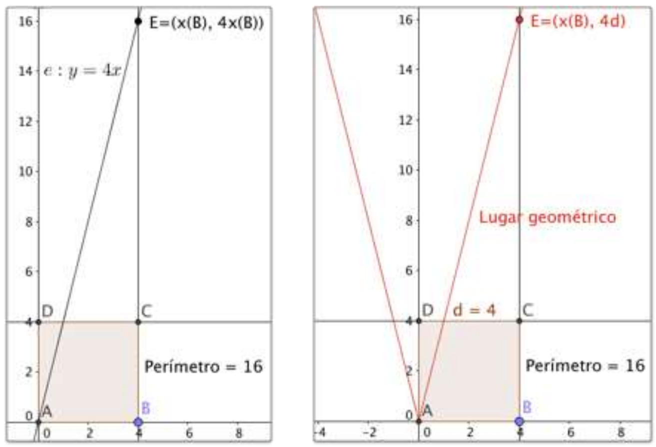
2 Segunda actividad

El objetivo de esta actividad fue que los estudiantes exploraran y analizaran atributos matemáticos derivados de la construcción dinámica del cuadrado. En este sentido, se les solicitó lo siguiente: *Representar gráficamente el comportamiento del perímetro y del área cuando la longitud de la base del cuadrado (segmento AB) cambia*. El episodio que se lleva a cabo en esta tarea es el de *conexiones y extensiones*, ya que los estudiantes se involucran en encontrar relaciones estructurales del modelo dinámico que les permitan comprender cómo varían sus atributos cuando se cambia la longitud del segmento *AB*. Los primeros acercamientos mostrados fueron relacionados con graficar el perímetro del cuadrado en función de la longitud de segmento AB (Figura 4.4). La idea que utilizaron los estudiantes para obtener la gráfica asociada al perímetro fue definir el punto *E* como la relación que existe entre la coordenada *x* del punto *B* y el perímetro del cuadrado, sin embargo, dependiendo de la manera en que se expresara el perímetro se visualizaban gráficas distintas (Figura 4.4).

Esto generó una discusión en torno a las preguntas: ¿por qué se obtuvieron resultados diferentes? y ¿cuál de estas gráficas tiene sentido según el contexto del problema? Es decir, el uso del SGD implicó que los estudiantes reflexionaran sobre el dominio del problema e interpretaran las gráficas obtenidas.

Para representar la gráfica del área asociada al cuadrado, los estudiantes siguieron la misma estrategia y, de la misma manera que el perímetro, se obtuvieron distintas gráficas dependiendo de la manera en la que la que se definió el área (Figura 4.5). Este resultado dio la posibilidad de que el grupo se centrara en analizar y discutir sus acercamientos nuevamente.

Figura 4.4 Gráficas asociadas al perímetro

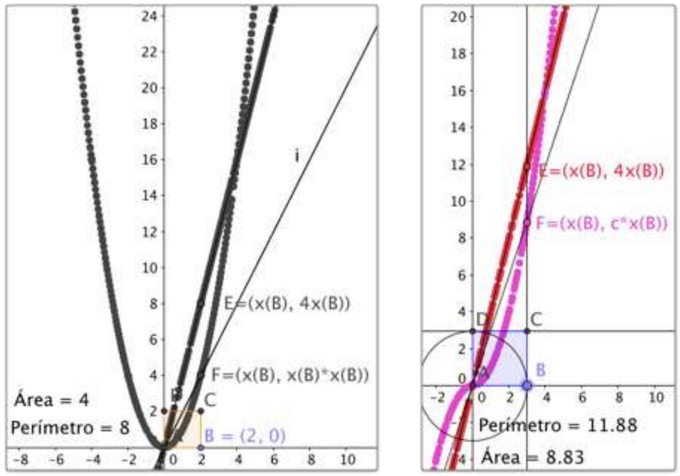


Fuente: producción de los estudiantes.

Después de que compartieran y argumentaran los distintos acercamientos, se les solicitó a los estudiantes concluir; es decir, involucrarse en el episodio de *visión retrospectiva y reflexiones*. Por ejemplo, el grupo logró determinar que solo debía analizarse el primer cuadrante del plano cartesiano, que es donde tiene sentido el problema, porque en los otros cuadrantes es necesario considerar lados con medidas negativas del cuadrado.

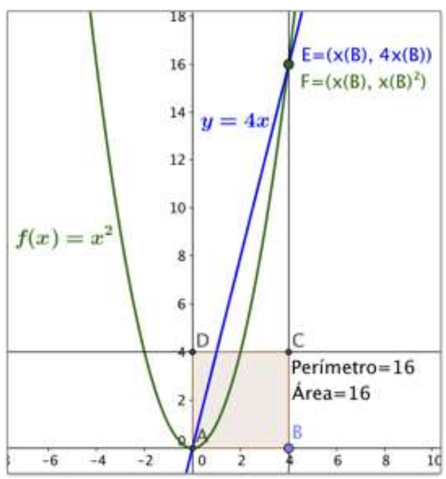
Además, los estudiantes observaron que existe un cuadrado que cumple que el valor asignado a su área es igual al valor asignado a su perímetro y se obtiene en el momento en que ambos lugares geométricos se intersecan. Por lo tanto, graficaron la recta $y = 4x$ y la parábola $y = x^2$ que son las funciones asociadas a los respectivos lugares geométricos, encontraron las coordenadas del punto de intersección e interpretaron que la coordenada de la abscisa determinaba la longitud de la base del cuadrado y la coordenada de la ordenada determinaba el valor asignado tanto al perímetro como al área (Figura 4.6).

Figura 4.5 Gráficas de perímetro y área obtenidas por distintos estudiantes



Fuente: producción de los estudiantes.

Figura 4.6 La intersección de la recta y la parábola muestra que para el cuadrado de lado 4 unidades, los valores del perímetro y área coinciden



Fuente: producción de los estudiantes.

En resumen, se observó que el uso de GeoGebra fue fundamental para explorar y analizar atributos matemáticos, como el área y el perímetro en este caso, y sus relaciones mediante la manipulación de un punto móvil (punto *B*) dentro la representación del problema.

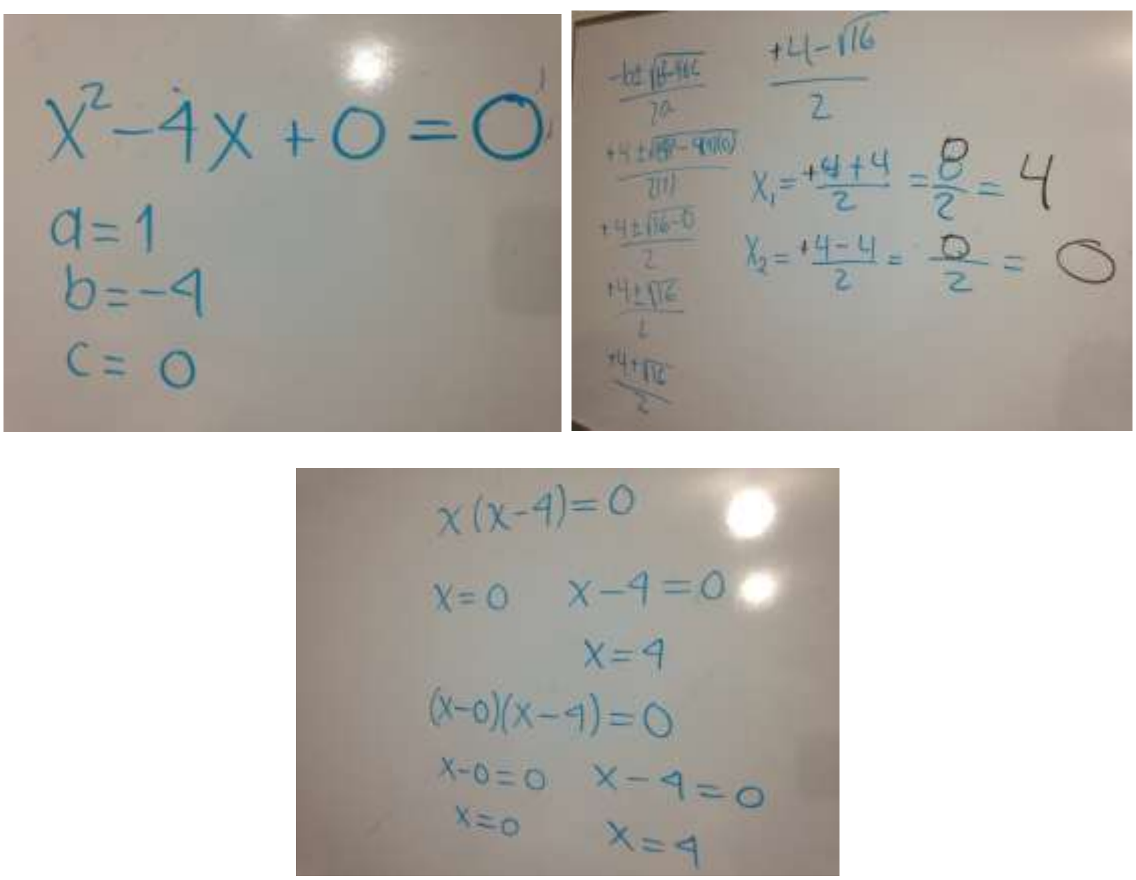
3 Tercera actividad

La finalidad de esta actividad fue que los estudiantes exhibieran los recursos obtenidos en las tareas que realizaron fuera de clases. Es importante resaltar que para desarrollar y resolver las tareas, ellos podían revisar videos tutoriales, wikis y compartir información en Padlet.

Por tal motivo se les solicitó lo siguiente: *Demostrar algebraicamente que los valores asignados al área y el perímetro del cuadrado coinciden cuando la longitud de uno de sus lados mide 4 unidades*.

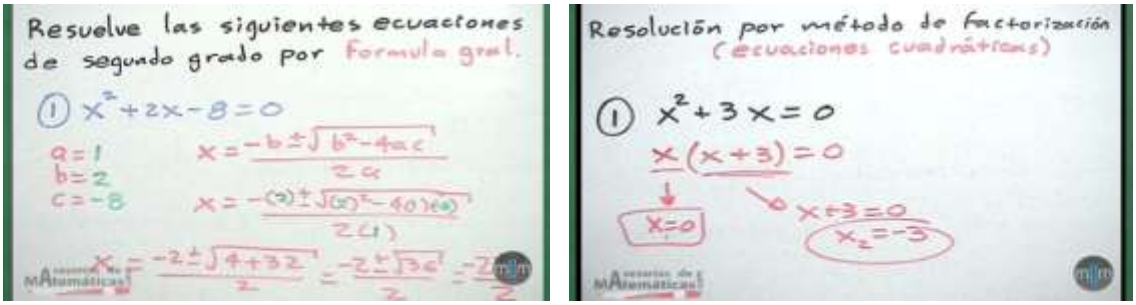
Resolver este problema llevó a que los estudiantes desarrollaran una serie de actividades matemáticas relacionadas con la ecuación cuadrática como parte de la *comprensión del problema*, por ejemplo, plantear una ecuación que involucrara igualar las expresiones del área y del perímetro, reconocer la ecuación como cuadrática, escribir la ecuación en su forma general, identificar los coeficientes. Una vez que los estudiantes habían identificado que se trataba de una ecuación cuadrática, debían escoger y utilizar algún método para su resolución, es decir, *implementar un plan de solución*. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes no recordaban cómo se resuelve una ecuación de segundo grado. Por lo tanto, tuvieron la necesidad de buscar esta información en diferentes fuentes de Internet, la más utilizada fueron los videos en YouTube. Dichos videos fueron compartidos entre los estudiantes a través de Padlet. Así, el uso coordinado de YouTube y Padlet ayudó a los estudiantes a aprender recursos o estrategias útiles para resolver el problema (Figura 4.7). De esta manera, los estudiantes se involucraron en la *búsqueda de patrones y una solución general*. Se observó que los procedimientos algebraicos utilizados, eran los mismos que se desarrollaban en los contenidos de los videos de YouTube (Figura 4.8). Estos videos que fueron seleccionados por los estudiantes implicaron una actividad de búsqueda y discriminación de material audiovisual de contenido educativo que explicara de manera clara, concisa y concreta, procedimientos algebraicos para resolver ecuaciones cuadráticas.

Figura 4.7 Procedimientos que siguieron los estudiantes para resolver la actividad planteada



Fuente: Producción de los estudiantes.

Figura 4.8 Videos compartidos en Padlet que muestran cómo resolver una ecuación cuadrática por fórmula general y factorización



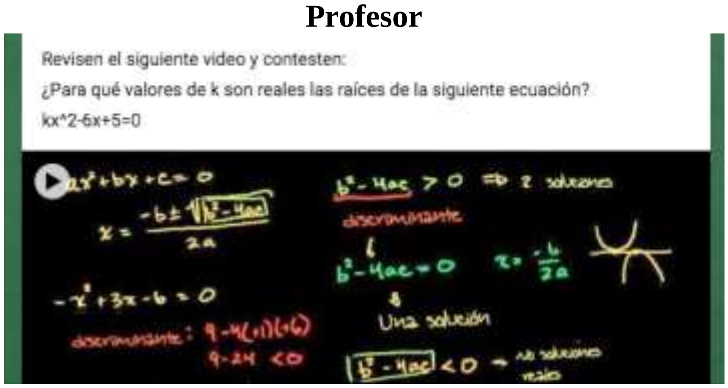
Fuente: Canal de videos YouTube.

Una parte importante cuando se resuelve problemas que involucran ecuaciones cuadráticas, es verificar las soluciones obtenidas e identificar si pueden ser consideradas como soluciones en el contexto del problema. Particularmente, la solución de $x = 0$ carece de sentido ya que x representa la longitud del cuadrado. El análisis de estas ideas involucra al estudiante en el episodio de *visión retrospectiva y soluciones.*

A lo largo de la sesión los estudiantes exhibieron recursos matemáticos obtenidos mediante el uso de YouTube y Padlet. Por ejemplo, YouTube permitió que replicaran procedimientos rutinarios, como el uso de la fórmula general para ecuaciones cuadráticas y el método de factorización. Asimismo, accedieron a conceptos matemáticos como: forma general, coeficientes, raíces y comprobación de una ecuación cuadrática. Por otro lado, la plataforma Padlet fue la que sirvió para que los estudiantes compartieran y accedieran a información y videos recopilados por ellos mismos. También, permitió que el profesor interactuara con los estudiantes fuera del horario de clases. Por ejemplo, en la Figura 4.9 se observa que el profesor planteó un problema en el muro digital y compartió un video cuyo contenido era clave para resolver dicho problema. Los estudiantes trataron de resolver la tarea, pero únicamente se recibe una respuesta formal por parte del Alumno 3, quien fue el que observó el video compartido por el profesor. En la Figura 4.9 se muestran las participaciones más significativas de una secuencia de los comentarios y discusiones que se suscitaron en Padlet.

Figura 4.9 Discusiones de los problemas en Padlet

Profesor



Alumno 1

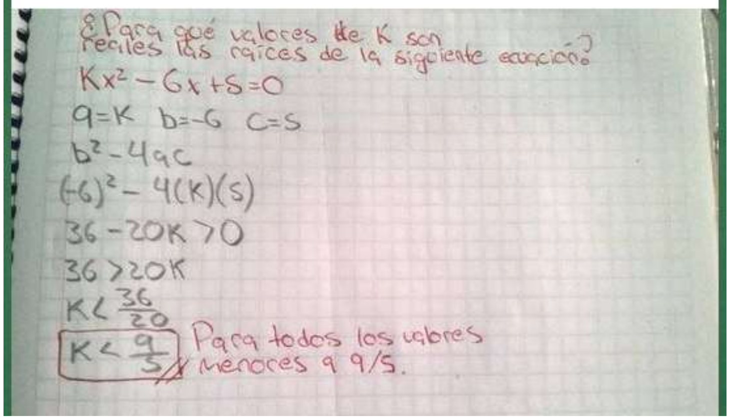
Los valores que necesita "k" en la ecuación presentada para poder tener raíces reales son valores distintos de 0, que "k" no valga 0 y que los valores de k sean valores con el signo negativo. Y solamente cuando "k" vale 1, este puede tener cualquier signo.

Alumno 2

Los valores necesarios para "K" en la expresión Kx^2-6x+5=0 y obtener sus raíces reales deben ser diferentes a cero y que este cuente con el signo negativo, así lograremos obtener 2 soluciones reales y con signo positivo.

Alumno 3

Con la ayuda del vídeo que nos puso en profe en la tarea, pude saber como sacar los valores de k.



¿Para qué valores de K son reales las raíces de la siguiente ecuación?

$Kx^2 - 6x + 5 = 0$

$a = K \quad b = -6 \quad c = 5$

$b^2 - 4ac$

$(-6)^2 - 4(K)(5)$

$36 - 20K > 0$

$36 > 20K$

$K < \frac{36}{20}$

$\boxed{K < \frac{9}{5}}$ Para todos los valores menores a 9/5.

4 Discusión de las actividades con el uso de tecnologías digitales

El uso de GeoGebra en el desarrollo de las actividades permitió extender el análisis y discusión de un problema, de tal manera que los estudiantes ya no se tuvieron que enfocar únicamente en el manejo de reglas algebraicas, sino también en cómo representar el problema de una forma distinta, es decir, en construir un modelo dinámico. Las diferentes construcciones dinámicas que mostraron los estudiantes posibilitaron que construyeran significados de objetos matemáticos. Por ejemplo, trazar el cuadrado en GeoGebra, requirió que se analizaran sus propiedades geométricas para seleccionar los objetos geométricos adecuados para construirlo y, sin importar que las longitudes de sus lados fueran modificadas, mantener dichas propiedades. Las estrategias que utilizaron en la construcción del modelo dinámico mostraron cómo razonaron las propiedades de los objetos matemáticos en función de los comandos de GeoGebra. Por ejemplo, trazar rectas perpendiculares para construir el ángulo recto que se forma entre los lados de un cuadrado y usar una circunferencia para trasladar la medida de su lado.

Obtener una representación distinta del problema permitió plantear nuevas preguntas que se relacionaron con los atributos del modelo dinámico, tales como: ¿cuál es la gráfica del perímetro que se asocia al modelo?, ¿cuál es la gráfica del área que se asocia al modelo?, ¿qué interpretación se le puede dar a la intersección de ambas gráficas? y ¿qué otros elementos pueden identificase? Responder estas preguntas implicó que los estudiantes desarrollaran conceptos y fórmulas vinculados con geometría analítica. Por ejemplo, definir un punto en función de una de las coordenadas de otro punto fue el resultado de construir una regla de correspondencia que se utilizó para analizar el lugar geométrico del área o del perímetro, identificar características importantes del lugar geométrico que traza dicho punto para asignarle la función o gráfica correspondiente y encontrar elementos básicos de las gráficas como sus vértices o intersecciones. Es importante destacar que el uso del lugar geométrico con el SGD fue una heurística esencial para obtener los acercamientos o resultados mencionados.

YouTube y Padlet proporcionaron espacios de discusión en línea y material audiovisual enfocados en brindar información que ayudara a resolver problemas y ejercicios de corte algebraico, dando la oportunidad de trabajar en un ambiente colaborativo. Los videos educativos de YouTube fueron de gran utilidad para que los estudiantes se apropiaran de fórmulas, algoritmos y procedimientos algebraicos, que servirían para resolver los ejercicios o problemas. Por ejemplo, la fórmula general, el método de factorización, el método de completar del trinomio cuadrado perfecto y uso del discriminante. En la Tabla 4.1 se muestra de manera resumida el impacto que tuvo el uso de las tecnologías digitales que se involucraron durante el desarrollo de las actividades.

Tabla 4.1 Impacto de las diferentes tecnologías digitales

Tecnología digital	Principal resultado obtenido
GeoGebra	La exploración de modelos dinámicos favoreció la identificación y reconocimiento de propiedades de los objetos matemáticos involucrados en la construcción, las relaciones y conexiones que se establecen entre ellos, la formulación de conjeturas y su posterior justificación.
Padlet	Los estudiantes compartieron información proveniente de diferentes fuentes de Internet, o bien, fotografías de las soluciones desarrolladas en sus libretas.
YouTube	Los estudiantes accedieron a información que les permitió recordar o aprender fórmulas, conceptos, métodos de solución, entre otros, lo que favoreció la comprensión de los problemas y el desarrollo de diferentes estrategias de la solución de los problemas.

Agradecimientos

A la Universidad de Costa Rica (UCR) por el apoyo brindado.

Conclusiones

¿Qué acercamientos y formas de resolver los problemas muestran los estudiantes cuando usan sistemáticamente YouTube, Padlet y un Sistema de Geometría Dinámica? En este sentido, se puede decir que el uso sistemático de YouTube, Padlet y GeoGebra, favorecieron los hábitos de razonamiento matemático. La construcción de modelos dinámicos permitió que los estudiantes construyeran e identificaran objetos matemáticos y conceptos, definieran variables, buscaran relaciones, analizaran casos más simples, hicieran deducciones e interpretaran las soluciones. El acceso a los videos educativos de YouTube ayudó a que los estudiantes aprendieran a organizar las soluciones mediante cálculos y manipulaciones algebraicas, así como a verificar y argumentar dichas soluciones. Las participaciones en Padlet promovieron la comunicación de resultados, lo que implicó el refinamiento de las soluciones. En otras palabras, estas tecnologías digitales en conjunto favorecen el análisis de un problema, la implementación de una estrategia, el uso de conexiones y la reflexión de la solución.

En el desarrollo de las actividades, el uso de GeoGebra permitió que los estudiantes examinaran y analizaran el tipo de herramientas con las que contaban y las propiedades geométricas de la figura a construir, con la finalidad de representar el problema como un modelo dinámico que, como consecuencia, podían explorar comportamientos matemáticos de una familia de objetos a través del arrastre, buscar el lugar geométrico, y expresar numéricamente los atributos o gráficas del modelo. Por ejemplo, en la construcción del cuadrado se observó que con el uso del comando polígono regular, construyeron el cuadrado de manera automática, esto le permitió analizar el lugar geométrico de uno de sus vértices y graficarlo, para posteriormente trazar el cuadrado sin ayuda del comando. Es decir, gracias al SGD el estudiante descubre una propiedad del cuadrado y genera un plan para trazarlo.

Otro caso fue utilizar el comando circunferencia para trasladar la medida del segmento dado a uno de los ejes y completar la construcción del cuadrado. Ambos resultados exhiben una forma distinta de pensar el problema en términos de los comandos.

El uso coordinado de las tecnologías digitales favoreció el desarrollo de diferentes métodos de solución, lo cual es un elemento importante en las tareas que se desarrollan en un ambiente de resolución de problemas (Santos-Trigo, 2014). Se propicia también el desarrollo de estrategias que difícilmente se pueden llevar a cabo en un ambiente de lápiz y papel. En particular, el uso de lugares geométricos permitió representar gráficamente el comportamiento de la variación conjunta de variables y la construcción de cónicas (parábola) como una herramienta para resolver el problema. De esta manera, se propició el desarrollo de formas de razonamiento que involucra el pensar el problema en términos de las herramientas con que se cuentan en las diferentes tecnologías digitales, y se promovió el análisis de los recursos, habilidades y heurísticas involucradas en cada uno de los acercamientos hacia la solución que exhibieron los estudiantes. En este sentido, el uso de tecnologías digitales permitió que los estudiantes integraran contenidos matemáticos, desarrollaran habilidades al resolver problemas y reorganizaran sus ideas al establecer relaciones y conexiones entre los conceptos y objetos matemáticos involucrados.

Referencias

Aguilar-Magallón, D. & Poveda, W. (2017). Problem Solving Opportunities with Digital Technology in Problem Solving Environments. En E. Galindo & J. Newton (Eds.), Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Alagic, G. & Alagic, M. (2013). Collaborative mathematics learning in online environments. En D. Martinovic, V. Freiman & Z. Karadag (Eds.), Visual Mathematics and Cyberlearning (pp. 23-48). Netherlands: Springer.

Borba, M. C., Clarkson, P., & Gadanidis, G. (2013). Learning with the use of the Internet. En M. A. (Ken) Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Eds.), Third International Handbook of Mathematics Education (pp. 691-720). New York: Springer International Handbooks of Education.

Dick, T. & Hollebrands, K. (2011). Focus in high school mathematics: Technology to support reasoning and sense making. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gómez-Arciga, A., Santos-Chávez, J., & Basaldú-Gutiérrez, Y. (2016). Tecnologías Digitales y la Resolución de Problemas: Discusiones matemáticas más allá del salón de clases. En M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil & J. A. Eli (Eds), Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Pyschology of Mathematics Education (pp. 1551-1552). Tucson, AZ: The University of Arizona.

Green, G. (2012). My View: Flipped classrooms give every student a chance to succeed. CNN. Recuperado el 18 de enero de 2012 de http://schoolsohought.blogs.
cnn.com/2012/01/18/my-view-flipped-classrooms-give-every-student-a-chance-to-succeed/

Hegedus, S. & Moreno-Armella, L. (2010). Accommodating the instrumental genesis framework within dynamic technological environments. For the Learning of Mathematics, 30 (1), 26-31.

Lawrence, W. (2014). From the Diary of a Flipped Classroom Newbie. EdSurge. Recuperado el 21 de mayo de 2014 de: https://www.edsurge.com/news/2014-05-21-from-the-diary-of-a-flipped-classroom-newbie

Leung, A. & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), Task design in mathematics education (pp. 191-225). New York: Springer.

Leung, F. K. S. (2013). Part III, Introduction to section C: Technology in the mathematics curriculum. En M. A. (Ken) Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), Third International Handbook of Mathematics Education (pp. 517-524). New York: Springer International Handbooks of Education

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. Journal of Mathematical Behavior, 3 (1), 93-166.

Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. Teacher College Record, 108 (6), 1017–1024.

National Council of Teacher of Mathematics (2011). Focus in High School Mathematics: Technology to Support Reasoning and Sense Making. VA, Reston: National Council of Teacher of Mathematics.

Polya, G. (1945). How to solve it? Princeton: University Press.

Poveda, W. & Aguilar-Magallón, D. (2017). A Massive Online Course: Mathematical Problem Solving and Digital Technologies. En E. Galindo & J. Newton (Eds.), Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Santos-Trigo, M. (2008). An inquiry approach to construct instructional trajectories based on the use of digital technology. EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 4 (4), 347-357.

Santos-Trigo, M. (2014). La Resolución De Problemas Matemáticos: Fundamentos Cognitivos. México: Trillas.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2009). Towards the construction of a framework to deal whit routine problems to foster mathematical inquiry. PRIMUS, ISSN:1051-1970, 19(3): 260- 279.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2016). Digital technologies and mathematical problem solving: redesigning resources, materials, and extending learning environments. En K. Newton (Ed.), Problem-Solving: strategies, challenges and outcomes (pp. 31-49). New York: Nova Science Publisher.

Santos-Trigo, M. & Reyes-Martínez, I. (2014). The coordinate use of digital technologies in learning enviroments. En L. Uden, J. Sinclair, Y. Tao & D. Liberona (Eds.), Learning Technology for Education in Cloud (pp. 61-71). Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Aguilar-Magallón, D. (2015). The use of digital technology in extending mathematical problem solving reasoning. En L. Uden, D. Liberona & T. Welzer (Eds.), Learning Technology for Education in Cloud (pp. 298-309). Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M. & Reyes-Rodríguez, A. (2011): Teachers' use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42 (3), pp. 313-336.

Santos-Trigo, M., Reyes-Rodríguez, A., & Espinosa-Pérez, H. (2007). Musing on the use of dynamic software and mathematics epistemology. Teaching Mathematics and Its Applications, 26 (4), 167-178.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Tzu-Bin, L., Chen, V., & Chai, C. (Eds.) (2015). Emerging practices and issues of new media and learning. New Media and Learning in the 21st Century: A Socio-Cultural Perspective (pp. 1-8). Singapur: Springer.

MOOC Resolución de problemas matemáticos y uso de tecnologías digitales: Su diseño e implementación

POVEDA-FERNÁNDEZ, William & GÓMEZ-ARCIGA, Adrián

W. Poveda & A. Gómez

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – IPN
wpoveda@cinvestav.mx, agomeza@cinvestav.mx

A. Alvarado, G. Carmona y A. Mata (Dirs.) Una visión integradora. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

The availability of diverse digital technologies raises new questions as to what transformations of educational systems are necessary, and how to incorporate them into learning environments. Technological changes demand a transformation of educational practices and require modifying teaching processes to make students the center of all activity while teachers act as supports for developing abilities and skills related to problem-solving. How could we design and implement an online learning scenario (MOOC) that fosters the use of digital technologies to engage the participants in a continuous mathematical discussion to understand concepts and to solve problems? The results showed that the design of interactive activities and the coordinated use of digital technologies (GeoGebra, Wikipedia, KhanAcademy, WolframAlpha, Open edx and virtual forums) became important for the participants to formulate conjectures, to look for different ways to validate them and to communicate results. The participants worked collaboratively and transited from the use of visual and empirical arguments to the presentation of geometric and algebraic validation.

Resolución de Problemas, Tecnologías Digitales, MOOC, Diseño de actividades

Introducción

Las tecnologías digitales abren nuevas rutas en el proceso de aprendizaje, no solo para obtener o compartir información, sino también para que los estudiantes compartan ideas, discutan, critiquen y se involucren en actividades matemáticas. Los teléfonos inteligentes o tabletas digitales permiten utilizar sistemas de comunicación entre los individuos que favorecen la interacción dentro de una gran y heterogénea comunidad virtual; factores tales como la ubicación geográfica, la edad, el nivel académico o el idioma no son un obstáculo para que un individuo pueda acceder y participar en actividades de su interés.

La disponibilidad de diversas tecnologías digitales abre nuevas interrogantes sobre qué transformaciones son necesarias en el sistema educativo y cómo incorporarlas en los ambientes de aprendizaje (Gros, 2016). Un ambiente de aprendizaje emergente son los Cursos Masivos Abiertos en Línea (MOOC por sus siglas en inglés). Estos suponen que sus participantes deben poseer ciertos conocimientos mínimos, sin embargo, la comunidad virtual que genera un curso masivo comprende a personas que pueden poseer diferentes niveles de estudios, edad, dominio o conocimiento previo de la materia, entre otros. Un MOOC es diseñado por una institución educativa a través de uno o varios de sus expertos en el tema y puede ser utilizado por cualquier individuo como un medio para su propio desarrollo personal.

El carácter abierto y masivo de un MOOC abre la posibilidad de que la comunidad de participantes sea numerosa (generalmente miles de personas) y heterogénea: diferentes niveles de estudios, edad, conocimiento de la tecnología y dominio o conocimiento previo de la materia. En el desarrollo de las actividades de un MOOC no existe un profesor encargado de responder o dar seguimiento puntual a cada participante. Cada integrante está a cargo de su aprovechamiento, desarrollo y participación en las actividades apoyado por la retroalimentación general que proporciona los encargados del MOOC, así como las interacciones con el resto de la comunidad participante en el curso. Es posible que un participante, dependiendo de su tiempo e intereses se involucre de una manera más profunda en una, varias o todas las actividades. Por ello, el diseño de las actividades debe conducir a los participantes a ser autónomos en su aprendizaje en un entorno de participación y colaboración con sus pares y sin la presencia de un maestro.

El diseño o la selección de tareas o problemas matemáticos son relevantes para promover y documentar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. También, un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) puede utilizarse para integrar los procesos que intervienen en la resolución de problemas ya que pueden generar representaciones o modelos dinámicos de los problemas matemáticos donde el movimiento de objetos (puntos, rectas, segmentos, polígonos, etc.) puede ser explorado y explicado en términos de relaciones matemáticas. Así, las representaciones dinámicas de los problemas se convierten en una fuente que involucra a los estudiantes en la reflexión e investigación matemática (Aguilar-Magallón & Poveda, 2017).

En el diseño de un ambiente de aprendizaje MOOC, las actividades se deben relacionar con las formas en las que se aborda el contenido; es decir, el tipo de ambiente de aprendizaje que se genera a través del uso sistemático y coordinado de tecnologías digitales (Quinton & Allen, 2014) ¿Cómo afrontar el reto que los individuos consideren a las tecnologías digitales como herramientas para extender y compartir sus ideas, dentro de una comunidad heterogénea, en un ambiente de resolución de problemas matemáticos que fomente la reflexión y la crítica?

La pregunta de investigación que guio este estudio fue ¿Cómo diseñar e implementar un ambiente de resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales en un escenario de aprendizaje MOOC, donde las tareas y actividades promuevan el pensamiento matemático entre sus participantes? Así, se diseñó un ambiente de resolución de problemas matemáticos y uso coordinado de tecnologías digitales en un entorno MOOC, donde las tareas y actividades promovieran en los participantes la formulación de conjeturas con base en la observación del movimiento de objetos matemáticos y la búsqueda de argumentos que validen y sustenten tales conjeturas y así, se involucren en un ambiente de discusión y reflexión matemática.

El diseño de las tareas matemáticas se basó el marco de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales que propone Santos-Trigo (2014). Para la estructura del MOOC se utilizó el modelo RASE (Resources-Activities-Support-Evaluation)[2] de Churchill, King, y Fox (2016). El curso se construyó en la plataforma *Open edx*[3].

Las Actividades involucraron tareas o problemas matemáticos como una plataforma para que los estudiantes desarrollaran una forma de pensamiento matemático, es decir, un medio para que los participantes fomenten sus procesos de construcción o desarrollo del pensamiento matemático. Así, un aspecto fundamental en el diseño de las Actividades fue el dar movimiento a figuras geométricas simples como triángulos, rectángulos, entre otros, mediante modelos o configuraciones dinámicas del problema elaborados en GeoGebra que, en conjunto, con una serie de preguntas proporcionadas a los participantes permiten observar relaciones e invariantes entre los diversos objetos de la configuración dinámica. El propósito fundamental fue que el participante observara el comportamiento o variación de algunos objetos o atributos (medida de ángulos, áreas, perímetros, etc.) y propusiera conjeturas que den cuenta de su comportamiento y las sustentara con argumentos.

Otro de los objetivos de las Actividades fue que los participantes, en forma individual y en colaboración con otros, se involucraran en los procesos de resolución de problemas. Es decir, plantear interrogantes como punto de partida para la comprensión de ideas matemáticas, establecer relaciones entre los objetos presentes en la configuración dinámica, formular conjeturas y justificarlas.

---

[2] Los cuatro componentes RASE se referencian con la primera letra en mayúscula (Recursos, Actividades, Soporte, Evaluación).
[3] Para mayor información https://open.edx.org/about-open-edx

Marco conceptual

Zhang et al. (2016) y Sergis, Sampson, y Pelliccione (2016) afirman que los MOOCs generan oportunidades para investigar sobre el proceso de aprendizaje de los participantes y ofrecen nuevas posibilidades para la construcción del conocimiento a través de un ambiente de participación y colaboración. Según Sinclair y Kalvala (2015), la eficacia de un MOOC depende del tipo de actividades o tareas propuestas a sus participantes; sugieren que éstas deben generar y promover un ambiente de discusión para el intercambio de ideas de manera que atraigan la atención de los participantes, les planteen retos y fomenten su curiosidad. ¿Cómo diseñar actividades en línea para promover el aprendizaje matemático en un ambiente de colaboración que incorpore tecnologías digitales?

En el campo de la educación matemática, las propuestas curriculares actuales promueven un énfasis en la resolución de problemas y en el uso de herramientas digitales (NCTM, 2000; 2009). Santos-Trigo (2014) y Schoenfeld (1992) argumentan que aprender matemáticas está relacionado con la resolución de problemas ya que es un medio que permite identificar, explorar, probar y comunicar las estrategias de solución. Los procesos que intervienen en la resolución de problemas son: formulación de preguntas, búsqueda de diversos métodos de solución, explorar diferentes representaciones, búsqueda de patrones, variantes y relaciones entre objetos matemáticos, presentación de argumentos, comunicación de resultados, planteamiento de preguntas y formulación de nuevos problemas (Santos-Trigo, 2014). La resolución de un problema va más allá de aplicar un procedimiento mecánico; por lo que es necesario que el estudiante adquiera un hábito de cuestionamiento, mediante el cual, pueda resolver problemas matemáticos (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013).

En los procesos que intervienen durante el desarrollo de una tarea matemática el uso coordinado de diversas tecnologías digitales ofrece a los estudiantes oportunidades para representar, explorar, compartir y discutir los conceptos y la resolución de problemas. Un SGD, por ejemplo, GeoGebra, ofrece la posibilidad de examinar situaciones matemáticas desde distintas perspectivas permitiendo a los estudiantes tener nuevas formas de visualización de los conceptos y objetos de estudio, identificar y explorar de una forma más precisa los elementos matemáticos que cuando se utiliza solo papel y lápiz (Santos-Trigo, Moreno-Armella, & Camacho-Machín, 2016). Además, las ideas generadas pueden ser compartidas utilizando algún sistema de comunicación en línea y ser contrastadas con las de la comunidad virtual.

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) argumentan que el uso de un SGD permite a los estudiantes desarrollar formas de razonamiento, que no serían posibles en un ambiente de papel y lápiz. Presentan un marco para caracterizar las formas de razonamiento matemático en cuatro episodios que surgen como resultado del uso sistemático de la tecnología digital, en particular un SGD, en el proceso de resolución de problemas.

El primero consiste en la *comprensión del problema*, el estudiante debe identificar los objetos matemáticos involucrados y establecer sus propiedades matemáticas, para posteriormente, construir un modelo dinámico que lo represente. Por ejemplo, si el problema contempla un rectángulo, el estudiante debe identificar las propiedades de sus lados, ángulos, diagonales, etc., para representarlo dinámicamente en un SGD.

El segundo episodio comprende *la exploración del problema*. La representación dinámica de la situación matemática se convierte en un medio para que el estudiante observe el comportamiento de los atributos de los objetos matemáticos al mover algunos elementos dentro del modelo dinámico.

Esto permite efectuar exploraciones que llevan a la formulación de conjeturas. Por ejemplo, se puede observar la variación del valor del área de una familia de rectángulos de perímetro fijo cuando se modifica la longitud de uno de sus lados.

El tercer episodio, *diferentes acercamientos hacia la solución del problema,* promueven la búsqueda de diversas estrategias de solución. El uso de un SGD juega un papel importante ya que, por ejemplo, un acercamiento dinámico puede consistir en identificar las propiedades, patrones o invariantes de un objeto cuando se mueve, y argumentarlos por medios visuales (gráfica) o empíricos (datos numéricos y tablas en la hoja de cálculo). El objetivo es utilizar diferentes conceptos y recursos para generar diferentes estrategias de solución: dinámicas, algebraicas, geométricas, entre otras.

El cuarto episodio es la *integración*. Aquí se deben relacionar los diversos acercamientos a la solución del problema, hacer explícitos y relacionar los conceptos matemáticos utilizados. Otra característica importante de este episodio es la extensión del problema; por ejemplo, generalizar los resultados obtenidos mediante el cambio de alguna o varias condiciones del problema inicial.

¿Cuáles componentes deben ser considerados a la hora de diseñar un ambiente de aprendizaje en línea para promover el aprendizaje matemático en los participantes? Churchill et al. (2016) proponen un marco para el diseño de ambientes de aprendizaje en línea (RASE), afirman que los Recursos disponibles (videos, imágenes, documentos digitales, calculadoras, software, etc.) deben ser utilizados como una herramienta para mejorar, transformar y crear nuevas capacidades cognitivas durante el proceso de construcción de conocimiento del individuo. Así mismo, en conjunto con los Recursos, se requieren considerar tres elementos adicionales:

1. *Actividades*. El objetivo es involucrar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje a través del uso de Recursos en diversas tareas, como experimentos y resolución de problemas.

2. *Soporte.* Es necesario contemplar los medios para proporcionar ayuda a los estudiantes en el momento en que se les presente alguna interrogante relacionada con la tarea que están realizando.

3. *Evaluación*. La evaluación debe permitir a los estudiantes mejorar constantemente su aprendizaje, es decir, una Actividad debe favorecer que trabajen en tareas, desarrollen y evidencien su aprendizaje mediante algún mecanismo (por ejemplo, escribir las ideas, resultados o solución de la tarea o problema). La Evaluación enfatiza que los alumnos puedan analizar la retroalimentación recibida, proporcionada a través de los medios de Soporte, con la finalidad de refinar o ampliar los conceptos o ideas iniciales. En un MOOC, cuando un participante plantea una idea o solución de un problema a través del foro de discusión, y puede obtener una retroalimentación por parte de la comunidad virtual que genera el curso masivo, de esta forma, puede replantear, extender o corregir sus ideas iniciales.

Churchill et al. (2016) argumentan que, para el logro de un aprendizaje, el diseño de las Actividades debe: 1) contemplar y fomentar la participación activa de los estudiantes en un ambiente de reflexión, colaboración y discusión y 2) centrarse en un contexto donde las tareas o problemas involucren a los estudiantes en un proceso de resolución de problemas.

Así, en un ambiente de aprendizaje en línea, se debe incluir una propuesta sobre los contenidos y una posible ruta de cómo estudiarlos en un ambiente de trabajo en equipo y colaboración, donde cada persona participa activamente en un proceso de discusión ya sea preguntando, comentando o proporcionando sugerencias o diferentes formas de encontrar la solución a un problema Santos-Trigo (2016). En este sentido, la herramienta Foro de discusión, se convierte en un medio de comunicación entre sus participantes y les ofrece la oportunidad de plantear y aclarar sus dudas, conocer las ideas de sus compañeros y contrastar sus puntos de vista con los de otros (Poveda & Aguilar-Magallón, 2017).

El aprendizaje de las matemáticas implica resolver problemas en términos de observar una situación, formular preguntas y buscar siempre diferentes caminos para su resolución. Por ello, se debe valorar la importancia de formular de preguntas como un primer paso para estructurar el ambiente de aprendizaje y las discusiones dentro de las Actividades.

Santos-Trigo (2014) comenta que el aprendizaje de las matemáticas implica enfrentarse a dilemas que necesitan resolverse mediante la formulación de preguntas y búsqueda de diferentes caminos para responderlas. Además, señala que:

> El entendimiento o comprensión de las ideas matemáticas no es un proceso final, sino gradual y dinámico que se va robusteciendo en función de la necesidad de responder y resolver una serie de cuestionamientos que emerjan dentro y fuera de la propia comunidad de aprendizaje (Santos-Trigo, 2014a, p. 23).

Las tecnologías digitales permiten a los individuos comunicarse e interactuar entre ellos y desarrollar conocimiento matemático. Además, "[…] los estudiantes construyen, desarrollan, refinan, o transforman sus formas de comprender y resolver problemas como resultado de formular preguntas relevantes y responderlas con el uso de distintos medios, incluyendo las herramientas computacionales" (Santos-Trigo, 2008, p. 189).

Metodología

Se describen principios asociados con el diseño del MOOC Resolución de Problemas Matemáticos y uso de Tecnologías Digitales, sus participantes y procedimientos utilizados durante la implementación del curso masivo y la forma de organizar y analizar los datos obtenidos.

1 Diseño del MOOC Resolución de Problemas Matemáticos

El MOOC se construyó en la plataforma digital *Open Edx*, contempló un total de cinco secciones y estuvo a disposición de los participantes por un tiempo de siete semanas. Los Recursos comprendieron configuraciones dinámicas de un problema elaboradas en GeoGebra, videos de KhanAcademy y vínculos a fuentes de información: Wikipedia, KhanAcademy y WolframAlpha.

Durante el diseño de las Actividades del MOOC, uno de los objetivos fue que los problemas matemáticos fueran vistos como un medio para que los participantes planteen preguntas y busquen diversas formas de contestarlas, como una ruta para el desarrollo del hábito de cuestionamiento que les ayude a resolver problemas en matemáticas; así como en cualquier otra área.

Una parte esencial de las Actividades es que las tareas matemáticas permitieran a los participantes mover los objetos de un modelo dinámico del problema, identificar visual o empíricamente las relaciones entre éstos y conjeturar una posible solución del problema. Su validación transita desde el uso de argumentos empíricos o visuales hasta la presentación de una prueba o demostración matemática.

Las Actividades del MOOC fueron estructuradas en tres momentos:

1. *Movimiento*. A partir de un modelo dinámico que representa una situación matemática, con el objetivo que los participantes exploren el problema y planteen preguntas sobre el comportamiento de los objetos y sus propiedades. En este proceso, las plataformas Wikipedia y KhanAcademy pueden ser utilizadas por los participantes para consultar y estudiar los conceptos matemáticos involucrados en el problema.

2. *Formulación de conjeturas.* Las preguntas planteadas en la etapa anterior son la base y el camino para identificar y formular conjeturas. En una primera instancia, deben ser sustentadas o refutadas mediante argumentos visuales o empíricos, para ello se pueden utilizar las estrategias de mover objetos, medición de sus atributos y lugar geométrico.

3. *Justificación de conjeturas.* Toda conjetura identificada debe ser justificada utilizando conceptos y relaciones matemáticas. Por ejemplo, mediante argumentos algebraicos, geométricos, entre otros.

El MOOC fue estructurado en cinco sesiones de trabajo, la Tabla 3.1 describe las Actividades matemáticas y los objetivos en cada una de las sesiones.

Tabla 3.1 Conjunto de Actividades del MOOC

Conjunto de actividades	Objetivos
Sesión de trabajo 1 1. Importancia de formular preguntas. 2. Resolución de problemas y uso de tecnologías digitales.	Relacionar las actividades de resolución de problemas con el aprendizaje de las matemáticas. Se promueve que los estudiantes formulen preguntas como un camino para comprender ideas matemáticas y resolver problemas.
Sesión de trabajo 2. 1. El segmento y su recta mediatriz. 2. El triángulo isósceles. 3. El triángulo equilátero. 4. El triángulo rectángulo e isósceles.	Mover objetos, observar el movimiento de las figuras y formular algunas conjeturas sobre su comportamiento tras el movimiento. Toda conjetura que se identifique debe justificarse, en una primera fase, la explicación puede estar sustentada a partir de argumentos visuales o empíricos, para posteriormente construir y presentar otro tipo de argumentos (geométricos, algebraicos, etc.).
Sesión de trabajo 3. Cuestionario 1 1. Las medianas de un triángulo. 2. Las alturas de un triángulo. 3. Las bisectrices de un triángulo.	Analizar el movimiento de objetos para comprobar o refutar visualmente algunas relaciones y conjeturas.
Sesión de trabajo 4 41. La parábola como lugar geométrico. 42. Explorar el comportamiento del área de una familia de rectángulos de perímetro fijo que se puede modelar a través de un lugar geométrico.	Introducir al participante en el estudio de lugares geométricos como una estrategia para resolver problemas.
Sesión de trabajo 5. Cuestionario 2 1. Extender el problema de la parábola. 2. Un problema de variación que se puede resolver utilizando la estrategia de lugar geométrico.	Plantear preguntas que sirvan de punto de partida para que, posteriormente, el participante les dé seguimiento y las analice en un contexto más amplio. La intención es que cada persona siga buscando información que le ayude a extender su comprensión y desarrolle habilidades de resolución de problemas.

Fuente: Elaboración propia.

Se utilizaron diversas herramientas digitales para dar Soporte a los participantes: (1) Wikipedia, KhanAcademy, WolframAlpha, permiten consultar en línea conceptos o relaciones matemáticas, (2) *El Foro de discusión* como un medio de comunicación que ofrece la oportunidad a los participantes de plantear sus dudas y recibir retroalimentación como parte de la comunidad y compartir ideas y participar en las discusiones que se generan en el desarrollo de las tareas o problemas propuestos. El trabajo de los participantes se podría convertir en un punto de referencia para que otros retomen o extiendan las ideas y las contrasten o discutan dentro de la comunidad virtual que genera el curso masivo.

La Evaluación fue parte integral de todas las Actividades de aprendizaje como un componente formativo, es decir, su finalidad es que el participante reciba la retroalimentación necesaria para mejorar su aprendizaje. Durante el diseño de las Actividades, se contempló el modelo de evaluación que propone Santos-Trigo (2014) en el cual describe tres momentos y que intentan analizar el proceso utilizado por los estudiantes al resolver una tarea matemática.

El primero es el entendimiento del problema, un estudiante debe mostrar si lo entiende y cuestionarse: ¿Las condiciones del problema son razonables? ¿Es posible estimar una solución? El segundo se relaciona con la habilidad del estudiante para seleccionar y usar estrategias de solución, presentar un plan y ejecutarlo. El tercero es revisar la solución: analizar su significado y verificar los procesos que llevaron a esa solución.

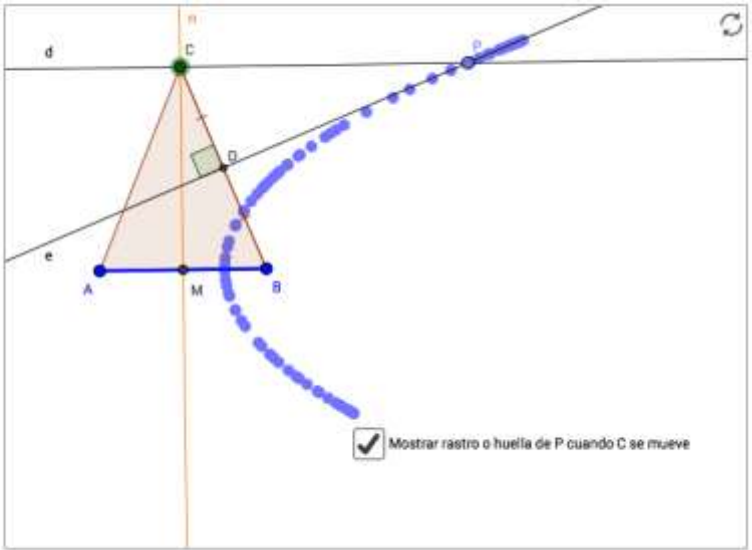
De esta manera, los participantes son los encargados de su propia evaluación, ya que a través del foro de discusión, como medio de Soporte, pueden analizar la retroalimentación recibida con la finalidad de refinar o ampliar los conceptos o ideas iniciales.

A continuación, se muestra una de las Actividades de la Sesión de trabajo 4 en la cual se resaltan los modelos dinámicos de las situaciones matemáticas, Khan Academy como parte de los Recursos y el Foro de discusión como un medio de Soporte y de Evaluación.

En el primer momento de la Actividad, se proporciona a los participantes una representación dinámica que involucra el segmento AB y su recta mediatriz n, y dos nuevos elementos: una recta perpendicular a n que pasa por C y la recta mediatriz del lado BC (Figura 3.1), P es la intersección de ambas rectas. El objetivo es que los participantes enfoquen su atención en el rastro o huella deja P cuando se mueve el punto C. Con ayuda de la casilla *Mostrar rastro de P cuando se mueve C*, que proporciona la configuración dinámica, es posible visualizar el lugar geométrico de P cuando se mueve el punto C. Se cuestiona a los participantes sobre ¿Qué propiedades posee o muestra el lugar geométrico? ¿A cuál figura se parece?

Como parte de la comprensión del problema se cuestiona a los participantes en el Foro de discusión sobre ¿Cuál es la definición de una parábola? ¿Cuáles son los elementos de una parábola? Y analizar el lugar geométrico del punto P que se generó al mover el punto sobre la perpendicular n. ¿Cuáles serían tus candidatos para ubicar el foco y la directriz de esa parábola?

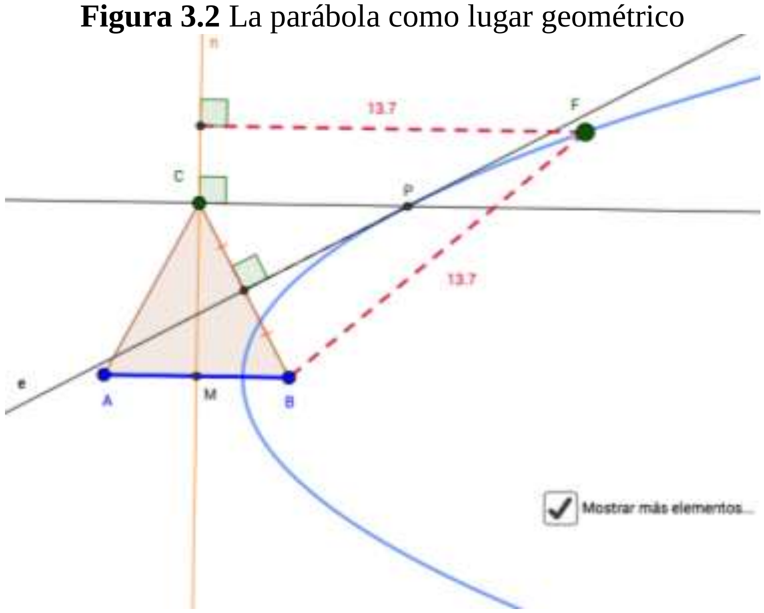
Figura 3.1 La construcción de la parábola como lugar geométrico



Fuente: Actividad del MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales.

En la formulación de conjeturas y búsqueda de justificaciones, se proporciona a los participantes el modelo dinámico que muestra la Figura 3.2 y los cuestiona sobre ¿Qué curva u objeto matemático representa el lugar geométrico del punto *P* cuando *C* se mueve sobre la mediatriz del segmento *AB*? ¿Qué propiedades importantes caracterizan ese lugar geométrico? ¿Cómo sustentar o argumentar matemáticamente que la trayectoria de *P* cuando *C* se mueve se trata de una parábola? ¿Qué se debe probar y cómo? ¿Dónde se encuentra el punto que genera el lugar geométrico? ¿Qué significa que esté en la mediatriz del lado *BC*?

Figura 3.2 La parábola como lugar geométrico



Fuente: Actividad del MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales.

2 Participantes y procedimientos

En el MOOC se inscribieron 2491 personas. El único requisito solicitado fue poseer o estar cursando estudios de bachillerato a nivel de México. En cuanto a las edades de los participantes, hubo 361 personas entre 16 y 20 años, 923 entre 21 y 30 años, 557 mayores a 50, entre otros. Con respecto al grado académico resalta que se inscribieron 78 personas con un doctorado, 322 con maestría, 1051 con licenciatura, 1053 a nivel de bachillerato, entre otros.

El equipo que diseñó y monitoreó el desarrollo de las Actividades del curso solo intervenía cuando se requería moderar u orientar la discusión en los foros. Esta intervención incluía la selección de las entradas y su clasificación en tres categorías: respuestas de los participantes a las actividades planteadas, dudas o errores conceptuales o en las ideas matemáticas y extensiones del problema. Todas las discusiones de los foros se analizaron y se envió un resumen después de cada sección a los participantes con las ideas principales.

Los datos de este estudio se recolectaron por medio de los foros de discusión, en total hubo 35 foros que incluyeron 9573 comentarios de los participantes. La unidad de análisis fueron las conversaciones de los participantes en cada Actividad. Ernest (2016) argumenta que en la conversación como unidad de análisis intervienen: un hablante/proponente, un oyente/crítico y un Texto Matemático. El hablante/proponente plantea una idea (Texto Matemático) y el oyente/crítico responde proporcionando su punto de vista, aceptando o modificando la idea original. Posteriormente, el hablante/proponente puede asumir el rol de oyente/crítico, de esta manera, se alternan sus roles. Este proceso se repite varias veces y se complementa con la incorporación de otros participantes.

Para realizar el análisis de las conversaciones en los foros, se observaron dos tipos de interacciones: (1) Participante-Actividades, son las respuestas que proporcionaron los integrantes a las preguntas de los problemas y (2) Participante-comunidad virtual, las discusiones que generaron las preguntas o dudas que plantearon los participantes en las actividades propuestas en el curso masivo.

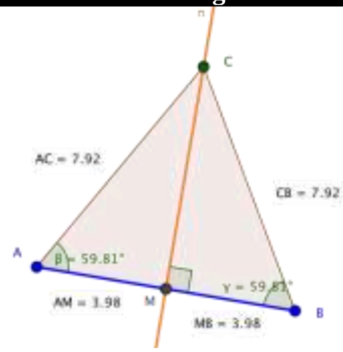
Presentación de los resultados

En esta sección se discuten los episodios en la resolución de problemas y uso de tecnologías digitales que mostraron los participantes en las sesiones de trabajo dos y cinco del MOOC y el impacto de las discusiones en los foros como un medio de comunicación que ofrece a los participantes la posibilidad de plantear y exhibir sus ideas como parte de la comunidad y compartirlas y participar en las discusiones que se generan en el desarrollo de las tareas o problemas propuestos, según la unidad de análisis seleccionada. En esta investigación, interesan los comportamientos que asumen o adquieren los participantes en un curso masivo, la evolución que tienen como comunidad virtual, a través del desarrollo de las Actividades y no así individualmente.

1 Sesión de trabajo 2

En esta sesión, la primera parte de la Actividad 1 tenía como objetivo introducir el movimiento de objetos como un medio para identificar relaciones entre éstos. Las Tablas 4.1 y 4.2 muestran el resumen las principales interacciones en los foros de discusión y los resultados obtenidos.

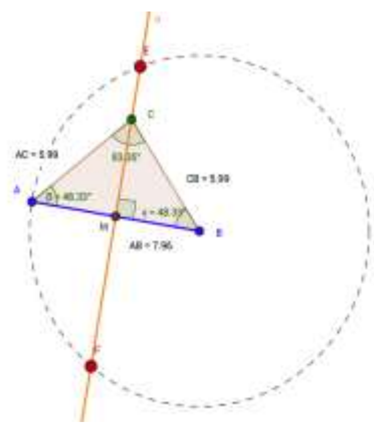
Tabla 4.1 El triángulo isósceles

<table>
<tr><th>Actividad 1: El triángulo isósceles</th><th>Interacciones en los foros</th><th>Resultados</th></tr>
<tr><td>

https://ggbm.at/RY939EbA
Se traza el punto C sobre la recta n y el triángulo ABC. ¿Qué propiedades tiene el triángulo y que ocurre cuando el punto C se mueve sobre la recta n?</td><td>En general, los participantes reconocieron que al mover el punto C sobre la recta n se generaba una familia de triángulos isósceles.
Aquí se formuló una primera conjetura: Se traza un segmento AB y la recta perpendicular n al segmento que pasa por el punto medio del segmento AB, si el punto C es un punto en la recta n, entonces la famila de triángulos ABC que se genera al mover el punto C siempre son isósceles (cuando C coincide con M, no existe triángulo).</td><td>Señalaron que las medidas de los lados AC y BC (o ángulos CAB y CBA) eran las mismas sin importar la posición del punto C. Se consideraron los triángulos ACM y BCM y demostraron que son congruentes, así AC=BC.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4.2 El triángulo equilátero

<table>
<tr><th>Actividad 1: El triángulo isósceles</th><th>Interacciones en los foros</th><th>Resultados</th></tr>
<tr><td>
https://ggbm.at/Sdjuuutw
En el mismo modelo dinámico se plantean dos interrogantes: ¿Existe una posición del punto C en la recta n donde el triángulo ACB sea equilátero? ¿Dónde ubicar el punto C para que el triángulo sea rectángulo?</td><td>Los participantes movieron el punto C sobre la recta n y observaron (a partir de enfocar la atención hacia longitud de los lados/ángulos) que si existían posiciones, en algunos casos aproximadas, donde el triángulo ACB era equilátero o rectángulo.
Surgieron varias formas de identificar la posición de C, por ejemplo, una involucraba trazar un círculo con centro en A o B y radio la longitud del segmento AB. El punto de corte del círculo y la recta n determina la posición de C para la cual el triángulo ACB es equilátero. De manera similar, al trazar la circunferencia con centro en M (punto medio) y radio la mitad del segmento AB, la intersección de esta circunferencia con la recta n es la posición para C donde el triángulo ACB es rectángulo.</td><td>Algunos participantes argumentaron que la ubicación del punto C donde se cumplía que los tres lados del triángulo tenían la misma longitud (o cuando el ángulo ACB medía 90) era suficiente para sustentar que era posible construir esos triángulos. Sin embargo, en el Foro se comentó que era importante “precisar” cómo ubicar el punto C para que los triángulos fueran equiláteros/rectángulos.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

2 Discusión de la Actividad

Durante el desarrollo de la Actividad y como parte del proceso de resolución de problemas, los participantes enfocaron la atención hacia las propiedades de los objetos como la recta mediatriz de un segmento, la congruencia entre segmentos y los triángulos rectángulos, isósceles y equiláteros.
Los participantes buscaron información en Wikipedia y la presentaron en las conversaciones para clarificar los conceptos de recta mediatriz de un segmento, congruencia de segmentos y ángulos, triángulos rectángulos, isósceles y equiláteros. En este proceso, las conversaciones fueron un medio que permitió a los participantes reflexionar sobre los conceptos anteriores y la necesidad de definir en forma precisa los conceptos matemáticos.

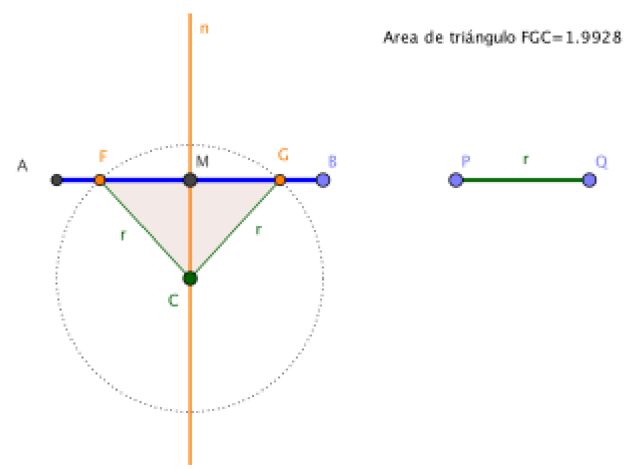
Los participantes exploraron los modelos dinámicos y observaron las propiedades de objetos matemáticos involucrados. El movimiento y la medición, como estrategias visuales y empíricas hacia los acercamientos a la solución del problema, les permitió identificar relaciones entre los objetos y se convirtieron en el camino para que formularan conjeturas.

En las conversaciones, resaltó que los participantes únicamente respondieron las preguntas de cada Actividad y no formularon otras. Por lo tanto, el grupo coordinador planteó cuestionamientos que sirvieran como base para que los participantes enfocaran su atención sobre algunos objetos, por ejemplo, en la Actividad del triángulo equilátero, la búsqueda de diversas soluciones permitió a los participantes observar la existencia de varias soluciones y construir y presentar justificaciones que involucran relaciones o resultados matemáticos.

3 Sesión de trabajo 5

La Actividad involucró un modelo dinámico que incluía un segmento AB, su recta mediatriz n, un punto móvil C sobre n y una familia de triángulo isósceles FGC, de tal manera que el lado FG estuviera sobre AB y sus lados congruentes midieran una longitud dada: r (Figura 4.1).

Figura 4.1 Modelo dinámico que representa un triángulo isósceles de lados congruentes r



Fuente: Actividad del MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales.

En las conversaciones, los participantes reconocieron que la longitud de FG cambiaba al mover el punto C, la medida de los lados CF y CG se mantenía invariante y el área de la familia de triángulos cambiaba. Además, determinaron que la altura h sobre FG variaba en el intervalo de 0 a r y si $h = 0$ ó $h = r$, entonces el área del triángulo era cero. También, indicaron que si la longitud de MC es mayor que r entonces no era posible que se formara un triángulo (Figura 4.2).

Figura 4.2. Conversaciones de los participantes: El dominio de la altura h.


discussion posted hace 5 meses by jhernandezf
PINNED
Al mover el punto C, la altura y el área del triángulo FGC cambia.

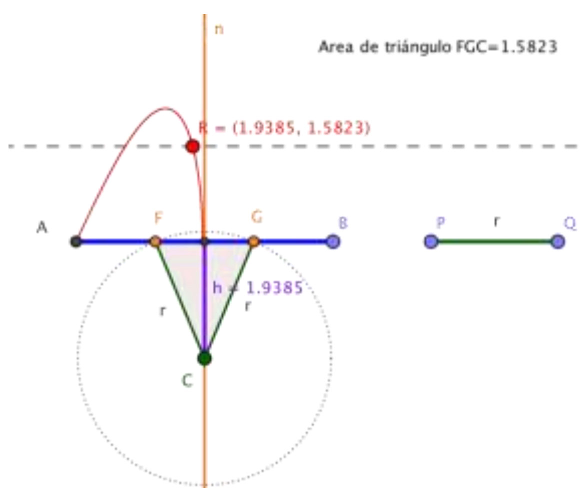
discussion posted hace 5 meses by jhernandezf
PINNED
Al mover C observo que es posible que se formen o no triángulos. Probé con varias medidas de r y siempre pasa lo mismo. ¿el área máxima depende solo de la altura? ¿cuál es el dominio de h? ¿si h = 0 existe triángulo? ¿cuál es el valor máximo de h?

Profemarco
hace 5 meses
Es correcto la altura y el área cambian, la altura se mueve de 0 a r.

discussion posted hace 5 meses by VictorFelix
PINNED
En el triángulo FGC cuando su altura aumenta su base disminuye y viceversa. Por un lado, cuando la altura es máxima su base es cero, originando un área cero. Si la altura se reduce a cero para que su base sea máxima, el área también será cero. Consecuentemente, al variar la altura desde cero hasta máxima, su área variará también desde cero, hasta un valor máximo para luego disminuir nuevamente a cero cuando la altura sea máxima. Esto indica que habrá algún valor de la altura para el cuál el área sea máxima.

Con la finalidad de representar gráficamente la variación del área de la familia de triángulos isósceles como resultado de mover el punto C sobre la recta n y que los participantes observaran la importancia del lugar geométrico como una estrategia para resolver problemas, se les proporcionó el modelo dinámico representado en la Figura 4.3. En la construcción, el punto R relaciona la longitud de la altura con el área del triángulo.

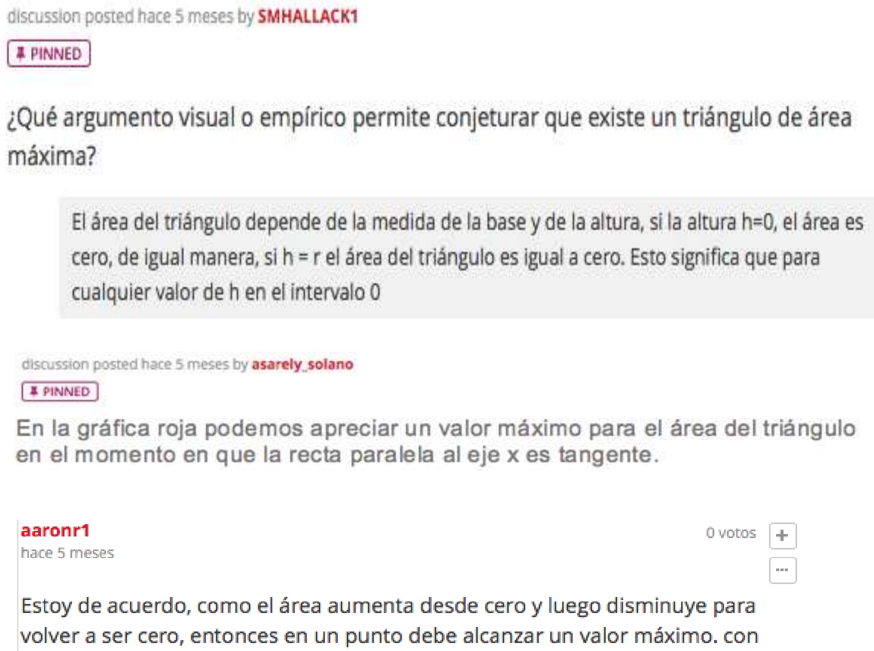
Figura 4.3. El lugar geométrico que modela la variación del área de una familia de triángulos isósceles



Fuente: Actividad del MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales.

Los participantes al mover el punto C, identificaron que R tiene por abscisa la longitud de la altura h y como ordenada el valor del área del triángulo. También, mencionaron que el lugar geométrico les ayudó a visualizar la existencia de un triángulo de área máxima y argumentaron que, al mover el punto C, el valor del área aumenta desde cero y después disminuye para volver a ser cero, por lo tanto, existe un triángulo de área máxima (Figura 4.4).

Figura 4.4. Evidencias de los participantes: Existencia de un triángulo de área máxima.



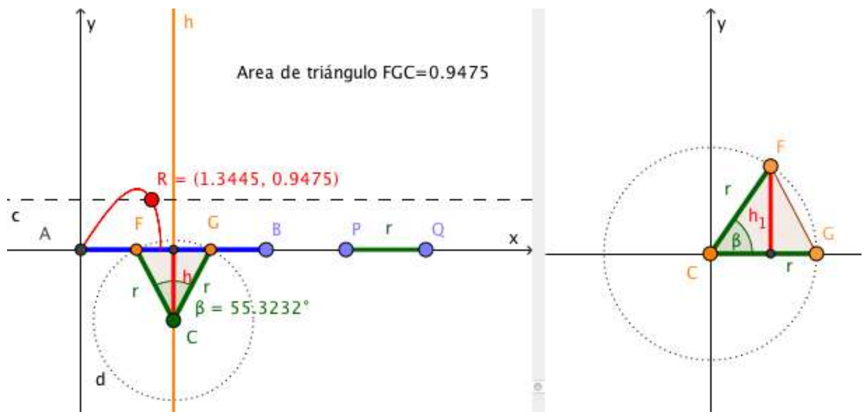
Como resultado de estas exploraciones, en el Foro algunos participantes mencionaron que el lugar geométrico correspondía a una parábola, la comunidad indicó que tal afirmación parecía no ser correcta. El equipo coordinador del curso planteó la pregunta*: ¿el lugar geométrico es una parábola? Si es así, ¿cuál es el foco y la directriz?* Las respuestas proporcionadas por los participantes, exhibieron un enfoque algebraico; uno mencionó que el lugar geométrico tiene como ecuación $A(h) = h\sqrt{r^2 - h^2}$, con r constante, por lo tanto, no se trataba de una parábola.

Otra conjetura presentada en las conversaciones fue que el triángulo de mayor área está determinado por la altura máxima. La comunidad virtual acordó que esa idea no era correcta. Ante estos comentarios, el equipo coordinador planteó en el Foro la pregunta *¿Por qué creen que es incorrecto?* Algunos participantes mencionaron que la base, al igual que la altura, es variable, por lo tanto, el área no se obtiene cuando la altura es máxima.

Los participantes se cuestionaron sobre cómo determinar la posición exacta del punto C donde se genera el triángulo de área máxima, sin depender de la precisión de GeoGebra, como resultado de las exploraciones concluyeron que el área máxima se alcanza cuando el valor del ángulo $FCG = \beta$ es de 90 grados. Ante esto, algunos participantes preguntaron en el Foro: ¿Cómo justificar que el área máxima se obtiene cuando $\beta = 90°$? La pregunta fue respondida en conversaciones posteriores ya que la atención se centró en la existencia de dos posiciones para el punto C, una arriba y otra por abajo del eje X, donde era posible construir un triángulo de área máxima.

Posteriormente, se proporcionó a los participantes un nuevo modelo dinámico en donde el triángulo FGC fue colocado de tal manera que el punto C coincidiera con el origen del plano cartesiano y el lado CG estuviera sobre el eje X; además se construyó la altura h_1 sobre CG (Figura 4.5). Se solicitó a los participantes mover el punto C (parte izquierda de la Figura 4.3) y observar el comportamiento del triángulo FGC en la parte derecha de la Figura 4.5.

Figura 4.5 Modelo dinámico donde se visualiza la altura sobre la base CG del triángulo CFG



Fuente: Actividad del MOOC Resolución de Problemas y uso de Tecnologías Digitales.

En las conversaciones, los participantes coincidieron en que la nueva representación del triángulo FGC les permitió observar la relación que existe entre el punto máximo del lugar geométrico y el ángulo β y, así, concluir que de todos los triángulos isósceles que se forman, el de área máxima es también triángulo rectángulo. Observaron que h_1 maximiza el área del triángulo FGC, pues la base CG permanece constante (Parte derecha de la Figura 4.5), y h_1 es máxima cuando mide lo mismo que el radio de la circunferencia, es decir, cuando está sobre el eje Y.

El grupo coordinador, luego de los acercamientos anteriores, propuso la siguiente pregunta en el foro: ¿se podrá justificar de alguna otra manera? Esto impulsó a los participantes a plantear y compartir en las conversaciones otros acercamientos para justificar que el triángulo de área máxima es el rectángulo, utilizando desigualdades y trigonometría.

En el primer caso, la conversación inició cuando un participante indicó que en el triángulo FGC (Figura 4.6) la base CG es constante e igual a r y $0 < h_1 < r$. Al multiplicar por $\frac{r}{2}$, se tiene $0 < \frac{rh_1}{2} < \frac{r^2}{2}$, donde $\frac{rh_1}{2}$ es el área del triángulo FGC. Este razonamiento matemático fue objeto de discusión, los demás participantes en la conversación expusieron que h_1 podía ser, también igual a r, por lo cual, $0 < \frac{rh_1}{2} \leq \frac{r^2}{2}$. Así, asociaron el área máxima con la expresión algebraica $\frac{r^2}{2}$, es decir, un triángulo rectángulo e isósceles de base y altura igual a r.

La justificación basada en argumentos trigonométricos se basó en la Figura 4.7. Los participantes consideraron uno de los dos triángulos rectángulos que conforman a FGC y el ángulo $\frac{\beta}{2}$ formado entre la hipotenusa y la altura. Mencionaron que el área es $A = \frac{base \cdot altura}{2}$ donde la base es $r\, sen\frac{\beta}{2}$ y la altura es $r\, cos\frac{\beta}{2}$ (Figura 4.8). Así:

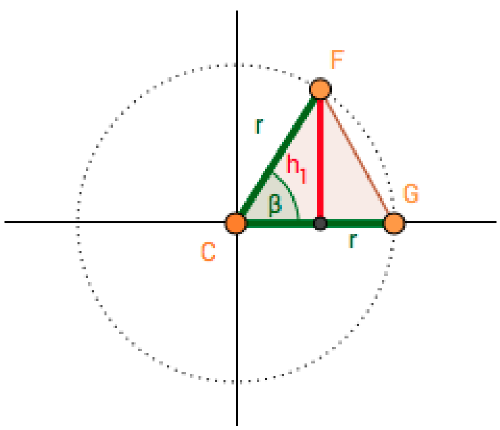
$$A = \frac{r\, sen\frac{\beta}{2} \cdot r cos\frac{\beta}{2}}{2} = \frac{r^2 sen\frac{\beta}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2}}{2}, \qquad (1)$$

al utilizar $sen(2x) = 2sen\, x \cdot \cos x$ en (1) se obtiene

$$A = \frac{r^2 sen\left(2 \cdot \frac{\beta}{2}\right)}{4} = \frac{r^2 sen\beta}{4}. \qquad (2)$$

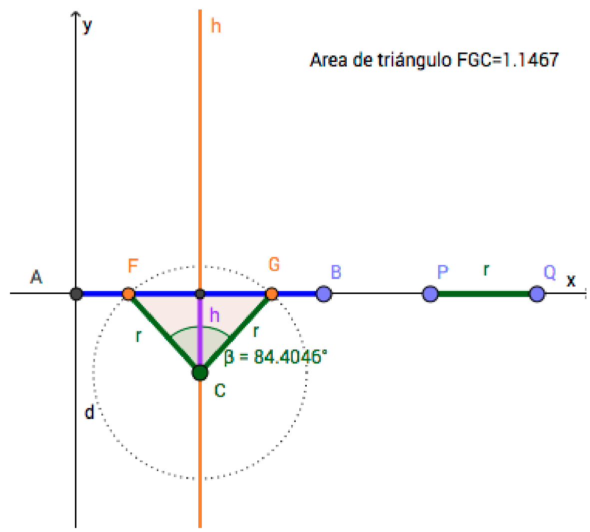
Para maximizar esta última expresión, utilizaron el hecho de que la función seno alcanza un valor máximo en $\beta = 90^o$. De esta manera, obtuvo que $\frac{r^2 sen 90^0}{4} = \frac{r^2}{4}$ es el área máxima de la mitad del triángulo FGC y, por consecuencia, $\frac{r^2}{2}$ es el área máxima del triángulo FGC. Así, la base y la atura deben ser iguales, es decir, se trata de un triángulo rectángulo e isósceles.

Figura 4.6. Representación dinámica de un triángulo isósceles



Fuente: Actividad del MOOC.

Figura 4.7. Representación dinámica de un triángulo isósceles de lados congruentes r



Fuente: Actividad del MOOC.

Figura 4.8 Evidencias de los participantes: Uso de argumentos trigonométricos

Usando trigonometría podemos mostrar porqué es máximo

0 votos

discussion posted hace 5 meses by OscarOlmedo

PINNED

Dado que el área A del triángulo es A = bh/2, con base b dada por b = r sin(beta/2) y con altura h dada por h = r cos(beta/2). Entonces,

A = b h / 2

= (r sen (beta/2)) (r cos(beta/2)) / 2

= r^2 sen(beta/2) cos(beta/2) / 2

= r^2 sen(2 (beta/2)) / 2 / 2, por la identidad sen(2x)/2=sen(x)cos(x)

= r^2 sen(beta) / 4

= r^2 / 4

donde con beta = 90 grados la función seno alcanza su máximo. Por lo tanto, el ángulo entre el cateto y la hipotenusa es beta/2 = 45 grados, es decir es un triágulo rectángulo e isósceles, con lados de longitud igual a r sqrt(2)/2.

El área máxima es por lo tanto r^2/4 para una mitad y r^2/2 para el triángulo FCG.

Inicialmente, el participante que expuso la idea general de la demostración anterior, dio seguimiento, a través del foro a los comentarios de otros y cuando alguno planteaba alguna interrogante o duda, respondía aclarando la situación. Además, este comportamiento del participante, generó que se corrigieran algunos errores de la demostración inicial colaborativamente y que, las personas comprendieran ideas tales como trabajar con el ángulo $\frac{\beta}{2}$ y las identidades trigonométricas relacionadas.

4 Discusión de la Actividad

Las diversas representaciones y las ventajas que ofrece GeoGebra para visualizar de manera instantánea la variación en los atributos (longitudes, ángulos, áreas, etc.) de objetos geométricos ayudaron a los participantes a establecer conjeturas que posteriormente justificaron. En este camino, una estrategia visual y empírica importante fue el uso de un lugar geométrico que representaba la variación del área de una familia de triángulos como un recurso adicional para resolver un problema.

En la Actividad, los participantes identificaron los conceptos matemáticos involucrados en las representaciones dinámicas de los problemas y sus propiedades, movieron los objetos matemáticos como una ruta para identificar relaciones entre éstos, formularon conjeturas y su validación involucró argumentos visuales o empíricos y la presentación de una prueba o demostración matemática. En este proceso, los participantes reconocieron que el movimiento de tales objetos, la medición de sus atributos y los lugares geométricos son estrategias, asociadas al uso de un SGD, que conducen hacia la solución del problema.

En las conversaciones, hubo una evolución con respecto a las Actividades anteriores, ya que los participantes se plantearon la necesidad de pensar siempre en la justificación de las conjeturas formuladas utilizando, además de los acercamientos visuales o empíricos, enfoques algebraicos y geométricos.

Asimismo, plantearon una mayor cantidad de preguntas, a diferencia de las Actividades de la Sesión de Trabajo 2, donde la búsqueda de respuestas los condujo a explorar diversas formas de resolver el problema y, así, construir o desarrollar sus formas de comprender y resolver problemas apoyados con el uso de GeoGebra.

En el desarrollo de las Actividades, sobresalieron participantes que proporcionaron retroalimentación a otros y aquellos que siguieron puntualmente las discusiones que iniciaron. Por ejemplo, los participantes que plantearon una justificación basándose en un enfoque algebraico y en ideas trigonométricas contestaban regularmente las preguntas de otros en relación a los razonamientos expuestos.

La moderación en los foros que realizó el equipo de diseño del MOOC orientó la discusión de los participantes en búsqueda de respuestas a las preguntas planteadas. Varios participantes asumieron un rol de proporcionar soporte o ayuda a otros a través de los comentarios y contribuciones que se expresaron en los foros.

De esta manera, el diseño de las Actividades y la intervención de grupo coordinador en los foros, permitió a los participantes comunicar y contrastar sus ideas en una comunidad virtual, lo cual favoreció la construcción o refinamiento de conceptos e ideas matemáticas ampliando sus recursos matemáticos y estrategias en la resolución de problemas.

El estudio permitió observar el comportamiento de los participantes en las conversaciones que se generaron alrededor de los foros de cada Actividad. Un aspecto crucial que fomentó la interacción y discusión entre los participantes fue el proceso de moderación en las conversaciones por parte del grupo coordinador. Sin la existencia de un profesor encargado de responder o dar seguimiento puntual a cada integrante del curso, resultaron importantes los roles que asumieron algunos participantes en las conversaciones. Algunos participantes aclararon dudas e indicaron errores en los razonamientos matemáticos que otros proponían. Esta retroalimentación promovió la independencia de los participantes y favoreció su proceso de aprendizaje. Otro grupo de participantes daba seguimiento a los comentarios que otros plantearon en relación a las preguntas, ideas matemáticas y extensiones del problema propuestas por ellos. Esto permitió construir y desarrollar diversas formas de resolver un problema.

Para trabajo futuro, y dadas las conclusiones obtenidas en esta investigación, se pretende crear un curso masivo que involucre a los participantes en el proceso de crear sus propias construcciones dinámicas, para ello se puede utilizar GeoGebraTube para almacenar, generar y compartir, en las conversaciones de los foros, el vínculo de los modelos dinámicos. Estos serán otra fuente para recabar información sobre cómo un participante identifica los elementos relevantes en el enunciado del problema y busca la manera de relacionarlos para construir el modelo dinámico que lo representa.

Agradecimientos

A la Universidad de Costa Rica (UCR) por el apoyo brindado.

Conclusiones

Los resultados anteriores muestran que las diversas tecnologías digitales utilizadas en este estudio permitieron crear un ambiente de aprendizaje basado en resolución de problemas en un entorno MOOC. Durante la construcción del MOOC, las características técnicas de la plataforma hicieron posible incluir fuentes de información tales como Wikipedia, KhanAcademy y vínculos a otros sitios de Internet, representaciones dinámicas de un problema elaboradas en GeoGebra y medios de comunicación entre los participantes. La integración de estos componentes permitió estructurar actividades que favorecieron la consulta de información, exploración de modelos dinámicos de un problema y la comunicación entre los participantes, todo esto sin salir de la plataforma.

El uso coordinado de diversas herramientas digitales ofreció los medios y recursos para crear un escenario de aprendizaje MOOC en una plataforma en línea. En este escenario, los participantes trabajaron en un ambiente de colaboración que les permitió compartir sus ideas a través del Foro de discusión durante todo el proceso de resolución de las actividades (comprensión del problema, formulación de conjeturas, formas de validación y la búsqueda de diversas maneras de cómo resolver los problemas.

En este contexto, todos los participantes tuvieron una oportunidad de explorar los modelos dinámicos y conceptualizarlos como un punto de partida para identificar conceptos, buscar relaciones y buscar diversas maneras o argumentos para sustentarlas. En este proceso, los participantes mostraron heurísticas asociadas con el uso de las herramientas como el arrastre o movimiento ordenado de objetos dentro de la configuración, la cuantificación de atributos como medida de segmentos, ángulos, áreas, etc., la generación de lugares geométricos y el uso de deslizadores.

En las Actividades del MOOC Resolución de Problemas Matemáticos y uso de Tecnologías Digitales hubo una variedad de tipos de participantes con diferentes niveles académicos, edades y conocimientos matemáticos. Como consecuencia, se generó un ambiente de participación en los Foros con diferentes roles. Algunos participantes aclararon dudas e indicaron errores en los razonamientos matemáticos que otros proponían. Esta retroalimentación promovió la independencia de los participantes y favoreció su proceso de aprendizaje. Otro grupo de participantes daba seguimiento a los comentarios que otros plantearon en relación a las preguntas, ideas matemáticas y extensiones del problema propuestas por ellos. Esto permitió construir y desarrollar diversas formas de resolver un problema.

El papel de los diseñadores del curso o grupo coordinador durante el diseño e implementación de las Actividades permitió que se generara un ambiente de trabajo colaborativo entre los participantes. Las preguntas iniciales de las Actividades guiaron a los participantes a buscar diversas formas de responder y en consecuencia a resolver los problemas planteando conjeturas, basadas en el movimiento de los objetos matemáticos presentes en la configuración dinámica y sus relaciones o invariantes.

La moderación y planteamiento de preguntas en todas las conversaciones por parte del grupo coordinador, permitió que los participantes plantearan preguntas y formas de responderlas conforme avanzaban en el desarrollo de las Actividades, esto les permitió evolucionar en su pensamiento matemático, un ejemplo de lo anterior son las preguntas que se plantearon en el último problema del curso y las diversas formas de responderlas que los llevaron a encontrar diversas rutas de solución y justificaciones algebraicas, geométricas y trigonométricas.

Un aspecto fundamental que favoreció lo anterior fue la herramienta foros de discusión que ofrece la plataforma y la posibilidad de moderar las discusiones. Sin embargo, una debilidad detectada de esta herramienta fue que no contaba con un sistema de escritura matemática, lo que causó en varias ocasiones que los participantes mal interpretaran los comentarios de otros. Un factor que ayudaría mucho y que no cuenta la plataforma es poder incluir imágenes en los foros, así los participantes podrían subir una captura de pantalla de su trabajo y no realizar la descripción escrita.

Es importante reconocer que el diseño del MOOC implica tener en cuenta lo relacionado con los niveles de compromiso y responsabilidad de los participantes. El objetivo es buscar que éstos creen la conciencia y necesidad de que ellos mismos monitoreen sus avances en la comprensión y uso de las ideas matemáticas en la resolución de problemas.

Referencias

Aguilar-Magallón D, & Poveda, W. (2017). Problem Solving Opportunities with Digital Technology in Problem Solving Environments. En Galindo, E., & Newton, J., (Eds.) Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2016). Framework for Designing Mobile Learning Environments. En D. Churchill et al. (Eds.), Mobile Learning Design, lecture Notes in Educational Technology (pp. 3-25). Singapore: Springer.

Ernest, P. (2016). The unit of analysis in mathematics education: bridging the political-technical divide? Educational studies in mathematics, 92 (1), 37-58.

Gros, B. (2016). The Dialogue Between Emerging Pedagogies and Emerging Technologies. En B. Gros, Kinshuk, M. Maina, The Future of Ubiquitous Learning Designs for Emerging Pedagogies (pp. 3-24). Berlin Heidelberg: Springer.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2009). Focus in High School Mathematics: Reasoning and sense making. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Poveda, W. & Aguilar-Magallón, D. (2017). A Massive Online Course: Mathematical Problem Solving and Digital Technologies. En Galindo, E., & Newton, J., (Eds.) Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Quinton, S. & Allen, M. (2014). The social processes of web 2.0 collaboration: Towards a new model for virtual learning. En M. Gosper & D. Ifenthaler (Eds.), Curriculum Models for the 21st Century (pp. 35-53). New York: Springer.

Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho-Machín, & L. Blanco (Eds.), Investigación en educación matemática XII (pp. 159-192). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Santos-Trigo, M. (2014). La Resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. Segunda Edición. Editorial Trillas, Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, ISBN-978-607-17-2039-9.

Santos-Trigo, M. (2014a). La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. Segunda edición. México: Trillas, Asociación Nacional de profesores de matemáticas.

Santos-Trigo, M. (2016). Las tareas múltiples y la tecnología digital. Revista C2 Ciencia y Cultura [en línea]. Recuperado el 4 de enero de http://www.revistac2.com/las-tareas-multiples-y-tecnologia-digital/.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2011). Framing a problem solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the Seventh Conference of the European society for Research in Mathematics Education (pp. 2258-2277). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. The Mathematics Enthusiast, 10(1), 279-302.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 48 (6), 827-842.

Schoenfeld A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 334-371.) New York: Macmillan.

Sergis, S., Sampson, D., & Pelliccione, L. (2017). Educational Design for MOOCs: Design Considerations for Technology-Supported Learning at Large Scale. En M. Jemni, Kinshuk, & M. Khribi (Eds.), Open Education: from OERs to MOOCs (pp. 39-71). Berlin Heidelberg: Springer.

Sinclair, J. & Kalvala, S. (2015). Engagement measures in massive open online courses. En L. Uden, D. Liberona, & T. Welzer (Eds.), Learning Technology for Education in Cloud. (Vol. 533, pp. 3-15). Switzerland: Springer International Publishing.

Zhang, Q., Peck, K., Hristova, A., Jablokow, K., Hoffman, V., Park, E., & Bayeck, R. (2016). Exploring the communication preferences of MOOC learners and the value of preference-based groups: Is grouping enough? Educational Technology Research and Development, 64 (4), 809-837.

Experimento de diseño para transitar hacia una definición formalmente operable de polígono en educación secundaria

MATA-ROMERO, Armando, ALVARADO-MONROY, Angelina y OLVERA-MARTÍNEZ, Carmen

A. Mata, A. Alvarado y C. Olvera

Universidad Juárez del Estado de Durango
armandomr@ujed.mx, aalvarado@ujed.mx, carmen.olvera@ujed.mx

A. Alvarado, G. Carmona y A. Mata (Dirs.) Una visión integradora. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

In this paper we research the focus of the lessons studied on polygons and directly relate this to standards and school goals. From an immersion in geometric contents and its instruction in middle school in Mexico, we have detected a limited polygon definition. Consequently, we note that some procedures and facts that involve the concept are treated in teaching only for convex polygons. Therefore, an investigation was carried out in the mentioned context, with the purpose of constructing (together) with the students an adequate and functional definition of a polygon, based on students' *concept image*. Also, our intention was to fortify the understanding of this concept, in order to achieve that it was used in the deduction of an algebraic expression to calculate the sum of the polygon's interior angles (valid for both concave and convex polygons). To argue the validity of such an expression, it was necessary for the students to understand the process of properly triangulate any polygon. In this sense, a didactic experience was designed and to prove its effectiveness, it was implemented with middle school students. Finally, the effect of the proposed didactic design on the formation and reconceptualization of the concept of polygon in the students was documented, as well as the effect on the development of their abilities to use it in the calculation of the sum of its interior angles.

Polygon, Concept Image, Concept Definition, Design Experiment

Introducción

Esta investigación se dirige, principalmente, a la formación y desarrollo de conceptos geométricos. La principal motivación ha sido que, en diferentes talleres de desarrollo profesional docente en geometría realizados por la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango (*Forma, espacio y medida y su enseñanza con tecnología*, profesores de secundaria, 2009; *La importancia de los conceptos geométricos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas*, profesores Escuelas Normales, 2011; *Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas, profesores de las Escuelas Normales*, 2014; *Diplomado Desarrollo del Pensamiento Matemático y Uso de la Tecnología para la Resolución de Problemas*, profesores de bachillerato, 2014-2015; *Seminario de Matemática Educativa*, 2017) se explora el conocimiento conceptual del profesor a través de preguntas que, al requerir respuestas justificadas, generan discusiones y propician una reconceptualización que permite llegar a acuerdos y solventar algunas deficiencias atribuidas a un manejo parcial de las definiciones de los conceptos (ver Tabla 1.1).

Responder adecuadamente tales preguntas representa un reto tanto para los profesores como para los estudiantes de diferentes niveles educativos. Por ejemplo, construir la definición de cuadrilátero envuelve a los estudiantes en un proceso complejo (Edwards & Ward, 2004). Con relación a la definición de paralelogramo, de Villiers (1998) menciona que: aunque los estudiantes puedan enunciar la definición convencional de paralelogramo como un cuadrilátero con lados opuestos paralelos ellos pueden no considerar los rectángulos, cuadrados y rombos dentro de este grupo. Esto se puede atribuir a que los estudiantes tienen en mente a los paralelogramo en los cuales no todos los ángulos o lados pueden ser iguales.

Tabla 1.1 Algunas preguntas para explorar en el conocimiento geométrico conceptual

1. a) Si tengo tres segmentos de recta, ¿siempre puedo construir un triángulo? b) Una altura de un triángulo, ¿es una recta o un segmento de recta? c) ¿Es correcto decir: *las mediatrices de un triángulo*? d) ¿Es cierto que la altura de un triángulo es el lado del triángulo que va de un vértice al lado opuesto? e) ¿Es cierto que si dos triángulos tienen dos lados y un ángulo iguales, entonces son congruentes? f) ¿Es cierto que la suma de los ángulos de un triángulo es de 180º?	3. a) ¿Se puede construir una circunferencia que pase por 3 puntos?, ¿y por cuatro puntos? b) ¿Qué significa construir una circunferencia inscrita a un triángulo? c) ¿Siempre se puede inscribir un cuadrilátero a una circunferencia?, ¿Y circunscribir?
2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas? a) Un cuadrado es un rectángulo. b) Un cuadrado es un cuadrilátero y viceversa. c) Un rectángulo es un paralelogramo y viceversa. d) Un cuadrado es un rombo. e) Un cuadrilátero (trapecio) es un paralelogramo. f) Un triángulo equilátero es isósceles. g) Con cuatro segmentos de recta siempre se puede construir un cuadrilátero.	4. a) ¿Qué es una razón? b) ¿Qué es una proporción? c) ¿razón y escala es lo mismo? d) ¿Qué significa la frase *segmentos proporcionales*?
5. a) ¿Qué es un polígono? b) ¿Se puede hablar de altura de un polígono?	

Fuente: Elaboración propia

En esta investigación se pretende proponer experiencias para la formación y el desarrollo del concepto de polígono, dado que, en la exploración previa con dos grupos de secundaria se detectó que es un concepto que no es formalmente operable para los estudiantes, es decir, se les dificultó utilizarlo para deducir resultados y para resolver problemas que lo involucren. Limitan sus soluciones a los polígonos convexos, más aún, a los polígonos regulares.

En el Programa de Estudios del nivel secundaria de la asignatura de Matemáticas (Secretaría de Educación Pública, 2011), dentro del eje de Forma, Espacio y Medida de segundo grado, se encuentra el contenido correspondiente al cálculo de la suma de los ángulos interiores de un polígono. Tal contenido permanece en el nuevo Plan y Programas de Estudio para la Educación Básica (Secretaría de Educación Pública, 2017) dentro del mismo eje con el tema correspondiente a Figuras y Cuerpos Geométricos. En dicho tema, el aprendizaje esperado es que el estudiante deduzca y use las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares. Para lograrlo, sugieren trabajar en: el número de diagonales que pueden trazar desde un vértice, el número de diagonales en total y la suma de sus ángulos interiores.

La manera en que generalmente se aborda en el aula, es encontrando la suma de los ángulos interiores, en función del número de lados del polígono. Sin embargo, al revisar libros de texto de segundo grado de secundaria disponibles en la página de la Comisión Nacional de Libro de Texto Gratuitos (Conaliteg), se observó que dicho resultado se estudia únicamente con polígonos convexos, incluso en algunos casos sólo se trabaja con polígonos regulares, a través de la división en triángulos mediante diagonales trazadas desde un mismo vértice (Figura 1.1). Cuando el polígono es cóncavo, este procedimiento ya no es claro, pues no es posible hacer la división desde cualquier vértice ya que se tendrá al menos una diagonal fuera del polígono (Figura 1.2).

Figura 1.1. Diagonales trazadas desde un mismo vértice en un polígono convexo

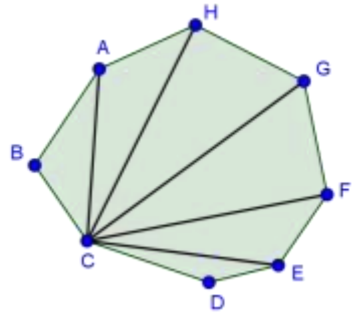
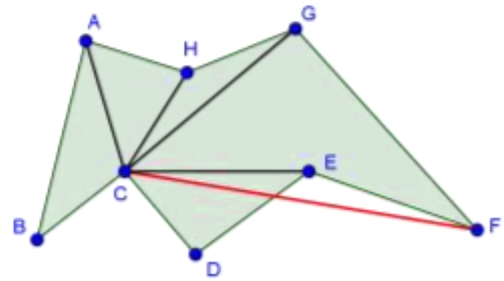


Figura 1.2 Diagonales trazadas desde un mismo vértice en un polígono cóncavo.



Fuente: Elaboración propia

Por lo anterior, surge la necesidad de obtener la suma de los ángulos interiores de un polígono mediante un proceso de división en triángulos por diagonales que no necesariamente estén trazadas desde un mismo vértice, ya que justificar matemáticamente, con base en el proceso planteado, que la suma de los ángulos interiores de un polígono es igual a $180°(n-2)$ si se tiene un polígono de n lados, es difícil para el caso de un polígono cóncavo y requiere de conocimientos propios de una licenciatura en matemáticas (Eves, 1985). Por otra parte, abordar este resultado sólo en polígonos convexos, limita el aprendizaje del estudiante de secundaria e incluso, se contrapone con las definiciones de lo que es un polígono establecidas en otros libros de texto, dado que en todas ellas la definición incluye también a los cóncavos, aunque no sean estudiados con la misma profundidad.
Como antes se mencionó, el estudio de los polígonos en educación secundaria se concentra en los polígonos convexos. Así, en esta investigación se propone una secuencia didáctica para contrarrestar esta debilidad. La hipótesis es que dicha secuencia prepara al estudiante para un desarrollo conceptual profundo, desde la distinción entre polígonos cóncavos y convexos hasta la construcción de una definición "apropiada" del concepto de polígono (basada sobre elementos que los estudiantes ya definieron, comprendieron y pueden utilizar, además de que sea establecida en un sentido no circular), que le permita deducir un procedimiento para calcular la suma de sus ángulos interiores conociendo sólo el número de lados del mismo. Tal procedimiento se sustenta en un proceso de triangulación sin importar si se trata de un polígono cóncavo o convexo.

Para organizar este informe, en la sección 2 se abordan algunos aspectos teóricos que sustentan el diseño de la secuencia didáctica propuesta. En el apartado 3 se justifica la elección de la metodología de investigación basada en el diseño y se describe el proceso de diseño y la implementación de la secuencia didáctica. En la sección 4 se presentan los resultados obtenidos de la implementación. Finalmente, se muestran algunas conclusiones derivadas de la investigación y el rediseño sugerido a partir de los resultados obtenidos.

Marco Conceptual

La formación y desarrollo de conceptos es central en el pensamiento matemático. Los estudiantes necesitan experiencias que les permita extraer significado de las definiciones y poder establecer la relación entre la definición y los objetos que ésta representa. Tales experiencias apoyan a los estudiantes en el desarrollo de un pensamiento deductivo y en la comprensión del lenguaje matemático, caracterizado por su precisión para descartar la posibilidad de ambigüedades.

Actualmente tales experiencias están limitadas, sin embargo, en el nivel medio superior y superior se incrementan los requerimientos de un buen manejo de las definiciones y únicamente se asume que el estudiante debe estar capacitado para ello, sin considerar la dificultad que presentan los estudiantes para desenvolver o extraer significado de los conceptos y las definiciones. Diferentes estudios muestran que no es suficiente con que el estudiante sea capaz de expresar verbalmente la definición de un concepto para que pueda comprenderlo y utilizarlo de manera adecuada (Vinner, 1991; Bills & Tall, 1998; Selden & Selden 1995; Edwards & Ward, 2004).

Un primer paso en la resolución de problemas y en la producción de conjeturas y de demostraciones, se da cuando se comprenden los conceptos involucrados y se utilizan las definiciones de manera adecuada. Sin embargo, los estudiantes no hacen uso de ellas para resolver problemas o demostrar un enunciado donde están implicados y recurren a un representante concreto del objeto, alguna fórmula que los represente, sólo piensan en alguna característica del objeto, o bien, una definición "corta" (Alvarado & González, 2010). Es deseable incluir experiencias tempranas que fortalezcan el proceso de definir y su función al hacer matemáticas. Es necesario que los conceptos en el nivel básico sean revisados para determinar si pueden ser utilizados apropiadamente por los estudiantes. Se tiene la necesidad de hacer las definiciones y conceptos *formalmente operables* para los estudiantes (Bills & Tall, 1998), es decir, ellos deben ser capaces de usar un concepto y su definición para crear o reproducir de manera significativa un argumento formal, ya sea para la solución de un problema, para establecer una conjetura, o bien, para justificar o demostrar una proposición.

Múltiples investigaciones muestran que en la formación de un concepto es de gran importancia fortalecer la imagen que los estudiantes poseen de él y acercarlos de manera gradual a su definición (Tall & Vinner, 1981; Vinner & Hershkowitz, 1980; Vinner, 1991; 2011). Para Tall & Vinner (1981) la *imagen del concepto* es una estructura cognitiva individual asociada a un concepto; esto incluye todas las asociaciones de cuadros mentales, ejemplos, propiedades y procesos. Mientras que, con la *definición del concepto*, se refieren a la forma en que las palabras se utilizan para especificarlo. La definición de un concepto puede ser personal o formal y esta última posee las características para ser institucionalizada a largo plazo por la comunidad matemática. Tall & Vinner en diferentes investigaciones han encontrado que enriquecer la imagen del concepto da sentido a su definición formal y sostienen que una forma de instrucción que se ocupe de enriquecer la imagen que tienen los estudiantes del concepto ayuda a desarrollar la habilidad para visualizar y operar adecuadamente con los conceptos matemáticos. Por su parte, Dahlberg & Housman (1997) señalan que la tendencia de los estudiantes a evocar parte de su imagen del concepto, en lugar de su definición, cuando responden a una variedad de tareas matemáticas relacionadas no es necesariamente malo; establecen que, en ocasiones, es deseable tener a la mano la riqueza de las imágenes de los conceptos, dado que, esto les permite construir ejemplos, identificar aquellos que no lo son y visualizar contraejemplos. Lo anterior sirve de plataforma para edificar sobre la imagen del concepto del estudiante.

En esta misma dirección, Pinto & Tall (1999) pudieron observar que los estudiantes exhiben dos modos distintos de manejo de definiciones formales, uno *dando significado* a través de la consideración de ejemplos (frecuentemente visuales) y otro por *extracción de significado,* a través de la manipulación y reflexión sobre la definición misma. En la secuencia propuesta en este trabajo (secciones 3 y 4) se observan también estas dos formas de manejo, cuando los estudiantes tratan de dar significado a la definición de polígono, desde fortalecer su imagen a través de ejemplos visuales, posteriormente extraer significado de su definición para encontrar un procedimiento adecuado para triangulación de los mismos, y finalmente, establecer una fórmula funcional para calcular la suma de los ángulos internos de un polígono cualesquiera.

Para lograr lo anterior, la construcción de una gran variedad de ejemplos ha jugado un papel determinante tanto en la formación del concepto (Vinner, 1991) como en la clarificación (Dahlberg & Housman, 1997), la adquisición de significado del mismo y su uso en la generalización de un resultado (Watson & Mason, 2005).

Dada la naturaleza de este trabajo, resulta de interés la forma de estructurar una secuencia didáctica. En este sentido, Simon (1995) sugiere que en una trayectoria hipotética de aprendizaje, es necesario incluir: la meta de aprendizaje, las actividades de aprendizaje y considerar el pensamiento y aprendizaje que los estudiantes han desarrollado.

Finalmente, la incorporación de la tecnología digital en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática ha sido recurrente en las últimas décadas. En parte debido a su poder de visualización y a que puede ser tomada como una herramienta de reconceptualización que nos permite “ver más”. Además, las actividades con tecnologías digitales como GeoGebra, promueven la comprensión de conceptos matemáticos, conocer e interactuar con diferentes maneras de representarlos (Niss, 2014) y establecer conexiones entre ellas (Confrey & Smith, 1991). En este trabajo la incorporación de GeoGebra, tiene el objetivo de involucrar al estudiante en actividades en las que pueda analizar, identificar y explorar relaciones entre objetos geométricos.

Metodología

Este trabajo es exclusivamente cualitativo y se ha seguido como metodología la *investigación basada en el diseño.* Dado que, se pretende analizar el aprendizaje en contexto, mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza.

En este tipo de experimentos, el diseño y la investigación de su funcionamiento son interdependientes. El diseño es considerado central para promover el aprendizaje y crear conocimiento útil y más allá de centrarse en la creación de diseños eficaces para el aprendizaje, estos estudios explican por qué el diseño funciona y sugieren modos en que puede adaptarse a nuevas circunstancias (Cobb et al, 2003). Para Confrey (2006) son investigaciones extensas de prácticas educativas, provocadas por el uso de tareas curriculares innovadoras y cuidadosamente secuenciadas, que estudian cómo se aprende un sistema conceptual a través las interacciones ocurridas en el aula (medio, entre alumnos, alumno-profesor, etc.). Estas investigaciones pretenden documentar el proceso de aprendizaje a través de: los recursos, el conocimiento previo aplicado por los estudiantes en las tareas, la naturaleza de las interacciones en el aula, la evidencia escrita, el surgimiento y evolución de las concepciones.

De la misma manera que trata de documentar cómo se lleva a cabo el proceso de enseñanza mediante la observación y análisis del trabajo de los alumnos. También se caracterizan por un refinamiento progresivo ya que el diseño es constantemente revisado a partir de la experiencia. El proceso de investigación se compone de ciclos continuos de diseño, implementación, análisis y rediseño. Estos ciclos de diseño generan automáticamente rastros de documentación cuyas trayectorias revelan información importante sobre la naturaleza de los desarrollos que ocurren, relativos a los artefactos y a los sistemas conceptuales que subyacen (Lesh & Kelly, 2000). En esta metodología, durante el diseño y la experimentación se elaboran conjeturas, que se prueban y se refinan con base en la evidencias que se van documentando sobre lo que alumnos, profesores e investigadores aprenden durante el proceso.

1 Estructura del Experimento de Diseño

En este trabajo se llevó a cabo un experimento o estudio de diseño en un aula de enseñanza secundaria (estudiantes de 12-13 años de edad), en el cual un equipo de investigadores colabora con un profesor (quien forma parte del equipo de investigación) y dicho equipo asume la responsabilidad de la instrucción.

Para dicho estudio se han considerando cuatro fases: a) Estudio Exploratorio, b) Diseño de la propuesta didáctica, c) Experimentación, d) Análisis de las producciones de los alumnos y e) Rediseño.

1.1 Estudio Exploratorio

El propósito en esta fase de la investigación fue analizar las ideas matemáticas fundamentales en torno al concepto de polígono (tanto en el contexto matemático experto como en el contexto de la práctica escolar actual), con la finalidad de detectar características para el diseño de una herramienta conceptual que propiciara la formación y transformación de conocimientos sobre este concepto en los estudiantes.
Uno de los aspectos importantes a considerar en el diseño de una secuencia didáctica, es comprender el conocimiento actual de los estudiantes involucrados en torno al objeto de estudio (Simon & Tzur, 2004). Así, antes del diseño se realizó una actividad exploratoria con estudiantes de secundaria con la finalidad de conocer cuál era el lenguaje utilizado por ellos cuando trataban con polígonos y sus características. Los resultados obtenidos de esta actividad sirvieron de base para el diseño de las actividades de la secuencia.

Durante esta fase, también se revisaron libros de matemáticas y textos utilizados en el nivel secundaria. Se entrevistaron a algunos profesores para saber cuál era la definición de polígono que ellos utilizaban, cuál era su imagen del concepto y cómo lo utilizaban para elaborar argumentos formales, por ejemplo, en deducir y/o explicar la expresión para calcular la suma de ángulos interiores de un polígono.

1.2 Diseño de la Propuesta Didáctica

El objetivo de la secuencia es que los estudiantes establezcan una definición adecuada (sin pérdida de formalidad, pero comprensible para ellos) del concepto de polígono, que comprendan la diferencia entre un polígono cóncavo y uno convexo y que logren deducir la expresión que representa la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados sin importar si es cóncavo o convexo.

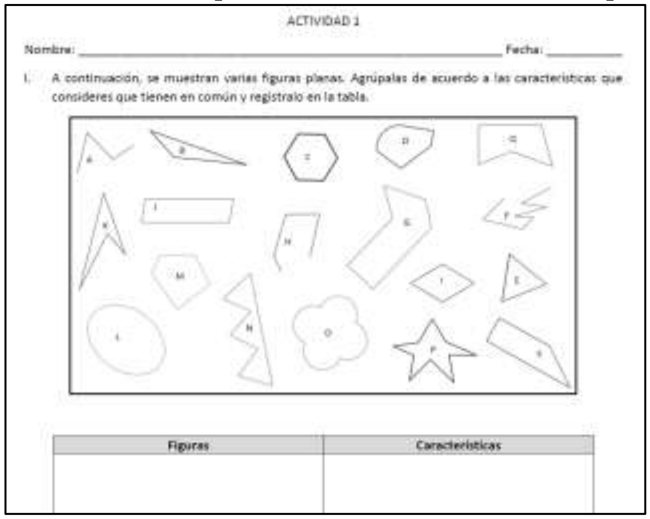
Los variables macro-didácticas utilizadas fueron: 1) las hojas de trabajo de trabajo que guiaron las sesiones y en las cuales los estudiantes comunican su pensamiento; y 2) el uso de manipulables diseñados en el ambiente dinámico GeoGebra.

La secuencia didáctica se conforma de tres actividades que enseguida se describen.

Actividad I. Definición de polígono

Esta actividad se diseñó para construir una definición aceptable de polígono (Figura 3.1). El propósito era que los estudiantes identificaran las principales características de un polígono: figura geométrica cerrada, formada con segmentos rectos, simple.

Figura 3.1 Actividad para construir la definición de polígono



ACTIVIDAD 1

Nombre: ______________________ Fecha: __________

I. A continuación, se muestran varias figuras planas. Agrúpalas de acuerdo a las características que consideres que tienen en común y regístralo en la tabla.

Figuras	Características

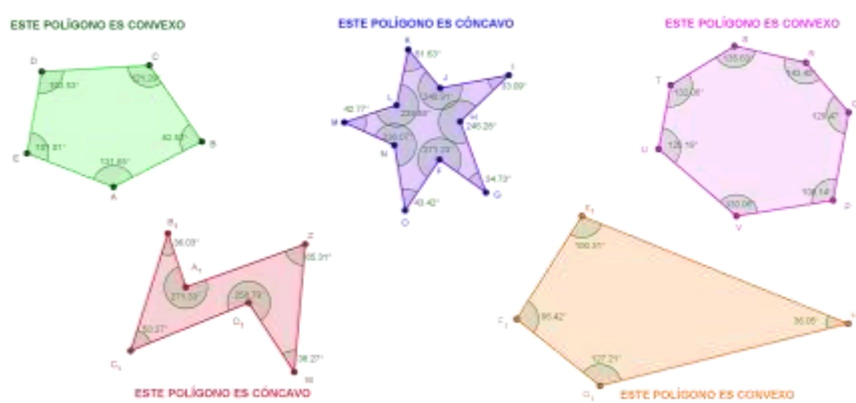
Fuente: Elaboración propia.

Actividad II. Identificar polígonos cóncavos y convexos

En la actividad se utiliza el ambiente dinámico GeoGebra con la intención de involucrar al estudiante en actividades en las que pueda analizar, identificar y explorar relaciones entre objetos geométricos. En dicho ambiente, se elaboraron manipulables para promover en el estudiante la identificación de las características principales de los polígonos convexos y cóncavos. En el manipulable de la Figura 3.2, el estudiante puede mover los vértices para modificar la forma de los polígonos y de acuerdo a la misma, aparece la leyenda de si es cóncavo o convexo. El objetivo era que los estudiantes identificaran qué sucedía cuando la leyenda cambiaba, es decir, se esperaba que reconocieran que bastaba con que un ángulo interior del polígono midiera más de *180°* para que se considerara cóncavo.

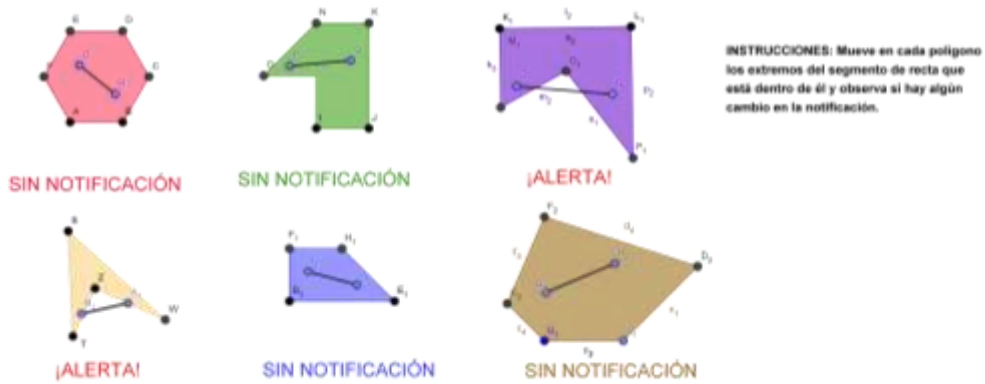
Mientras que en el manipulativo de la Figura 3.3, el estudiante puede mover los extremos de un segmento, que inicialmente aparece en el interior del polígono. Cuando se mueven los extremos puede ocurrir que el segmento, o una parte de éste, quede fuera del polígono y entonces se genera una leyenda de alerta. Los estudiantes buscan las características de los polígonos para los cuales eso sucede: los cóncavos.

Figura 3.2 Manipulativo en GeoGebra para identificar cóncavos y convexos en función de la medida de sus ángulos.



Fuente: Elaboración propia

Figura 3.3 Manipulativo en GeoGebra para determinar características de polígonos cóncavos y convexos con relación al segmento que une dos de sus puntos interiores



Fuente: Elaboración propia

En la hoja de trabajo utilizada para la Actividad II se pedía a los estudiantes lo siguiente:

1. *Abre el archivo de GeoGebra llamado polígonosegmentos.ggb. En él encontrarás varios polígonos y dentro de cada uno de ellos, un segmento. En cada polígono mueve los extremos del segmento, observa lo que sucede y contesta las siguientes preguntas: ¿En qué polígonos te aparece el mensaje de ALERTA cuando mueves los extremos del segmento? ¿Por qué crees que aparece el mensaje de ALERTA? ¿Qué características comunes tienen los polígonos donde aparece el mensaje?*

2. *Abre el archivo polígonosángulos.ggb. Mueve los vértices de cada polígono de tal manera que: a) Conviertas todos a cóncavos; y b) Conviertas todos a convexos.*

Finalmente, se pedía que observaran los cambios en las medidas de los ángulos y registraran la información en una tabla.

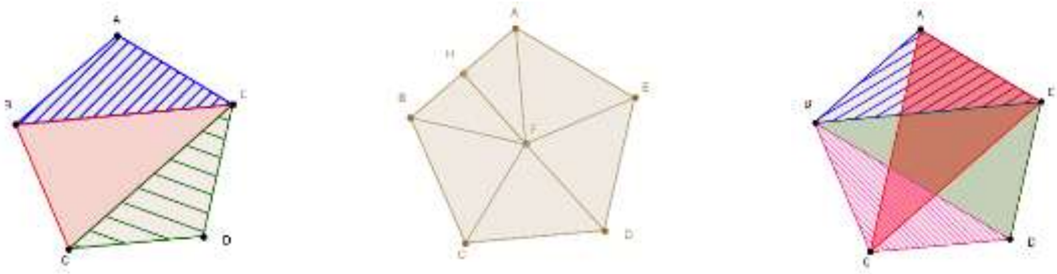
Actividad III. Cálculo de la suma de ángulos interiores de un polígono

En esta actividad los estudiantes debían deducir y utilizar la expresión para el cálculo de la suma de los ángulos interiores de un polígono conociendo sólo el número de lados del mismo, sin importar si el polígono es cóncavo o convexo. Para ello, en la primera parte debían realizar triangulaciones de polígonos, es decir, dividir en triángulos los polígonos siguiendo las reglas:

a) Que todos los vértices de los triángulos sean vértices del polígono.
b) Que los triángulos no se empalmen.

En la hoja de trabajo se les muestran ejemplos de divisiones correctas e incorrectas de un polígono (Figura 3.4).

Figura 3.4 Ejemplos presentados de triangulaciones correctas e incorrectas de polígonos



Correcto Incorrecto Incorrecto

Fuente: Elaboración propia

En la segunda parte de esta actividad se les pide a los estudiantes que divididan un grupo de polígonos convexos en triángulos con base en las reglas establecidas y que registren en una tabla los valores de las variables: nombre del polígono, número de lados del polígono, número de triángulos en los que se dividió el polígono.

Enseguida, en la tercera parte analizan la información y contestan preguntas como:

¿qué procedimiento utilizaste para dividir en triángulos cada polígono?, ¿en cuántos triángulos quedaría dividido un hexágono /heptágono/decágono convexo?, ¿en cuántos triángulos quedaría dividido un polígono convexo de n *lados?*

En la cuarta parte de la actividad se repite lo descrito para la segunda parte, pero ahora aplicado a un grupo de polígonos cóncavos y deben responder preguntas similares a las de la tercera parte, pero ahora para este caso de los cóncavos.

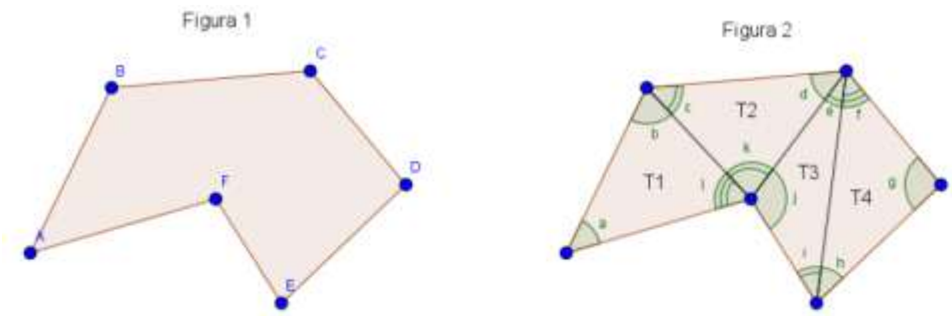
De acuerdo a la información obtenida, deben contestar justificadamente la pregunta

¿existe alguna diferencia en el número de triángulos en que se divide un polígono convexo de n *lados y uno cóncavo de* n *lados?*

A continuación, se les presenta a los estudiantes la Tabla 3.1 la cual deben completar.

Tabla 3.1 Equivalencia de ángulos entre un polígono convexo y el mismo polígono triangulado

De acuerdo con las figuras 1 y 2 completa la tabla tomando en cuenta los ejemplos proporcionados.



Ángulos interiores de la figura1	**Ángulos correspondientes en la figura 2**
A	
B	*b+c*
C	
	g
E	
F	
A+B+C+D+D+E+F	

Fuente: Elaboración propia

Luego, utilizan el hecho conocido de que la suma de los ángulos interiores de cada triángulo, *T1, T2, T3 y T4* es 180º y así deducen que $a+b+l+c+d+k+e+i+j+f+g+h=540$º.

Las observaciones anteriores preparan a los estudiantes para contestar justificadamente las cuestiones y realizar los cálculos correspondientes de la Tabla 3.2.

Tabla 3.2 Preguntas para los estudiantes. Hoja de trabajo de la Actividad III

1) Calcula la suma de los ángulos interiores de la Figura 1 (Tabla 3.1) (es decir $A + B + C + D + E + F$).
2) ¿Cómo obtienes la suma de los ángulos interiores de la Figura 1, a partir del número de triángulos en que se dividió?
3) ¿Qué fórmula utilizarías para encontrar la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados de acuerdo al número de triángulos en que se divide según las reglas establecidas en el punto I?
4) ¿Podrías encontrar la suma de los ángulos interiores de la Figura 1 (Tabla 3.1), a partir del número de triángulos en que se dividió?
5)¿Podrías deducir una fórmula para encontrar la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados de acuerdo al número de triángulos en que se divide según las reglas establecidas desde el principio?

Fuente: Elaboración propia

Con esta parte de la actividad se espera que los estudiantes sean capaces de enunciar un método para calcular la suma de ángulos interiores de un polígono cualesquiera, dicho método deberá ser válido, tanto para convexos como para cóncavos.

1.3 Experimentación

Esta secuencia didáctica se implementó en dos grupos de segundo grado de educación secundaria en la ciudad de Durango, Durango en México; sin embargo, los resultados que se presentan en este trabajo son los obtenidos de uno de ellos. El grupo estaba conformado por 42 estudiantes, 20 mujeres y 22 hombres, cuyas edades se encontraban entre los 12 y 13 años. Los alumnos de este grupo se caracterizaban por atender las indicaciones de las actividades, ser participativos al socializar sus respuestas, trabajar en un ambiente colaborativo. Es importante mencionar que en el grupo ya se había abordado el tema de la suma de ángulos interiores de un polígono cinco meses antes de la implementación de las actividades y los estudiantes ya tenían experiencia previa en el manejo de GeoGebra.

La escuela secundaria en la que se llevó a cabo esta experimentación cuenta con aula HDT (Habilidades Tecnológicas para Todos) donde se imparten las clases de matemáticas. De esta manera, se contaban con una mesa de trabajo y una computadora para cada dos alumnos, lo cual favorecía el trabajo en parejas.

Las actividades fueron trabajadas, en primera instancia, de manera individual y después durante las exploraciones de los manipulables, se generaron discusiones en cada pareja conformada. Posteriormente, se abrió un espacio para la socialización de respuestas y para la discusión grupal. Las actividades se trabajaron durante dos sesiones de 90 minutos cada una.

Las evidencias del trabajo de los estudiantes se recolectaron desde los registros escritos en las hojas de trabajo previstas, las videograbaciones del trabajo en equipo y de la socialización, así como las notas de los investigadores y del profesor.

Resultados

En el estudio exploratorio se logró conocer el lenguaje que es cercano a los estudiantes cuando trabajan o se refieren a los polígonos: figura, vértices, esquinas, picos, lados rectos, segmentos, etc. También, se identificó que una definición de polígono que los profesores usualmente utilizan es la de «Figura geométrica plana limitada por una línea poligonal cerrada que no se corta a sí misma. Los segmentos que forman la poligonal son los lados del polígono y los puntos de enlace de éstos son los vértices.» Como se puede apreciar, para esta definición sería necesario definir antes “línea poligonal”, lo cual no sucede. Además, una vez que se da la definición de “polígono”, después es utilizada de manera natural con alguna representación semiótica pobre, es decir, se presentan algunos dibujos prototípicos en el contexto escolar, principalmente, polígonos convexos, más aún, regulares.

Algunas otras definiciones de polígono encontradas en el contexto fueron: «Una figura plana limitada por rectas que forman una línea quebrada cerrada» (Landaverde, 1977); «Una línea no recta, formada por segmentos se llama línea quebrada. Si los dos puntos extremos de una línea quebrada coinciden la figura que se obtiene es un polígono» (Bulajich & Gómez, 2002); «Figura plana cerrada limitada por segmentos de recta como lados» (Bronshtein et al., 2007); «Figura plana cerrada limitada por tres o más segmentos de recta que terminan en pares en el mismo número de vértices y no se intersectan en puntos diferentes a sus vértices» (Borowsky & Borwein, 2005); y la definición que aparece en la Real Academia Española: «Porción del plano limitado por líneas rectas».

Estas definiciones, entre otras, fueron importantes para explorar, primero con profesores y, posteriormente, con estudiantes, qué tipo de definición podía surgir desde enriquecer la imagen del concepto que se tenía.

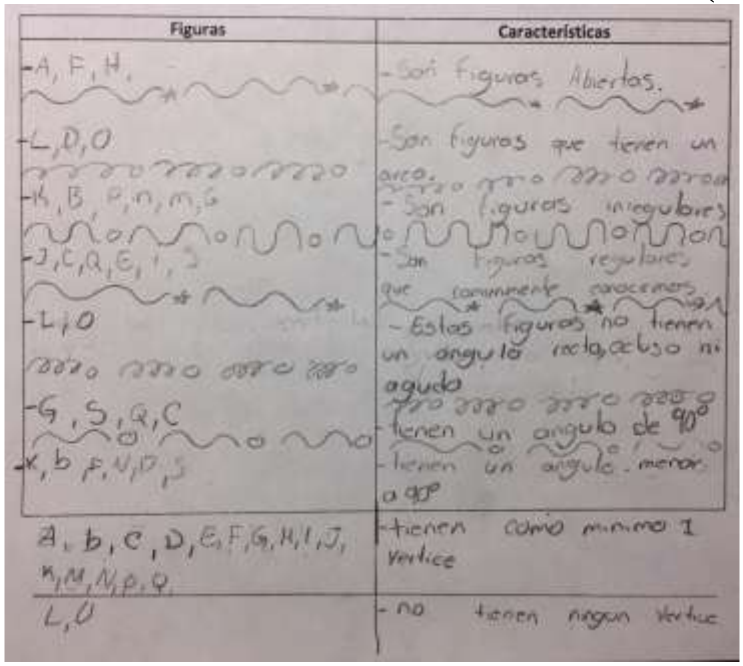
En relación a los resultados de la implementación de la secuencia, se dividen los resultados por actividad.

En la Actividad I, los estudiantes reconocen algunos elementos que les permiten clasificar y construir la definición de polígono. Distinguen entre figura abierta (no cerrada) y cerrada, identifican vértices (esquinas, picos), exploran número de lados y ángulos para clasificar. También, es notorio que reconocen la naturaleza de los lados (rectos y curvos) y asocian la ausencia de ángulos con lados curvos. Distinguen entre figuras regulares (normales) e irregulares e identifican a las líneas paralelas como una característica que los ayuda para clasificar un tipo especial de polígonos. En esta parte se destaca que no utilizan la palabra segmento. En la Figura 4.1 se muestra la producción de un estudiante correspondiente a la clasificación lograda de los ejemplos visuales presentados en la actividad mencionada en la Figura 3.1. En esta producción se aprecia que tal clasificación le permitió construir la definición de polígono, dado que, desde la imagen del concepto de polígono que posee, descarta de las figuras presentadas a las figuras [geométricas] abiertas, las que poseen lados curvos, las que no tienen vértices. Enriqueciendo con ello la imagen del concepto que lo lleva a construir una definición personal que posteriormente es discutida en grupo.

Durante la socialización el profesor motivaba a los estudiantes a expresar sus ideas de la clasificación realizada para conformar la definición de polígono: «alguien que quiera decir: "estas figuras las agrupe por…"». Se da una participación activa de los estudiantes: «las figuras *E*, *I* y *C* se parecen porque sus lados miden lo mismo»; «con ellas puedes hacer teselaciones»; «*Q*, *P*, *N* y *K* se parecen en que tienen ángulos interiores de más de 180º»; «*L*, *O* y *D* son figuras con formas circulares o semicirculares»; etc. Una vez que el profesor escucha todas las aportaciones, trata de establecer conexiones entre ellas y les pide a los estudiantes que lo ayuden a hacer un concentrado con las características que les interesan y que hacen que ellos no consideren a las figuras presentadas como polígonos: «las figuras que no tienen lados rectos»; «las figuras que no se cierran». También toma en cuenta aquellas aportaciones que se contraponen y trata de mediar para tomar acuerdos: «las que tienen formas "picudas" como *A*, *K* y *F*». Pregunta a los estudiantes sobre otras figuras con picos: «otras picudas son *N*, *G*, *Q* y *P*»; «sí, pero de todas esas con picos *A* y *F* no se cierran y las otras sí (*K*, *N*, *G*, *Q* y *P*)»; «son las que tienen ángulos de más de 180º y sí son polígonos (cóncavos)».

Finalmente, el profesor apoya la discusión y como conocimiento acordado y compartido se llega a establecer la definición de polígono como: *Figura plana, cerrada formada por lados rectos.* Esta definición se considera aceptable, sin ambigüedades y apropiada para el nivel educativo (aunque falta el atributo simple, es decir no se permiten intersecciones entre lados), a diferencia de la definición que se identificó en el estudio exploratorio como la definición tratada en secundaria. Además, para el adjetivo de "plana" los estudiantes pudieron darle el significado «en un mismo plano».

Figura 4.1 Producción escrita como resultado de la actividad 1 (Figura 3.1)



Fuente: Producción de un estudiante.

En las Actividades II y III, cuando los estudiantes tratan con triangulaciones en polígonos convexos, se encontró que la mayoría de los estudiantes sólo utilizan triangulaciones en polígonos convexos a partir de diagonales trazadas desde un vértice (ver Figura 4.2). Únicamente cinco (de 42) estudiantes triangularon de manera distinta (ver Figura 4.3). También se detectó un caso en que un estudiante realizó triangulaciones incorrectas tomando un punto interior para unirlo con los vértices. Como resultado de la socialización, los estudiantes fueron capaces de describir el proceso para triangular.

Figura 4.2 Procedimiento para triangular un polígono convexo utilizado por la mayoría de los estudiantes

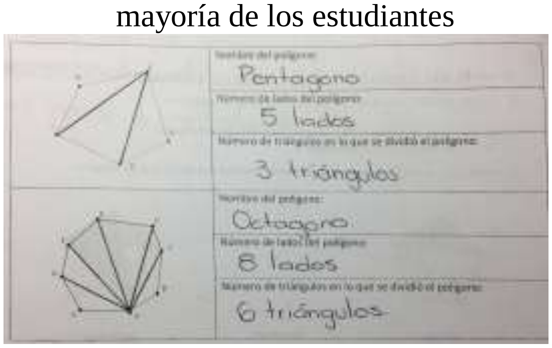
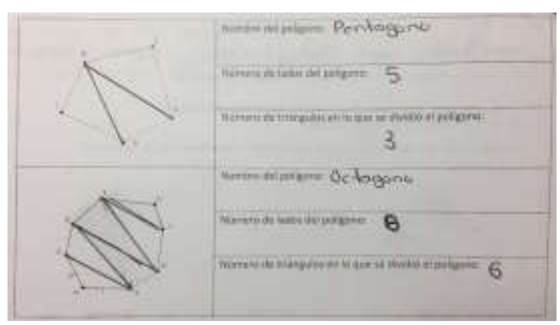


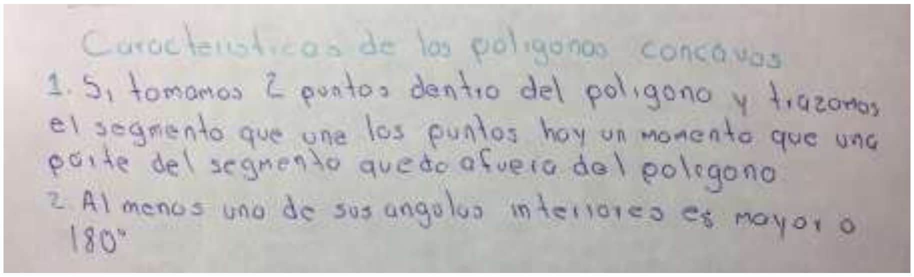
Figura 4.3 Procedimiento alternativo para triangular un polígono convexo.



Fuente: Producciones de los estudiantes.

Entre los resultados obtenidos en las Actividades II y III respecto al tratamiento con polígonos cóncavos, se destacan los siguientes: 1) reconocieron las características de los polígonos cóncavos (Figura 4.4); 2) la mayoría de los estudiantes triangularon a partir de segmentos trazados desde diferentes vértices (Figura 4.6); 3) la mayoría muestra dificultades para describir el proceso para triangular; y 4) de los 42 estudiantes, cuatro trazaron algunas diagonales fuera del polígono (un ejemplo se presenta en la Figura 4.5).

Figura 4.4 Caracterización de un polígono cóncavo


Caracteristicas de los poligonos concavos
1. Si tomamos 2 puntos dentro del poligono y trazamos el segmento que une los puntos hay un momento que una parte del segmento quedo afuera del polegono
2. Al menos uno de sus angulos interiores es mayor a 180°

Fuente: Producción de estudiantes

Figura 4.5 Procedimiento incorrecto para triangular polígonos cóncavos

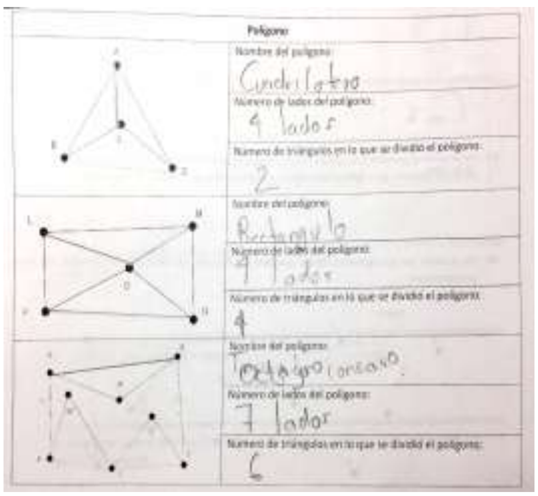
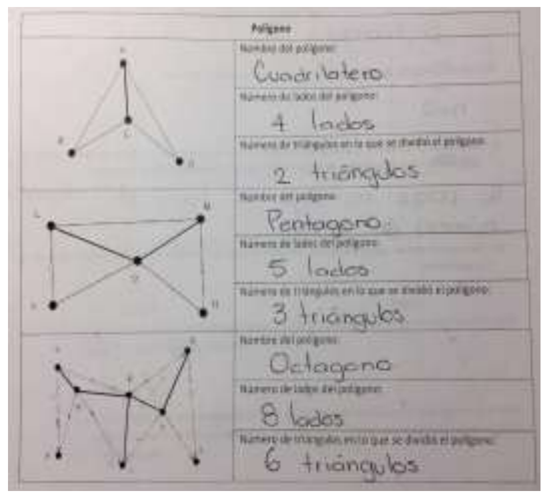


Figura 4.6 Procedimiento correcto para triangular polígonos cóncavos

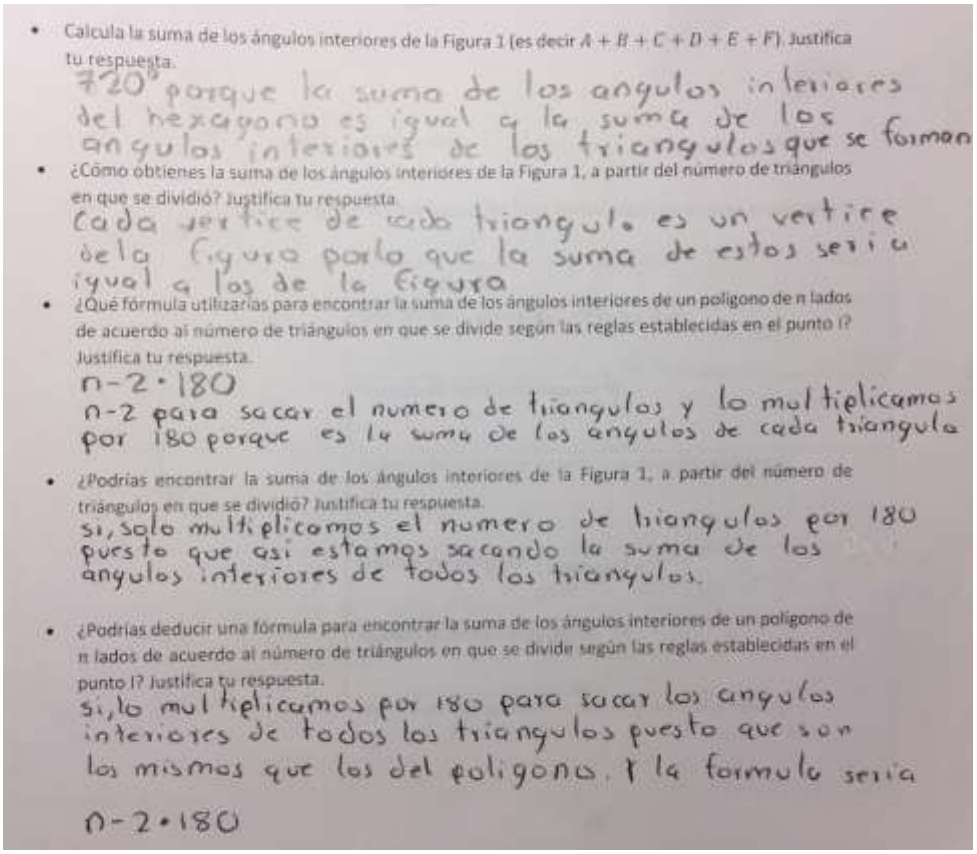


Fuente: Producciones de los estudiantes

En cuanto a la actividad III los estudiantes lograron deducir sin mayores problemas la fórmula para el cálculo de la suma de los ángulos interiores en polígonos convexos. En el caso de los polígonos cóncavos, la mayoría de los estudiantes (los que lograron realizar triangulaciones apropiadas y describir el proceso, por ejemplo, el estudiante de la producción de la Figura 4.6) lograron deducir la fórmula para el cálculo de la suma de los ángulos interiores, aunque presentaron mayores dificultades en el caso de cóncavos (ver Figura 4.7).

Para tal deducción, tanto en cóncavos como en convexos, la triangulación apropiada ha sido crucial, dado que ellos observan que el número de triángulos obtenidos dentro del polígono es igual a $n-2$, considerando a n como el número de lados del polígono. Desde lo anterior y tomando en cuenta el hecho de que la suma de ángulos interiores de un triángulo es 180º, pueden llegar a la expresión $180º(n-2)$ para calcular la suma de ángulos interiores de un polígono cualesquiera.

Figura 4.7 Deducción de la fórmula para calcular la suma de ángulos interiores de un polígono



- Calcula la suma de los ángulos interiores de la Figura 1 (es decir $A + B + C + D + E + F$). Justifica tu respuesta.

720° porque la suma de los angulos interiores del hexagono es igual a la suma de los angulos interiores de los triangulos que se forman

- ¿Cómo obtienes la suma de los ángulos interiores de la Figura 1, a partir del número de triángulos en que se dividió? Justifica tu respuesta.

Cada vertice de cada triangulo es un vertice dela figura porlo que la suma de estos seria igual a los de la figura

- ¿Qué fórmula utilizarías para encontrar la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados de acuerdo al número de triángulos en que se divide según las reglas establecidas en el punto I? Justifica tu respuesta.

n-2·180

n-2 para sacar el numero de triangulos y lo multiplicamos por 180 porque es la suma de los angulos de cada triangulo

- ¿Podrías encontrar la suma de los ángulos interiores de la Figura 1, a partir del número de triángulos en que se dividió? Justifica tu respuesta.

si, solo multiplicamos el numero de triangulos por 180 puesto que asi estamos sacando la suma de los angulos interiores de todos los triangulos.

- ¿Podrías deducir una fórmula para encontrar la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados de acuerdo al número de triángulos en que se divide según las reglas establecidas en el punto I? Justifica tu respuesta.

si, lo multiplicamos por 180 para sacar los angulos interiores de todos los triangulos puesto que son los mismos que los del poligono. Y la formula seria

n-2·180

Fuente: Producción de los estudiantes

Agradecimientos

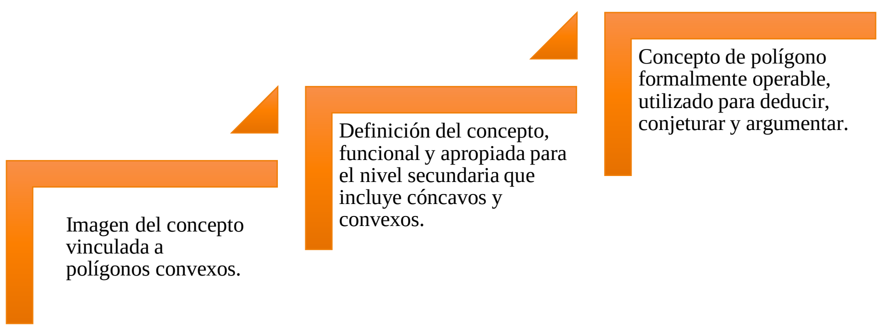
Los autores de esta investigación agradecen el financiamiento al Programa de Fortalecimiento de la Calidad Educativa a través de los proyecto P/PFCE-2016-10MSU0010C-06 de la DES de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez del Estado de Durango y al Programa de Apoyos Institucionales y Financiamiento a Proyectos de Investigación 2017 del Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Durango (COCYTED), a través del proyecto Reunión Nacional de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas 2017. También, se extiende el agradecimiento al Grupo Internacional de Investigación Campus Viviente de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas (CITeM) por el apoyo para realizar este estudio. Se agradece la participación del estudiante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas Jesús Iván López Reyes en el desarrollo de esta investigación.

Conclusiones

Con la propuesta didáctica se logró ampliar la imagen del concepto de polígono que los estudiantes tenían muy enraizada y con ello, lograron establecer una definición funcional y aceptada en la comunidad de práctica. Como parte de ampliar su imagen de polígono, la consideración de múltiples ejemplos apoyó a que los estudiantes reconocieron su clasificación en polígonos convexos y cóncavos y en consecuencia sus características.

También, diversificaron sus procedimientos para triangular los polígonos a partir de segmentos trazados desde distintos vértices y que pertenezcan al interior del polígono, este procedimiento permitió incluir a los polígonos cóncavos y obtener resultados generales y no limitados únicamente a los convexos. Con ello, se fortalecen las aportaciones teóricas de Tall & Vinner (1981), dado que para ellos, un concepto se forma en varias etapas, el desarrollo de su imagen no es necesariamente coherente todo el tiempo, varios esquemas cognitivos se dan en la misma persona en diferentes contextos y algunos esquemas entran en conflicto con otros. Conocer esquemas cognitivos particulares de los estudiantes, sensibiliza a los profesores acerca de sus respuestas y de cómo enriquecer la imagen que tienen de un concepto para mejorar la comunicación y en consecuencia la enseñanza. Particularmente para este trabajo interesó saber qué imagen del concepto de polígono ayudaría a que los estudiantes llegaran a deducir un método para calcular la suma de ángulos interiores de un polígono (incluyendo cóncavos y convexos) y tal información fue utilizada para ayudarlos a construir su propia definición de polígono a través de una secuencia didáctica tratando de que no se tuvieran conflictos potenciales con la definición formal para que gradualmente esta definición se integrara dentro de la imagen de los estudiantes y pudieran manejarla hábilmente. Desde este punto, fue posible llevarlos a reproducir significativamente un argumento formal para justificar su deducción de la expresión para el cálculo de los ángulos interiores de un polígono convexo o cóncavo. Es decir, el concepto de polígono convenido es ahora formalmente operable (Bills & Tall, 1998) para ellos. No obstante, se considera necesario trabajar con resolución de problemas o situaciones que permitan evaluar si a largo plazo el concepto sigue siendo formalmente operable, sobre todo en el caso de los polígonos cóncavos, en los cuales se presentaron mayores dificultades en algunos estudiantes para realizar triangulaciones apropiadas y deducir la expresión algebraica para calcular la suma de sus ángulos interiores. El Gráfico 5.1 resume la evolución del concepto de polígono.

Gráfico 5.1 Evolución del concepto de polígono a través de la intervención didáctica.



Fuente: Elaboración propia

Por otra parte, durante la socialización se privilegió el uso de lenguaje apropiado y ese comportamiento se reflejó en sus registros escritos a medida que se avanzaba en la intervención didáctica. También, durante la socialización se demandaban explicaciones y justificaciones a los estudiantes y esto establece de manera implícita normas en la práctica matemática.

Las hojas de trabajo propuestas para las Actividades I, II y III fueron útiles para guiar, documentar y evaluar los progresos en el trabajo de los estudiantes, además de cumplir con la función de organizadores del pensamiento para permitirles comunicar sus ideas.

Con relación al uso de GeoGebra, en esta propuesta se concluye que ha sido un medio propicio para la visualización de variantes e invariantes y esto ha permitido una re-conceptualización de la definición de polígono. Es decir, acortar la distancia entre la imagen que los estudiantes tenían inicialmente de los polígonos y la definición del concepto lograda a partir de la interacción con los ambientes diseñados en GeoGebra y la extensión de su comprensión tanto de los polígonos cóncavos como de los convexos.

Desde la evaluación del funcionamiento didáctico, se han planteado mejoras que permitan un rediseño para iniciar otro ciclo de investigación. Entre los principales elementos para mejorar se han considerado:

1) Agregar un problema o situación para la evaluación en cada actividad.

2) Considerar más figuras geométricas en la Actividad I: más polígonos convexos y cóncavos, no-ejemplos (poliedros, figuras geométricas abiertas en el espacio y que no sean simples o que se corten en dos o más de sus lados),

3) Incluir items para el reconocimiento de exterior e interior de un polígono cóncavo para poder refinar los procedimientos de triangulación y utilizar la palabra segmento para evitar el uso de diagonal de un polígono (segmento que unen dos vértices no consecutivos) en la triangulación del mismo. Dado que, utilizarla puede llevar a los estudiantes a cometer errores en la triangulación de polígonos cóncavos al trazar “diagonales” entre vértices y que queden fuera del polígono (ver Figura 4.5),

4) Promover diferentes triangulaciones desde los polígonos convexos para transferirlas a triangulaciones de cóncavos

5) Incluir un mayor número de polígonos en los ejemplos de la Actividad III.

Para cerrar este capítulo, sólo falta mencionar que es necesario estudiar diferentes conceptos en el nivel básico y la forma en que son utilizados por los profesores y estudiantes para proponer mejoras que eviten limitar su significado.

Referencias

Alvarado, A. & González, M. T. (2010). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. Enseñanza de las Ciencias, 28, 1, 73-84.

Bills & Tall (1998) Operable Definitions in Advanced Mathematics: The case of the Least Upper Bound. Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education. 2, (104-111). Stellenbosch, South Africa: PME.

Borowski, E.J. & Borwein, J.M. (2005). Collins Dictionary of Mathematics. Second Edition. London, UK: Editorial Collins.

Bronshtein, L.N. & Semendyayev, K.A., Musiol, G., Muehling, H., (2007). Handbook of Mathematics. Fifth Edition. Berlín Heidelberg: Springer.

Bulajich, R. & Gómez J.A. (2002). Geometría. México, DF: Cuadernos de Olimpiada de Matemáticas.
Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Desing experiment in Educational Research. Educational Researcher, 32, 1, 9-13.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), The Cambridge Handbook of the Learning Sciences (135-152). New York, NY: Cambridge University Press.

Confrey, J. & Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. En R. Underhill & C. Brown (Eds.). Proceedings of the 13th Annual Meeting of PME-NA, (57-63). Blacksburg, VA: PME.

De Villiers, M. (1998). To Teach Definitions in Geometry or Teach to Define? En A. Olivier & K. Newstead (Eds). Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2 (248-255). Stellenbosch: PME.

Dahlberg, R., & Housman, D. (1997). Facilitating learning events through example generation. Educational Studies in Mathematics, 33, 3, 283-299.

Edwards, B., & Ward, M. (2004). Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis)use of Mathematical Definitions. The American Mathematical Monthly, 111, 5, 411-424.

Eves, H. (1985). Estudio de las Geometrías I. México, DF: UTEHA.

Landaverde, F. (1977). Curso de Geometría para Secundaria y Bachillerato. México, DF: Progreso.

Lesh, R. & Kelly, A. (2000). Multitiered Teaching Experiments. En A. Kelly & R. Lesh (Eds). Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education (197-230). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Niss, M. A. (2014). Functions Learning and Teaching. En S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (238-241). London: Springer.

Pinto, M., & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. En O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd International Conference of PME. 4, (65-73). Haifa, Israel: PME.

Secretaria de Educación Pública (2011). Planes y Programas de Estudio 2011. Educación Básica Secundaria. Matemáticas. México, D.F.: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2017). Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y Programas de Estudio para la Educación Básica, 2017. México, CdMx.: SEP.

Selden, A. & Selden, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. Educational Studies in Mathematics, 29, 2, 123-151.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. Journal for Research in Mathematics Education, 26, 2, 114-145.

Simon, M. & Tzur R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. Mathematical Thinking and Learning, 6, 2, 91-104.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 2, 151-169.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed). Advanced mathematical thinking (65-81). Dordrecht: Kluwer.

Vinner, S. (2011). The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. ZDM, 43, 2, 247-256.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. En R. Karplus (Ed.), Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education (177-184). Berkeley: University of California, Lawrence Hall of Science.

Watson, A. & Mason, J. (2005). Mathematics as a constructive activity: learners generating examples. Mahwah, NewJersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.

Variables sistémicas relacionadas con resultados en pruebas estandarizadas en educación: Una revisión de literatura

BARRAZA-Barraza, Diana

D. Barraza

Universidad Juárez del Estado de Durango
diana.barraza@durango.gob.mx

A. Alvarado, G. Carmona y A. Mata (Dirs.) Una visión integradora. Tópicos Selectos de Educación en CITeM.

Abstract

Standardized tests appeared in education as an alternative to evaluate knowledge-gain in students on a big scale, with the possibility of eliminating the natural and unavoidable bias that each professor introduces into the evaluation process with tests designed by them. When this type of tests started proliferating along with the subsequent design of policies based on their results, researchers and professors, equally, started criticizing the use of these results with the mentioned purpose, using the existence of variability in conditions from school to school, among groups and students individuality, as one of their strongest arguments. Different studies have highlighted the influence that socioeconomic status, family situation, and cultural environment have on the results obtained in standardized testing. The literature review presented in this research work collects and explores some of these studies, using General Systems Theory (GST), proposed by Bertalanffy, as bases for the analysis. Using GST, this work characterizes the student as an open system responding to stimuli from other systems that they interact with, and interchanging information with those other systems. The analysis supports the necessity of a systemic approach when studying standardized-test results, especially by considering the influence and effect that the different aspects that the literature suggests have on these tests, such as school infrastructure, professor preparation, family situation, and cultural environment.

Pruebas estandarizadas, Teoría General de Sistemas, Revisión de Literatura

Introducción

Las pruebas o exámenes estandarizados, en el ámbito educativo, son "instrumentos de evaluación que miden las fortalezas o debilidades particulares de los alumnos, detectan grupos de población con necesidades de mejoras educativas, identifican factores que impactan en el desempeño de los estudiantes y observan cambios o progresos en el nivel educativo" (PruébaT, n.d., párr. 1). La aplicación de pruebas estandarizadas ha generado interés por parte de investigadores en educación desde su aparición, criticando su centralización en el desempeño de alumnos e ignorando el entorno en que se desarrollan. De acuerdo a la Teoría General de Sistemas (TGS) propuesta por Ludwig von Bertalanffy (1993),

> es necesario estudiar no sólo las partes y procesos de manera aislada, sino también resolver los problemas decisivos que son resultado de la interacción dinámica entre las partes, y que producen un comportamiento diferente cuando son estudiadas de manera aislada a cuando son estudiadas como un todo (p. 31).

Sugiriendo así, que el uso de resultados en pruebas estandarizadas sin el contexto en que éstos se obtienen, puede llevar a una interpretación errónea de lo que sucede en las escuelas. Diversos autores (Correa, 2004; Gil-Flores, 2011; Gómez Yepes, 2004; OCDE, 2011) han sugerido se incluyan aspectos ambientales del alumno como: condiciones de la escuela, condiciones de vida en la comunidad, situación familiar, experiencia del profesor, entre otras, en el análisis de resultados de pruebas estandarizadas. Incluir aquellos rubros del entorno del alumno que influyen en el aprovechamiento escolar, y por lo tanto, en los resultados de las pruebas estandarizadas, podría propiciar una percepción de evaluación más justa por parte de docentes y autoridades (indirectamente) evaluadas en este tipo de pruebas.

La siguiente investigación estudia el estado del arte, desde el enfoque de teoría de sistemas, de los factores que a nivel mundial se han relacionado con los resultados obtenidos por los alumnos en pruebas estandarizadas. Este estudio está motivado por la búsqueda de una evolución a un enfoque evaluativo más justo tanto para alumnos como docentes y autoridades; un enfoque en el que se trabaje con los docentes, y no contra los docentes como lo sugiere Casassus (2007); un enfoque que busque terminar con la inequidad educativa, la cual, de acuerdo con Gómez-Yepes (2010), es fomentada por las pruebas estandarizadas.

Desarrollo

Pruebas estandarizadas en México

Las primeras pruebas a gran escala se desarrollaron en Estados Unidos cuando la educación en este país alcanzó una cobertura masiva, siendo historia, aritmética, ortografía y lectura las primeras áreas en ser evaluadas (Martínez Rizo, 2009). La preocupación sobre la calidad educativa llevó a la aplicación de pruebas estandarizadas. Los pioneros de este método de evaluación estaban convencidos que las pruebas aplicadas por los maestros tenían graves deficiencias que les restaba confiabilidad a los resultados obtenidos, además de imposibilitar la comparación del aprovechamiento escolar entre escuelas (Martínez Rizo, 2009). Junto a los beneficios advertidos en la aplicación de pruebas estandarizadas se listaron sus desventajas, entre ellas, el evaluar sólo hechos aislados y no capacidades en los alumnos (Martínez Rizo, 2009).

México comenzó a aplicar pruebas estandarizadas en la segunda mitad del siglo XX. De acuerdo a Martínez Rizo (2009), la Secretaría de Educación Pública (SEP) inició evaluaciones a gran escala en la década de 1970, comenzando con exámenes para la admisión de alumnos a educación secundaria y evaluaciones de rendimiento académico a alumnos de 4° y 5° de primaria. Sin embargo, no hubo muchos avances en este rubro hasta 1992 con la aprobación del Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica (ANMEB), que propone el programa Carrera Magisterial. Carrera Magisterial es un sistema de promoción para los profesores en el que los estímulos son asignados de acuerdo a los resultados de los alumnos, junto a otras métricas (Fernández, 2012), desarrollando así la necesidad de estandarizar la aplicación de exámenes a una gran cantidad de alumnos.

Con el ingreso de México a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), el país fue incluido en evaluaciones educativas internacionales, entre ellas el proyecto PISA (Programme for International Student Assessment, por sus en inglés) y Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE) de la Oficina Regional de la UNESCO para América Latina y el Caribe. Es hasta el año 2002 que México crea el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), encargado de implementar los Exámenes para la Calidad y el Logro Educativo (EXCALE) que mide el aprendizaje adquirido en español, matemáticas, ciencias naturales y formación cívica y ética, así como la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) que evalúa el aprendizaje de los alumnos respecto al currículo escolar, considerando asignaturas como español, matemáticas y una materia que se rota cada año (Fernández Martínez, 2013).

Pruebas Estandarizadas y Calidad Educativa

Gómez Yepes (2004) menciona que si bien no existe una definición clara sobre lo que se entiende por rendimiento escolar, el consenso es que éste puede medirse como el desempeño en pruebas estandarizadas, cuando en realidad, la calidad educativa debería medirse de acuerdo a las contribuciones que la escuela hace al desarrollo económico y social sostenible de las comunidades en que se encuentra embebida, mediante la formación de capital humano y capital social. La calidad educativa debe medirse como la capacidad de las escuelas de facilitar a sus estudiantes transformarse en mejores personas, que a su vez permitan a la sociedad transformarse en una mejor sociedad, es decir, calidad educativa es una actividad de conocimiento transformativo (Casassus, 2007).
Casassus (2007), en su análisis sobre evaluación estandarizada, crítica a la administración de la educación a través de pruebas estandarizadas, haciendo notar que:

> es un error político el señalar que el éxito o fracaso de una política es subir los puntajes en una medición que no mide lo que se le atribuye, y que el sistema tal como está concebido no puede modificar (pág. 75).

Con esta situación concuerda Crooks (1998, citado en Gómez Yepes, 2004), al señalar que considerar la calidad educativa como sinónimo de desempeño en pruebas estandarizadas ha logrado relegar a segundo plano la evaluación formativa, ignorando su importancia en el aprendizaje para alumnos de bajo desempeño.

La mayor crítica a pruebas estandarizadas es la limitante evaluativa que padecen, pues se enfocan en evaluar la capacidad del alumno de recordar procedimientos, memorizar o reconocer la respuesta correcta en un conjunto de opciones, dejando de lado la evaluación de otros conocimientos, habilidades, competencias, actitudes en áreas de conocimiento no evaluadas (Casassus, 2007).
Sin intenciones de invalidar la aplicación de pruebas estandarizadas como medios de evaluación educativa, esta investigación se orienta y se inclina por la inclusión de otras variables que han sido determinadas como influyentes en el desempeño escolar de los estudiantes. Correa (2004) hace hincapié en la necesidad de asociar calidad educativa con características familiares, personales y del centro escolar. Es en este sentido que la revisión de literatura desarrollada en esta investigación se centró sólo en el análisis de artículos que aborden las pruebas estandarizadas educativas desde el punto de vista de una evaluación sistémica. Escapa al alcance de este estudio aquellas piezas de literatura que hablen sobre el contenido de dichas pruebas, los temas que evalúa, o los métodos de aplicación de las mismas.

Pruebas Estandarizadas y Teoría General de Sistemas

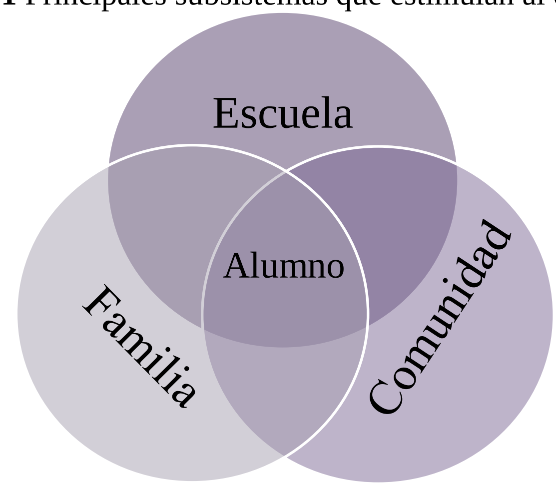
En 1950 Ludwig von Bertalanffy (1968) propuso la Teoría General de Sistemas (TGS) como una teoría para la representación científica de la realidad (Arnold & Osorio, 1998).

Arnold y Osorio (1998) explican la TGS desde dos enfoques: como paradigma científico y como una práctica en investigación. Como paradigma científico, la principal característica de la TGS es el análisis integrador y sistémico de los procesos, donde lo importante son las relaciones entre los componentes del mismo y los conjuntos que de ellas emergen. Mientras que como práctica en investigación, la TGS ofrece el marco necesario para la interrelación y comunicación entre especialistas de diferentes campos de conocimiento.

En esta investigación, la TGS es de interés como paradigma científico y las bases que establece para el estudio de sistemas con su complejidad inherente. El mismo Bertalanffy establece que es necesario estudiar no sólo las partes y procesos de manera aislada, sino también resolver los problemas decisivos que son resultado de la interacción dinámica entre las partes, y que producen un comportamiento diferente cuando son estudiadas de manera aislada a cuando son estudiadas como un todo (1968).

Drack (2009) explica esta premisa citando a Aristóteles, quien señala que el todo es más que la suma de las partes. La TGS explica el "más" como las interacciones que existen entre las partes del sistema (el todo) y sienta las bases para poder explicar estas interacciones de manera científica.
De los conceptos presentados en la TGS, el que interesa en esta investigación es aquél que define a los organismos como sistemas abiertos que importan y exportan "material" con el sistema al que pertenecen, respondiendo a estímulos que dicho sistema les presenta. En el caso de los alumnos evaluados con pruebas estandarizadas, el sistema en el que se encuentran embebidos y de los cuales reciben estímulos de manera directa son la escuela, familia y comunidad (Gómez Yepes, 2004). (Ver Figura 2.1).

Figura 2.1 Principales subsistemas que estimulan al estudiante



Fuente: Elaboración propia

Dentro de los factores encargados de estos estímulos se encuentran el nivel socioeconómico familiar, número de estudiantes en el aula, experiencia de los profesores, libros de texto, infraestructura, etc., los cuales influyen de manera positiva en el desempeño de los estudiantes en pruebas estandarizadas (Casassus, 2007).

Los estudios analizados en esta revisión de literatura se presentan en la Tabla 2.1, donde también se muestran los países donde se realizaron dichos estudios. Se puede apreciar que la mayoría de éstos provienen de Estados Unidos, aunque los análisis realizados por Burstein (1980) y White (1982) son meta-análisis donde recuperan estudios a nivel mundial sobre el efecto del estatus socioeconómico de los estudiantes en su rendimiento. Fuller y Clarke (1994) desarrollan un análisis comparativo de los factores que afectan el rendimiento académico en países en vías de desarrollo. Campos Vázquez y Urbina Romero (2011) y Backhoff Escudero et al. (2007) analizan los resultados de pruebas estandarizadas en México desde diversos enfoques, mientras Correa (2004) se centra en alumnos de secundaria en la ciudad de Cali en Colombia.

Tabla 2.1 Países donde se desarrollaron los estudios

Artículo	País
Correa (2004)	Colombia
Burstein (1980)	Estados Unidos
Gil-Flores (2011)	España
Sirin (2014)	Estados Unidos
White (1982)	Estados Unidos
Coleman (1968)	Estados Unidos
Campos Vázquez y Urbina Romero (2011)	México
Dyer, Linn, & Patton (1969)	Estados Unidos
Backhoff Escudero et al. (2007)	México
Fuller y Clarke (1994)	Países en desarrollo

Fuente: Elaboración propia

Con base en los principales subsistemas que estimulan al estudiante (Figura 2.1), en la revisión de literatura realizada para esta investigación se encontraron y clasificaron los factores que asociados a resultados en pruebas estandarizadas en tres grandes categorías:

a) Variables individuales: aquellas que han sido presentadas y evaluadas en la literatura y hacen referencia al contexto individual del alumno, es decir, a condiciones familiares.
b) Variables grupales: condiciones que comparten los estudiantes dentro del aula y con su docente.
c) Variables de la escuela: condiciones que comparten los estudiantes dentro de su centro escolar y con otros alumnos del mismo centro.

En la Tabla 2.2[4] se presentan variables encontradas en la literatura que los autores designan como relacionadas con los resultados de las pruebas estandarizadas, y que esta investigación clasifica como variables individuales. Es interesante notar que los autores coinciden en la importancia y relevancia del nivel socioeconómico de los estudiantes, de la preparación y nivel educativo de los padres, así como de la atmósfera en el hogar.

Backhoff Escudero et al. (2007) encontraron que el género de los estudiantes es un factor diferenciante en resultados en pruebas estandarizadas, aunque no en lo general, en su estudio, las mujeres tuvieron un mejor desempeño en Español y Educación Cívica, aunque no hubo diferencia significativa en el resto de las asignaturas evaluadas. Por otro lado, la edad de los alumnos suele tener un efecto negativo en el desempeño, pues como lo mencionan Backhoff Escudero et al. (2007), los alumnos considerados *extraedad* (que cursan un grado que no corresponde a su edad) suelen tener un menor desempeño en estas pruebas. El nivel socioeconómico de los estudiantes, que en general puede establecerse con un agregado de las variables presentadas en la Tabla 2.2, tienen una correlación positiva con el rendimiento de los alumnos (Gil-Flores, 2011; Sirin, 2014; White, 1982), pues, más allá de lo económico y material, un estatus socioeconómico supone “un entorno social y culturalmente enriquecido y estimulante, en tanto que supone también haber desarrollado una amplia variedad de atributos para lograr y mantener un estatus profesional, incluyendo capacidades, destrezas, ambición, estilos de vida...” (Gil-Flores, 2011, p. 152).

[4] Los estudios se presentan en orden cronológico

Tabla 2.2 Variables individuales relacionadas con resultados de pruebas estandarizadas

	Referencia								
Variables Individuales del Alumno	**(Coleman, 1968)**	**(Dyer et al., 1969)**	**(Burstein, 1980)**	**(White, 1982)**	**(Correa, 2004)**	**(Backhoff Escudero et al., 2007)**	**(Gil-Flores, 2011)**	**(Campos Vázquez & Urbina Romero, 2011)**	**(Sirin, 2014)**
Sexo			X		X	X			
Edad					X	X			
Actitud/Aptitud			X						
Si trabaja					X				
Etnia			X						
Hablar Lengua indígena						X			
Capital Cultural						X			
Atmósfera/estructura en el hogar				X		X			
Fomento en la casa	X		X						
Expectativas escolares de los padres						X			
Expectativas escolares del alumno						X			
Nivel educativo de los padres	X			X	X		X		X
Ocupación de los padres				X					X
Si es hermano mayor					X				
Número de hermanos					X				
Ingreso familiar				X	X				X
Estado socioeconómico	X		X						
Posesiones en el hogar	X		X						X
Ordenador							X		
Conexión a internet							X		
TV digital/cable/satélite							X		
Número de libros	X						X		
Electrodomésticos	X					X			
Vecindario/ Construcción del hogar/Servicios Públicos						X			X
Calificaciones bimestrales								X	
Resultados en pruebas estandarizadas anteriores		X							
Precio del almuerzo (o si es gratis)									X
Exposición previa a la materia			X						

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 2.3 se pueden observar las variables dentro del grupo (aula) escolar que algunos autores han encontrado relacionadas con la los resultados de pruebas estandarizadas. Es de interés notar que son menos los autores que se enfocan en estudiar estas variables, a la vez que la mayoría de ellas describen al docente y su quehacer educativo. Fuller y Clarke (1994) desarrollaron una revisión de estudios desarrollados en países de tercer mundo sobre variables que influyen en los resultados de los estudiantes, encontrando que los efectos de estas variables difieren de país a país. Backhoff Escudero et al. (2007) generan dos índices en su estudio: Dedicación a la Enseñanza y Calidad de la Enseñanza. Para el primer caso, las preguntas fueron realizadas a los alumnos, evaluando así al docente desde el punto de vista del estudiante; el segundo índice fue desarrollado con preguntas realizadas a los docentes directamente, con preguntas sobre la frecuencia con que realizan las actividades mencionadas.

Tabla 2.3 Variables de grupo relacionadas con resultados de pruebas estandarizadas

Variables del Grupo	Referencia (Burstein, 1980)	(Fuller & Clarke, 1994)	(Backhoff Escudero et al., 2007)
Composición étnica	X		
Presión ambiental	X		
Educación del profesor		X	
Años de educación		X	
Logro medido anterior		X	
Egresado de Normal u otra universidad		X	
Formación de docentes en servicio		X	
Género del profesor		X	
Conocimiento del docente sobre la materia		X	
Experiencia del docente		X	
Nivel de salario del docente		X	
Clase social del profesor		X	
Influencia de compañeros	X		X
Dedicación a la enseñanza			X
Inasistencias del maestro			X
Retardos			X
Dejar solo al grupo			X
Platicar con otro adulto durante la clase			X
Calidad de la enseñanza			X
Retroalimentación al estudiante			X
Reconocer el esfuerzo académico			X
Ejemplos fáciles y comprensibles			X
Dictar en clase			X
Tamaño promedio de la clase		X	

Fuente: Elaboración propia

Burstein (1980) y Backhoff Escudero et al. (2007) encontraron en sus estudios que la composición étnica de los grupos tiene un efecto negativo en el desempeño de los alumnos en pruebas estandarizadas. En los resultados de pruebas estandarizadas en México, las escuelas catalogadas como indígena se encontraban hasta 72 puntos porcentuales por debajo de las escuelas privadas[5] en el área de Español, y 59 puntos en el área de Matemáticas (Backhoff Escudero et al., 2007). En este mismo estudio, se generó un Índice de Dedicación, y otro de Índice de Calidad de la Enseñanza (compuestos por las variables que se presentan en la Tabla 2.2), los cuales tienen una correlación positiva con el desempeño de los alumnos en las pruebas estandarizadas.

---

[5] Comparando los extremos de los resultados, siendo las escuelas privadas las que presentaron un puntaje más algo y las indígenas las de puntaje más bajo.

Se observó que a mayor dedicación y mayor calidad de la educación, mejor desempeño en pruebas estandarizadas (Backhoff Escudero et al., 2007). Fuller y Clarke (1994) encontraron por su parte, que en países de primer mundo la preparación de los docentes no afecta el desempeño de los alumnos, mientras que en América Latina, la correlación entre estas dos variables es positiva y varía de país a país. Sin embargo, estos autores recalcan que los mecanismos exactos bajo los cuales la preparación del docente afecta el desempeño de los alumnos no están completamente especificados (Fuller y Clarke, 1994).

La tabla 2.4 presenta las variables asociadas a la escuela que algunos autores han ligado a los resultados en pruebas estandarizadas. Backhoff Escudero et al. (2007) encontraron que, tanto la infraestructura escolar como el tipo de escuela tienen una alta correlación con los resultados que los alumnos obtuvieron en el aprendizaje que les fue evaluado. Sobretodo, el financiamiento de las escuelas, que en definitiva está correlacionado con la infraestructura escolar. Para el caso de México, las escuelas indígenas se encuentran entre los niveles más bajos de infraestructura y herramientas de enseñanza, lo que conlleva un bajo desempeño en los resultados de los alumnos.

Burstein (1980) va más allá al explicar el impacto de las escuelas y grupos en el desempeño académico de los alumnos, intentando expresar los efectos psicológicos de éstos sobre el alumno; el autor comenta que pertenecer a uno u otro grupo (aula o escuela) afecta la percepción del éxito (*efecto de comparación*), pues un estudiante puede mejorar su desempeño académico cuando asiste a una escuela (o grupo) menos competitiva si este nuevo ambiente permite que tenga un mejor concepto de sí mismo.

Después del análisis realizado, Backhoff Escudero, et al., (2007) señalan que los resultados en pruebas estandarizadas no deben entenderse como evaluaciones de la calidad escolar, pues debe considerarse el peso de las variables del entorno social. No es de extrañarse que los alumnos que provienen de los entornos sociales más pobres, asisten también a las escuelas con las condiciones más precarias.

En este sentido, no es apropiado hacer comparaciones de calidad educativa basándose sólo en resultados de pruebas estandarizadas pues, como lo menciona Gómez Yepes (2004), aquellas escuelas que no posean a los alumnos de más altos recursos y mejor calidad de vida, tenderán a ubicarse por encima del desempeño mínimo esperado en estas pruebas.

En el contexto de las variables de grupo y escuela, la OCDE (2005) habla de las pruebas estandarizadas como una barrera con la que se topan nuevos métodos de enseñanza y evaluación, por ejemplo, la evaluación formativa. En su reporte "*Formative Assessment: Improving Learning in Secondary Classrooms*" (OCDE, 2005), esta organización sugiere que las políticas educativas deben considerar, además de los resultados de pruebas estandarizadas (entendidas como evaluación sumativa), otras formas de medir el progreso de los estudiantes.

Tabla 2.4 Variables de la escuela relacionadas con resultados de pruebas estandarizadas

Variables de la escuela	**Referencia** (Burstein, 1980)	(White, 1982)	(Fuller & Clarke, 1994)	(Backhoff Escudero et al., 2007)
Recursos de la comunidad	X			
Orientación de la comunidad respecto a la educación	X			
Métodos educativos	X			
Calidad de los métodos	X			
Atmósfera institucional	X			
Recursos institucionales	X	X		
Gastos de la escuela por alumno			X	
Gastos totales de la escuela			X	
Tamaño de la escuela			X	
Herramientas de enseñanza			X	
Libros de texto			X	
Lecturas complementarias			X	
Libros de ejercicios			X	
Guías de enseñanza			X	
Escritorios			X	
Alimentación y nutrición de los alumnos			X	
Independencia del gobierno central			X	
Evaluación del personal del director			X	
Nivel de preparación del director			X	
Visitas del inspector a la escuela			X	
Seguimiento o segregación de los alumnos			X	
Infraestructura escolar			X	X
Condiciones físicas del inmueble			X	X
Equipamiento y material disponible			X	X
Tipo de escuela (indígena, pública -rural, urbana-privada)				X

Fuente: Elaboración propia

Conclusiones

La TGS establece que un sistema abierto responde a estímulos; siendo cada alumno un sistema abierto en sí que interactúa con otros sistemas y responde a los estímulos que éstos le otorgan, es imperioso un análisis de los resultados en pruebas estandarizadas como consecuencia de estímulos recibidos por los alumnos, no sólo dentro del aula, sino en el núcleo familiar, la escuela y la comunidad. Es en este sentido que el trabajo presentado en este documento presentó una revisión de literatura sobre las variables del entorno del estudiante que influyen en los resultados obtenidos en pruebas estandarizadas.

Con estos estudios se muestra la necesidad de considerar el entorno en que los estudiantes se encuentran embebidos al momento de analizar los resultados de pruebas estandarizadas, pero sobretodo, al momento de generar políticas públicas basadas en dichos resultados. Si bien, algunas de estas variables son difíciles de modificar o escapan al alcance de las autoridades educativas (en especial aquellas relativas al entorno familiar del alumnado), existen otras que sí se encuentran dentro de sus área de influencia (infraestructura escolar, preparación del docente) sobre las cuales pueden generarse políticas encaminadas a mejorar dichas variables, y en última instancia, los resultados de las pruebas estandarizadas.

Referencias

Backhoff Escudero, E., Andrade Muñoz, E., Sánchez Moguel, A., & Peón Zapata, M. (2007). El aprendizaje del Español, las Matemáticas, las Ciencias Naturales y las Ciencias Sociales en la Educación Básica en México: tercero de primaria. México, DF.

Burstein, L. (1980). The Analysis of Multilevel Data in Educational Research and Evaluation. Review of Research in Education, 8(1980), 158–233.

Campos Vázquez, R. M., & Urbina Romero, F. U. (2011). Desempeño Educativo en México: La Prueba ENLACE. Estudios Económicos, 26(2), 249–292.

Casassus, J. (2007). El precio de la evaluación estandarizada: la pérdida de calidad y la segmentación social. Revista Brasileira de Política E Administração Da Educação, 23(1), 17–79. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.21573/vol23n12007.19014

Coleman, J. S. (1968). Equality of educational opportunity. Integrated Education, 6(5).

Correa, J. J. (2004). Determinantes del rendimiento educativo de los estudiantes de secundaria en Cali: un análisis multinivel. Revista Sociedad Y Economía, 6, 81–105.

Dyer, H. S., Linn, R. L., & Patton, M. J. (1969). A Comparison of Four Methods of Obtaining Discrepancy Measures Based on Observed and Predicted School System Means on Achievement Tests. American Educational Research Journal, 6(4), 591–605. https://doi.org/10.3102/00028312006004591

Fuller, B., & Clarke, P. (1994). Raising school effects while ignoring culture? Local conditions and the influence of classroom tools, rules, and pedagogy. Review of Educational Research, 64(1), 119–157.

Gil-Flores, J. (2011). Estatus socioeconómico de las familias y resultados educativos logrados por el alumnado. Cultura Y Educacion, 23(1), 141–154. https://doi.org/10.1174/113564011794728597

Gómez Yepes, R. L. (2004). Calidad educativa: más que resultados en pruebas estandarizadas. Revista Educación Y Pedagogía, 16(38), 75–89. Retrieved from http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/view/7274/6723

OCDE. (2011). La medición del aprendizaje de los alumnos: mejores prácticas para evaluar el valor agregado de las escuelas. https://doi.org/10.1787/9789264090170-es

PruébaT. (n.d.). ¿Qué son las pruebas o exámenes estandarizados? Retrieved February 23, 2018, from https://pruebat.org/Inicio/ConSesion/Breves/verBreve/619-que-son-las-pruebas-o-examenes-estandarizados

Sirin, S. R. (2014). Socioeconomic Status and Academic Achievement: A Meta-Analytic Review of Research. Review of Educational Research, 75(3), 417–453.

White, K. R. (1982). The relation between socioeconomic status and academic achievement. Psychological Bulletin, 91(3), 461–481. https://doi.org/10.1037/0033-2909.91.3.461

Apéndice A. Directorio Universidad Juárez del Estado de Durango

NÁVAR-GARCÍA, Oscar Erasmo. MsC
Rector

NÁPOLES-ORRANTE, María de Lourdes. MsC
Secretaria General

GARCÍA-SAUCEDO, Osvaldo. MsC
Subsecretario General Académico

MARTÍNEZ-AGUILAR, Manuel de Jesús. BsC
Subsecretario General Administrativo

MIER-CISNEROS, Rafael. MsC
Abogado General

MUÑOZ-MARTÍNEZ, Martha Elia. MsC
Directora Institucional de Posgrado e Investigación

GALLEGOS-VILLARREAL, Alfredo. MsC
Director de la Facultad de Ciencias Exactas

Apéndice B. Consejo Editor Universidad Juárez del Estado de Durango

Apéndice C. Comité Arbitral Universidad Juárez del Estado de Durango

CAMACHO-MACHÍN, Matías. PhD
Universidad de la Laguna, Tenerife, España

CASTAÑEDA, Apolo. PhD
Instituto Politécnico Nacional, México

GARCÍA-RODRÍGUEZ, Martha Leticia. PhD
Instituto Politécnico Nacional, México

GÓMEZ-BLANCARTE, Ana Luisa. PhD
Instituto Politécnico Nacional- México

GONZÁLEZ-ASTUDILLO, María Teresa. PhD
Universidad de Salamanca, España

MARTÍNEZ-HERNÁNDEZ, César. PhD
Universidad de Colima, México

MIRANDA-VIRAMONTES, Isaías. PhD
Instituto Politécnico Nacional, México

PÁEZ-DAVID ALFONSO. PhD
Universidad Autónoma de Aguascalientes, México

PARADA-RICO, Sandra Evely. PhD
Universidad Industrial de Santander, Colombia

PINTO-SOSA, Jesús E. PhD
Universidad Autónoma de Yucatán, México

REYES-RODRÍGUEZ, Aarón. PhD
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México

RODRÍGUEZ-VÁZQUEZ, Flor Montserrat. PhD
Universidad Autónoma de Guerrero, México

SÁNCHEZ-AGUILAR, Mario. PhD
Instituto Politécnico Nacional, México

CONDE-SOLANO, Luis Alexander. PhD
Universidad de Medellín, Colombia

BRISEÑO-SOLÍS, Eduardo Carlos. PhD
Universidad Autónoma de Zacatecas, México

RODRÍGUEZ-ESPARZA, Luz Judith. PhD
Universidad Autónoma de Chapingo, México

Apéndice D. Consejo Editor ECORFAN

Apéndice E. Comité Arbitral ECORFAN

9 786078 534432
ISBN 978-607-8534-43-2

www.ecorfan.org